



CentraleSupélec

Campus Paris-Saclay

1^{ère} Année d'études (2019-2020)

Département de Physique

Ingénierie des Ondes

Code : 1EL1500

Séquence Générale 3

(Electif 1.4)

Cours

Devoirs Lectures

Exercices des Travaux Dirigés

Equipe pédagogique

Thomas ANTONI (*LPQM, CentraleSupélec*)

Aurélie BONNEFOIS (*ONERA*)

Yann CHALOPIN (*EM2C, CentraleSupélec*)

Hichem DAMMAK (*SPMS, CentraleSupélec*)

François JOUVIE (*GeePs, CentraleSupélec*)

Pierre-Eymeric JANOLIN (*SPMS, CentraleSupélec*)

Vincent LESCARRET (*L2S, CentraleSupélec*)

Charles PAILLARD (*SPMS, CentraleSupélec*)

Bruno PALPANT (*LPQM, CentraleSupélec*)

Romain PIERRAT (*IL, ESPCI*)

Mohammed SERHIR (*GeePS, CentraleSupélec*)

Table des matières

Tableau récapitulatif des séances de cours et de petites classes	1
1 Introduction et outils mathématiques	3
1.1 Descriptif	4
1.2 Outils mathématiques	4
1.2.1 Distribution ponctuelle. Fonction de Dirac δ	4
1.2.2 Onde plane et convention	5
1.2.3 Transformée de Fourier d'une fonction constante. Fonction sinc	7
1.2.4 Transformée de Fourier d'une fonction d'onde plane	8
1.2.5 Filtrage et transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions	8
Compléments du chapitre 1	11
1A Complément a : Séries et transformation de Fourier	11
1A.1 Séries de Fourier	11
1A.2 Transformation de Fourier	12
2 Équations de Maxwell	15
2.1 Potentiels	16
2.1.1 Équations de Maxwell microscopiques	16
2.1.2 Potentiels	16
2.1.3 Invariance de jauge	17
2.2 Propagation	17
2.2.1 Équation de propagation des potentiels	17
2.2.2 Équation de propagation des champs microscopiques	18
2.2.3 Propagation dans le vide. Onde plane	18
2.3 Structure d'une onde plane	18
2.3.1 Quelques identités	18
2.3.2 Transversalité	19
2.4 Polarisation d'une onde plane monochromatique	19
2.4.1 Introduction	19
2.4.2 Polarisation	19
2.5 Énergie du champ électromagnétique	21
2.5.1 Énergie électrostatique et magnétostatique	21
2.5.2 Énergie électromagnétique. Vecteur de Poynting	22
2.6 Décomposition d'un champ vectoriel	22
2.6.1 Énoncé	22
2.6.2 Applications	23
2.6.3 Champs rotationnels et irrotationnels; transverses et longitudinaux	23
Compléments du chapitre 2	25
2A Complément a : théorème de Helmholtz	25
2A.1 Théorème	25
2A.2 Démonstration	25
3 Principes de base de l'imagerie	27
3.1 Introduction	28
3.2 Propagation d'un faisceau	28
3.2.1 Position du problème	28

3.2.2	Équation de propagation et équation de Helmholtz	28
3.2.3	Formule de propagation du champ : développement en ondes planes	29
3.3	Ouverture angulaire et diffraction naturelle	30
3.4	La propagation paraxiale : diffractions de Fresnel et de Fraunhofer	31
3.4.1	Approximations de Fresnel et de Fraunhofer	31
3.4.2	Diffraction de Fraunhofer	32
3.5	Ondes évanescentes et limite de résolution	33
3.5.1	Notion de fréquence spatiale	33
3.5.2	Spectre des fréquences spatiales	33
3.5.3	La propagation est un filtre passe-bas de fréquences spatiales	34
Compléments du chapitre 3		35
3A	Complément A : le principe de Huygens-Fresnel retrouvé	35
3A.1	Introduction	35
3A.2	Développement d'une onde sphérique en ondes planes	35
3A.3	Le principe de Huygens-Fresnel	35
3B	Complément B : champ au foyer d'une lentille	37
4	Rayonnement	39
4.1	Aperçu intuitif du mécanisme de rayonnement d'une charge ponctuelle	40
4.1.1	Description de l'onde rayonnée	40
4.1.2	Propriétés	40
4.1.3	Formulation générale du problème	41
4.2	Notion de fonction de Green. Cas de l'électrostatique	41
4.2.1	Introduction	41
4.2.2	Distribution de Dirac et charge ponctuelle	41
4.2.3	Cas d'une répartition de charges	42
4.2.4	Généralisation	43
4.3	Potentiels retardés	43
4.3.1	Recherche de la fonction de Green du problème	43
4.3.2	Méthode de calcul de la fonction de Green	44
4.3.3	Solution des potentiels retardés	44
4.4	Rayonnement en champ lointain	45
4.4.1	Approximation du champ lointain	45
4.4.2	Approximation dipolaire électrique	46
4.4.3	Calcul du champ rayonné	48
4.4.4	Puissance rayonnée dans tout l'espace en champ lointain	49
Compléments du chapitre 4		51
4A	Complément A : fonction de Green	51
4A.1	Fonction de Green dans l'espace de Fourier	51
4A.2	Fonction de Green dans l'espace direct	51
5	Diffusion et diffraction	55
5.1	Diffusion par un électron	56
5.1.1	Dipôle induit	56
5.1.2	Onde diffusée	57
5.1.3	Calcul de la puissance diffusée. Section efficace de diffusion	57
5.2	Diffusion simple par un ensemble de diffuseurs	58
5.2.1	Introduction	58
5.2.2	Champ diffusé par un diffuseur ponctuel. Facteur de diffusion	59
5.2.3	Champ diffusé par un ensemble de diffuseurs	59
5.2.4	Diffusion par un atome. Facteur de diffusion atomique	60
5.2.5	Diffusion par un milieu ordonné (cristal) : loi de Bragg vectorielle et facteur de structure	61
Compléments du chapitre 5		63
5A	Complément A : Diffusion par un milieu désordonné	63
5B	Introduction	63

5B.1	Diffusion Rayleigh, diffusion Thomson et diffusion résonnante	63
5B.2	Libre parcours moyen. Diffusion simple et diffusion multiple	64
5B.3	Pourquoi le ciel est bleu, pourquoi les nuages et le lait sont blancs ?	65
6	Équations de Maxwell dans la matière	67
6.1	Introduction	68
6.2	Moyennes spatiales	68
6.2.1	Définition de la moyenne spatiale	68
6.2.2	Analogie avec la formation des images	69
6.2.3	Dérivée d'une quantité moyennée	70
6.3	Équations de Maxwell macroscopiques	70
6.3.1	Équations sans sources	70
6.3.2	Équations avec sources	70
7	Relations constitutives	75
7.1	Introduction	76
7.2	Propriétés	76
7.2.1	Homogénéité	76
7.2.2	Isotropie	76
7.2.3	Linéarité	76
7.2.4	Localité	77
7.2.5	Dispersion	78
7.3	Origine de la dispersion	78
7.3.1	Exemple de l'oscillateur harmonique	78
7.3.2	Cas d'un milieu	79
7.4	Constante diélectrique généralisée	79
7.4.1	Régime statique	80
7.4.2	Régime dynamique	80
	Compléments du chapitre 7	81
7A	Complément A : modèle de Drude (1 ^{ère} partie). Transport électronique dans les métaux . .	81
7A.1	Énoncé	81
7A.2	Solution	82
7B	Complément B : modèle de Drude (2 ^{ème} partie). Électrons libres	85
7B.1	Modélisation du comportement du milieu par sa constante diélectrique	85
7B.2	Modélisation à l'aide de la conductivité	86
7B.3	Comparaison entre les deux points de vue	86
7B.4	Calcul des pertes	86
7C	Complément C : modèle de l'électron élastiquement lié	88
7C.1	Hypothèses simplificatrices	88
7C.2	Conclusions	89
7D	Complément D : polarisation d'orientation	91
7D.1	Énoncé	91
7D.2	Solution	91
7E	Complément E : relations de Kramers-Krönig	94
7E.1	Conséquence de la causalité	94
7E.2	Cas des conducteurs en régime continu	96
7E.3	Fonctions analytiques	96
8	Propagation dans la matière	99
8.1	Cas particulier : propagation en milieu homogène, isotrope et <i>non dispersif</i>	100
8.1.1	Modèle	100
8.1.2	Équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$	100
8.2	Cas général : équation de propagation dans un milieu homogène, isotrope et <i>dispersif</i> . .	101
8.2.1	Modèle et équations de Maxwell en régime monochromatique	101
8.2.2	Constante diélectrique généralisée d'un milieu non magnétique	101
8.2.3	Équation de Helmholtz : équation de propagation en régime monochromatique . . .	102
8.2.4	Propagation dans un milieu matériel	102

8.2.5	Exemple : propagation dans un plasma	103
8.2.6	Discussion de la propagation dans l'espace réciproque	104
8.3	Aspects énergétiques	104
8.3.1	Puissance échangée entre le champ et la matière	104
8.3.2	Puissance moyenne absorbée	105
8.3.3	Bilan d'énergie	105
Complément du chapitre 8		107
8A	Complément A : vitesses de propagation	107
8A.1	Vitesse et relativité	107
8A.2	Vitesse de phase	108
8A.3	Vitesse de groupe	108
8A.4	Vitesse de signal et Relativité (Brillouin 1920)	109
8A.5	Expériences de transmission. Délai de phase	110
8A.6	Vitesse d'énergie	111
9	Réflexion, réfraction	113
9.1	Introduction	114
9.2	Relations de continuité	114
9.3	Lois de Snell-Descartes	116
9.4	Facteur de réflexion et de transmission en amplitude en polarisation TE	117
9.4.1	Notations : polarisations TE et TM	117
9.4.2	Facteurs de réflexion et de transmission	117
9.4.3	Cas de la réflexion totale	119
9.5	Facteurs de réflexion et de transmission en intensité	119
9.5.1	Définition	119
9.5.2	Vecteur de Poynting	119
9.5.3	Conservation de l'énergie à une interface	120
9.5.4	Émissivité et absorptivité	121
9.6	Cas de l'incidence normale	122
9.6.1	Facteur de réflexion	122
9.6.2	Dispositifs antirélecteurs	122
9.6.3	Paradoxe de l'absorbeur	123
9.6.4	Couleur d'un corps	123
9.7	Cas d'une polarisation quelconque	124
9.7.1	Facteurs de réflexion et de transmission	124
9.7.2	Angle de Brewster	124
Compléments du chapitre 9		127
9A	Complément A : réflexion d'une onde plane par une surface plane	127
9A.1	Énoncé	127
9A.2	Solution	127
10	Ingénierie de réfraction négative - Métamatériaux	129
10.1	Introduction	130
10.2	Propagation dans un matériau double-négatif	130
10.2.1	Matériau double négatif	130
10.2.2	Conséquences	130
10.3	Métamatériaux à réfraction négative	132
10.3.1	Indice négatif dans la matière "naturelle"	132
10.3.2	Métamatériau : définition	134
10.3.3	Métamatériau : réalisation	134
10.4	Quelques applications	137
10.4.1	Lentille parfaite	137
10.4.2	Invisibilité	138
10.4.3	Autres effets	138
Annexes		141

A	Guides d'ondes	143
A.1	Définitions et exemples	144
A.2	Guide d'ondes métallique plan	144
A.2.1	Géométrie du problème	144
A.2.2	Équations du problème	145
A.2.3	Étude d'une solution	145
A.2.4	Propriétés	146
A.2.5	Interprétation physique de la discrétisation des modes	146
A.3	Équations générales pour un guide à milieux isotropes homogènes	147
A.3.1	Décomposition du champ électromagnétique	147
A.3.2	Équations du problème	148
A.3.3	Modes TE et TM	148
A.4	Guide métallique rectangulaire	149
A.4.1	Formulation du problème	149
A.4.2	Étude du mode TE	149
A.4.3	Description du mode $TE_{0,1}$	150
B	Optique géométrique	153
B.1	Limite des courtes longueurs d'onde	154
B.1.1	Introduction	154
B.1.2	Équations de Maxwell (dans l'approximation $k_0 \rightarrow \infty$)	154
B.2	Rayons lumineux	155
B.2.1	Vecteur de Poynting	155
B.2.2	Rayons lumineux	155
B.3	Équation des rayons lumineux	156
B.4	Lois de Snell-Descartes	156
B.5	Applications	156
B.5.1	Effet mirage	156
B.5.2	Déviation par l'atmosphère	157
B.5.3	Applications aux mesures de température et de concentrations	158
C	Unités et constantes physiques	159
C.1	Système international d'unités	159
C.2	Unités en dehors du système international	159
C.3	Constantes fondamentales et usuelles	159
D	Formulaire	161
D.1	Opérateurs d'analyse vectorielle	161
D.1.1	Composition d'opérateurs	161
D.1.2	Opérateurs s'appliquant sur un produit de deux fonctions	161
D.2	Transformation d'une intégrale sur une surface fermée en intégrale de volume	161
D.3	Transformation d'une intégrale le long d'un contour fermé en une intégrale de surface	162
D.4	Opérateurs dans les principaux systèmes de coordonnées	162
D.4.1	Coordonnées cartésiennes	162
D.4.2	Coordonnées cylindro-polaires (cylindriques)	162
D.4.3	Coordonnées sphériques	163

Tableau récapitulatif des séances de cours et de petites classes

En plus des séances de présences aux cours et petites classes, du travail en temps libre est demandé à un moment précis entre deux séances sous forme d'un devoir libre (*DL*). Chaque *DL* demandé est indispensable pour l'assimilation des notions de base du cours et pour les séances qui suivent.

Vous trouverez dans ce document, après les annexes du cours, les sujets des *DLs* et des *PCs*.

<u>Date</u>			<u>Chapitre correspondant</u> <u>dans le polycopié</u>
<i>Devoir Libre</i>	<i>DL 0</i>	<i>Lecture du Chapitre "Introduction"</i>	Chapitre 1
S1	Cours 1	Equations de Maxwell dans le vide. Potentiel vecteur. Préliminaires mathématiques TF et Dirac.	Chapitre 2
S1	PC 1	Analyse de Fourier des ondes	
S2	Cours 2	Principes de Bases de l'imagerie. Développement en ondes planes. Diffraction. TF par une lentille	Chapitre 3
S2	PC 2	Propagation et diffraction. Dimensionnement d'une antenne satellite. Mesure de la distance Terre-Lune.	
S3	Cours 3	Rayonnement : Potentiel retardé. Approximation champ lointain. Approximation dipolaire.	Chapitre 4
S3	PC 3	Traitement optique des images.	
S4	Cours 4	QCM1 (15 min Chap. 1,2,3). Rayonnement : Champs E et B. Puissance rayonnée.	Chapitre 4
S4	PC 4	Rayonnement d'une antenne filaire. Réseau d'antennes. Lobe d'émission.	
S5	Cours 5	Diffusion (approche rayonnement). Diffraction par un réseau périodique	Chapitre 5
S5	PC 5	Antenne dipolaire magnétique (téléphone mobile).	
<i>Devoir Libre</i>	<i>DL 1</i>	<i>Antenne demi-onde</i>	
S6	Cours 6	Equations de Maxwell dans la matière. Du microscopique au macroscopique	Chapitre 6
S6	PC 6	Diffraction par un cristal photonique.	
S7	Cours 7	QCM2 (15 min Chap. 4,5). Relations Constitutives	Chapitre 7
S7	PC 7	Modèle semi-classique de la constante diélectrique (application au métal et au diélectrique).	
S8	Cours 8	Propagation dans la matière	Chapitre 8
S8	PC 8	Atténuation et bilan d'énergie d'une d'onde dans un milieu.	

<u>Date</u>		<u>Chapitre correspondant dans le polycopié</u>	
S9	Cours 9	Relations de continuité. Réflexion et réfraction	Chapitre 9
S9	PC 9	Couches minces : traitements anti-réflexion. Microscope à onde évanescente.	
<i>Devoir Libre</i>	<i>DL 2</i>	<i>Réflexion et transmission d'une onde TM et d'une onde TE à travers une interface air-diélectrique.</i>	
S10	PC 10	Guide d'ondes. Application à la fibre optique.	
S10	PC 11	Milieu non-linéaire. Génération de second harmonique.	
<i>Devoir Libre</i>	<i>DL 3</i>	<i>Atténuation dans un guide d'ondes.</i>	
S11	Cours 10	QCM3 (15 min Chap. 6–9). Métamatériau - Ingénierie des milieux à indice négatif	Chapitre 10
S11	PC 12	Diffusion Brillouin : couplage entre une onde acoustique et une onde électromagnétique.	
S12	Sess 1	Écrit avec documents (Polycopié de cours, énoncés des exercices, leurs corrigés et notes personnelles). Les résultats des calculs obtenus durant le cours et TDs peuvent être utilisés sans démonstration. Le but est de <i>savoir les appliquer en les adaptant à chaque situation</i> . Calculatrice autorisée (tout autre dispositif électronique est interdit). <i>Les applications numériques sont notées. Notes session 1 = 0,35 QCM + 0,65 CF.</i>	
	Sess 2	Écrit avec documents (Polycopié de cours, énoncés des exercices, leurs corrigés et notes personnelles). Les résultats des calculs obtenus durant le cours et TDs peuvent être utilisés sans démonstration. Le but est de <i>savoir les appliquer en les adaptant à chaque situation</i> . Calculatrice autorisée (tout autre dispositif électronique est interdit). <i>Les applications numériques sont notées. La note du QCM est non prise en compte dans la note de la seconde Session.</i>	

Chapitre 1

Introduction et outils mathématiques

Table des matières

1.1	Descriptif	4
1.2	Outils mathématiques	4
1.2.1	Distribution ponctuelle. Fonction de Dirac δ	4
1.2.2	Onde plane et convention	5
	Transformée de Fourier de la dérivé d'une fonction	6
	Equation d'ondes	6
1.2.3	Transformée de Fourier d'une fonction constante. Fonction sinc	7
1.2.4	Transformée de Fourier d'une fonction d'onde plane	8
1.2.5	Filtrage et transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions	8

DANS ce chapitre introductif on rappelle l'objectif du cours, les outils mathématiques utiles ainsi que les conventions qui seront utilisées.

1.1 Descriptif

Les ondes électromagnétiques sont la base de toutes les technologies de communication actuelles. Les longueurs d'ondes utilisées varient selon les dispositifs utilisés et le milieu de propagation, vide, air ou matière dense. Elles sont émises ou réceptionnées par des radars et des antennes dans l'atmosphère, les océans, ou dans l'univers où elles se propagent sur des longueurs allant de plusieurs millimètres jusqu'à des milliards de kilomètres. Dans le domaine des télécommunications, les ondes électromagnétiques sont aussi guidées, soit par des fibres optiques pour optimiser les flux d'informations, ou par des guides métalliques connectés aux antennes ou aux radars. Dans le domaine de l'imagerie, les ondes sont souvent polychromatiques, et elles sont souvent traitées pour améliorer la qualité des images. Dans les objets miniaturisés, telles que les caméras des smartphones, les matériaux utilisés pour les lentilles miniatures sont différents de ceux que vous connaissez dans un microscope optique par exemple. Lors de leur propagation, les ondes subissent de l'atténuation due à la diffusion ou à l'absorption par le milieu, ce qui constitue généralement un problème majeur à éviter. Selon la longueur d'onde utilisée, un même matériau peut être transparent, absorbant ou opaque.

Dans le cours d'électromagnétisme vous complèterez vos connaissances acquises avant votre arrivée à CentraleSupélec par les bases de la propagation des ondes dans le vide et dans la matière. Vous découvrirez l'origine du phénomène de diffraction par une ouverture et l'ouverture angulaire de l'onde émise par une antenne. Vous découvrirez l'origine de l'indice optique et de la constante diélectrique d'un matériau et leur dépendance en fonction de la longueur d'onde. Vous découvrirez également l'origine de l'atténuation et de l'absorption. Vous appliquerez vos connaissances, fraîchement acquises pour étudier, comme par exemple, le traitement optique des images – le rayonnement d'une antenne de smartphone – le traitement de surface anti-reflet – le couplage entre onde acoustique et onde électromagnétique.

Enfin, toutes ces connaissances seront utiles et indispensables à celles et ceux qui choisiront d'approfondir ce vaste domaine scientifique et technologique dans la suite de leur cursus.

1.2 Outils mathématiques

1.2.1 Distribution ponctuelle. Fonction de Dirac δ

En électrostatique, l'équation dite de Poisson vérifiée par le potentiel électrostatique V fait apparaître la densité volumique de charge qui règne dans l'espace

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (1.1)$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle q ,

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (1.2)$$

et on obtient dans ce cas

$$\Delta V = 0 \quad \text{pour } r > 0 \quad (1.3)$$

On remarque que l'information sur la source qui a créé le potentiel V est perdue. Pour garder l'information sur la nature de la source on définit la densité volumique suivante en supposant que la charge est répartie de façon uniforme dans une sphère¹ r_e :

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > r_e \\ \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_e^3} & \text{pour } r < r_e \end{cases} \quad (1.4)$$

1. Afin d'obtenir un ordre de grandeur, un rayon classique a été défini en identifiant l'énergie de repos mc^2 introduite en relativité et l'énergie électrostatique $q^2/(4\pi\varepsilon_0 r_e)$. Dans le cas de l'électron on obtient $\sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

et qui satisfait la condition

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{r}) dx dy dz = \int_0^{+\infty} \rho(\mathbf{r}) 4\pi r^2 dr \quad (1.5)$$

$$= q \quad (1.6)$$

Quand r_e tend vers 0, la densité volumique de charge tend vers $q\delta(\mathbf{r})$ telle que

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r > 0 \\ +\infty & \text{pour } r = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

avec la propriété de la fonction $\delta(\mathbf{r})$

$$\int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{r}) dx dy dz = \int_0^{+\infty} \delta(\mathbf{r}) 4\pi r^2 dr \quad (1.8)$$

$$= 1 \quad (1.9)$$

En introduisant cette densité volumique de charge associée à une charge ponctuelle, l'équation (1.3) devient

$$\Delta V + \frac{q\delta(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} = 0 \quad (1.10)$$

La fonction $\delta(\mathbf{r})$ est appelée distribution de Dirac dans un espace en trois dimensions. On peut l'écrire sous la forme d'un produit de trois distributions de Dirac, chacune définie dans un espace en une dimension (x , y , ou z), soit

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (1.11)$$

où

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } |x| > 0 \quad (1.12)$$

$$\delta(0) = +\infty \quad (1.13)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.14)$$

On verra dans le chapitre sur le rayonnement, que la fonction Dirac est utile pour traiter le cas où la source est ponctuelle.

1.2.2 Onde plane et convention

Un signal dépendant du temps peut être analysé en termes de signaux harmoniques. En d'autres termes, il est toujours possible en pratique de considérer qu'un signal d'énergie finie est une superposition de fonctions monochromatiques. Cela s'écrit sous la forme, dite d'une transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.15)$$

Sous cette forme $\tilde{f}(\omega)$ apparaît comme l'amplitude de la composante $\exp(-i\omega t)$. On peut la calculer à partir de la connaissance de $f(t)$ sous la forme, dite d'une transformée de Fourier :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.16)$$

Le même type de décomposition peut être fait pour une fonction de la variable d'espace x . Dans le cas d'une fonction dépendant de x et t , on écrira :

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.17)$$

Cette écriture montre que f se met sous la forme d'une superposition d'ondes planes : on appelle cela un paquet d'ondes.

