

On tente de répondre à la problématique suivante : "Combien d'impacts mon gilet peut-il encaisser avant qu'il soit trop dangereux à porter ?"

On commence la modélisation en cherchant à répondre à la problématique en 1 dimension.

1 Modélisation à une dimension

On modélise un impact comme un processus aléatoire caractérisé par les variables aléatoires adimensionnées suivantes :

- $X_i \times l \sim \mathcal{N}(0, a^2)$ N variables aléatoires indépendantes identiquement distribués, dont la réalisation est la position du centre de l'impact.
- $W_i \times l \sim \mathcal{N}(c, b^2)$ N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués, dont la réalisation caractérise le diamètre de fragilisation maximale dans la plaque.

Pour une largeur de $4a$, 95% des impacts seront contenus dans la plaque de demi-largeur $l = 15$ cm. On prendra donc $a \simeq l/2$. Pour c , on prends le calibre étudié, ici 9 mm. Enfin, pour b on choisit arbitrairement 1% du calibre : $b = 0.01 \times c$.

Un arrachement de matière dans la plaque balistique est modélisé géométriquement par une fonction qui résumerait la fragilisation de la matière dans la plaque, contenue entre 0 et 1 (1 correspondant à une fragilisation maximale, c'est à dire une pénétration assurée).

On impose des critères sur ce modèle de fragilisation :

- le modèle paramétrique est paire et décroissant
- le modèle atteint son maximum en 0, où il vaut 1
- le modèle est continu

Pour les expériences numériques, on prendra m égal à une distribution gaussienne. Dans la suite, on note σ la quantité suivante :

$$\sigma(N, x) = \sum_{1 \leq i < N} m \left(\frac{x - x_i}{w_i} \right) \mathbf{1}_P(x_i)$$

La fragilisation local de la plaque locale au rang $N - 1$ est établie par la formule suivante :

$$f(N, x) = \min(1, \sigma(N, x))$$

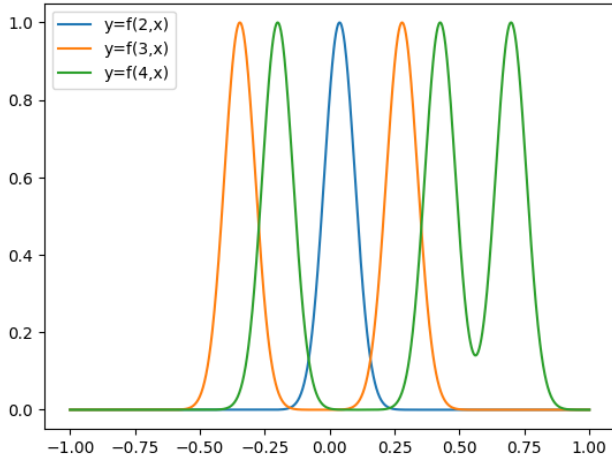


FIGURE 1 – Visualisation de $f(N, x)$ pour $N = 2, 3, 4$

La modélisation probabiliste consiste d'abord à construire les événements modélisant le succès de la plaque à l'ordre N . On considère que le tir n'est pas arrêté par la plaque quand la fragilisation en son centre dépasse une valeur seuil, notée $s_0 < 1$, tel que l'événement traduisant le succès d'arrêt du N ème tir soit :

$$\{f(N, X_N) \leq s_0\} = \{\sigma(N, X_N) \leq s_0\} := \{\sigma_N \leq s_0\}$$

On peut définir par récurrence l'événement traduisant le succès de la plaque au rang N par :

$$A_N = A_{N-1} \cap \{\sigma_N \leq s_0\}$$

$$A_N = \bigcap_{2 \leq k \leq N} \{\sigma_k \leq s_0\}$$

puis, en introduisant la variable aléatoire :

$$H_N = \max_{2 \leq k \leq N} \sigma_k,$$

l'événement A_N s'écrit finalement :

$$A_N = \{H_N \leq s_0\}$$

Le complémentaire de A_N décrit l'échec de la plaque au tir N : on cherche à évaluer cette probabilité. Grâce aux propriétés de l'espérance, on obtient une expression analytique de sa probabilité, que l'on note $\pi(N, s_0)$. On peut ensuite l'approcher asymptotiquement :

$$\pi(N, s_0) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{H_N \geq s_0}] = \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{S} \sum_{i \leq S} \mathbf{1}_{H_N^i \geq s_0} \quad (1)$$