Transformée de Fourier de la dérivé d'une fonction

En dérivant par rapport au temps l'expression (1.17) on obtient la relation suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) \tilde{f}(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.18)$$

qui montre que la transformée de Fourier de $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est égale à

$$\text{TF} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = -i\omega \tilde{f}(k,\omega) \quad (1.19)$$

De même la transformée de Fourier de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est égale à

$$\text{TF} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ik \tilde{f}(k,\omega) \quad (1.20)$$

Equation d'ondes

Jusqu'ici, on a simplement introduit la transformée de Fourier d'une fonction. On suppose maintenant que $f(x,t)$ est une onde solution de l'équation suivante avec une vitesse de phase c :

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (1.21)$$

Cela impose une relation entre k et ω .

En appliquant la transformée de Fourier à cette équation, on obtient :

$$\tilde{f}(k,\omega) \left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] = 0 \quad (1.22)$$

L'équation ci-dessus n'est possible que si

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (1.23)$$

On voit qu'imposer à f de satisfaire à l'équation de propagation revient à imposer la relation de dispersion $c^2 k^2 = \omega^2$, à se restreindre à $\tilde{f}(k = \pm \omega/c, \omega)$.

On remarque aussi qu'une onde $\exp(ikx - i\omega t)$ se propage dans le sens des x positifs. Une onde $\exp(ikx + i\omega t)$ a un vecteur d'onde avec une composante suivant x positive k et se propage en sens inverse. Il est évidemment plus pratique de choisir la première convention de signe.

Cela introduit une dissymétrie dans les choix conventionnels de signe suivant les variables d'espace et de temps. Le tableau suivant donne le sens de propagation des ondes selon la convention dite $(-i\omega t)$. k et ω sont positifs.

Onde	sens de propagation
$\exp(ikx - i\omega t)$	$x > 0$
$\exp(-ikx - i\omega t)$	$x < 0$
$\exp(ikx + i\omega t)$	$x < 0$
$\exp(-ikx + i\omega t)$	$x > 0$

En régime monochromatique, on associe à la grandeur physique réelle $A(\mathbf{r},t)$ l'amplitude complexe $\underline{A}(\mathbf{r})$ définie par la relation suivante :

$$A(\mathbf{r},t) = \text{Re} [\underline{A}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$$

Afin de simplifier les notations, on écrira $A(\mathbf{r})$ au lieu de $\underline{A}(\mathbf{r})$.

En électrocinétique, c'est la convention dite $(j\omega t)$ qui est utilisée car elle est plus pratique et permet d'avoir des expressions complexes sans le signe $(-)$ comme par exemple les impédances $jL\omega$ et $1/jC\omega$. Avec la convention $(-i\omega t)$ on aurait obtenu $-iL\omega$ et $-1/iC\omega$.

L'utilisation d'une convention ou l'autre n'a aucune conséquence sur les équations et relations obtenues, il suffit de remplacer $(-i\omega t)$ par $(j\omega t)$ et (ikx) par $(-jkx)$ ou vice-versa.

1.2.3 Transformée de Fourier d'une fonction constante. Fonction sinc

On considère le cas d'une amplitude $A(x)$ nulle partout sauf dans l'intervalle $[-L/2; L/2]$ où elle vaut 1. Son développement sous forme

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad (1.24)$$

nécessite le calcul de la transformée de Fourier

$$\tilde{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{-ikx} dx \quad (1.25)$$

$$\tilde{A}(k) = L \frac{\sin(kL/2)}{kL/2} \quad (1.26)$$

$$\tilde{A}(k) = L \operatorname{sinc}(kL/2) \quad (1.27)$$

avec sinc la fonction sinus cardinal qui à x fait correspondre $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$. La courbe de la fonction

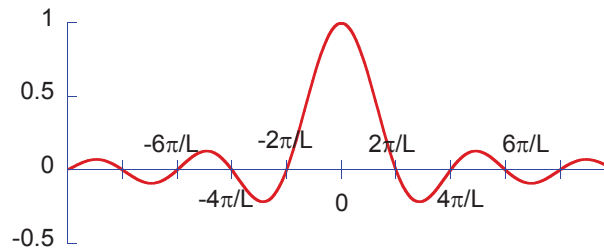


Figure 1.1 – Allure de la fonction $\operatorname{sinc}(kL/2)$ en fonction de k . La fonction s'annule en $\pm n \frac{2\pi}{L}$ où n est un entier positif.

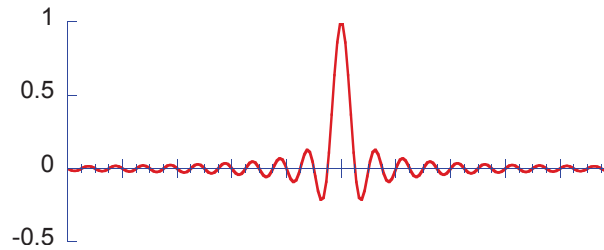


Figure 1.2 – Allure de la fonction $\operatorname{sinc}(kL/2)$ en fonction de k pour une valeur de L quatre fois plus grande que celle utilisée dans la figure 1.1.

$\operatorname{sinc}(kL/2)$ est tracée dans les figures 1.1 et 1.2 pour deux valeurs de L . Cependant on remarque que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) dk$$

est indépendante de L . En effet, après changement de variable on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k) dk = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(u) du \quad (1.28)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(u) du = \pi \quad (1.29)$$

Lorsque L tend vers l'infini :

- $A(x)$ tend vers 1 pour toutes valeur de x (fonction constante),
- et $\tilde{A}(k)$ tend vers 0 pour tout $k \neq 0$ et vers l'infini pour $k = 0$.

En utilisant la fonction δ (1.12), $\tilde{A}(k)$ tend vers

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \tilde{A}(k) = 2\pi \delta(k) \quad (1.30)$$

En reprenant l'expression (1.25), on a la propriété suivante qui servira beaucoup pendant le cours.

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx = 2\pi\delta(k) \quad (1.31)$$

1.2.4 Transformée de Fourier d'une fonction d'onde plane

On considère le cas d'une amplitude $A(x) = \exp(ik_0x)$. Sa transformée de Fourier

$$\tilde{A}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0x} e^{-ikx} dx \quad (1.32)$$

s'exprime à l'aide de la fonction δ :

$$\tilde{A}(k) = 2\pi\delta(k - k_0) \quad (1.33)$$

En appliquant la relation (1.24), on peut retrouver l'expression de $A(x)$. En effet, pour toute fonction $f(k)$, le produit des fonctions $f(k)$ et $\delta(k - k_0)$ correspond à la fonction $f(k_0)\delta(k - k_0)$, puisque $\delta(k - k_0)$ est nulle partout sauf en $k = k_0$.

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(k - k_0) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad (1.34)$$

$$A(x) = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k - k_0) dk \quad (1.35)$$

$$A(x) = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k') dk' \quad (1.36)$$

On obtient finalement

$$A(x) = e^{ik_0x} \quad (1.37)$$

puisque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k') dk' = 1 \quad (1.38)$$

Plus généralement, on a la relation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\delta(u - u_0)du = f(u_0) \quad (1.39)$$

1.2.5 Filtrage et transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions

Lorsqu'on veut filtrer un signal $f(t)$ présentant un bruit, on réalise en général une moyenne pondérée sur un intervalle de largeur 2Δ centré sur t en utilisant une fonction $g(t)$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1 \quad (1.40)$$

Cela revient à remplacer $f(t)$ pour une valeur de t donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t - t')dt' \quad (1.41)$$

La fonction $g(t)$ la plus simple à considérer est la fonction dite "porte" : nulle partout sauf dans l'intervalle $[-\Delta; \Delta]$ où elle vaut $1/2\Delta$ (voir exemple de la figure 1.3). On peut également prendre une fonction gaussienne sous la forme $\frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\Delta^2}\right)$. Mathématiquement, l'intégrale (1.41) est appelée produit de convolution des fonctions f et g noté $f * g$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t - t')dt' \quad (1.42)$$

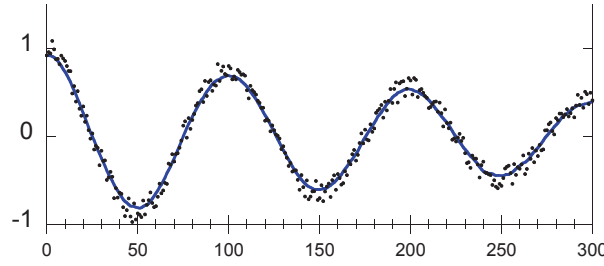


Figure 1.3 – Exemple de filtrage d'un signal sinusoïdal amorti. Le filtre est une fonction porte de largeur $2\Delta = 20$.

qui est équivalent à

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t')g(t')dt' \quad (1.43)$$

Le filtrage d'un signal peut être interprété autrement dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire dans l'espace des fréquences. Rappelons que l'on peut écrire $g(t)$ sous la forme suivante

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.44)$$

La relation (1.42) devient

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')dt' \quad (1.45)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi} \right] dt' \quad (1.46)$$

En permutant les deux variables t' et ω on fait apparaître $\tilde{f}(\omega)$:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt' \right] e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.47)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\omega) \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.48)$$

Or en utilisant la transformée de Fourier ($f \sim g$) de la fonction $(f * g)$ on peut écrire

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f \sim g)(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.49)$$

Par identification on obtient la propriété suivante :

$$(f \sim g)(\omega) = \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \quad (1.50)$$

Dans la cas où l'on souhaite supprimer (filtrer) le bruit dans un signal, il suffit de calculer sa transformée de Fourier et de "couper" les hautes fréquences. En effet, le bruit correspond à des variations rapides et aléatoires et sa contribution dans la transformée de Fourier se trouve à haute fréquence. Cela revient à multiplier $\tilde{f}(\omega)$ par $\tilde{g}(\omega)$ où $\tilde{g}$ est une fonction qui tend vers 1 à basses fréquences et vers 0 à hautes fréquences. Pour les deux exemples cités ci-dessus on obtient

$$\tilde{g}(\omega) = \text{sinc}(\omega\Delta) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} g(t) = 1/2\Delta \text{ pour } |t| < \Delta \\ g(t) = 0 \text{ pour } |t| > \Delta \end{cases}$$

pour le filtre avec une fonction porte,

$$\tilde{g}(\omega) = \exp\left[-\frac{\omega^2\Delta^2}{2}\right] \quad \text{pour} \quad g(t) = \frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\Delta^2}\right)$$

pour le filtre avec une gaussienne.

Points clés

- ❶ Transformée de Fourier et filtrage.
- ❷ Fonction sinc et son allure.
- ❸ Fonction (Distribution) de Dirac et ses propriétés.

Compléments du chapitre 1

1A Complément a : Séries et transformation de Fourier

Séries et transformation de Fourier

1A.1 Séries de Fourier

Série en $\exp[ik_n x]$

NOTONS $f(x)$ une fonction périodique de période d . Si elle vérifie certaines conditions mathématiques (pratiquement toujours réalisées en physique), on peut la développer en série sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (1A.1)$$

avec

$$k_n = n 2\pi/d \quad (1A.2)$$

où les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) e^{-ik_n x} dx \quad (1A.3)$$

x_0 étant un nombre réel quelconque. Ce résultat se vérifie immédiatement en remarquant que :

$$\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} e^{-i(k_n - k_p)x} dx = \delta_{np} \quad (1A.4)$$

On appelle spectre de Fourier l'ensemble des valeurs c_n . On remarque que $f(x)$ est une fonction réelle si et seulement si :

$$c_{-n} = c_n^* \quad (1A.5)$$

Série de cosinus et de sinus

En groupant dans l'équation (1A.1) les termes correspondant à des valeurs opposées de n on obtient :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{ik_n x} + c_{-n} e^{-ik_n x}] \quad (1A.6)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x)] \quad (1A.7)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \quad n > 0 \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \quad n > 0 \end{aligned} \quad (1A.8)$$

De (1A.3) on déduit alors :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) dx \\ a_n &= \frac{2}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) \cos(k_n x) dx \\ b_n &= \frac{2}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f(x) \sin(k_n x) dx \end{aligned} \quad (1A.9)$$

Si $f(x)$ est paire, $b_n = 0$

Si $f(x)$ est impaire, $a_n = 0$

Si $f(x)$ est réelle, a_n et b_n sont réels

Égalité de Bessel-Parseval

On montre à partir de (1A.9) que l'on a :

$$\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (1A.10)$$

En utilisant le développement (1A.6), on obtient :

$$\frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (1A.11)$$

1A.2 Transformation de Fourier

Définitions : l'intégrale de Fourier comme limite d'une série de Fourier

L'approche que nous allons suivre pour présenter la notion de transformée de Fourier est celle qui a été utilisée historiquement, elle consiste à considérer la transformée de Fourier comme la limite d'une série de Fourier. Il ne s'agit pas d'une méthode rigoureuse. Toutefois elle est intéressante par sa simplicité et par le fait que tout calcul numérique de spectre est discret et est donc approximé par un calcul de série de Fourier.

Nous envisageons ici une fonction $f(x)$ *non périodique* et nous définissons $f_d(x)$ comme la fonction périodique de période d coïncidant avec $f(x)$ sur l'intervalle $[-d/2, d/2]$. $f_d(x)$ peut être développée en série de Fourier :

$$f_d(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (1A.12)$$

où c_n est donné par (1A.3) :

$$c_n = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} f_d(x) e^{-ik_n x} dx \quad (1A.13)$$

Lorsque d tend vers l'infini, $f_d(x)$ se confond avec $f(x)$. La définition (1A.2) de k_n donne :

$$k_n - k_{n+1} = 2\pi/d \quad (1A.14)$$

En remplaçant $1/d$ à l'aide de (1A.14) dans (1A.13), puis en reportant dans (1A.12), on obtient :

$$f_d(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{k_{n+1} - k_n}{2\pi} e^{ik_n x} \int_{-d/2}^{+d/2} f_d(x) e^{-ik_n x} dx \quad (1A.15)$$

Dans la limite $d \rightarrow \infty$, $(k_n - k_{n+1}) \rightarrow 0$ de sorte que la somme tend vers une intégrale définie et l'intégrale figurant dans (1A.15) devient une fonction de la variable continue k . Si l'on pose :

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1A.16)$$

la relation (1A.15) s'écrit dans la limite $d \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \quad (1A.17)$$

Remarque :

Si l'on pose — comme on le fait en mécanique quantique —

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (1A.18)$$

la formule inverse s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad (1A.19)$$

Enfin, signalons également une convention fréquemment utilisée en mathématiques :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \quad (1A.20)$$

Cette convention a l'avantage de conduire à des expressions symétriques. En physique, on préfère travailler avec le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la pulsation ω plutôt qu'avec les fréquences spatiales et temporelles. Pour conserver la simplicité de la convention des mathématiciens, on travaillera avec $dk/2\pi$ et $d\omega/2\pi$.

Transformation de Fourier dans l'espace à 3 dimensions

Pour des fonctions de 3 variables d'espace x, y, z on remplace (1A.15) et (1A.16) par :

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{dk_z}{2\pi} \quad (1A.21)$$

qui se note plus simplement :

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (1A.22)$$

et dont la formule d'inversion donne :

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} \quad (1A.23)$$

Propriétés simples

Dérivation

$$\text{TF}[f'(x)] = ik \text{TF}[f(x)]$$

$$\text{TF}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \text{TF}[f(x)]$$

$$\text{TF}[\text{grad}f(\mathbf{r})] = i\mathbf{k} \text{TF}[f(\mathbf{r})] = i\mathbf{k}f(\mathbf{k})$$

$$\text{TF}[\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})] = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})$$

$$\text{TF}[\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})] = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{k})$$

Transformée de Fourier d'un produit de convolution

Le produit de convolution de f par g est défini par :

$$\begin{aligned} h(x) &= f \otimes g = \int f(x-x')g(x')dx' && \text{dans l'espace des } x \\ h(k) &= f \otimes g = \int f(k-k')g(k')\frac{dk'}{2\pi} && \text{dans l'espace des } k \end{aligned}$$

Il est simple de montrer que l'on a :

$$\text{TF}[f \otimes g] = \text{TF}[f] \cdot \text{TF}[g]$$

$$\text{TF}[f \cdot g] = \text{TF}[f] \otimes \text{TF}[g]$$

Remarque : lorsque l'on adopte la convention qui consiste à introduire un facteur $1/\sqrt{2\pi}$ dans la définition de la transformée de Fourier comme cela est généralement fait en mécanique quantique, il n'y a pas de facteur 2π dans le lien entre produit de convolution et produit, ce qui donne des relations symétriques plus simples à utiliser.

Quelques exemples

$$f(k) = \frac{2 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{ka} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} f(x) = 1/a \text{ pour } |x| < a/2 \\ f(x) = 0 \text{ pour } |x| > a/2 \end{cases}$$

$$f(k) = \frac{1}{a^2 k^2 + 1} \quad \text{pour} \quad f(x) = \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right)$$

$$f(k) = \exp\left[-\frac{k^2 a^2}{2}\right] \quad \text{pour} \quad f(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

Largeur de deux fonctions, transformées de Fourier l'une de l'autre

Sur les trois exemples qui précèdent, on remarque que l'on a la propriété $\Delta x \Delta k \approx 2\pi$ en ordre de grandeur. *Cette propriété est générale.* Elle correspond à de nombreuses situations en physique :

- relation d'incertitude de Heisenberg
- produit du temps caractéristique τ d'un circuit par la bande passante $\Delta\omega$
- diffraction : relation liant la largeur angulaire du faisceau diffracté à la largeur de l'ouverture diffractante

Chapitre 2

Équations de Maxwell

Table des matières

2.1	Potentiels	16
2.1.1	Équations de Maxwell microscopiques	16
2.1.2	Potentiels	16
2.1.3	Invariance de jauge	17
2.2	Propagation	17
2.2.1	Équation de propagation des potentiels	17
2.2.2	Équation de propagation des champs microscopiques	18
2.2.3	Propagation dans le vide. Onde plane	18
2.3	Structure d'une onde plane	18
2.3.1	Quelques identités	18
2.3.2	Transversalité	19
2.4	Polarisation d'une onde plane monochromatique	19
2.4.1	Introduction	19
2.4.2	Polarisation	19
2.5	Énergie du champ électromagnétique	21
2.5.1	Énergie électrostatique et magnétostatique	21
2.5.2	Énergie électromagnétique. Vecteur de Poynting	22
2.6	Décomposition d'un champ vectoriel	22
2.6.1	Énoncé	22
2.6.2	Applications	23
2.6.3	Champs rotationnels et irrotationnels; transverses et longitudinaux	23
	Champs rotationnels et irrotationnels	23
	Champs transverses et longitudinaux	24

DANS cette annexe, l'essentiel des résultats faisant partie du programme des classes préparatoires portant sur les équations de Maxwell et les potentiels est brièvement rappelé. Nous discuterons des propriétés des solutions des équations de Maxwell dans le vide (i.e. $\rho = 0$; $\mathbf{j} = 0$). Les notions de polarisation et d'énergie électromagnétique sont brièvement rappelées. Enfin, nous introduisons une décomposition d'un champ vectoriel qui permet de discuter de notions telles que potentiels, invariance de jauge ; cela permettra également d'introduire la décomposition canonique d'un champ en champs transverse et longitudinal.

2.1 Potentiels

2.1.1 Équations de Maxwell microscopiques

Dans le système MKSA (où les unités de base sont le mètre, le kilogramme, la seconde et l'ampère, système préfigurant le système international d'unités) les équations de Maxwell indépendantes des sources s'écrivent :

$$\begin{array}{ll} \text{div} \mathbf{B} &= 0 \quad \text{Maxwell-Thomson} \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Faraday} \end{array} \quad (2.1)$$

Les équations reliant les champs aux sources sont :

$$\begin{array}{ll} \text{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss} \\ \text{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Ampère} \end{array} \quad (2.2)$$

On parle d'équations de Maxwell microscopiques lorsque l'on considère des termes sources décrits par un ensemble de charges ponctuelles. Les champs électromagnétiques associés à ces termes sources comportent de nombreuses singularités. On sait par exemple que le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle diverge au voisinage de la charge. On appellera ces champs, les champs microscopiques. On verra plus loin que lorsque l'on étudie la propagation du champ dans la matière, il faut introduire un processus de moyenne qui conduit à l'introduction de champs électromagnétiques régularisés. On appellera ces champs électromagnétiques, champs dans la matière ou champs macroscopiques.

2.1.2 Potentiels

L'intérêt de l'introduction des potentiels est d'avoir des quantités qui satisfont automatiquement à (2.1). Ainsi, puisque $\text{div} \mathbf{B} = 0$, d'après le théorème d'Helmholtz on peut écrire $\mathbf{B}$ sous la forme :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (2.3)$$

En reportant cette forme dans (2.1 b), on obtient :

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.4)$$

En utilisant là encore le théorème d'Helmholtz on peut écrire :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} V \quad (2.5)$$

Si on travaille désormais avec $\mathbf{A}$ et V , les deux équations (2.1) sont satisfaites automatiquement. Reste à reporter (2.3) et (2.5) dans (2.2) pour obtenir les équations satisfaites par les potentiels $\mathbf{A}$ et V

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} + \text{grad} \left[\text{div} \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] \\ \Delta V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

À ce stade, il faut faire deux remarques :

- Le système (2.6) est un système couplé reliant les potentiels $\mathbf{A}$ et V aux sources du champ ρ et $\mathbf{j}$.
- Le champ $\mathbf{A}$ est potentiellement indéterminé : seul son rotationnel est fixé par (2.3). Nous sommes libres de choisir $\text{div}\mathbf{A}$ à notre convenance. Choisir la valeur de $\text{div}\mathbf{A}$ est choisir une solution particulière pour $\mathbf{A}$ parmi une infinité de solutions possibles. C'est ce que l'on appelle un choix de jauge. Il existe une jauge particulièrement commode : celle qui permet de découpler le système (2.6). C'est la jauge dite de Lorentz :

$$\boxed{\text{div}\mathbf{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (2.7)$$

Soulignons que ce choix ne suffit pas à déterminer complètement les potentiels. En effet, il faut se donner les conditions aux limites du problème. Dans le cadre de ce cours, nous utiliserons des conditions du type « champ nul à l'infini ».

2.1.3 Invariance de jauge

Lorsque $\mathbf{A}$ change, il faut que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ restent inchangés. Envisageons un couple $(\mathbf{A}_0, V_0)$ tel que :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} - \text{grad}V_0$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}_0$$

et tel que $(\mathbf{A}_0, V_0)$ soit solution du système (2.6). Le choix de $\mathbf{A}$ étant potentiellement arbitraire (puisque $\text{div}\mathbf{A}$ peut être quelconque), il existe certainement des solutions du type $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, V_0 + V_1)$. Nous nous proposons de déterminer la forme de $\mathbf{A}_1$ et V_1 . Écrivons que $(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, V_0 + V_1)$ est solution du problème.

Cela entraîne :

i) $(\mathbf{A}_1, V_1)$ solution du système homogène (sans sources) associé à (2.6) ;

ii) $\text{rot}\mathbf{A}_1 = 0$ (puisque $\mathbf{B}$ doit être inchangé) ;

iii) $\text{grad}V_1 + \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = 0$.

On en tire : $\mathbf{A}_1 = -\text{grad}X$ et $V_1 = \frac{\partial X}{\partial t}$

En conclusion, si $(\mathbf{A}_0, V_0)$ est solution du problème, tout couple de la forme $(\mathbf{A}_0 - \text{grad}X, V_0 + \frac{\partial X}{\partial t})$ est également solution.

2.2 Propagation

2.2.1 Équation de propagation des potentiels

En reportant (2.7) dans (2.6) on obtient :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (2.8)$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

où l'on a posé $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

2.2.2 Équation de propagation des champs microscopiques

L'équation vérifiée par $\mathbf{E}$ est obtenue à partir des équations de Maxwell en éliminant $\mathbf{B}$. Pour ce faire, on prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday afin de faire apparaître $\text{rot}\mathbf{B}$ qui peut être éliminé à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère.

$$\text{rot rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\mathbf{B}).$$

Or $\text{rot rot}\mathbf{E} \equiv \text{grad div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$ et $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, d'où

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \text{grad}\left(\frac{\rho}{\epsilon_0}\right) + \mu_0\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}. \quad (2.10)$$

De même on obtient :

$$\Delta\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\text{rot}\mathbf{j}. \quad (2.11)$$

2.2.3 Propagation dans le vide. Onde plane

Dans ce paragraphe, on se restreint au cas particulier d'une solution des équations de propagation dans le vide ne dépendant que d'une seule variable cartésienne et du temps. L'équation (2.10) devient alors :

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.12)$$

La solution d'une telle équation est par définition une onde plane. En faisant le changement de variables $u = x - ct$ et $v = x + ct$ on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{E}(u,v) = 0$$

ce qui montre que $\mathbf{E}$ est de la forme :

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_+(x - ct) + \mathbf{E}_-(x + ct)$$

où c apparaît comme une vitesse de propagation.

Exercice : Montrer que l'équation

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

a des solutions ne dépendant que de r en symétrie sphérique qui s'écrivent $f(r \pm ct)/r$.

2.3 Structure d'une onde plane

La seule hypothèse faite dans ce paragraphe est que $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ne dépendent que de x et de t à travers le groupement $x - ct$.

2.3.1 Quelques identités

Soit u une fonction de x,y,z et soient f et $\mathbf{A}$ des fonctions de u (on choisira $u = x - ct$ dans les applications qui suivent). On a alors¹ :

$$\text{grad}f(u) = \frac{\partial f}{\partial u}\text{grad}u \quad (2.13)$$

$$\text{rot}[\mathbf{A}(u)] = (\text{grad}u) \times \frac{\partial\mathbf{A}(u)}{\partial u} \quad (2.14)$$

$$\text{div}[\mathbf{A}(u)] = (\text{grad}u) \cdot \frac{\partial\mathbf{A}(u)}{\partial u} \quad (2.15)$$

1. L'opérateur $\times$ désigne le produit vectoriel.

2.3.2 Transversalité

L'équation $\text{div}(\mathbf{A}(u)) = 0$ donne :

$$(\text{grad}u) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u} = 0$$

or, dans le cas des champs on a, dans le vide :

$$\text{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

D'autre part, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont fonctions de $x - ct$ (onde progressive dans le sens des $x > 0$) d'où $\text{grad}u = \mathbf{e}_x$.

$$\text{Finalement, } \text{div} \mathbf{E} = \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = 0 = \frac{\partial E_x}{\partial u}.$$

La composante longitudinale des champs (i.e. la composante parallèle à la direction de propagation) est donc *constante*. Nous la choisissons nulle, car nous exigeons que $\mathbf{E}(\infty) = 0$.

Remarque : En présence de charges, $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Dans ce cas, le champ $\mathbf{E}$ peut avoir une composante longitudinale.

L'équation $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ et l'identité (2.14) permettent d'écrire :

$$\mathbf{e}_x \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} \quad \text{car} \quad \text{grad}u = \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u}$$

En prenant nuls les champs constants, nous en déduisons :

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{E} = c \mathbf{B}$$

Ce résultat, joint aux précédents, montre que le trièdre $(\mathbf{e}_x, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ est un trièdre direct.

2.4 Polarisation d'une onde plane monochromatique

2.4.1 Introduction

Pour illustrer la notion de propagation, nous avons choisi un cas particulier : une solution ne dépendant que de x et t : l'onde plane. Pour discuter la notion de polarisation, c'est-à-dire préciser le comportement des champs dans le plan transverse, nous allons faire une hypothèse supplémentaire : nous supposons que le champ est monochromatique. Il est important de souligner que cela n'entraîne aucune perte de généralité. En effet, toute fonction du temps peut toujours être décomposée en une infinité de fonctions harmoniques.

$$f(t) = \int f(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.16)$$

Remarques :

- La fonction $f(\omega)$ joue le rôle du "coefficient" ou du "poids" de $\exp(-i\omega t)$ dans la décomposition.
- Le choix du signe de l'argument de l'exponentielle est purement conventionnel. Le même choix est fait en mécanique quantique. De la sorte, une onde de la forme $\exp[i\frac{\omega}{c}x - i\omega t]$ se propage dans le sens des x croissants.
- Les fréquences négatives n'ont pas de réalité physique. C'est un artifice de calcul.

2.4.2 Polarisation

D'après ce qui précède, la forme la plus générale d'une onde plane se propageant dans la direction de l'axe Ox est :

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= f_+(x - ct) + f_-(x + ct) \\ E_z &= g_+(x - ct) + g_-(x + ct) \end{aligned}$$

Nous nous restreindrons au cas d'une onde plane progressive se propageant dans le sens des x positifs. La forme la plus générale est alors :

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= f_+(x - ct) \\ E_z &= g_+(x - ct) \end{aligned}$$

Cherchons maintenant une solution sous forme d'onde plane monochromatique. Sa dépendance temporelle est de la forme $\cos(\omega t)$, mais c'est une fonction du groupement $x - ct$. La forme la plus générale est donc :

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= E_y^0 \cos\left[\frac{\omega}{c}(x - ct) + \varphi_y\right] \\ E_z &= E_z^0 \cos\left[\frac{\omega}{c}(x - ct) + \varphi_z\right] \end{aligned}$$

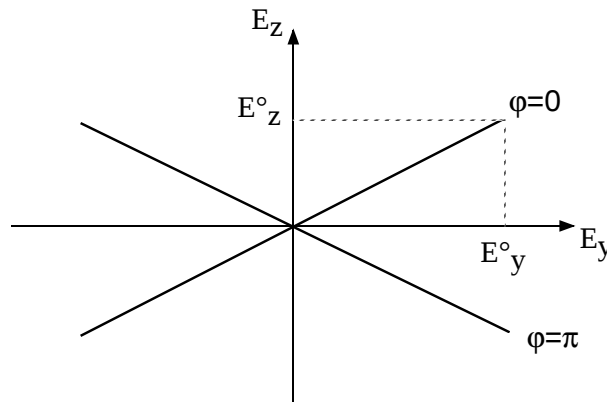
où E_y^0 et E_z^0 sont positifs, le signe étant donné par la phase. En outre, on peut, sans perte de généralité, choisir l'origine des temps de façon que $\varphi_y = 0$. En posant $k = \omega/c$, on obtient facilement :

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= E_y^0 \cos(kx - \omega t) \\ E_z &= E_z^0 \cos(kx - \omega t) + \varphi \end{aligned}$$

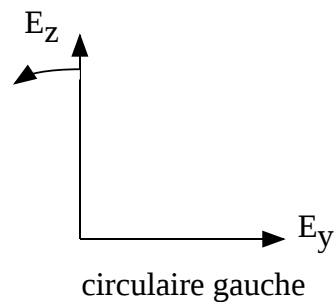
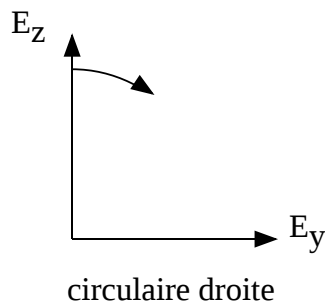
Le champ est donc décrit par trois paramètres E_y^0 , E_z^0 et φ .

Polarisation rectiligne : $\varphi = 0$ ou π .

Dans ce cas, les 2 vibrations sont en phase (respectivement en opposition). L'extrémité du vecteur champ électrique a une trajectoire rectiligne. On parle de polarisation rectiligne.



Polarisation circulaire : $\varphi = \pm\pi/2$ et $E_y^0 = E_z^0 = E^0$. Dans les deux cas, la trajectoire de l'extrémité du vecteur $\mathbf{E}$ est un cercle. Le sens de rotation est différent : on parle de vibration circulaire gauche pour $\varphi = -\pi/2$, de vibration circulaire droite pour $\varphi = \pi/2$.



C'est la convention des opticiens ; on peut l'énoncer différemment : Un observateur recevant la lumière qualifiera de gauche une vibration tournant dans le sens trigonométrique. À titre mnémotechnique, on peut

remarquer que le champ tourne dans le même sens qu'un volant de voiture.

$$\mathbf{E}_d = \begin{cases} A \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[Ae^{-i\omega t}] \\ -A \sin(\omega t) = \operatorname{Re}[Ae^{-i(\omega t + \pi/2)}] \end{cases} \quad \mathbf{E}_g = \begin{cases} A \cos(\omega t) = \operatorname{Re}[Ae^{-i\omega t}] \\ A \sin(\omega t) = \operatorname{Re}[Ae^{-i(\omega t - \pi/2)}] \end{cases}$$

Polarisation elliptique :

C'est le cas général : E_y, E_z, φ quelconques. La trajectoire de l'extrémité du vecteur $\mathbf{E}$ est alors une ellipse. On utilise la même convention pour caractériser le sens de rotation.

Remarques :

- Une vibration elliptique peut toujours être décomposée en deux vibrations rectilignes (suivant y et z par exemple). Cette décomposition est très utile lorsque l'on veut décrire l'interaction de la lumière avec un milieu présentant une direction privilégiée telle que milieux biréfringents, polariseurs, etc.
- Il est des cas où l'interaction rayonnement matière introduit une discrimination suivant le sens de rotation de l'onde. Ainsi, une particule chargée plongée dans un champ magnétique statique est soumise à une force de Lorentz qui la fait tourner. Une telle particule pourra éventuellement entrer en résonance lorsqu'elle est soumise à un champ tournant dans le même sens. Il est très utile dans une telle situation de décomposer une polarisation elliptique en deux polarisations circulaires tournant en sens inverse. Pour cela, il est utile d'écrire les champs polarisés circulairement à l'aide d'un vecteur unitaire complexe.

Pour une circulaire droite :

$$\mathbf{E}_d = E_0 [\cos(\omega t)\mathbf{e}_y - \sin(\omega t)\mathbf{e}_z] = E_0 \operatorname{Re} [(\mathbf{e}_y - i\mathbf{e}_z)e^{-i\omega t}]$$

Pour une circulaire gauche :

$$\mathbf{E}_g = E_0 [\cos(\omega t)\mathbf{e}_y + \sin(\omega t)\mathbf{e}_z] = E_0 \operatorname{Re} [(\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_z)e^{-i\omega t}]$$

On peut introduire les vecteurs unitaires et normés

$$\mathbf{e}_d = \frac{\mathbf{e}_y - i\mathbf{e}_z}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_g = \frac{\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_z}{\sqrt{2}}$$

En utilisant

$$\mathbf{e}_y = \frac{\mathbf{e}_d + \mathbf{e}_g}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_z = \frac{i(\mathbf{e}_d - \mathbf{e}_g)}{\sqrt{2}}$$

Tout vecteur $\mathbf{E}$ peut être réécrit :

$$\mathbf{E} = A\mathbf{e}_y + B\mathbf{e}_z \tag{2.17}$$

$$= \frac{A + iB}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_d + \frac{A - iB}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_g \tag{2.18}$$

$$= E_d\mathbf{e}_d + E_g\mathbf{e}_g \tag{2.19}$$

2.5 Énergie du champ électromagnétique

2.5.1 Énergie électrostatique et magnétostatique

On montre que le travail E_{es} nécessaire fourni par un opérateur pour construire une distribution de charges $\rho(\mathbf{r})$ en amenant les charges de l'infini peut se mettre sous deux formes égales :

$$E_{\text{es}} = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \int \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} d^3\mathbf{r}. \tag{2.20}$$

De la même façon, l'énergie magnétostatique E_{ms} fournie par un opérateur pour créer une distribution de courants est donnée par :

$$E_{\text{ms}} = \frac{1}{2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \int \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} d^3\mathbf{r}. \tag{2.21}$$

2.5.2 Énergie électromagnétique. Vecteur de Poynting

La puissance des forces exercées par le champ électromagnétique sur une distribution de courants est donnée par

$$P = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (2.22)$$

Cette expression est facile à obtenir à partir de l'expression du travail de la force de Lorentz $\mathbf{F}$ sur une charge unique q de vitesse $\mathbf{v}$ qui s'écrit $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}$ car la force magnétique ne travaille pas. La somme sur un élément de volume contenant plusieurs charges donne lieu à $\sum_i q_i \mathbf{v}_i = \mathbf{j} d^3\mathbf{r}$. On peut établir un bilan d'énergie électromagnétique dans un volume V en partant du produit $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. L'équation de Maxwell-Ampère fournit alors

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.23)$$

Il suffit alors d'utiliser l'identité :

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B} \quad (2.24)$$

pour obtenir l'identité

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \text{div}\left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}\right). \quad (2.25)$$

Le terme de gauche peut se mettre sous la forme :

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right] \quad (2.26)$$

et s'interprète comme le taux de variation de la densité d'énergie par unité de volume. Le terme de droite du second membre s'interprète comme la divergence d'un vecteur donnant le flux d'énergie électromagnétique au travers d'une surface fermée. Ce vecteur est appelé vecteur de Poynting :

$$\boxed{\boldsymbol{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}} \quad (2.27)$$

2.6 Décomposition d'un champ vectoriel

On sait que les équations de Maxwell donnent l'expression du rotationnel et de la divergence des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. La question que l'on peut se poser est de savoir si la donnée de la divergence et du rotationnel d'un champ suffit à le définir ou au contraire fournit des informations redondantes. Un deuxième type de problème est rencontré lorsque l'on introduit la notion de potentiel, on est alors amené à utiliser des propriétés telles que si $\mathbf{rot} \mathbf{X} = \mathbf{0}$, alors $\mathbf{X}$ est de la forme $-\mathbf{grad} V$ qui sont généralement admises dans les exposés d'introduction aux équations de Maxwell. En fait la réponse à ces questions découle de la possibilité très générale de décomposer un champ en la somme d'un champ rotationnel et d'un champ irrotationnel, ou bien encore, comme on le verra, en la somme d'un champ transverse et d'un champ longitudinal. Ces résultats dépassent largement le cadre de l'électromagnétisme et sont applicables également aux champs de vitesse qui apparaissent en mécanique des fluides par exemple. Dans ce qui suit nous présentons cette décomposition canonique, ce résultat est connu sous le nom de théorème de Helmholtz.

2.6.1 Énoncé

Soit un champ vectoriel $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ fini, indéfiniment différentiable. On suppose que $\mathbf{rot} \mathbf{C}$ et $\text{div} \mathbf{C}$ sont à support borné. Alors $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{grad} V(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'} [\mathbf{C}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{et} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}_{\mathbf{r}'} [\mathbf{C}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.29)$$

où la notation $d^3\mathbf{r}'$ signifie $dx'dy'dz'$ (ce n'est donc pas un vecteur !). $\mathbf{r}'$ est la variable d'intégration, l'indice $\mathbf{r}'$ des opérateurs indique par rapport à quelle variable il faut dériver. Ce résultat est établi dans le complément 2A.

2.6.2 Applications

Afin d'établir aisément quelques propriétés, nous allons réécrire la décomposition sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{C}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{grad} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}_{\mathbf{r}'}[\mathbf{C}(\mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.30)$$

Propriété 1 :

La donnée de la divergence et du rotationnel d'un champ suffit à caractériser ce champ.

En effet, supposons que l'on connaisse $\text{div}\mathbf{C}$ et $\mathbf{rot}\mathbf{C}$. Il est alors possible de calculer les deux intégrales qui apparaissent ci-dessus puis d'en déduire $\mathbf{C}$. Les conséquences de ce lemme en électromagnétisme sont importantes :

- Les équations de Maxwell fournissent la divergence et le rotationnel de $\mathbf{E}$ et de $\mathbf{B}$. Elles sont donc suffisantes pour caractériser les champs.
- Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ est défini par la relation $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$. Seul son rotationnel étant fixé, il reste une indétermination sur la définition de $\mathbf{A}$.

Propriété 2 :

- Soit un champ $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{rot}\mathbf{C} = 0$. Alors $\mathbf{C}$ est de la forme $\mathbf{C} = -\mathbf{grad}V$.
- Soit un champ $\mathbf{C}$ tel que $\text{div}\mathbf{C} = 0$. Alors $\mathbf{C}$ est de la forme $\mathbf{C} = \mathbf{rot}\mathbf{A}$.

La démonstration est immédiate à partir du théorème de Helmholtz. L'application en est bien sûr l'introduction des potentiels.

2.6.3 Champs rotationnels et irrotationnels ; transverses et longitudinaux

Champs rotationnels et irrotationnels

Un champ $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{rot}\mathbf{C} = 0$ est dit irrotationnel. Un tel champ ne peut pas présenter de lignes de champ fermées. En effet, supposons que le champ présente une ligne de champ fermée.

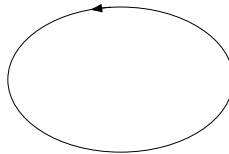


Figure 2.1 – Exemple de ligne de champ fermée

Calculons la circulation du champ sur cette ligne :

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} > 0$$

si on oriente la courbe dans le même sens que $\mathbf{C}$. Par ailleurs,

$$\int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{rot}(\mathbf{C}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

puisque $\mathbf{rot}\mathbf{C} = 0$.

Il y a contradiction, un champ $\mathbf{C}$ tel que $\mathbf{rot}\mathbf{C} = 0$ ne peut donc pas avoir de lignes de champ fermées. De façon analogue, on montre à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski que si $\text{div}\mathbf{C} = 0$, on ne peut pas avoir de point singulier où convergent les lignes de champ.

La décomposition du théorème de Helmholtz est donc une décomposition en champs du type de la figure 2.1 ($\mathbf{rot}\mathbf{A}$) et du type de la figure 2.2 ($-\mathbf{grad}V$).

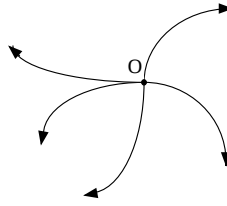


Figure 2.2 – Exemple de point de convergence pour deux lignes de champ.

Champs transverses et longitudinaux

Envisageons maintenant la décomposition dans *l'espace réciproque ou espace de Fourier*. Le champ peut être développé sur une base d'ondes planes, il s'écrit ainsi de façon générale (voir annexe 1) :

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{C}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (2.31)$$

Le rotationnel et la divergence s'en déduisent en dérivant sous le signe somme et en utilisant des formules classiques d'analyse vectorielle (voir annexe 2) :

$$\mathbf{rot}\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int [i\mathbf{k} \times \mathbf{C}(\mathbf{k})] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \int [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{k})] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad (2.33)$$

Ces expressions montrent que les quantités entre crochets sous l'intégrale sont les *transformées de Fourier de $\mathbf{rot}\mathbf{C}$ et de $\mathbf{div}\mathbf{C}$* respectivement. Naturellement, la transformée de Fourier n'étant pas autre chose qu'une décomposition en ondes planes, on retrouve les expressions utilisées comme règle de calcul dans le cas des ondes planes.

Par définition

- un champ pour lequel $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ est perpendiculaire à $\mathbf{k}$ est un champ transverse
- un champ pour lequel $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ est parallèle à $\mathbf{k}$ est un champ longitudinal.

Montrons que cette décomposition est identique à la précédente :

$$\text{transverse} = \text{rotationnel}; \quad \text{longitudinal} = \text{irrotationnel}.$$

Dans le cas d'un champ transverse, il est clair que $\mathbf{div}\mathbf{C}$ est nul d'après (2.33), il s'agit donc d'un champ rotationnel. Dans le cas d'un champ longitudinal, $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ est parallèle à $\mathbf{k}$ ce qui implique que $\mathbf{rot}\mathbf{C}$ est nul d'après (2.32) : c'est donc un champ irrotationnel de la forme $-\mathbf{grad}V(\mathbf{r})$.

Points clés

- ❶ Équations de Maxwell microscopiques.
- ❷ Potentiel scalaire et potentiel vecteur.
- ❸ Équation de propagation dans le vide.
- ❹ Vecteur de Poynting.
- ❺ Polarisation.

Compléments du chapitre 2

2A Complément a : théorème de Helmholtz

Théorème de Helmholtz

2A.1 Théorème

Soit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ un champ vectoriel réel, dérivable, fini, vérifiant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = s(\mathbf{r}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{C}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

On suppose de plus que $\mathbf{E}$ s'annule à l'infini et que $\int \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r}$ est fini².

Alors, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ peut s'écrire :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

où les champs ϕ et $\mathbf{A}$ sont donnés par :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2A.1)$$

2A.2 Démonstration

D'après la relation $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) \\ &= \operatorname{grad}(s) - \operatorname{rot} \mathbf{C} \end{aligned}$$

Le second membre de l'équation est connu si les termes sources s et $\mathbf{C}$ sont connus. Chaque composante de $\mathbf{E}$ vérifie alors une équation de Laplace de la forme :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2A.2)$$

d'où le nom « source » attribué à s et à $\mathbf{C}$.

Avec la condition aux limites

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) = 0$$

2. On peut penser que cette condition ne s'applique pas à des champs électromagnétiques qui décroissent en $1/r$ à l'infini. Il faut noter qu'un champ monochromatique du type $\mathbf{E}_0 \frac{\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]}{r}$ existe de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. De ce fait, il a une énergie infinie. Le problème disparaît si l'on considère un champ dépendant du temps $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ à un instant t fixé, créé par des sources allumées à l'instant $t = 0$. Alors, le champ est entièrement contenu dans une sphère de rayon $R = ct$. L'énergie, finie, est proportionnelle à $\int \mathbf{E}^2 d^3\mathbf{r}$.

on sait que la solution de l'équation (2A.2) s'écrit :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

On en déduit que $\mathbf{E}$ peut donc se mettre sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (2A.3)$$

L'indice $\mathbf{r}'$ des opérateurs rotationnels et divergence indiquent que les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées de $\mathbf{r}'$. Afin d'obtenir la forme (2A.1), il suffit d'effectuer quelques manipulations. On note tout d'abord que :

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + s(\mathbf{r}') \mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$$

et

$$\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = -\mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' &= \int_V \mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} \left[\frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3\mathbf{r}' + \int_V s(\mathbf{r}') \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3\mathbf{r}' \\ &= \int_S \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{S}' + \mathbf{grad}_{\mathbf{r}} \left[\int_V \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \right] \end{aligned}$$

La première intégrale tend vers zéro quand le volume V tend vers l'infini car le champ est nul à l'extérieur d'une sphère de rayon fini. Dans le second terme, on a pu permuter le gradient par rapport à $\mathbf{r}$ et l'intégrale par rapport à $\mathbf{r}'$ car cette dernière est finie. En effet, le terme r'^2 du volume élémentaire $d^3\mathbf{r}' = r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi'$ compense la singularité en $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. On obtient finalement :

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{grad}_{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int \frac{s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = -\mathbf{grad}\phi$$

Un calcul analogue permet de montrer que

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \mathbf{rot}_{\mathbf{r}} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

ce qui achève d'établir l'équation (2A.1).

Chapitre 3

Principes de base de l'imagerie

Table des matières

3.1	Introduction	28
3.2	Propagation d'un faisceau	28
3.2.1	Position du problème	28
3.2.2	Équation de propagation et équation de Helmholtz	28
3.2.3	Formule de propagation du champ : développement en ondes planes	29
3.3	Ouverture angulaire et diffraction naturelle	30
3.4	La propagation paraxiale : diffractions de Fresnel et de Fraunhofer	31
3.4.1	Approximations de Fresnel et de Fraunhofer	31
3.4.2	Diffraction de Fraunhofer	32
3.5	Ondes évanescentes et limite de résolution	33
3.5.1	Notion de fréquence spatiale	33
3.5.2	Spectre des fréquences spatiales	33
3.5.3	La propagation est un filtre passe-bas de fréquences spatiales	34

3.1 Introduction

LES ondes sont de plus en plus largement utilisées pour le transport de l'information et de l'énergie. La maîtrise de leur propagation est un enjeu capital dans de très nombreux domaines (acoustique, optique, radar, micro-ondes, ...).