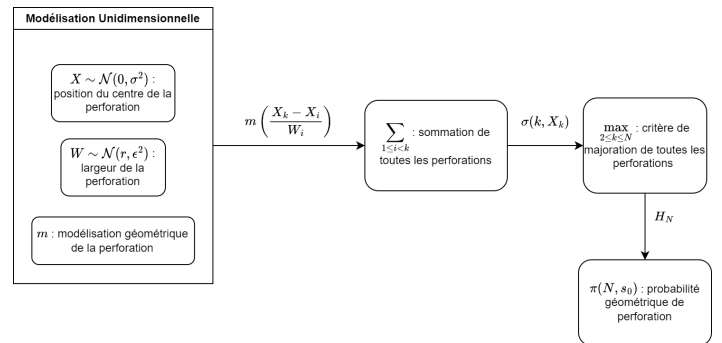


FIGURE 2 – Résumé de la méthode pour une dimension

En utilisant la méthode de calcul (1), on obtient la figure suivante pour une tolérance de 50% :

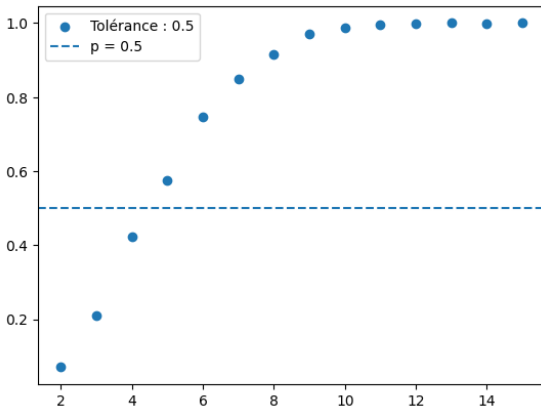


FIGURE 3 – Probabilité d'échec pour un nombre d'impact donné, avec un tolérance de 50%

On observe qu'au delà de 4 impacts la plaque a plus de 50% de chance d'échouer à arrêter un tir.

2 Modélisation à deux dimension

On modélise un impact comme un processus aléatoire caractérisé par les variables aléatoires suivantes :

- $X_i, Y_i \times l \sim \mathcal{N}(0, a^2)$ N variables aléatoires indépendantes identiquement distribués, dont la réalisation est respectivement l'abscisse et l'ordonnée du centre de l'impact.
- $W_i \times l \sim \mathcal{N}(c, b^2)$ N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribués, dont la réalisation caractérise le diamètre de fragilisation maximale dans la plaque.

On adapte le raisonnement établi jusqu'ici avec l'expression de $\sigma^{(2)}$:

$$\sigma^{(2)}(N, x, y) = \sum_{1 \leq i \leq N} m\left(\frac{x - x_i}{w_i}\right) \mathbf{1}_P(x_i) m\left(\frac{y - y_i}{w_i}\right) \mathbf{1}_P(y_i)$$

On retrouve tous les résultats analogues établis précédemment.

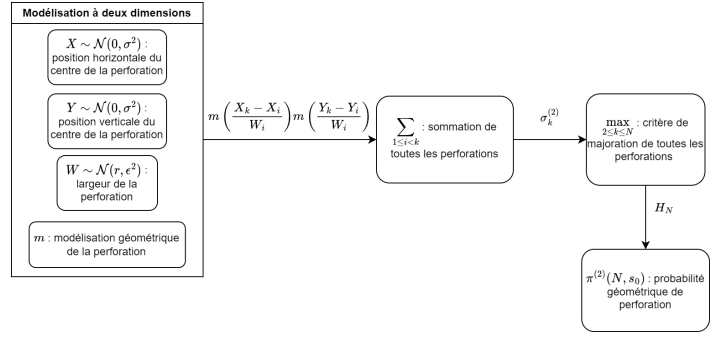


FIGURE 4 – Résumé de la méthode pour deux dimensions

En utilisant cette méthode à deux dimensions, on obtient la figure suivante, toujours pour une tolérance de 50% :

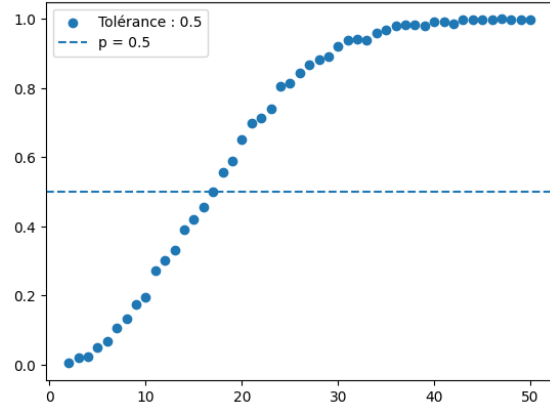


FIGURE 5 – Probabilité d'échec pour un nombre d'impact donné, avec un tolérance de 50%

On observe que la plaque peut encaisser (géométriquement parlant) un nombre d'impacts plus élevé, ici 17. Bien sûr, ce résultat est irréaliste mais cohérent avec cette modélisation qui ne prends en compte que la géométrie et utilise un modèle d'arrachement de matière très simple. Le calcul de cette probabilité peut cependant être combiné avec d'autres pour l'obtention de résultats plus proches de la réalité.