Dans ce chapitre, nous traitons de façon générale le problème de la propagation dans le vide : il s'agit de calculer le champ en un point (x, y, z) connaissant le champ dans le plan $z = 0$ et connaissant le comportement asymptotique du champ à grande distance de ce plan. Pour aborder ce problème, on peut partir de l'équation différentielle satisfaite par le champ électrique : l'équation de propagation dans le vide. La démarche est alors classique : on recherche la solution générale qui satisfait aux conditions aux limites. Dans la mesure où nous abordons ce problème dans le cadre des équations de Maxwell, le comportement ondulatoire du rayonnement est complètement pris en compte. Il faut noter que la résolution de cette problématique est commune à l'ensemble des phénomènes ondulatoires qui respectent l'équation de propagation des ondes.

Pour traiter ce problème, nous allons montrer qu'il est possible d'établir simplement que le champ électrique peut s'écrire sous la forme d'une superposition d'ondes planes en tout point du demi-espace situé en $z > 0$. Nous verrons ensuite comment l'on peut déduire de la solution générale que nous allons établir, la forme habituelle du principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation paraxiale. On retrouvera des expressions très proches de celles que l'on rencontre en rayonnement. Les principales idées restent valables : notion de champ lointain, directionnalité notamment.

3.2 Propagation d'un faisceau

3.2.1 Position du problème

Nous étudions la propagation du rayonnement monochromatique de pulsation ω issu d'une source qui n'est pas précisée. Nous prenons comme donnée de base du problème la connaissance du champ électrique sur le plan $z = 0$. Il peut s'agir par exemple d'un faisceau laser qui traverse le plan $z = 0$ ou bien du champ dû à une antenne qui serait placée en un point de l'espace en $z < 0$. Nous supposons que la propagation s'effectue dans le vide. Ce que nous cherchons à obtenir est une expression explicite du champ électrique en tout point $z > 0$. Il est clair que le problème modèle de la diffraction d'une onde plane par un écran se ramène à ce problème. Toutefois, cette façon de poser le problème est plus générale, elle inclut également l'étude de l'élargissement d'un faisceau dans le vide, l'étude de l'amplitude du champ au voisinage d'un point de focalisation (infinie d'après l'optique géométrique!!), etc.

3.2.2 Équation de propagation et équation de Helmholtz

Le point de départ est l'équation de propagation. Par souci de simplicité, nous allons travailler avec une fonction scalaire Ψ qui représente l'une des composantes du champ électrique. La prise en compte de l'aspect vectoriel se fait de façon immédiate pour ce problème. Le champ satisfait alors à l'équation :

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

où c représente la vitesse de la lumière dans le vide. En pratique, le champ électromagnétique est non nul dans une fenêtre temporelle de taille finie. On peut donc le représenter à l'aide d'une transformée de Fourier par rapport au temps sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.2)$$

Dans l'équation ci-dessus, nous utilisons la convention de notation qui consiste à écrire $f(t)$ une fonction dépendant du temps et $f(\omega)$ sa transformée de Fourier. Il est plus rigoureux de noter $\tilde{f}(\omega)$ la transformée de Fourier car il s'agit bien d'une fonction différente. Cette convention a été choisie dans le but de simplifier les notations. En insérant cette expression dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \left[\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\mathbf{r}, \omega) \right] = 0. \quad (3.3)$$

Puisque les fonctions $\exp(-i\omega t)$ forment une base de l'espace des fonctions de carré sommable, l'intégrale est nulle si pour toute pulsation ω , l'égalité

$$\boxed{\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\mathbf{r}, \omega) = 0} \quad (3.4)$$

est vérifiée. Cette équation, satisfaite par la transformée de Fourier du champ $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$, est appelée équation de Helmholtz.

On remarque que les ondes planes de forme $\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \Psi_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ sont des solutions de cette équation à condition que le module du vecteur d'onde, $|\mathbf{k}|$, respecte la relation de dispersion $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$.

3.2.3 Formule de propagation du champ : développement en ondes planes

Avant d'entamer la résolution du problème, étudions quelle forme va prendre la solution. L'amplitude d'un champ quelconque, $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$, peut s'écrire dans la base des ondes planes en utilisant la transformée de Fourier :

$$\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \Psi(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.5)$$

Ce champ est solution de l'équation de propagation si et seulement si toutes les ondes planes de sa décomposition respectent la relation de dispersion. Comme celle-ci lie les trois composantes du vecteur d'onde à ω , le champ va s'écrire sous la forme d'une intégrale double.

La démarche de détermination du champ électrique est tout à fait classique. Le champ $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$ obéit à l'équation de Helmholtz dans le vide et sa valeur à la surface $z = 0$ est connue. Afin de simplifier les notations, nous omettrons dans ce qui suit la dépendance par rapport à la pulsation ω .

Dans tout plan $z = \text{constante}$, le champ $\Psi(x, y, z)$ est une fonction de x et y : nous introduisons la décomposition de Fourier de Ψ suivant x et y seulement. Il est toujours possible de le faire puisque la fonction est de carré sommable dans le plan (x, y) . En effet, l'intégrale du carré du champ sur le plan (x, y) est à une constante près le flux du vecteur de Poynting qui est nécessairement fini.

$$\Psi(x, y, z) = \iint \Psi(\alpha, \beta, z) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (3.6)$$

Le problème de la détermination de $\Psi(x, y, z)$ est alors ramené à la recherche de sa transformée de Fourier, $\Psi(\alpha, \beta, z)$. Nous obtenons l'équation satisfaite par $\Psi(\alpha, \beta, z)$ en reportant (3.6) dans (3.1). Ainsi,

$$\iint \left[\frac{\partial^2 \Psi(\alpha, \beta, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) \Psi(\alpha, \beta, z) \right] e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} = 0 \quad (3.7)$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial^2 \Psi(\alpha, \beta, z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2 \right) \Psi(\alpha, \beta, z) = 0 \quad (3.8)$$

La solution générale de cette équation s'écrit immédiatement sous la forme de deux exponentielles. Nous introduisons la notation suivante :

$$\begin{aligned} \text{pour } \frac{\omega^2}{c^2} \geq \alpha^2 + \beta^2 : \quad \gamma &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2} \\ \text{pour } \frac{\omega^2}{c^2} < \alpha^2 + \beta^2 : \quad \gamma &= i\sqrt{-\frac{\omega^2}{c^2} + \alpha^2 + \beta^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Avec ce choix de détermination, la solution générale s'écrit :

$$\Psi(\alpha, \beta, z) = A(\alpha, \beta) e^{i\gamma z} + B(\alpha, \beta) e^{-i\gamma z} \quad (3.10)$$

Si l'on considère un champ se propageant dans le sens des z positifs, B est nul. La détermination de A se fait en écrivant l'expression du champ dans le plan $z = 0$: $A(\alpha, \beta) = \Psi(\alpha, \beta, z = 0)$. $A(\alpha, \beta)$ est donc la

transformée de Fourier du champ dans le plan $z = 0$. Finalement, le champ en tout point (x, y, z) s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x, y, z) = \iint \Psi(\alpha, \beta, 0) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \frac{d\alpha}{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi} \quad (3.11)$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que le champ s'écrit sous la forme d'une superposition d'ondes planes dont les vecteurs d'ondes ont pour composantes (α, β, γ) qui, en vertu de la relation (3.9), satisfont à la relation de dispersion dans le vide, que γ soit réel ou imaginaire :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.12)$$

Lorsque γ est réel, $e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$ est une onde progressive. Son vecteur d'onde fait un angle θ avec l'axe Oz avec $\sin \theta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/|\mathbf{k}|$. Lorsque γ est imaginaire pur, $e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} = e^{-|\gamma|z} e^{i(\alpha x + \beta y)}$ décrit une onde évanescence.

L'amplitude complexe de chaque onde plane est donnée très simplement par la valeur de la transformée de Fourier du champ dans le plan (x, y) :

$$\Psi(\alpha, \beta, 0) = \iint \Psi(x, y, 0) e^{-i(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (3.13)$$

$\Psi(\alpha, \beta, 0)$ est appelé spectre angulaire du champ.

Il est important de remarquer qu'aucune approximation n'a été faite ici et qu'ainsi l'expression (3.11) fournit une solution exacte au problème de la diffraction dans le sens où si on place un objet diffractant en $z = 0$, on peut connaître exactement le champ en $z > 0$.

3.3 Ouverture angulaire et diffraction naturelle

Plaçons-nous dans le cas où Oz est la direction principale de propagation et intéressons-nous à la divergence du rayonnement en $z > 0$. De par les propriétés de la transformée de Fourier, on peut montrer qu'il existe $\alpha_{\max}$ pour lequel $\psi(\alpha, \beta, z = 0)$ prend des valeurs nulles ou très faibles lorsque $\alpha^2 + \beta^2 > \alpha_{\max}^2$. $\alpha_{\max}$ représente la demi-largeur du spectre angulaire du champ. L'angle $\theta_{\max}$, défini par $\sin \theta_{\max} = \alpha_{\max}/|\mathbf{k}|$, constitue l'ouverture angulaire du rayonnement en $z > 0$. Il correspond à la distance angulaire maximale entre l'axe Oz et les directions de propagation des ondes planes décrivant le champ.

Toujours en s'appuyant sur les propriétés de la transformée de Fourier, on peut déduire une propriété très générale concernant l'ouverture angulaire du rayonnement $\theta_{\max}$. Ainsi, si l'on note Δx la largeur du faisceau dans le plan $z = 0$, on peut écrire :

$$\Delta x \alpha_{\max} \geq 2\pi$$

Si le champ en $z = 0$ ne varie pas rapidement sur Δx , cette inégalité fournit un ordre de grandeur de $\alpha_{\max}$:

$$\Delta x \alpha_{\max} \approx 2\pi$$

En remarquant que $\alpha = 2\pi/\lambda \sin \theta$, cette dernière relation s'écrit $\sin \theta_{\max} \approx \lambda/\Delta x$. Pour des petits angles, on obtient :

$$\theta_{\max} \approx \lambda/\Delta x$$

Il est important de bien noter que ce résultat découle de la structure finie du champ électromagnétique. Il n'est nullement nécessaire d'avoir des bords matériels pour voir apparaître la diffraction. Toutefois, la résolution angulaire dans le cas de l'imagerie trouve en général sa limitation du fait de la diffraction induite par la troncature du faisceau à la réception (pupille optique, antenne radar, etc). Un raisonnement très proche peut être effectué en prenant comme point de départ de l'analyse la relation d'incertitude de Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq h$. On peut raisonner sur un faisceau se propageant le long de l'axe Oz et de largeur finie Δx suivant Ox . En utilisant la relation de de Broglie $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, on retrouve le même résultat.

Pour obtenir une estimation de l'ouverture angulaire du rayonnement, nous avons remplacé l'inégalité par une égalité. Nous avons signalé que ceci n'est valable que si le champ électromagnétique ne varie que très

lentement dans l'ouverture. Nous allons préciser ce point dans ce paragraphe. Il est clair que si le champ varie sur l'ouverture, des directions de propagation plus éloignées de l'axe Oz apparaîtront dans l'intégrale de l'expression (3.11). Citons deux exemples concrets de situations de ce type. On peut imaginer que l'on dispose une grille de période égale à 5 longueurs d'onde sur l'ouverture. L'amplitude du champ varie donc de façon appréciable sur une distance de 5 longueurs d'onde. Cela se traduit par l'apparition de fréquences spatiales élevées discrètes (du fait de la périodicité) dans le spectre fourni par (3.13). Le réseau diffracte la lumière dans des directions discrètes qui s'écartent fortement de l'axe. Un deuxième cas important est celui d'un faisceau de taille limitée obtenu en disposant une ouverture juste derrière un corps noir. On sait d'expérience que dans ce cas le rayonnement est isotrope quelle que soit la taille de l'ouverture. Cela reste vrai même si l'on utilise un filtre sélectionnant une seule longueur d'onde. Cela semble être en contradiction avec la relation $\theta_{\max} \approx \lambda/\Delta x$. De plus, l'intensité lumineuse est homogène sur toute l'ouverture. Dans ce cas, c'est la phase du rayonnement qui varie très rapidement sur l'ouverture. De façon plus précise, la phase est en fait une quantité aléatoire caractérisée par une fonction de corrélation dont la longueur caractéristique (appelée longueur de cohérence spatiale) est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Le concept d'onde plane est très mal adapté à la description du rayonnement thermique dont la source est constituée de milliards d'atomes décorrélés. Il faut pour cela une description statistique qui sort du cadre de ce cours.

Le problème que l'on vient d'étudier est en tout point analogue à l'étude de l'évolution de la largeur d'un paquet d'ondes au cours du temps (voir cours de Physique Quantique). La variable z joue ici le rôle de la variable temps dans le problème du paquet d'ondes. La structure du champ électrique dans le plan (x, y) est l'équivalent du paquet d'ondes. L'évolution du faisceau — on parle aussi de diffraction — n'est rien d'autre qu'un élargissement du faisceau. Ceci est entièrement analogue à l'élargissement du paquet d'ondes.

3.4 La propagation paraxiale : diffractions de Fresnel et de Fraunhofer

Le résultat qui vient d'être présenté est équivalent à l'énoncé classique du principe de Huygens-Fresnel :

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint \Psi(x', y', 0) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta dx' dy' \quad (3.14)$$

où θ est l'angle entre le vecteur $(x - x', y - y', z)$ et l'axe Oz . Une démonstration en est proposée dans le complément 3A.

À partir de l'expression (3.14), il est possible d'obtenir des expressions analytiques approchées qui correspondent aux deux cas de diffraction les plus importants : la diffraction de Fraunhofer en champ lointain et la diffraction de Fresnel en champ proche. Nous verrons que le champ lointain est donné par la transformée de Fourier du champ après la pupille. Calculer une figure de diffraction en champ lointain revient donc à calculer une transformée de Fourier. On a donc accès à la transformée de Fourier du champ c'est-à-dire à son spectre de fréquences spatiales.

3.4.1 Approximations de Fresnel et de Fraunhofer

Nous allons chercher une expression simplifiée de (3.14) en fonction de la position du point d'observation par rapport à l'écran. Dans ce qui suit, on s'intéresse à des directions voisines de la direction de propagation Oz . On parle d'approximation paraxiale. Concrètement, nous nous plaçons ici dans le cas où un écran opaque avec une ouverture est placé dans le plan $z = 0$. Nous supposons pour simplifier que le champ en $z = 0$ peut être considéré comme nul en dehors de l'ouverture. L'expérience montre que cette approximation donne de très bons résultats dès que l'on s'éloigne de l'écran. Soit L la dimension caractéristique de l'ouverture, l'approximation paraxiale entraîne que

$$z \gg L \quad (3.15)$$

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, $\cos \theta \approx 1$. Le terme d'amplitude dans l'intégrale, $\cos \theta / r$, peut être approché par $1/z$. En revanche, l'erreur sur le terme de phase dans l'exponentielle complexe au

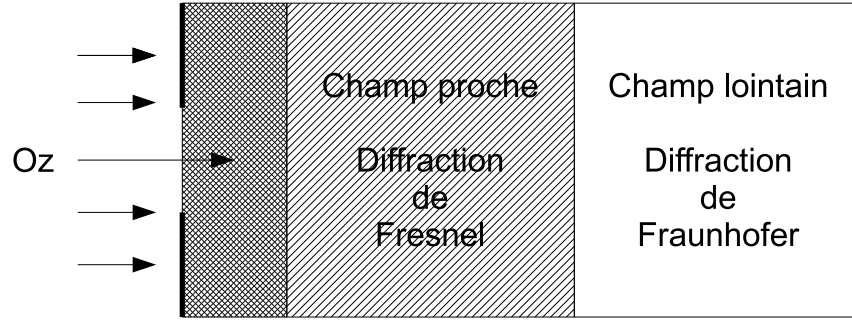


Figure 3.1 – Domaine de validité des approximations

numérateur, kr , doit être négligeable par rapport à 2π . Une expression approchée de ce terme peut être obtenue en faisant un développement limité de r autour de z :

$$r = z + \frac{1}{2z}[(x - x')^2 + (y - y')^2] + \dots$$

Le développement de r fait apparaître les deux approximations possibles :

$$r = z + \underbrace{\frac{1}{2z}(x^2 + y^2) - \frac{1}{z}(xx' + yy') + \frac{1}{2z}(x'^2 + y'^2)}_{\text{approx. de Fresnel}} \dots$$

approx. de Fraunhofer

La condition liée à l'approximation de Fraunhofer s'écrit :

$$\boxed{\frac{L^2}{\lambda} \ll z} \quad (3.16)$$

Cette condition est également appelée condition de champ lointain. On parle de condition de champ proche pour l'approximation de Fresnel. Pour une longueur d'onde de $0,5 \mu\text{m}$ et une dimension caractéristique de la pupille de 5 mm , on trouve que la limite se situe à 50 m !

À noter que les conditions (3.15) et (3.16) relatives à l'approximation de Fraunhofer seront sensiblement identiques aux conditions obtenues dans le cadre du rayonnement en champ lointain (voir chapitre 4). Il est toutefois important de remarquer qu'il ne s'agit pas exactement du même problème, en particulier on considère une direction privilégiée ici, ce qui ne sera pas le cas en rayonnement.

3.4.2 Diffraction de Fraunhofer

Reportons l'expression approchée de r dans l'intégrale (3.14). En introduisant la fonction transparence $t(x,y)$ qui caractérise la pupille et qui vaut 1 lorsque (x,y) est dans l'ouverture et 0 ailleurs, le champ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\Psi(x,y,z) = \frac{1}{i\lambda z} \exp \left[ik \left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \right) \right] \iint t(x',y') \Psi(x',y',0) \exp \left(-i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx' + yy'}{z} \right) dx' dy'} \quad (3.17)$$

Il apparaît clairement que l'intégrale est la transformée de Fourier de la quantité $t(x',y')\Psi(x',y',0)$ à un terme de phase près, la variable $x/(\lambda z)$ jouant le rôle d'une fréquence spatiale f_x et $\alpha = 2\pi f_x$ celui du vecteur d'onde suivant x . Cette expression montre que le champ lointain dans une direction caractérisée par les cosinus directeurs (c'est-à-dire les composantes du vecteur unitaire) λf_x et λf_y est donné par la transformée de Fourier du champ après la pupille. Calculer une figure de diffraction en champ lointain revient donc à calculer une transformée de Fourier.

L'expression en champ lointain (3.17) est valide sous réserve que la distance de propagation soit grande. On montre dans le complément 3B de ce chapitre que l'expression du champ au foyer d'une lentille est analogue à son expression en champ lointain.

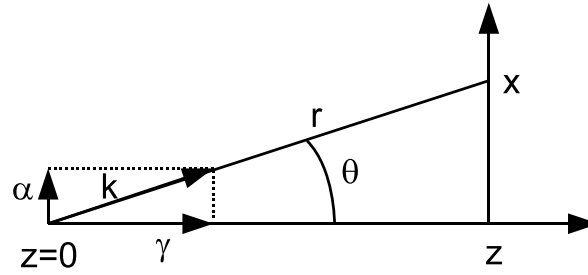
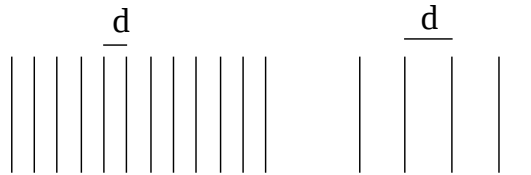


Figure 3.2 – Relation entre un vecteur d'onde en $z = 0$ et la répartition en champ lointain

3.5 Ondes évanescentes et limite de résolution

3.5.1 Notion de fréquence spatiale

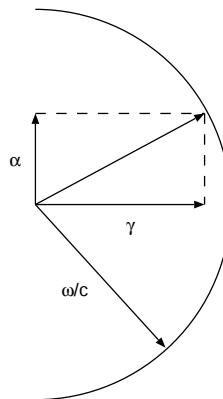
Lorsque l'on effectue le calcul de l'amplitude complexe indiqué en (3.13) on obtient les amplitudes des ondes planes dont le vecteur d'onde a pour composantes (α, β) . Il est possible de donner une autre signification à ce calcul. En effet, effectuer la transformée de Fourier de $\Psi(x, y, 0)$ revient à décomposer en fréquences spatiales la fonction $\Psi(x, y, 0)$. Par exemple, la composante α peut également s'écrire sous la forme $2\pi f_x$ où f_x est une fréquence spatiale. Cette notion de fréquence spatiale est intuitive sur l'exemple d'une grille périodique de période d telle qu'on la voit sur la figure suivante.



La fréquence spatiale associée vaut $1/d$ horizontalement, elle est nulle suivant la verticale (la période est infinie). Dans le cas de la figure ci-dessus, le spectre fréquentiel ferait apparaître la fréquence fondamentale $1/d$, ainsi que les harmoniques.

3.5.2 Spectre des fréquences spatiales

D'après l'expression (3.11), à chaque fréquence spatiale de la fonction $\Psi(x, y, 0)$ correspond une onde plane (donc une direction de propagation) dans la décomposition de $\psi(x, y, z)$. On a représenté $\mathbf{k}(\alpha, \gamma)$ sur la figure ci-dessous ($k = \omega/c$).



On constate qu'une faible fréquence spatiale (faible valeur de α) correspond à une onde plane proche de l'axe Oz tandis qu'une valeur élevée de α correspond à une direction éloignée de l'axe Oz . Dans le cas de

la grille périodique décrite ci-dessus, le spectre est discret ; il existe donc un nombre discret d'ondes planes pouvant se propager : ce sont les ordres du réseau.

Comme cela a déjà été souligné, la transformée de Fourier du champ est détectable en champ lointain, ou dans le plan focal d'une lentille. Dans ce dernier cas, le lien se fait de la façon suivante : à une fréquence spatiale du champ dans le plan $z = 0$ d'amplitude $\Psi(\alpha, \beta, 0)$ correspond une direction de propagation caractérisée par le vecteur d'onde de coordonnées (α, β, γ) . À cette direction de propagation correspond un point dans le plan focal. La répartition de l'intensité lumineuse dans le plan focal reproduit le spectre du champ en $z = 0$. De façon plus précise, l'intensité est proportionnelle au carré du champ donc à $|\Psi(\alpha, \beta, 0)|^2$. En quelque sorte, la propagation joue le rôle d'un analyseur de spectre. Toutefois, nous allons voir que cette analyse est limitée aux plus basses fréquences du spectre.

3.5.3 La propagation est un filtre passe-bas de fréquences spatiales

Nous venons de discuter de la notion de fréquence spatiale. Nous allons étudier le rôle de filtre passe-bas du phénomène de propagation. Considérons des exemples de situations pour lesquelles il existe des fréquences spatiales élevées dans le spectre du champ en $z = 0$, c'est-à-dire pour lesquelles l'amplitude du champ présente des variations rapides : objet ou structure de taille plus petite que la longueur d'onde comme une poussière, une rayure, un bord net, etc.

Prenons par exemple le cas d'une grille de pas d . Son spectre spatial comporte les harmoniques de fréquence n/d où n est un nombre entier positif. Si l'on se reporte à la figure précédente, on constate qu'il n'est pas possible d'associer une direction de propagation (α, β) à une fréquence spatiale supérieure à $\omega/(2\pi c) = 1/\lambda$ où λ est la longueur d'onde du rayonnement. Cela correspond à des ondes évanescentes qui ont une décroissance exponentielle suivant z . Au-delà de quelques longueurs d'onde, leur contribution au champ devient négligeable. Seules les ondes planes telles que :

$$\alpha^2 + \beta^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.18)$$

ont une composante du vecteur d'onde suivant z et peuvent donc se propager.

En résumé, seules les ondes satisfaisant à (3.18) peuvent se propager. Pour une onde propagative, la composante maximale du vecteur d'onde dans le plan transverse à la propagation vaut $\omega/c = 2\pi/\lambda$ et la fréquence spatiale maximale propagée est $1/\lambda$.

Cela a longtemps été considéré comme la limite fondamentale pour la télédétection et l'imagerie. Lors de la propagation on perd toute l'information sur les fréquences spatiales les plus élevées. En d'autres termes, les détails fins de la structure de $\Psi(x, y, 0)$ plus petits que la longueur d'onde du rayonnement sont perdus lors de la propagation. En particulier, toute image optique ne peut donner des détails plus petits que la longueur d'onde puisque la fréquence maximale est $1/\lambda$, ceci quel que soit le diamètre de la pupille de l'instrument. C'est la limite de résolution de Rayleigh.

Il est toutefois possible de dépasser cette limite. Pour réaliser ceci, il faut aller chercher l'information là où elle se trouve, c'est-à-dire très près de la structure étudiée. Imaginons une surface sur laquelle se trouvent gravées des structures petites devant la longueur d'onde. Un détecteur placé à une distance petite devant la longueur d'onde sera sensible aux ondes évanescentes (ou ondes de surface). Il sera donc sensible à des fréquences spatiales élevées et pourra fournir des images dont la résolution est meilleure que la longueur d'onde de détection. C'est le cas par exemple des techniques de microscopie en champ proche.

Points clés

- ❶ Équation de Helmholtz.
- ❷ Développement en ondes planes.
- ❸ Diffraction naturelle et ouverture angulaire.
- ❹ Diffraction en champ lointain.

Compléments du chapitre 3

3A Complément A : le principe de Huygens-Fresnel retrouvé

3A.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est de montrer l'équivalence entre l'approche qui vient d'être présentée et l'énoncé classique du principe de Huygens-Fresnel.

Rappelons son énoncé. On considère une onde incidente éclairant une ouverture dans un plan opaque. Le champ diffracté est obtenu en calculant le rayonnement de sources secondaires fictives placées dans l'ouverture. Plus précisément, chaque point de l'ouverture est la source d'une onde sphérique dont l'amplitude est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente.

D'un point de vue mathématique, on peut dire qu'il s'agit de faire un changement de base. L'expression du champ que l'on vient d'établir revient à décomposer le champ sur une base d'ondes planes. En revanche, le principe de Huygens-Fresnel revient à décomposer le champ sur une base d'ondes sphériques du type $\exp(ikr)/r$. Vu sous cet angle, le passage d'une formulation à l'autre ressemble à un changement de base. Le problème sera donc résolu si l'on sait exprimer une onde sphérique sur une base d'ondes planes.

3A.2 Développement d'une onde sphérique en ondes planes

Le développement de Weyl ci-dessous est une représentation d'une onde sphérique sous la forme d'une somme d'ondes planes :

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{1}{\gamma} \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma|z|)] d\alpha d\beta \quad (3A.1)$$

où γ est la fonction de α et β définie par (3.9). Nous allons avoir besoin par la suite de la transformée de Fourier de $\exp[i\gamma(\alpha, \beta)|z|]$. Par dérivation suivant z de l'équation (3A.1) dans le cas $z > 0$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = -\frac{1}{2\pi} \int \exp[i\gamma(\alpha, \beta)|z|] \exp[i(\alpha x + \beta y)] \frac{d\alpha d\beta}{2\pi} \quad (3A.2)$$

3A.3 Le principe de Huygens-Fresnel

Revenons au point de départ : l'expression du champ donnée par l'équation (3.11). On y constate que le champ au point (x, y, z) est donnée par la transformée de Fourier inverse du produit de deux fonctions : $\Psi(\alpha, \beta, 0)$ et $\exp[i\gamma(\alpha, \beta)|z|]$. On sait (voir annexe 1A) que l'on peut écrire cela sous la forme d'un produit de convolution des deux transformées de Fourier. En utilisant alors le résultat (3A.2), on obtient :

$$\Psi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint \Psi(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] dx' dy' \quad (3A.3)$$

où $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$. On remarque que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta \approx ik \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta$$

où θ est l'angle entre $(x - x', y - y', z)$ et l'axe Oz . On obtient alors :

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{i\lambda} \iint \Psi(x', y', 0) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta dx' dy' \quad (3A.4)$$

Cette expression traduit le principe de Huygens-Fresnel. Elle exprime que le champ en tout point (x, y, z) résulte du rayonnement de sources ponctuelles secondaires d'amplitude $\Psi(x', y', 0)$ placées dans l'ouverture. Dans le chapitre suivant, on établira ce résultat par une approche différente. Avant le développement des ordinateurs, une expression du champ sous forme de transformée de Fourier était de peu d'utilité dans la plupart des cas. C'est ce qui explique que la présentation de la diffraction en tant que développement en ondes planes est rarement utilisée dans les ouvrages d'optique physique et d'électromagnétisme. Aujourd'hui, il existe des algorithmes de transformée de Fourier très efficaces (Transformée de Fourier Rapide) de sorte que l'expression (3.11) est souvent plus intéressante que l'expression (3A.4).

3B Complément B : champ au foyer d'une lentille

Nous avons vu dans le paragraphe consacré à la diffraction de Fraunhofer que l'amplitude du champ diffracté dans une direction définie par ses cosinus directeurs λf_x et λf_y , est proportionnelle à la transformée de Fourier 2D du champ, $\Psi(\alpha = 2\pi f_x, \beta = 2\pi f_y, z = 0)$. Par ailleurs, l'optique géométrique nous apprend qu'une lentille associe un point du plan focal image à une direction de l'espace objet. Ainsi, une onde plane se propageant dans la direction définie par f_x, f_y sera focalisée par une lentille convergente de distance focale f en un point du plan focal image de coordonnées $(f \times \lambda f_x, f \times \lambda f_y)$. On s'attend donc à ce que le champ $\Psi(x, y, f)$ dans le plan focal soit proportionnel à $\Psi(\alpha = 2\pi f_x, \beta = 2\pi f_y, 0)$ où $x = f \times \lambda f_x$ et $y = f \times \lambda f_y$.

Nous allons établir ce résultat en calculant le champ diffracté par une lentille. La première étape est le calcul de la fonction transparence associée à la lentille que nous traitons comme une pupille. Il s'agit d'un type de pupille particulier appelé objet de phase. En effet, en négligeant la réflexion vitreuse (4%), le rôle de la lentille est d'introduire une différence de marche (donc une différence de phase) entre les rayons lumineux qui traversent des épaisseurs de verre différentes suivant leur distance à l'axe. De ce fait la transparence peut se mettre sous la forme $t(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]$. La deuxième étape est le calcul du champ diffracté par la lentille. On évalue le champ dans le plan focal image, il s'agit donc d'un calcul de diffraction de Fresnel (champ proche).

On considère une onde plane monochromatique se propageant suivant Oz . On considère une lentille d'épaisseur e sur l'axe optique. Sur le support de la pupille, la fonction d'une lentille consiste à transformer l'onde plane en une onde sphérique centrée sur son foyer. En se limitant à la propagation dans des directions proches de l'axe, c'est-à-dire lorsque l'ouverture de la lentille reste faible, ce déphasage proportionnel à l'écart entre le plan et la sphère peut être approximé par une fonction parabolique. Le coefficient de transmission de la lentille s'écrit alors :

$$\begin{cases} t(x', y') = \exp \left[ik(n-1)e - ik \frac{x'^2 + y'^2}{2f} \right] & \text{dans la pupille,} \\ t(x', y') = 0 & \text{en dehors de la pupille.} \end{cases} \quad (3B.1)$$

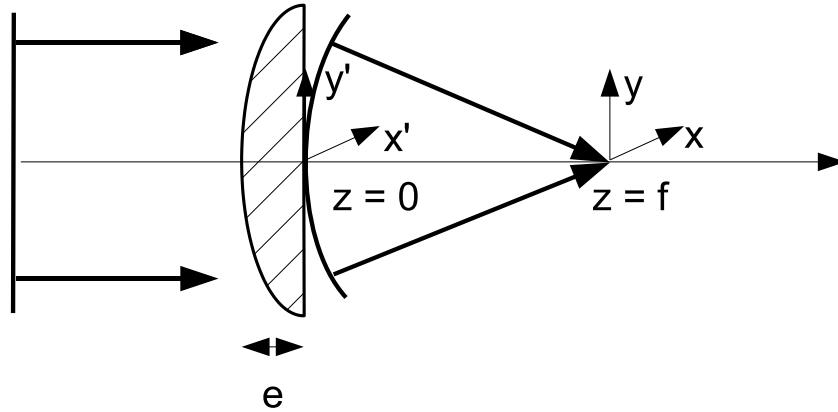


Figure 3B.1 – Système optique convergent : effet sur une onde plane

En appliquant la formule de propagation dans le cadre de l'approximation de Fresnel, le champ dans le plan focal s'écrit :

$$\Psi(x, y, f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp(ikf) \int \Psi(x', y', 0) t(x', y') \exp \left[ik \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}{2f} \right] dx' dy' \quad (3B.2)$$

soit encore :

$$\boxed{\Psi(x, y, f) = \exp(ik(n-1)e) \frac{1}{i\lambda f} \exp \left[ik \left(f + \frac{x^2 + y^2}{2f} \right) \right] \int_{\text{pupille}} \Psi(x', y', 0) \exp \left[-ik \frac{xx' + yy'}{f} \right] dx' dy'} \quad (3B.3)$$

Au terme de phase introduit par la traversée de la lentille sur l'axe près, on retrouve ici l'expression obtenue dans le cadre de l'approximation du champ lointain ou approximation de Fraunhofer. Le champ obtenu sur un écran situé dans le plan focal image est donc la transformée de Fourier du champ juste avant la lentille multipliée par un facteur de phase.

Chapitre 4

Rayonnement

Table des matières

4.1	Aperçu intuitif du mécanisme de rayonnement d'une charge ponctuelle	40
4.1.1	Description de l'onde rayonnée	40
4.1.2	Propriétés	40
4.1.3	Formulation générale du problème	41
4.2	Notion de fonction de Green. Cas de l'électrostatique	41
4.2.1	Introduction	41
4.2.2	Distribution de Dirac et charge ponctuelle	41
4.2.3	Cas d'une répartition de charges	42
4.2.4	Généralisation	43
4.3	Potentiels retardés	43
4.3.1	Recherche de la fonction de Green du problème	43
4.3.2	Méthode de calcul de la fonction de Green	44
4.3.3	Solution des potentiels retardés	44
4.4	Rayonnement en champ lointain	45
4.4.1	Approximation du champ lointain	45
4.4.2	Approximation dipolaire électrique	46
4.4.3	Calcul du champ rayonné	48
4.4.4	Puissance rayonnée dans tout l'espace en champ lointain	49

DANS ce chapitre, nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'expression des potentiels créés par une charge ponctuelle, puis par une distribution de charges et de courants. Ensuite, nous simplifierons ces expressions dans le cadre de l'approximation des champs lointains. Dans un deuxième temps, nous allons établir l'expression des potentiels dans le cadre de l'approximation dipolaire. La fin du chapitre est consacrée à la recherche de l'expression des champs électrique et magnétique ainsi que de la puissance rayonnée en champ lointain.

4.1 Aperçu intuitif du mécanisme de rayonnement d'une charge ponctuelle

4.1.1 Description de l'onde rayonnée

On se propose dans cette partie de montrer simplement qu'une charge se déplaçant avec un mouvement *accélééré* est une source de rayonnement, c'est-à-dire d'une onde qui se propage. On considère que la charge, initialement immobile en O , se déplace d'une distance a pendant un laps de temps dt court, puis s'immobilise en O' . La charge est donc soumise à un mouvement accéléré puis décéléré pendant l'intervalle de temps $[0, dt]$.

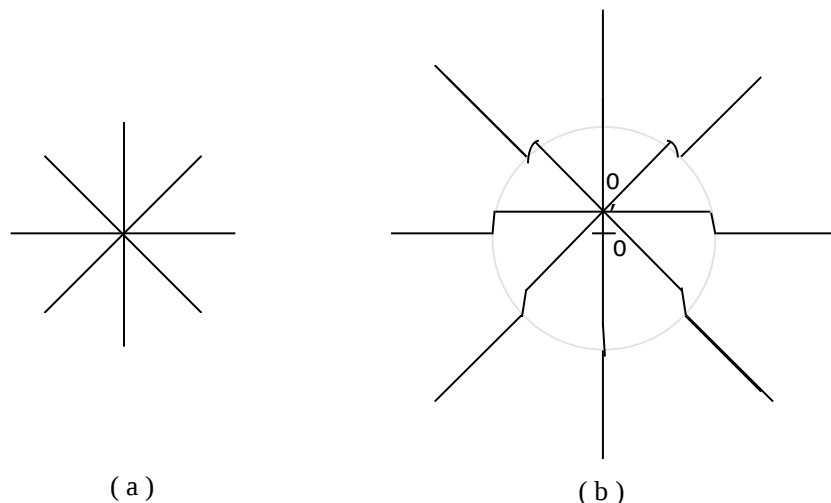


Figure 4.1 – Rayonnement d'une charge ponctuelle

Les lignes de champ du vecteur électrique créé par la charge lorsqu'elle est immobile ($t < 0$) sont des lignes radiales, (voir figure 1a) centrées en O . Pour un instant $t = \infty$ les lignes de champ sont les mêmes mais centrées sur le point O' . Enfin pour un instant t fini positif, c'est-à-dire postérieur au déplacement de la charge, on peut séparer l'espace en deux régions : l'ensemble des points qui sont à l'intérieur d'une sphère de rayon $r = ct$ qui ont été rejoints par la perturbation et celui des points extérieurs à la sphère de rayon $r = c(t + dt)$ qui n'ont pas encore vu la perturbation. Dans la première région, les lignes de champ sont radiales centrées sur O' tandis que dans la deuxième région, les lignes de champ sont également radiales mais centrées sur O . Le champ a donc subi une translation OO' . Cela revient à dire que l'on a ajouté un champ orthoradial pendant le passage de la perturbation. Les lignes de champ sont donc orthoradiales dans la zone de la perturbation, c'est-à-dire dans la zone où se trouve le *champ rayonné* (voir figure 1b).

4.1.2 Propriétés

La simple observation du schéma représentant les lignes de champ permet de mettre en évidence un certain nombre de propriétés générales du champ rayonné.

- Le champ est localisé dans une coquille de rayon $r = ct$ et d'épaisseur cdt , il s'agit d'une onde sphérique.

- Le champ rayonné, c'est-à-dire le champ qui est représenté par les lignes de champ au voisinage de $r = ct$, est transverse (voir figure).
- Le champ rayonné est nul dans la direction du mouvement de la charge. On verra plus loin que le champ est proportionnel à l'accélération de la charge *perpendiculairement à la direction d'observation*.
- On peut anticiper d'autres propriétés du champ. Ainsi, la conservation de l'énergie impose que le flux d'énergie par unité de surface décroisse en $1/r^2$ de sorte que l'amplitude du champ électrique comme du champ magnétique doit décroître en $1/r$.

4.1.3 Formulation générale du problème

En termes mathématiques, le problème du calcul des champs rayonnés se ramène à la résolution de l'équation de propagation *avec second membre*. En effet les seconds membres contiennent toute l'information sur les *sources* du rayonnement que sont les charges et les courants. En jauge de Lorentz, les équations à résoudre s'écrivent (voir annexe 2) :

$$\begin{aligned}\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (4.1)$$

dans lesquelles, les termes sources ρ et $\mathbf{j}$, supposés connus, sont reliés par la relation de conservation locale de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Pour traiter ce problème, nous allons introduire une méthode générale de résolution d'équations linéaires avec second membre. Elle est applicable à des problèmes de rayonnement mais également à des problèmes de diffusion de la chaleur ou de diffusion de particules (électrons, molécules) par exemple. L'esprit de cette méthode est de trouver la réponse à une excitation impulsionnelle; on considère alors le second membre (terme source) comme une superposition d'excitations élémentaires, la solution est alors la superposition des solutions élémentaires. Afin d'illustrer cette démarche, nous allons la présenter sur un cas bien connu : le calcul du potentiel électrostatique créé par une distribution de charges statique $\rho(r)$.

4.2 Notion de fonction de Green. Cas de l'électrostatique

4.2.1 Introduction

Considérons une répartition de charges décrite par la densité de charge $\rho(\mathbf{r})$. Le problème du calcul du potentiel créé par cette répartition se ramène à la résolution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (4.2)$$

Le principe de la méthode repose sur quelques remarques très simples :

- l'équation du problème est linéaire, on peut donc appliquer le théorème de superposition.
- la répartition de charges peut être considérée comme la superposition de charges ponctuelles. Le problème va donc être traité en deux temps; tout d'abord il faut rechercher la solution correspondant à une charge ponctuelle, ensuite, il faut en déduire la solution correspondant à l'ensemble des charges que l'on obtient par superposition linéaire.

4.2.2 Distribution de Dirac et charge ponctuelle

Pour résoudre l'équation de Poisson dans le cas d'une charge ponctuelle, il faut connaître l'expression de la densité de charge $\rho(\mathbf{r})$. Supposons qu'une charge q soit placée en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. La fonction ρ doit être nulle en tout point $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ et en tant que densité de charges vérifier la condition de normalisation

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = q \quad (4.3)$$

L'objet mathématique vérifiant ces conditions est une distribution, en l'occurrence la distribution de Dirac, notée $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. À une fonction f , elle associe un scalaire

$$f(\mathbf{r}_0) = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (4.4)$$

Il est primordial de remarquer qu'une distribution n'est pas une fonction. On peut cependant schématiser la distribution de Dirac $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ par une fonction nulle pour $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ et tendant vers l'infini en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. En ce sens, elle peut être vue comme la limite quand $T \rightarrow 0$ d'une fonction rectangle de largeur T et d'amplitude $1/T$.

D'après l'éq. (4.4), la dimension de la distribution de Dirac est l'inverse de celle de son argument. Ainsi, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ est homogène à l'inverse d'un volume (m^{-3}). Enfin, en remplaçant la fonction f par $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, on remarque que la transformée de Fourier d'un Dirac est une constante, ce qui sera très utile dans la suite pour calculer la fonction de Green.

La densité de charge correspondant au problème de la charge ponctuelle peut alors s'écrire :

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.5)$$

en ayant posé $f = q$ dans l'éq. (4.4). De la sorte, on a bien une charge ponctuelle telle que l'intégrale de la densité de charge donne un résultat non nul. Par ailleurs on sait que :

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.6)$$

Il en ressort que la solution de l'équation de Poisson peut s'écrire :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (4.7)$$

On retrouve ainsi un résultat très classique qui aurait pu se déduire plus simplement de l'expression de la force de Coulomb. Toutefois, cet exemple permet de préciser la notion d'excitation élémentaire ou impulsionnelle introduite ci-dessus. Physiquement, il s'agit du potentiel créé par une *charge ponctuelle* ; mathématiquement il s'agit de la fonction solution de l'équation de Poisson dont le second membre est une *distribution de Dirac*. Ce problème n'est pas traité de cette façon dans les cours d'introduction car il requiert de manipuler des distributions. La simplification conceptuelle qu'est l'utilisation de la notion de charge ponctuelle conduit à des difficultés mathématiques. Le problème est facile à contourner en calculant directement le champ, puis en déduisant le potentiel. Toutefois, dans le cas général, le calcul du champ n'est pas réalisable. C'est pourquoi il faut développer une technique de résolution de ce type de problème.

4.2.3 Cas d'une répartition de charges

Nous allons considérer en parallèle les cas de répartitions discrète et continue. Dans le premier cas la densité de charges $\rho(\mathbf{r})$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (4.8)$$

Dans le second cas on l'écrira sous la forme :

$$\int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.9)$$

La correspondance entre les deux écritures est claire : à q_i située en $\mathbf{r}_i$ on peut associer la charge $\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ contenue dans l'élément de volume centré en $\mathbf{r}'$. La solution du problème posé s'obtient par *superposition*. Dans le cas discret, elle s'écrit :

$$\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (4.10)$$

De la même façon, on obtient dans le cas continu :

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.11)$$

La vérification du fait que cette expression est effectivement solution du problème s'effectue en la reportant dans l'équation de Poisson. Il est important de remarquer que cette expression est *le produit de convolution de la solution du problème élémentaire (i.e. avec source ponctuelle) par la densité de charges*. Lorsque le point d'observation n'est pas situé au sein des sources, le terme en $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ne diverge pas. Le calcul du champ peut alors se faire sans problème, il est notamment possible de dériver sous le signe somme. En revanche, lorsque l'on s'intéresse au calcul du champ au sein de la distribution de charges, le problème est plus délicat. Toutefois, au sens des distributions, l'expression (4.11) est un produit de convolution de deux distributions. Les règles de calcul des dérivées de distribution donnent alors :

$$\Delta[\rho \otimes \frac{1}{r}] = \Delta\rho \otimes \frac{1}{r} = \rho \otimes \Delta\frac{1}{r} \quad (4.12)$$

En utilisant (4.6) , on vérifie immédiatement que (4.11) est bien solution de l'équation (4.2) .

4.2.4 Généralisation

De façon générale, une équation linéaire peut s'écrire de façon symbolique :

$$L f = s \quad (4.13)$$

où L est un opérateur linéaire tel que Δ ou $\Delta + k^2$ par exemple, où f est l'inconnue et s le terme source connu. Afin de trouver une solution particulière de ce problème, on recherche tout d'abord la solution du problème lorsque le second membre est une distribution de Dirac. On obtient alors la fonction de Green (ou réponse impulsionnelle) du problème qui est par définition la solution de l'équation :

$$LG(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.14)$$

satisfaisant de plus aux conditions aux limites du problème posé. Dans un deuxième temps, on effectue la superposition des solutions qui n'est autre qu'un produit de convolution de la fonction de Green (ou réponse impulsionnelle) par le terme source :

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') s(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (4.15)$$

Là encore on peut vérifier que cette expression est solution du problème en la reportant dans l'équation de départ et en utilisant (4.14).

4.3 Potentiels retardés

4.3.1 Recherche de la fonction de Green du problème

Nous revenons dans ce paragraphe à l'équation de propagation avec second membre. Pour traiter ce problème, nous allons utiliser la méthode de la fonction de Green. La relation de définition de la fonction de Green associée à l'équation de propagation va faire intervenir comme dans les exemples précédents une distribution de Dirac exprimant que l'on s'intéresse à une perturbation localisée dans l'espace ; il faut aussi faire apparaître le fait que la perturbation doit être localisée dans *le temps*. On obtient alors :

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (4.16)$$

et une équation analogue pour le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ ¹. Le problème qui se pose est la résolution de cette équation. Cela fait, la solution explicite du problème sera donnée par un produit de convolution comme on l'a vu. Afin de simplifier les notations, nous poserons :

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R} \quad \text{et} \quad t - t' = \tau \quad (4.17)$$

1. Le signe moins est conventionnel. Il est utilisé ici de façon à obtenir une fonction de Green sans signe moins.

4.3.2 Méthode de calcul de la fonction de Green

Le problème posé est celui de la résolution d'une équation aux dérivées partielles avec second membre. En pratique, on va transformer cette équation en équation algébrique en introduisant les transformées de Fourier de la fonction de Green par rapport à t et $\mathbf{r}$. Ainsi, les dérivées temporelles deviendront des produits par $-i\omega$, etc. La démarche peut se résumer de la façon suivante :

$$\begin{array}{c}
 \text{Éq. aux dérivées partielles vérifiée par } G(\mathbf{R}, \tau) \\
 \downarrow \text{TF} \\
 \text{Éq. algébrique vérifiée par } G(\mathbf{k}, \omega) \\
 \downarrow \text{résolution} \\
 G(\mathbf{k}, \omega) \\
 \downarrow \text{TF}^{-1} \\
 G(\mathbf{R}, \tau)
 \end{array}$$

Les étapes du calcul sont donc l'établissement de l'équation à laquelle obéit $G(\mathbf{R}, \omega)$ puis $G(\mathbf{k}, \omega)$, la résolution pour $G(\mathbf{k}, \omega)$, puis le calcul de la transformée de Fourier pour obtenir $G(\mathbf{R}, \omega)$ explicitement. On en déduit $G(\mathbf{R}, \tau)$ par transformée de Fourier. Les détails du calcul sont donnés dans le complément 4A. Le résultat final est :

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|} \delta\left(\tau - \frac{|\mathbf{R}|}{c}\right) \quad (4.18)$$

On retrouve le fait que le potentiel est en $1/r$. L'aspect temporel n'intervient que dans la distribution de Dirac. Une image très simple de ce phénomène est un rond dans l'eau produit par la chute d'une pierre !

4.3.3 Solution des potentiels retardés

La solution $V(\mathbf{r}, t)$ s'obtient par convolution de la densité de charges et de la fonction de Green que l'on vient de déterminer :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \left[-\frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{\epsilon_0} \right] [-G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')] d^3\mathbf{r}' dt' \quad (4.19)$$

En reportant l'expression de G dans l'intégrale on obtient :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) d^3\mathbf{r}' dt' \quad (4.20)$$

et en effectuant l'intégration par rapport à t' , on obtient l'expression finale du potentiel retardé :

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (4.21)$$

Un calcul en tout point analogue mène à l'expression de $\mathbf{A}$ en fonction de $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (4.22)$$

Dans ces expressions, la dépendance temporelle fait apparaître un retard R/c qui correspond au temps que met la lumière pour parcourir la distance séparant le point émetteur du point d'observation. Ceci est l'origine de l'appellation « potentiels retardés ». Ainsi, une étoile située à plusieurs années-lumière de la terre peut avoir disparu alors même qu'on l'observe.

Il est possible de voir ce retard avec un point de vue différent. Le retard $t = R/c$ n'est rien d'autre que la conséquence d'une différence de marche R . L'équation (4.22) montre que le potentiel vecteur résulte

de l'addition des contributions des différents points de la source. Lorsque l'on ajoute leurs amplitudes, on prend en compte la différence de marche R/c . On voit ainsi que l'expression des potentiels retardés apparaît comme le résultat d'*interférences* entre les différents points sources. A titre d'exemple, on peut remarquer que le rayonnement de deux dipôles en champ lointain est identique à la figure d'interférence des trous d'Young.

Notons enfin que l'on retrouve dans l'équation (4.22) une propriété qui avait été anticipée au début de ce chapitre : la décroissance en $1/r$ qui est nécessaire pour satisfaire la conservation de l'énergie.

4.4 Rayonnement en champ lointain

4.4.1 Approximation du champ lointain

Nous envisageons ici le problème du rayonnement du point de vue d'un observateur qui se trouve éloigné de la répartition de charges. Il s'agit en pratique du cas le plus courant correspondant aux problèmes d'émission et de réception d'ondes radar, hertziennes, d'émission lumineuse par des atomes, etc. Le calcul du champ rayonné peut alors être simplifié. Dans ce qui suit, nous travaillerons avec des champs monochromatiques $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ caractérisés par leur amplitude complexe notée $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ de sorte que $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{X}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}]$. Ainsi, l'amplitude complexe du potentiel vecteur s'écrit :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{\exp \left[i \frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \quad (4.23)$$

Soit L une longueur caractéristique de la source, soit $\mathbf{r}'$ le point courant, et soit $\mathbf{r}$ le point d'observation. Nous allons restreindre l'étude à des points tels que :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg L \quad \text{soit encore} \quad \boxed{L \ll r}$$

Nous choisissons de placer l'origine au coeur du système de charges. Le terme de retard peut alors être simplifié :

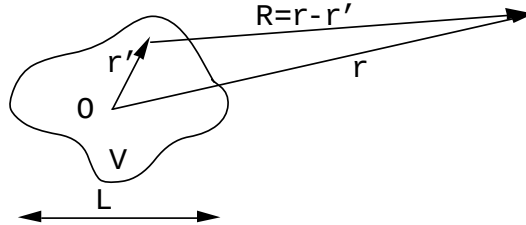


Figure 4.2 – Les courants de la source sont inclus dans le volume V , le point d'observation est repéré par $\mathbf{r}$.

$$R^2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$$

en négligeant le terme d'ordre 2 en r'/r , on obtient :

$$R = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = r - \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' \quad (4.24)$$

Il est possible de simplifier l'expression du potentiel vecteur en reportant cette expression dans (4.23) :

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}r}}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') e^{-i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'} d^3 \mathbf{r}'} \quad (4.25)$$

Il s'agit de l'expression du *potentiel vecteur en champ lointain*. On reconnaît de gauche à droite dans cette expression, une constante, une onde sphérique sortante et la transformée de Fourier de la distribution de courant dans la source (en posant $\mathbf{k} = \omega/c \mathbf{u}_r$). Seul ce dernier terme introduit une *dépendance angulaire*

dans le rayonnement de la source. On peut donc retenir que la directivité d'une antenne (ou plus généralement de tout système émetteur ou récepteur) est donnée par la transformée de Fourier de sa répartition de courant. Si l'on note Δx la largeur de l'antenne (et donc celle du support de la fonction $\mathbf{j}(x)$) et Δk_x la largeur du support de sa transformée de Fourier, la relation $\Delta x \Delta k_x > 2\pi$ montre qu'un système directionnel est nécessairement très grand par rapport à la longueur d'onde.

Nous avons déjà indiqué que les différents éléments de la source produisent des ondes qui interfèrent entre elles. Cela est particulièrement clair sur l'équation (4.25). Chaque point M de la source crée une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à la densité de courant au point M . L'intégrale exprime le fait que l'on superpose les champs créés par tous les éléments de volume. Le terme de déphasage

$$\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'$$

représente exactement la *différence de marche* $[OD]-[MD]$ entre les trajets OD et MD où D désigne le détecteur placé en r .

Il faut prendre garde à l'utilisation de cette approximation. Nous avons invoqué la condition $r \gg L$ jusqu'à présent. Cette condition assure effectivement que $1/R \approx 1/r$. En revanche, elle n'assure pas du tout que l'approximation soit correcte dans l'argument de l'exponentielle. En effet, le terme négligé dans (4.24) représente une différence de marche *qui doit être comparée à la longueur d'onde*. Le terme varie comme r'^2/r et son ordre de grandeur est L^2/r . L'expression (4.25) est donc valable si la condition supplémentaire

$$\boxed{\frac{L^2}{\lambda} \ll r}$$

est satisfaite. Cette condition est la même que celle que l'on introduit en diffraction sous le nom d'approximation de Fraunhofer. Elle réserve généralement quelques surprises. Ainsi, à 5 mètres d'un trou de 5 mm éclairé en lumière visible ($\lambda = 0,5 \mu\text{m}$), l'approximation du champ lointain n'est pas valable. De même, un observateur terrestre n'est pas dans la zone de champ lointain du soleil! En revanche, à 50 m de l'émetteur de la tour Eiffel (dimension caractéristique de l'antenne ≈ 5 m) qui émet sur une longueur d'onde 1800 m, la condition $\frac{L^2}{\lambda} \ll r$ est largement satisfaite! En pratique cette condition dépend essentiellement de la taille de la source par rapport à la longueur d'onde. Elle exprime le fait que le déphasage dû à la courbure du front d'onde est négligeable (voir figure 4.3).

4.4.2 Approximation dipolaire électrique

Dans le cadre de cette approximation, il faut tout d'abord se placer loin de la source de telle sorte qu'on ait toujours la première condition

$$\boxed{L \ll r}$$

La différence avec l'approximation du champ lointain vient de la deuxième condition qui devient plus forte. Lorsque la répartition de courants est peu étendue par rapport à la longueur d'onde, ou autrement dit lorsque

$$\boxed{L \ll \lambda}$$

les déphasages entre les différents points émetteurs deviennent négligeables. Il est naturel de penser que dans ces conditions la source est équivalente à une source ponctuelle, c'est-à-dire à un dipôle oscillant. En pratique, l'approximation dipolaire est considérée comme valable dès que la taille de la source est deux fois plus petite que la longueur d'onde.

L'approximation dipolaire et l'approximation de champ lointain sont des approximations faites sur la valeur de la différence de marche. Pour visualiser ce qu'elles représentent, on a tracé des cercles centrés sur le récepteur et séparés d'une longueur d'onde. Tous les points de la source situés sur un même cercle correspondent à une même différence de marche. Ils interfèrent donc de façon constructive au niveau du récepteur. On voit que dans le cas de la source noire, tous les points de la source sont en phase. *L'approximation dipolaire est valable dans ce cas.* Pour la source représentée en gris clair, il n'est plus possible de négliger les déphasages. Toutefois, on remarque que les droites tracées de façon tangente aux cercles sont presque confondues avec le cercle. Cela signifie que l'expression (4.24) est une bonne approximation. *C'est l'approximation du champ lointain.* Enfin, dans le cas de la source représentée en gris clair, différents points situés sur une même

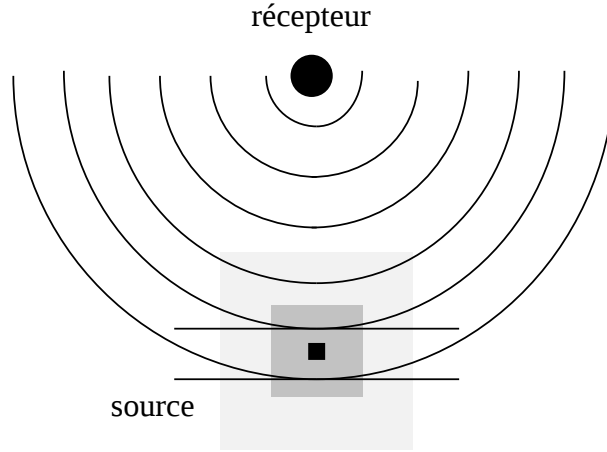


Figure 4.3 – Approximation dipolaire et approximation du champ lointain. En noir, la zone où $R \approx r$; en gris, la zone où $R \approx r - \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}'$; en gris très clair, la zone où l'on ne peut pas faire d'approximation.

droite reliant le centre de la source au détecteur sont clairement à une distance différente du récepteur. L'expression (4.24) qui leur attribue la même différence de marche n'est pas valable.

De façon plus précise, il est possible d'introduire un développement en termes dipolaires électriques et magnétiques, puis quadrupolaires, octupolaires, etc en introduisant le développement en série du terme de phase $\exp[-i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}']$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') [1 - i\frac{\omega}{c}\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}' + \dots] d^3\mathbf{r}' \quad (4.26)$$

Le premier terme de (4.26) correspond au rayonnement dipolaire électrique, le second au rayonnement dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique, etc. On peut justifier l'appellation dipolaire électrique en exprimant le résultat en fonction du moment dipolaire de la distribution défini par la relation :

$$\mathbf{p}(t) = \int \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (4.27)$$

où $\rho(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\rho(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}]$. On note alors $\mathbf{p}(t) = \text{Re} [\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}]$. Nous allons établir l'égalité

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (4.28)$$

qui montre que la contribution à l'ordre le plus bas dans l'équation (4.26) est due au moment dipolaire de la source.

Le plus parlant est d'établir ce résultat dans le cas d'une distribution ponctuelle de charges². Soit un élément de volume δV contenant N particules animées des vitesses $\mathbf{v}_i$ et situées en $\mathbf{r}_i$. On peut écrire

2. On peut aussi établir l'égalité (4.26) sans considérer le cas d'une distribution ponctuelle de charges : Il suffit de montrer cette égalité pour une composante. Nous allons effectuer le calcul pour la projection sur l'axe Ox . Le calcul est en fait une intégration par parties. Nous partons de l'identité $\text{div}(x\mathbf{j}) = x \text{div} \mathbf{j} + \mathbf{grad} x \cdot \mathbf{j}$ (qui est l'analogue de $[uv]' = u'v + v'u$). En intégrant cette expression, il vient :

$$\int_{\delta V} \text{div}(x\mathbf{j}) d^3\mathbf{r} = \int_{\delta V} [x \text{div} \mathbf{j} + \mathbf{grad} x \cdot \mathbf{j}] d^3\mathbf{r} \quad (4.29)$$

Utilisons le théorème de Green-Ostrogradski qui permet de transformer la première intégrale en une intégrale de surface. Si l'on choisit cette surface suffisamment éloignée de la répartition de courants, alors $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ est nul sur cette surface. On obtient alors :

$$\int_{\delta V} x \text{div} \mathbf{j} d^3\mathbf{r} = - \int_{\delta V} \mathbf{grad} x \cdot \mathbf{j} d^3\mathbf{r} \quad (4.30)$$

En utilisant $\text{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ d'une part, $\mathbf{grad} x = \mathbf{u}_x$ d'autre part, on obtient :

$$\int_{\delta V} x \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \int_{\delta V} \rho(\mathbf{r}, t) x d^3\mathbf{r} = \int_{\delta V} j_x(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d^3\mathbf{r} \quad (4.31)$$

le moment dipolaire résultant $\mathbf{p}$ ainsi que l'intégrale de la densité de courant sur δV par intégration des densités volumiques microscopiques.

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i \in \delta V} q_i \mathbf{r}_i \quad \text{et} \quad \int_{\delta V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \sum_{i \in \delta V} q_i \mathbf{v}_i \quad (4.32)$$

ce qui montre clairement que l'on a

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \int_{\delta V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} \quad (4.33)$$

Dans l'approximation dipolaire, le potentiel vecteur peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} (-i\omega\mathbf{p}) \quad (4.34)$$

4.4.3 Calcul du champ rayonné

Nous allons effectuer le calcul des champs électrique et magnétique dans le cadre de l'approximation du champ lointain et pour un champ monochromatique. La méthode la plus simple consiste à calculer le champ magnétique puis à en déduire le champ électrique en utilisant les propriétés de structure des ondes planes, l'onde rayonnée étant localement assimilée à une onde plane. Afin d'évaluer l'expression asymptotique du champ magnétique, nous ne gardons que les termes à l'ordre le plus bas en r^{-1} , les termes d'ordre supérieur devenant rapidement négligeables. On utilisera la relation $\mathbf{rot}(f\mathbf{V}) = f\mathbf{rot}(\mathbf{V}) + \mathbf{grad}(f) \times \mathbf{V}$. Sachant que les opérateurs **grad** et **rot** agissent sur la variable $\mathbf{r}$ et non $\mathbf{r}'$, on obtient

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R} \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{grad} \left(\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (4.35)$$

Le gradient se calcule simplement en remarquant que dans le cas d'une fonction dépendante de x , y et z par le biais de r seulement, on peut écrire $\mathbf{grad}f(r) = \partial f/\partial r \mathbf{grad}r$ et $\mathbf{grad}r = \mathbf{r}/r = \mathbf{u}_r$.

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{-\mathbf{u}_R}{R} + i\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_R \right] \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\omega R/c}}{R} d^3\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_R \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') \frac{e^{i\omega R/c}}{R} d^3\mathbf{r}' \quad (4.36)$$

Aucune approximation n'a été faite jusqu'en (4.35). Si l'on se place dans le cadre du champ lointain, il est possible d'approximer le vecteur unitaire $\mathbf{u}_R$ par le vecteur unitaire $\mathbf{u}_r$ qui ne dépend plus de la variable d'intégration (ce qui est valable dans le cadre de l'approximation du champ lointain). Par ailleurs, nous avons négligé le terme en $1/R$ par rapport au terme en $\omega/c = 2\pi/\lambda$ de sorte que l'on doit avoir $R \gg \lambda$. À l'aide du vecteur d'onde local défini par la relation $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{u}_r$, le champ magnétique peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= i\frac{\omega}{c} \mathbf{u}_r \times \mathbf{A} \\ &= i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ce résultat est celui que l'on aurait obtenu dans le cas d'une onde plane. Ceci montre que dans l'approximation du champ lointain, le champ a localement une structure d'onde plane. Ce résultat n'est pas surprenant puisque l'approximation du champ lointain est valable précisément lorsque l'on peut assimiler la surface équiphase sphérique à son plan tangent (voir figure 4.3). On en déduit aisément le champ électrique en appliquant les règles de calcul des ondes planes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -c\mathbf{u}_r \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= i\omega[\mathbf{A}(\mathbf{r}) - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) \mathbf{u}_r] \\ &= i\omega\mathbf{A}(\mathbf{r})_{\perp} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Il est important de bien noter que le double produit vectoriel de $\mathbf{A}$ par le vecteur unitaire $\mathbf{u}$ (qui est l'expression en champ lointain de **rot rot**) n'est autre que l'opération de projection de $\mathbf{A}$ sur le plan perpendiculaire à $\mathbf{u}$. Le résultat est noté $\mathbf{A}_{\perp}$, on note que $|\mathbf{A}_{\perp}| = |\mathbf{A}| \sin \theta$, θ étant l'angle formé par $\mathbf{A}$ et

u. On retrouve la propriété de transversalité du champ électrique qui n'est valable qu'en *champ lointain*. Par ailleurs, on observe que lorsque la direction d'observation **u** coïncide avec la direction de **A**, l'angle θ s'annule et avec lui le champ rayonné. L'expression (4.38) du champ électrique peut également s'obtenir en partant de :

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.39)$$

et en effectuant les approximations de champ lointain de la même façon sur le potentiel scalaire V . On s'aperçoit alors que le gradient du potentiel scalaire compense exactement la partie longitudinale du champ $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ (voir la décomposition canonique en champs longitudinal et transverse ainsi qu'en champs rotationnel et irrotationnel dans le chapitre 2). Cette façon de procéder conduit donc à un calcul beaucoup plus lourd. En effectuant le même type de calcul sans faire l'hypothèse d'un champ monochromatique on obtient en champ lointain :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)_\perp}{\partial t} \quad (4.40)$$

4.4.4 Puissance rayonnée dans tout l'espace en champ lointain

La puissance totale rayonnée s'obtient en évaluant le flux du vecteur de Poynting, $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$, à travers une sphère de rayon r suffisamment grande pour que l'approximation de champ lointain soit applicable. On peut alors utiliser les expressions approchées établies plus haut donnant les champs magnétique et électrique en fonction du potentiel vecteur (4.37) et (4.38). Dans le cas de l'approximation dipolaire, on peut utiliser l'expression du potentiel vecteur en fonction du moment dipolaire obtenue en (4.34). Le flux d'énergie rayonné dans l'angle solide $d\Omega$ sous-tendu par la surface orientée $d\mathbf{S}$ est :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot d\mathbf{S} &= \langle \mathbf{\Pi} \rangle \cdot \mathbf{u} dS \\ &= \Pi r^2 d\Omega \\ &= \Pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (4.41)$$

avec dans le cas général d'après (4.37) et (4.38) :

$$\Pi = \frac{\epsilon_0 c}{2} \omega^2 |\mathbf{A}_\perp|^2. \quad (4.42)$$

Dans le cas de l'approximation dipolaire, on obtient un résultat explicite à l'aide de (4.34)

$$\Pi = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} \frac{\omega^4 |\mathbf{p}_\perp|^2}{r^2} \quad (4.43)$$

Il est important de bien noter la très forte dépendance de la puissance rayonnée par rapport à la pulsation ω . C'est pour cela que l'on peut transporter de fortes puissances le long de kilomètres de câbles à 50 Hz tandis qu'un fil de quelques mètres dissipe par rayonnement une grande partie de l'énergie qui lui est fournie lorsque la fréquence est supérieure à 10 kHz. On est alors dans le domaine radio et le fil est devenu une antenne. Dans le cas d'un dipôle oscillant non harmonique, on peut établir la puissance rayonnée de façon analogue. On obtient alors (valeur instantanée) :

$$\Pi = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_\perp|^2}{r^2} \quad (4.44)$$

Après intégration sur tout l'espace on obtient :

$$\begin{aligned} P &= \int \Pi \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ce résultat très important, encore appelé formule de Larmor, est souvent donné en unités CGS (dont les unités de base sont le centimètre, le gramme et la seconde). Le facteur multiplicatif $1/4\pi\epsilon_0$ que l'on peut mettre en évidence en unités SI disparaît en CGS.

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2|\ddot{\mathbf{p}}|^2}{3c^3} \quad (\text{unités SI}) \quad (4.46)$$

Le dipôle perd donc de l'énergie par rayonnement. Lorsque l'on s'intéresse à la description de la dynamique du dipôle, il faut modéliser cet effet par une force dissipative. On modélise généralement cette force par une force de friction

$$-m\gamma\dot{\mathbf{r}} \quad (4.47)$$

Points clés

- ❶ Approximation de champ lointain.
- ❷ Approximation dipolaire.
- ❸ Méthode de calcul des champs et de la puissance rayonnée.
- ❹ Directivité d'une antenne.

Compléments du chapitre 4

4A Complément A : fonction de Green

On souhaite résoudre :

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

pour une densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r}, t)$ donnée. Pour cela, nous allons d'abord chercher la fonction de Green $G(\mathbf{r}, t)$ définie par :

$$\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (4A.1)$$

4A.1 Fonction de Green dans l'espace de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction de Green $G(\mathbf{k}, \omega)$ vérifie :

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\mathbf{k}, \omega) = -1 \quad (4A.2)$$

Dans le cadre de la théorie des distributions, la solution de l'équation $xT(x) = 1$ est donnée par $T(x) = \text{VP} \frac{1}{x} + C\delta(x)$ où C est une constante arbitraire³. On en déduit donc :

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \text{VP} \frac{1}{k^2 - k_0^2} + C\delta(k - k_0) + C'\delta(k + k_0) \quad (4A.3)$$

où $k_0 = \omega/c$, et C, C' sont des constantes fixées par les conditions aux limites.

4A.2 Fonction de Green dans l'espace direct

La transformée de Fourier inverse par rapport aux variables d'espace s'écrit :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \omega) &= \iiint G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \\ &= \int_{k=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} G(\mathbf{k}, \omega) e^{ikr \cos \theta} \frac{k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} k^2 G(k, \omega) \int_{-1}^{+1} e^{ikru} du dk \quad \text{où } u = \cos \theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^{\infty} k^2 G(k, \omega) \frac{\sin kr}{k} dk \\ &= \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[\int_0^{\infty} k G(k, \omega) e^{ikr} dk \right] \end{aligned}$$

3. Une distribution $f(x)$ telle que la distribution de Dirac est définie par la valeur de l'intégrale $\int f(x)V(x)dx$ où $V(x)$ est appelée fonction test. Par exemple, la définition du delta de Dirac est $\int \delta(x)V(x)dx = V(0)$. La valeur principale de $1/x$ est définie par

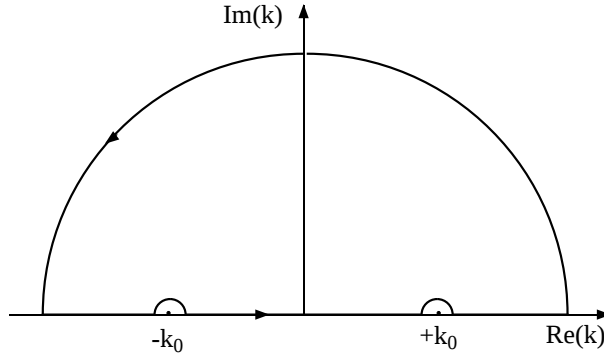
$$\text{VP} \int \frac{1}{x} V(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{V(x')}{x'} dx' + \int_{+\epsilon}^{+\infty} \frac{V(x')}{x'} dx' \right]$$

(i) Evaluons la première contribution à cette intégrale :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[\text{VP} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 - k_0^2} e^{ikr} dk \right] \quad (4A.4)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 r} \text{Im} \left[\text{VP} \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2 - k_0^2} e^{ikr} dk \right] \quad (4A.5)$$

Pour évaluer cette intégrale, nous allons utiliser le chemin dans le plan complexe décrit par la figure ci-dessous. Le chemin le long de l'axe réel évite les deux pôles $k = k_0$ et $k = -k_0$ de la fonction de telle sorte qu'ils ne fassent pas partie de la surface entourée. L'intégrale sur l'ensemble du contour vaut donc zéro. La contribution le long de l'axe réel est exactement la valeur principale que nous voulons déterminer. La contribution le long du demi-cercle qui ferme le contour tend vers zéro car $\exp(ikr)$ tend vers zéro exponentiellement dans le demi-espace $\text{Im}(k) > 0$. La contribution du petit demi-cercle autour des pôles $+/-k_0$ donne $-i\pi \text{Res}(+/-k_0)$.



On obtient ainsi :

$$\text{VP} \int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk - i\pi \text{Res}(k_0) - i\pi \text{Res}(-k_0) = 0 \quad (4A.6)$$

D'où l'on déduit :

$$\text{VP} \int_{-\infty}^\infty \frac{k e^{ikr}}{(k - k_0)(k + k_0)} dk = i\pi \frac{k_0 e^{ik_0 r}}{2k_0} + i\pi \frac{-k_0 e^{-ik_0 r}}{-2k_0} \quad (4A.7)$$

$$= i\pi \cos(k_0 r) \quad (4A.8)$$

On obtient donc $I_1 = \frac{1}{4\pi r} \cos(k_0 r)$.

(ii) Evaluons la seconde contribution à l'intégrale :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[\int_0^\infty k C \delta(k - k_0) e^{ikr} dk \right] \quad (4A.9)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} [C k_0 e^{ik_0 r}] \quad (4A.10)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 r} C k_0 \sin k_0 r \quad (4A.11)$$

(iii) La troisième contribution à l'intégrale est immédiate,

$$I_3 = \frac{1}{2\pi^2 r} \text{Im} \left[\text{VP} \int_0^\infty k C \delta(k + k_0) e^{ikr} dk \right] = 0 \quad (4A.12)$$

puisque $-k_0$ n'appartient pas au domaine d'intégration. En rassemblant ces trois résultats, on obtient :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (4A.13)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \cos k_0 r + \frac{1}{2\pi^2 r} C k_0 \sin k_0 r \quad (4A.14)$$

$$= A \frac{e^{ik_0 r}}{r} + B \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \quad (4A.15)$$

où A et B sont deux constantes. La condition de rayonnement de Sommerfeld impose $B = 0$ (onde sortante), d'où :

$$\frac{1}{4\pi} + \frac{iC k_0}{2\pi^2} = 0,$$

où :

$$C = \frac{i\pi}{2k_0}.$$

Finalement :

$$G(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi r} \cos k_0 r + \frac{i}{4\pi r} \sin k_0 r \quad (4A.16)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} e^{ik_0 r} \quad (4A.17)$$

Il reste maintenant à prendre la transformée de Fourier inverse par rapport au temps :

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(r, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4A.18)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi r} e^{i(\frac{\omega}{c}r - \omega t)} \frac{d\omega}{4\pi} \quad (4A.19)$$

$$= \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (4A.20)$$

Le potentiel scalaire est donc donné par :

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \otimes \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (4A.21)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t') \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}' \quad (4A.22)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (4A.23)$$

Ce dernier résultat constitue la solution bien connue du potentiel retardé.

Chapitre 5

Diffusion et diffraction

Table des matières

5.1	Diffusion par un électron	56
5.1.1	Dipôle induit	56
5.1.2	Onde diffusée	57
5.1.3	Calcul de la puissance diffusée. Section efficace de diffusion	57
5.2	Diffusion simple par un ensemble de diffuseurs	58
5.2.1	Introduction	58
5.2.2	Champ diffusé par un diffuseur ponctuel. Facteur de diffusion	59
5.2.3	Champ diffusé par un ensemble de diffuseurs	59
5.2.4	Diffusion par un atome. Facteur de diffusion atomique	60
5.2.5	Diffusion par un milieu ordonné (cristal) : loi de Bragg vectorielle et facteur de structure	61

La diffusion de la lumière est un phénomène qui se manifeste dans un grand nombre de situations physiques. Paradoxalement, il est souvent négligé. Ainsi, la loi de la propagation rectiligne de la lumière implique que l'on ne puisse voir de lumière que si l'on est face à la source lumineuse. Pourtant, il est possible de « voir » les faisceaux lumineux tels qu'un rayon de soleil car des particules en suspension diffusent une faible fraction de la lumière dans d'autres directions. De la même façon, d'après les lois de la réflexion de Descartes, on ne devrait pas voir le point d'impact d'un faisceau sur un miroir. Si le miroir était idéalement lisse, les lois de Descartes s'appliqueraient. En pratique, le miroir présente toujours une certaine rugosité qui est responsable de la diffusion de la lumière. De façon générale, on pourra retenir que l'existence de diffusion traduit l'hétérogénéité d'un milieu. La diffusion de la lumière *renseigne donc sur la structure du milieu*. De ce fait, ce phénomène est à la base de très nombreuses techniques expérimentales de caractérisation de la structure de la matière. L'imagerie médicale par échographie d'ondes ultrasonores, la détermination de la structure de cristaux par diffraction de rayons X ou de neutrons, la détection des fonds marins par des sonars, la recherche de nappes de pétrole par diffusion d'ondes élastiques (sismiques) dans le sol, la détermination de la masse végétale de la forêt amazonienne ou de l'épaisseur des calottes glaciaires par diffusion d'ondes radar sont autant de variantes de la même technique.

Le mécanisme responsable de la diffusion peut être décrit de la façon suivante. Une onde incidente sur un milieu induit des courants. Ces courants sont des sources secondaires qui rayonnent à leur tour un champ électromagnétique appelé champ diffusé. On appelle diffusion élastique la diffusion sans changement de fréquence (il existe d'autres mécanismes de diffusion avec changement de fréquence tels que l'effet Raman, l'effet Compton, la diffusion Brillouin notamment). La diffusion inélastique se produit par exemple pour des milieux non linéaires. Elle peut aussi se produire pour des systèmes linéaires s'ils ne sont pas stationnaires¹.

Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord envisager la diffusion de la lumière par un électron dans le cadre d'une description classique. Ce problème correspond à la diffusion de la lumière pour un spectre allant de l'infrarouge lointain aux rayons X. On introduira à cette occasion les concepts fondamentaux utilisés en diffusion : notion de section efficace différentielle et de section efficace totale. Nous envisagerons ensuite le cas d'une molécule qui sera simplement traitée comme un ensemble d'électrons. Les effets d'interférence jouent alors un rôle important. On les décrit à l'aide d'une quantité essentielle : le facteur de diffusion. On verra ensuite le cas particulier de la diffusion par des systèmes ordonnés. On parle alors plutôt de diffraction.

5.1 Diffusion par un électron

On considère un électron de charge $q = -e$, de masse m , soumis à une onde électromagnétique incidente de la forme $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)]\}$. Sous l'effet du champ incident, cette charge va osciller à la fréquence $\nu = \omega/2\pi$. De ce fait, elle se comporte comme l'électron d'un dipôle oscillant et par suite elle rayonne à la fréquence du champ incident créant ainsi un *champ diffusé*. La diffusion apparaît donc clairement comme un phénomène de rayonnement : la matière éclairée par un champ incident devient une source de rayonnement secondaire. On se limitera dans ce qui suit à une étude de la diffusion élastique.

Afin de calculer ce champ diffusé, il faut tout d'abord obtenir une expression explicite du mouvement de l'électron $\mathbf{r}(t)$; l'expression du rayonnement d'un dipôle oscillant donne alors directement le champ diffusé.

Dans le cas de la diffusion élastique (système linéaire) étudiée ici, on s'attend à ce que la puissance rayonnée soit proportionnelle à la puissance incidente.

5.1.1 Dipôle induit

De même que pour l'étude microscopique de la polarisation d'une vapeur atomique dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié (voir complément 7C), nous nous intéressons à la trajectoire oscillante de

1. En effet, la relation linéaire la plus générale entre un champ diffusé $E_d(t)$ et un champ incident $E_i(t)$ se met sous la forme $E_d(t) = \int K(t, t') E_i(t') dt'$. Pour un système physique stationnaire, l'opérateur K est nécessairement de la forme $K(t - t')$ car la loi doit rester la même dans une opération de translation par rapport au temps t . Le champ diffusé est donc un produit de convolution du champ incident par une fonction (appelée noyau) K de sorte que l'on a $E_d(\omega) = K(\omega) E_i(\omega)$. Cette relation montre qu'il ne peut pas y avoir dans le champ diffusé de fréquence qui ne soit pas dans le champ incident. On voit ainsi qu'un système linéaire indépendant du temps donne nécessairement de la diffusion élastique. En revanche, un système linéaire dépendant du temps peut donner lieu à de la diffusion inélastique : c'est par exemple le cas de l'effet Doppler.

l'électron induite par le champ incident. Nous effectuons l'étude dans le cadre de la mécanique classique. Le principe fondamental de la dynamique fournit l'équation d'évolution de l'électron :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) + q[\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_i(\mathbf{r}, t)] - m\gamma \mathbf{v} \quad (5.1)$$

La force $-m\omega_0^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)$ correspond à la force qui le lie à un atome² et γ le coefficient de friction (s^{-1}) qui traduit les pertes par rayonnement en particulier. On peut négliger la contribution du champ magnétique lorsque la vitesse de l'électron est très inférieure à c . Dans l'hypothèse où l'amplitude de vibration r_0 est très petite devant la longueur d'onde on peut négliger le terme $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}_i$ de telle façon que le champ électrique est localement uniforme : $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_e, t)$. On peut chercher une solution en régime permanent de la forme $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_e + \text{Re}\{\mathbf{r}_0 \exp[-i\omega t]\}$. On établit aisément :

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_e)] \quad (5.2)$$

$\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_e)]$ correspond au champ électrique vu par l'électron à la position $\mathbf{r}_e$.

L'amplitude du dipôle électrique oscillant induit est alors égale à

$$\mathbf{p}_0 = q\mathbf{r}_0 \quad (5.3)$$

La polarisabilité $\alpha(\omega)$ électronique définie par la relation suivante

$$\mathbf{p}_0 = \varepsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_e)] \quad (5.4)$$

est alors donnée par l'expression

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \quad (5.5)$$

5.1.2 Onde diffusée

D'après la relation (4.34), le potentiel vecteur rayonné par le dipôle induit placé en $\mathbf{r}_e$ dans l'approximation champ lointain est alors égal à

$$\mathbf{A}_d = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp[ik_d |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|} \mathbf{p} \quad (5.6)$$

$$= -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp[ik_d r]}{r} \exp[-i\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}_e] \mathbf{p} \quad (5.7)$$

$$= -i\omega \frac{\alpha(\omega)}{4\pi c^2} \frac{\exp[ik_d r]}{r} \exp[-i(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}_e] \mathbf{E}_0 \quad (5.8)$$

où $\mathbf{k}_d = \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

D'après la relation (4.38), le champ électrique, $\mathbf{E}_d$, de l'onde diffusée, dans le cadre de l'approximation onde plane, est alors égal à

$$\mathbf{E}_d = i\omega \mathbf{A}_{d\perp} \quad (5.9)$$

$$= \frac{\omega^2 \alpha(\omega)}{4\pi c^2} \frac{e^{ik_d r}}{r} \exp[-i(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}_e] \mathbf{E}_{0\perp} \quad (5.10)$$

5.1.3 Calcul de la puissance diffusée. Section efficace de diffusion

La moyenne temporelle de la puissance totale P diffusée, c'est-à-dire prélevée au faisceau incident et rayonnée dans tout l'espace, est ainsi (4.45) :

$$P = \frac{\varepsilon_0 \omega^4}{12\pi c^3} |\alpha|^2 E_0^2 \quad (5.11)$$

$$= \frac{\omega^4}{6\pi c^4} |\alpha|^2 \varphi_i \quad (5.12)$$

$$= \sigma \varphi_i \quad (5.13)$$

2. Cette forme linéaire est justifiée d'après la physique quantique.

Finalement, la puissance diffusée se met sous la forme du produit du flux surfacique incident par une quantité homogène à une surface. Cette quantité, σ , est appelée section efficace de diffusion.

$$\sigma = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} |\alpha|^2 \quad (5.14)$$

$$= \frac{q^4}{6\pi \varepsilon_0^2 m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (5.15)$$

$$= \sigma_{Th} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (5.16)$$

C'est la surface qui, exposée au flux incident, intercepterait un flux égal au flux diffusé. σ_{Th} est la section efficace d'un électron libre (cas $\omega_0 = \gamma = 0$), dite section efficace de Thomson. Elle ne dépend pas de la fréquence du rayonnement incident et elle est égale à $\sigma_{Th} = 6,62 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$.

Si l'on s'intéresse à l'atténuation d'un faisceau au cours de sa propagation, alors la connaissance de la section efficace totale est suffisante. En revanche, si on cherche à savoir quelle quantité de lumière est diffusée dans une direction particulière, cette information est insuffisante. Plus précisément, le problème posé est de savoir quelle proportion de la puissance incidente est diffusée par unité d'angle solide autour d'une direction donnée. On pose alors :

$$dP = \frac{d\sigma}{d\Omega} \varphi_i d\Omega \quad (5.17)$$

où $d\sigma/d\Omega$ est, par définition, la section efficace différentielle. Remarquer que la notation usuelle de cette quantité n'est pas correcte en ce sens que cette quantité n'est pas la dérivée de σ par rapport à Ω . Afin de calculer $d\sigma/d\Omega$, il faut effectuer le calcul du flux du vecteur de Poynting à travers une surface dS qui sous-tend un angle solide $d\Omega = dS/r^2$. On a vu au chapitre sur le rayonnement que la puissance émise en champ lointain par un dipôle oscillant varie comme $\sin^2 \theta$, θ désignant l'angle entre le champ électrique exciteur (parallèle au dipôle induit) et la direction d'observation. On trouve alors d'après (4.43) :

$$dP = \frac{\varepsilon_0 \omega^4}{32\pi^2 c^3} |\alpha|^2 \sin^2(\theta) E_0^2 d\Omega \quad (5.18)$$

$$= \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4} |\alpha|^2 \sin^2(\theta) \varphi_i d\Omega \quad (5.19)$$

$$= \frac{d\sigma}{d\Omega} \varphi_i d\Omega \quad (5.20)$$

5.2 Diffusion simple par un ensemble de diffuseurs

5.2.1 Introduction

On considère de façon générale un ensemble de N diffuseurs. Différents systèmes correspondent à ce cas. On peut considérer la diffusion par les électrons d'une molécule ou d'un atome. On peut aussi considérer la diffusion par un ensemble d'atomes, chaque atome étant alors considéré comme un diffuseur ponctuel. On désigne par $\mathbf{r}_j$ la position du $j^{\text{ème}}$ diffuseur, qui est pratiquement constante pendant quelques périodes $T = 2\pi/\omega$. Même dans le cas d'électrons, la position est gelée sur une échelle de temps comparable à quelques périodes du champ incident. La particularité de la diffusion par un ensemble de diffuseurs tient aux interférences qui se produisent entre les ondes diffusées par chaque diffuseur. Si la longueur d'onde est nettement plus grande que la taille du système, alors les ondes diffusées sont toutes en phase. Le champ diffusé est alors la somme des champs diffusés, il est donc proportionnel à N , nombre de diffuseurs. Le *flux d'énergie* diffusé (ou intensité diffusée) est alors proportionnel à N^2 . Si la taille du système devient comparable à la longueur d'onde incidente, les champs diffusés par les différents centres diffuseurs ne sont plus en phase. La répartition angulaire de l'intensité diffusée dépend alors de la façon dont les diffuseurs sont placés dans l'espace, c'est-à-dire de la structure du milieu diffusant. Ainsi, par exemple, dans le cas d'un cristal, les rayons X sont diffusés dans des directions particulières bien définies. Ces directions sont celles pour lesquelles les champs diffusés par les différents atomes interfèrent constructivement. Dans le cas de l'atmosphère, la diffusion de la lumière renseigne sur les fluctuations de densité, etc. Avant de poursuivre, il faut faire quelques remarques importantes.

- Le lien entre la structure du milieu et l'intensité de la diffusion dépend essentiellement des interférences des ondes diffusées. De ce fait, quelle que soit la nature de l'onde (acoustique, neutron, électron, photon), les mêmes considérations restent valables. Pour faire ressortir ce comportement général, nous allons noter l'onde Ψ et considérer que c'est une onde scalaire. L'aspect vectoriel du champ électromagnétique ne modifie pas fondamentalement les résultats.
- Dans tout ce qui suit, nous allons considérer que l'on est en régime de diffusion simple, c'est-à-dire que l'onde incidente n'est diffusée qu'une seule fois avant de sortir du milieu. Il est beaucoup plus difficile de remonter à la structure d'un milieu dans le cas de la diffusion multiple. Cette approximation est en particulier valable pour la diffusion des rayons X.
- On considère uniquement la diffusion élastique. Ce terme indique que l'énergie du photon n'est pas modifiée ce qui revient à dire que la diffusion se fait sans changement de fréquence.

5.2.2 Champ diffusé par un diffuseur ponctuel. Facteur de diffusion

Soit $\mathbf{r}$ le point d'observation et soit $\mathbf{r}_1$ la position du diffuseur. On considère l'onde plane incidente sous la forme

$$\Psi_{\text{inc}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \Psi_0 \exp[i\mathbf{k}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] \quad (5.21)$$

D'après la partie 5.1 et l'expression (5.8), on sait que l'on peut écrire le champ diffusé en $\mathbf{r}$ en champ lointain sous la forme du produit d'une onde sphérique et d'un facteur d'amplitude proportionnel aux courants induits, donc au champ incident.

L'amplitude de l'onde diffusée s'écrit sous la forme

$$\Psi_1(\mathbf{r}) = S_1 \Psi_0 \frac{e^{ik_d r}}{r} \exp[-i(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_{\text{in}}) \cdot \mathbf{r}_1] \quad (5.22)$$

où S_1 est un facteur qui dépend de ω .

5.2.3 Champ diffusé par un ensemble de diffuseurs

On considère maintenant le cas d'un atome constitué de plusieurs charges diffusant le rayonnement. On appelle S_j l'amplitude de diffusion de la particule j . Le champ diffusé s'écrit donc sous la forme :

$$\Psi_j(\mathbf{r}) = S_j \Psi_0 \frac{e^{ik_d r}}{r} \exp[-i(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_{\text{in}}) \cdot \mathbf{r}_j] \quad (5.23)$$

Il faut bien noter que dans cette expression on a négligé le champ incident sur la charge j dû aux autres charges. Nous travaillons dans l'approximation de la diffusion simple.

Si l'on choisit l'origine des coordonnées au sein du système de N diffuseurs, le terme $(\mathbf{k}_{\text{inc}} - \mathbf{k}_d) \cdot \mathbf{r}_j$ représente le déphasage entre le champ diffusé par le $j^{\text{ème}}$ diffuseur et le champ diffusé par un diffuseur qui serait placé à l'origine des coordonnées ainsi que le montre la figure 5.1. Comme dans le chapitre rayonnement, on voit que la dépendance angulaire de l'amplitude diffusée dépend des interférences entre les ondes diffusées par les différents diffuseurs.

Supposons, pour simplifier l'expression, que les amplitudes de diffusion S_j des champs diffusés par les différents diffuseurs soient les mêmes et soient indépendantes de la direction d'observation. On a alors $S_j = S$. Seules les phases varient, ce qui permet d'écrire l'amplitude du champ diffusé en champ lointain sous la forme :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_j \Psi_j(\mathbf{r}) \\ &= S \frac{e^{ik_d r}}{r} \Psi_0 \sum_j \exp[-i(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_{\text{inc}}) \cdot \mathbf{r}_j] \end{aligned} \quad (5.24)$$

La somme est étendue aux N diffuseurs. On voit que l'on peut écrire le résultat sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{q}) \frac{e^{ik_d r}}{r} \Psi_0 \quad (5.25)$$

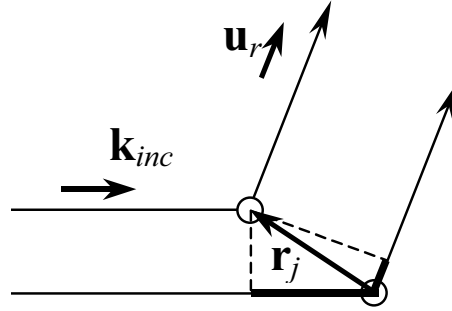


Figure 5.1 – Champ diffusé par le $j^{\text{ème}}$ diffuseur. La différence de marche représentée sur la figure se traduit par des interférences des champs diffusés par les différents diffuseurs. Il en résulte que l'amplitude du champ diffusé dépend de la direction d'observation ainsi que de la structure du milieu.

Ceci fait apparaître la quantité $S(\mathbf{q})$ qui s'écrit sous la forme :

$$S(\mathbf{q}) = S \sum_j \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j] \quad (5.26)$$

où l'on a posé $\mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_{\text{inc}}$ appelé vecteur de diffusion.

La valeur maximale du facteur $S(\mathbf{q})$ est donc NS . Il apparaît clairement que lorsque $\mathbf{q}$ a un module suffisamment faible pour que $\exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] \approx 1$ quel que soit $\mathbf{r}$ appartenant à l'ensemble des diffuseurs, tous les points du système rayonnent en phase. Le facteur de diffusion prend alors des valeurs maximales. Cette situation correspond par exemple au cas où :

$$\mathbf{k}_{\text{inc}} \approx \mathbf{k}_d$$

Cette condition signifie que le point d'observation est dans la direction du rayonnement incident, on parle alors de *diffusion vers l'avant*.³ Ceci est valable pour tout type d'ondes et de diffuseurs. Il est très facile de vérifier cette propriété à l'aide d'un rayon de soleil ou d'un petit pointeur laser et de la poussière présente dans l'air. En observant la lumière diffusée dans des directions voisines de la direction avant, la diffusion est beaucoup plus forte que dans les autres directions. C'est notamment pour cela qu'il est si difficile de conduire avec un pare-brise poussiéreux lorsque l'on a le soleil couchant presque de face.

5.2.4 Diffusion par un atome. Facteur de diffusion atomique

Un premier exemple d'ensemble de charges est un atome. Dans ce cas particulier, on écrit l'amplitude du champ diffusé sous la forme :

$$\Psi(\mathbf{r}) = S f_{\text{at}}(\mathbf{q}) \frac{e^{ikr}}{r} \Psi_0 \quad (5.27)$$

où l'amplitude $f_{\text{at}}(\mathbf{q})$ qui s'appelle facteur de diffusion atomique est donnée par

$$f_{\text{at}}(\mathbf{q}) = \sum_j \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j] \quad (5.28)$$

où la somme porte sur l'ensemble des électrons de l'atome. On remarque que dans la direction avant ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$), le facteur atomique est égal au nombre de charge Z . La contribution du noyau est négligeable du fait de sa masse. En effet, on a vu plus haut que l'amplitude du mouvement induit par le champ exciteur varie comme l'inverse de la masse. La figure 5.2 représente la dépendance du facteur de diffusion atomique par rapport au module du vecteur d'onde q .

3. Comme pour les problèmes de rayonnement, l'ouverture angulaire θ de la lumière diffusée vers l'avant est donnée par λ/L où L représente l'extension transverse de l'ensemble des diffuseurs.

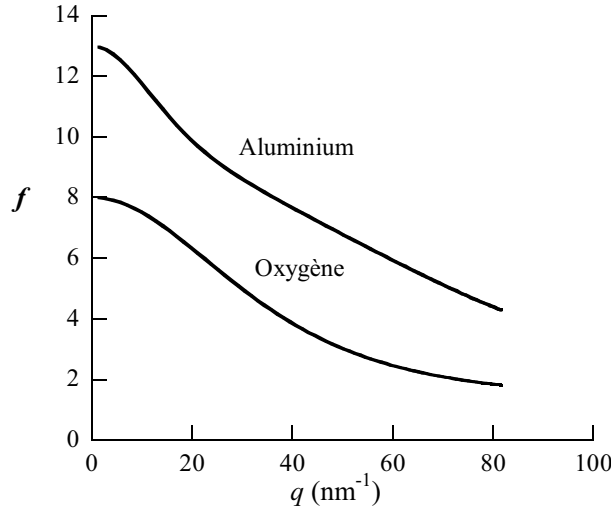


Figure 5.2 – Facteur de diffusion atomique d'un atome d'oxygène et d'un atome d'aluminium. Notons qu'en $q = 0$, on a $f = Z$.

5.2.5 Diffusion par un milieu ordonné (cristal) : loi de Bragg vectorielle et facteur de structure

Dans le cas de la diffusion de rayons X par un cristal, la diffusion est aussi due essentiellement aux électrons. Il est utile de noter que l'on peut réécrire l'amplitude de diffusion donnée par l'équation (5.26) à l'aide de la densité de charge électronique :

$$\rho_e(\mathbf{r}) = -e \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (5.29)$$

sous la forme :

$$S(\mathbf{q}) = \frac{S}{-e} \int \exp[-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] \rho_e(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \frac{S}{-e} \rho_e(\mathbf{q}), \quad (5.30)$$

où l'intégrale porte sur tout le volume. On obtient ici un résultat très important : l'amplitude de diffusion dans la direction $\mathbf{u}_r$ ($\mathbf{k}_d$) est la transformée de Fourier de la densité électronique prise en $\mathbf{q} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_{\text{inc}}$.⁴ La section efficace différentielle de diffusion est alors proportionnelle à :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\rho_e(\mathbf{q})|^2. \quad (5.31)$$

Dans le cas d'un cristal, les atomes sont répartis périodiquement dans l'espace. Il apparaît alors des directions particulières pour lesquelles on observe des pics. Cela résulte des conditions d'interférences constructives. Nous avons déjà rencontré ce comportement lorsque l'on a étudié le champ créé par un réseau d'antennes périodiques en petites classes. Ici, les atomes du cristal jouent le rôle d'antennes réparties périodiquement. La détermination des directions de diffusion permet de remonter à la structure cristalline des matériaux. Une façon plus formelle de voir le lien entre structure périodique et l'existence de directions discrètes de diffusion est d'utiliser la relation de transformée de Fourier entre l'amplitude de diffusion et la densité de charge électronique. Puisque le cristal est périodique, la densité de charges s'écrit sous la forme d'une série de Fourier :

$$\rho_e(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \rho_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (5.32)$$

où les composantes G_x , G_y et G_z des vecteurs $\mathbf{G}$ sont de la forme $h2\pi/a_x$, $k2\pi/a_y$, $l2\pi/a_z$, avec a_x , a_y et a_z étant les périodes suivant les axes x , y et z . Les coefficients $\rho_{\mathbf{G}}$ de la série de Fourier se calculent comme d'habitude par intégration sur une maille du cristal (voir Annexe 1A). On a vu (Éq. (5.30)) que l'amplitude de la lumière diffusée est proportionnelle à la transformée de Fourier de la densité de charge. On sait par

4. Au sens de la mécanique quantique, la notion de charge ponctuelle située en un point donné n'a pas de sens. Il faut alors considérer la définition de la densité (5.29) comme un opérateur dont la valeur moyenne peut être calculée à l'aide de la fonction d'onde.

ailleurs que la transformée de Fourier d'une exponentielle complexe $\exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r})$ est une distribution de Dirac $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{G})$.

Ce résultat indique que la lumière est diffusée - on dit alors diffractée - dans un ensemble de directions particulières de $\mathbf{k}_d$ satisfaisant l'égalité $\mathbf{q} = \mathbf{G}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_{\text{inc}} + \mathbf{G}} \quad (5.33)$$

Cette équation donne la condition générale de diffraction : c'est la loi de Bragg sous forme vectorielle. Nous avons parlé de diffusion dans le début du cours puis de diffraction à propos de l'interaction des rayons X avec un cristal. On peut se demander s'il existe une différence fondamentale entre diffusion et diffraction. Il s'agit en fait surtout d'une habitude de langage. Le phénomène physique de base est le même : il s'agit de l'excitation de courants par une onde incidente. L'onde diffusée ou diffractée résulte du rayonnement de ces courants induits. Lorsque le système éclairé est ordonné, on parle généralement de diffraction. On parle ainsi de diffraction de rayons X par un cristal ou de diffraction de la lumière par un réseau optique ou par le bord d'une fente. On parle de diffusion lorsque le système éclairé est désordonné : diffusion par un nuage, par une mousse, etc. Enfin, dans le cas d'une petite particule (voire d'un atome), on parle de diffusion alors que l'on parle de diffraction pour le cas d'une petite ouverture dans un écran. La raison est purement historique. Encore une fois, il n'y a pas de différence de nature des phénomènes : le seul phénomène physique sous-jacent est le rayonnement par un système de sources secondaires.

Points clés

- ❶ Diffusion par un diffuseur : section efficace.
- ❷ Diffusion par plusieurs diffuseurs : diffusion et interférences, facteur de diffusion atomique.
- ❸ Condition générale de diffraction.

Compléments du chapitre 5

5A Complément A : Diffusion par un milieu désordonné

5B Introduction

On rappelle d'abord la section efficace de diffusion établie dans ce chapitre

$$\sigma = \sigma_{Th} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (5B.1)$$

Selon la longueur d'onde, on définit trois régimes principaux de diffusion que l'on présente dans le paragraphe suivant.

5B.1 Diffusion Rayleigh, diffusion Thomson et diffusion résonnante

Diffusion Rayleigh : $\omega \ll \omega_0$ et $\gamma\omega \ll \omega_0^2$

Dans ce cas, le dénominateur varie comme ω_0^4 d'où :

$$\sigma(\omega) = \sigma_{Th} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4. \quad (5B.2)$$

Il s'agit de la diffusion Rayleigh. Ce résultat montre que l'infrarouge est beaucoup moins diffusé que le rayonnement visible. En particulier, au sein du spectre visible, le bleu est plus diffusé que le rouge. Cela explique que le soleil vu en transmission au travers d'une couche importante d'atmosphère au couchant soit rouge, la lumière transmise étant plus appauvrie en bleu qu'en rouge. En revanche, lorsque l'on regarde ailleurs que dans la direction du soleil, ou d'une autre étoile, on ne devrait pas voir de lumière. La lumière vue est la lumière *diffusée par l'atmosphère*, elle est donc plus riche en bleu qu'en rouge.

Diffusion Thomson : $\omega \gg \omega_0 \gg \gamma$

Sous les deux conditions ci-dessus, on peut considérer que l'électron est libre. En effet, dans ce cas, le mouvement de l'électron (de vitesse angulaire ω_0) est pratiquement rectiligne pendant quelques dizaines de périodes du rayonnement incident de pulsation ω , il se comporte donc comme un électron libre. Un autre point de vue consiste à dire que l'énergie du photon incident est beaucoup plus grande que l'énergie de liaison de l'électron. La diffusion des rayons X est une diffusion de type Thomson pour les électrons des couches périphériques. L'énergie de liaison des électrons des couches internes croît avec le nombre de protons de l'atome, on peut alors avoir diffusion résonnante.

Diffusion résonnante : $\omega \approx \omega_0$ et $\gamma \ll \omega_0$

Au voisinage de la pulsation propre, on peut faire apparaître un profil lorentzien :

$$\sigma(\omega) = \sigma_{Th} \frac{\omega_0^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (5B.3)$$

En fait, ce qui apparaît ici comme un processus de diffusion résonnante dans une description classique revêt un comportement différent dans une approche quantique. À forte intensité, le processus devient un processus d'absorption et d'émission. Ce processus a une différence fondamentale avec le processus de diffusion : il n'existe aucune relation de phase entre le photon absorbé et le photon émis. En revanche, à faible niveau d'éclairement, le processus dominant est le processus de diffusion élastique qui conserve la cohérence de l'onde. Quoi qu'il en soit, la section efficace est considérablement plus grande que celle du processus de diffusion Thomson. En calculant la valeur maximale à la résonance on trouve :

$$\sigma(\omega_0) = \sigma_{Th} \left(\frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 \quad (5B.4)$$

où ω_0 est typiquement $10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ dans le visible et un bon ordre de grandeur de γ est 10^8 s^{-1} (ce qui revient à dire que la durée de vie $1/\gamma$ d'un état excité est de l'ordre de 10^{-8} s). On trouve un rapport $\sigma(\omega_0)/\sigma_{Th}$ de 14 ordres de grandeur !

5B.2 Libre parcours moyen. Diffusion simple et diffusion multiple

Notons une application importante de la notion de section efficace de diffusion. Lorsqu'un faisceau se propage dans un milieu contenant n particules diffusantes par unité de volume ayant toutes une section efficace de diffusion σ et n'absorbant pas le rayonnement, il est facile de montrer que le faisceau s'atténue exponentiellement avec une longueur caractéristique de décroissance donnée par $1/n\sigma$. Cette longueur d'atténuation est souvent appelée libre parcours moyen par analogie avec la physique des gaz. Pour montrer cela, il suffit de raisonner sur une couche plane d'épaisseur dz et de section S éclairée sous incidence normale. La figure 5B.1 clarifie les notations utilisées.

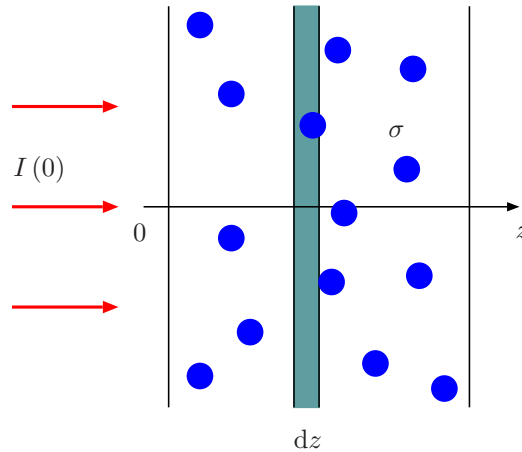


Figure 5B.1 – Tranche de milieu diffusant.

On peut remarquer que la transmission de ce système est équivalente à celle d'une couche dans laquelle chaque diffuseur serait remplacé par un disque totalement absorbant d'aire σ . La transmission de cette couche est alors donnée par le rapport de la surface libre sur la surface totale : $T = [S - nSdz\sigma]/S$. On a donc $I(z + dz) = TI(z)$. Il s'ensuit que l'intensité du faisceau satisfait l'équation $dI(z)/dz = -n\sigma I(z)$. L'intensité suit donc une loi de décroissance exponentielle du type

$$I(z) = I(0) \exp(-n\sigma z). \quad (5B.5)$$

Un milieu dont l'épaisseur traversée est faible devant la longueur d'atténuation $\ell = 1/n\sigma$ n'atténue que très peu le faisceau. Il est pratique ici de raisonner avec une image corpusculaire de la lumière. Dans ce cas de figure, les photons subissent zéro ou une collision lors de la traversée du système. On parle de diffusion simple. A contrario, si le milieu a une épaisseur supérieure à quelques $1/n\sigma$, les photons subissent plusieurs diffusions avant de quitter le milieu. On parle de diffusion multiple. La distance d'atténuation $1/n\sigma$ apparaît comme le libre parcours moyen des photons dans le milieu diffusant. Notons que ces notions sont également valables pour tout type d'onde en milieu diffusant.

5B.3 Pourquoi le ciel est bleu, pourquoi les nuages et le lait sont blancs ?

La diffusion de la lumière visible par des électrons des molécules d'azote ou d'oxygène est typiquement de la *diffusion Rayleigh*. En effet, les fréquences propres des électrons de ces molécules sont beaucoup plus élevées que les fréquences du spectre visible (l'ionisation se produit avec de l'UV ou des rayons X suivant que l'on considère des électrons périphériques ou appartenant au cœur des atomes). La diffusion se fait donc en ω^4 . Par ailleurs, les molécules présentes dans l'air ayant une taille de quelques ångströms, l'ensemble des électrons rayonne en phase, la longueur d'onde étant typiquement de quelques milliers d'ångströms. La lumière provenant du ciel est de la lumière émise par le soleil puis diffusée par l'atmosphère, la diffusion étant en ω^4 , la composante à $0,4\text{ }\mu\text{m}$ est dix fois plus diffusée que la composante à $0,7\text{ }\mu\text{m}$.

Lorsque l'on observe la couronne solaire, on observe la lumière du soleil diffusée par des électrons libres situés au voisinage du soleil. Il s'agit donc de *diffusion Thomson*, ce qui explique qu'il n'y ait pas de modification de la couleur apparente entre le soleil et sa couronne.

Dans le cas des nuages, le phénomène est différent. Le premier point à noter est qu'il n'y a pas d'absorption de la lumière visible par les gouttes d'eau. La couleur des nuages qui va du gris très sombre (couverture nuageuse épaisse) à un blanc éclatant est un effet de diffusion. On peut noter que les nuages vus d'avion sont toujours blancs. En revanche, ils sont toujours gris au sol si la couverture nuageuse est épaisse. Lorsque l'on observe des cumulo nimbus, ils sont parfois gris, parfois blancs. À quoi est donc due la couleur des nuages ? Puisqu'il n'y a pas d'absorption, il s'agit d'un effet d'atténuation par diffusion. Lorsque l'épaisseur des nuages est suffisante, la fraction de lumière transmise tend vers zéro. Puisqu'il n'y a pas d'absorption, la lumière qui n'est pas transmise est nécessairement réfléchi. Ceci explique l'aspect brillant des nuages vus d'avion et le fait que les nuages soient gris-noir vus du sol. La couleur des nuages dépend donc de la position relative de l'observateur, du soleil et des nuages. Les nuages épais isolés dans un ciel bleu sont blancs lorsqu'ils sont vus en réflexion et noirs en transmission. C'est le même mécanisme qui explique la couleur blanche du lait. La lumière est diffusée par des molécules organiques en suspension dans l'eau. En revanche, en diluant quelques gouttes de lait dans de l'eau, on peut observer de la diffusion bleue tandis que le faisceau transmis devient rouge. À noter que dans le cas des nuages ou du lait, les particules diffusantes sont grandes devant la longueur d'onde. On parle alors de diffusion de Mie et non plus de diffusion Rayleigh, valable dans le cadre de dipôles.

Chapitre 6

Équations de Maxwell dans la matière

Table des matières

6.1	Introduction	68
6.2	Moyennes spatiales	68
6.2.1	Définition de la moyenne spatiale	68
6.2.2	Analogie avec la formation des images	69
6.2.3	Dérivée d'une quantité moyennée	70
6.3	Équations de Maxwell macroscopiques	70
6.3.1	Équations sans sources	70
6.3.2	Équations avec sources	70
	Équation de Maxwell-Gauss	71
	Équation de Maxwell-Ampère	72
	Synthèse	73

6.1 Introduction

Le problème que nous abordons dans ce chapitre est celui de l'étude des champs électromagnétiques (CEM) dans un milieu matériel. Rappelons que les champs fournissent une description commode des efforts effectués par un ensemble de charges « sources » sur une charge d'essai. Lorsque l'on considère une onde électromagnétique dans le « vide », cela signifie que les charges constituant l'émetteur (la source) sont très éloignées du point où se trouve la charge d'essai *supposée isolée*. Envisageons maintenant que celle-ci soit placée dans un milieu matériel, de ce fait elle se trouve entourée de charges (les électrons et les noyaux constituant la matière) et donc, soumise à des efforts de leur part. Le champ électrique, qui traduit l'ensemble des efforts sur la charge d'essai, dépend donc de la distribution de charges dans la matière environnante. Cela pose le problème de la description de la distribution des charges dans la matière et de leur lien avec les CEM. Pour traiter ce problème, l'utilisation des densités de charge et de courant microscopiques

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (6.1)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \quad (6.2)$$

qui met en jeu quelque 10^{23} particules par cm^3 n'est pas envisageable. De même, le calcul des CEM microscopiques, qui prennent des valeurs très importantes au voisinage des charges ce qui implique de très grandes variations sur des distances de l'ordre de grandeur de 10^{-10} m n'est ni réalisable ni utile. Il convient donc de raisonner sur des grandeurs moyennées. Dans les paragraphes suivants nous préciserons comment on peut réaliser cette moyenne. Il faudra ensuite obtenir les équations d'évolution des champs moyens.

6.2 Moyennes spatiales

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en place quelques résultats qui nous permettront d'effectuer une moyenne et de calculer la dérivée spatiale d'une quantité moyennée. Nous serons alors en mesure d'établir les équations de Maxwell qui gouvernent les champs moyennés.

6.2.1 Définition de la moyenne spatiale

Le but de cette opération est double :

- supprimer les variations rapides de ρ , $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Il s'agit donc d'un filtrage passe-bas en termes de fréquences spatiales.
- remplacer les distributions (au sens mathématique du terme) ρ et $\mathbf{j}$ par des fonctions continues des variables d'espace $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ et $\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle$.

Considérons une fonction $f(\mathbf{r})$, à support borné (de longueur caractéristique L) et vérifiant :

$$\int f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1 \quad (6.3)$$

Par définition, la densité de charges moyennée sera :

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \int \rho(\mathbf{r}') f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (6.4)$$

Exemple : La fonction f peut être par exemple $C \exp(-r^2/2L^2)$ où C est une constante de normalisation fixée par (6.3). Le choix de L est fait en répondant à deux critères¹ :

1. Dans l'espace de Fourier, la moyenne spatiale appliquée consiste à filtrer les variations à haute fréquence. En effet la transformée de Fourier donne

$$\langle \rho \rangle(\mathbf{k}) = \rho(\mathbf{k}) \cdot f(\mathbf{k})$$

où

$$f(\mathbf{k}) \propto \exp(-L^2 k^2/2)$$

dans le cas de l'exemple du filtre Gaussien. On voit bien que toutes les fréquences spatiales supérieures à $2\pi/L$ sont supprimées.

- L est grand devant la taille des atomes ce qui permet de gommer la structure microscopique
- L doit être petit devant la longueur d'onde des CEM.

Considérons le cas d'une charge isolée ponctuelle en $\mathbf{r}_0(t)$:

$$\rho = q \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \quad (6.5)$$

D'après (6.4) :

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle &= \int q \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)] f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \\ &= q f[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \end{aligned} \quad (6.6)$$

L'opération de moyenne ainsi définie consiste à délocaliser la charge qui se trouve répartie continûment mais reste essentiellement localisée dans une zone d'environ L^3 . La condition (6.3) assure toutefois la conservation de la charge totale :

$$\begin{aligned} \int \langle \rho(\mathbf{r}') \rangle d^3 \mathbf{r}' &= \int q f[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] d^3 \mathbf{r} \\ &= q \\ &= \int \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (6.7)$$

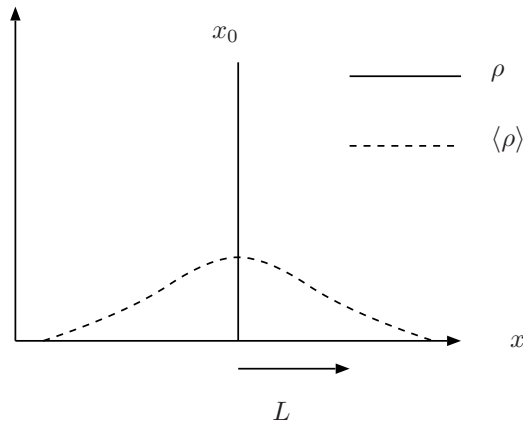


Figure 6.1 – Fonction continue remplaçant la distribution.

6.2.2 Analogie avec la formation des images

Par définition, un système optique stigmatique associe à un point objet, un point image (tout rayon lumineux passant par l'un, passe par l'autre). Supposons maintenant que l'on observe l'image formée dans un plan légèrement décalé par rapport au plan image, conjugué du plan objet. L'image d'un point devient une *tache* d'autant plus grande que le plan d'observation s'éloigne du plan image. Le résultat est une image floue à cause du défaut de mise au point. Seules les caractéristiques à grande échelle sont conservées dans une image floue tandis que les détails sont supprimés. La distribution de lumière dans la *tache* due au défaut de mise au point joue le rôle de la fonction f de lissage. La juxtaposition de ces taches conduisant à l'image floue est analogue à la « juxtaposition » des « charges floues » de la relation (6.4) qui peut se réécrire :

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \sum q_i f[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i] \quad (6.8)$$

Enfin, de la même façon, la quantité $\langle \rho \rangle$ est « floue » en ce sens que la structure fine de ρ a disparu.

6.2.3 Dérivée d'une quantité moyennée

Nous définissons les champs moyennés de la même façon. Ainsi par exemple :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \int f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (6.9)$$

Les équations de Maxwell faisant intervenir les dérivées des champs macroscopiques, il faut étudier l'effet de l'opération de moyenne sur les dérivées. On montre que la dérivée d'une moyenne est égale à la moyenne de la dérivée.

$$\frac{\partial \langle E(\mathbf{r}) \rangle}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial x} \right\rangle \quad (6.10)$$

Démontrons-le sur le cas simple d'une fonction d'une variable :

$$\begin{aligned} \frac{d \langle E(x) \rangle}{dx} &= \frac{d}{dx} \int f(x - x') E(x') dx' \\ &= \int \frac{df(x - x')}{dx} E(x') dx' \\ &= - \int \frac{df(x - x')}{dx'} E(x') dx' \\ &= \int f(x - x') \frac{dE(x')}{dx'} dx' \\ &= \left\langle \frac{dE(x')}{dx'} \right\rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

La dernière égalité résulte d'une intégration par parties où nous avons utilisé le fait que f est à support borné.

6.3 Équations de Maxwell macroscopiques

Le problème que nous abordons ici est celui de la recherche des *équations satisfaites par les champs moyennés*. On les appelle équations de Maxwell macroscopiques. Il existe différentes approches pour les obtenir. On peut citer par exemple celle de J. D. Jackson décrite dans son livre *Classical electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York, 1962). Dans la suite, nous avons préféré vous présenter l'approche plus macroscopique de L. D. Landau et E. M. Lifshitz disponible dans le tome *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford, 1984) de leur cours de physique théorique.

6.3.1 Équations sans sources

Dans le cas des équations de Maxwell sans sources, les équations de Maxwell macroscopiques (c'est-à-dire les équations qui régissent les champs moyens) peuvent s'écrire d'emblée en moyennant les équations de Maxwell microscopiques :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{rot} \langle \mathbf{E} \rangle &= - \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} \\ \mathbf{div} \langle \mathbf{B} \rangle &= 0 \end{aligned}} \quad (6.12)$$

Ainsi, les équations de Maxwell sans terme source sont les mêmes pour les champs moyens et pour les champs microscopiques.

6.3.2 Équations avec sources

Dans le cas des équations de Maxwell avec termes sources, il nous faut moyennner la densité de charges (Maxwell-Gauss) et la densité de courant (Maxwell-Ampère).

Équation de Maxwell-Gauss

Commençons par l'équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.13)$$

Après moyenne, on a

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0}. \quad (6.14)$$

Pour obtenir la forme macroscopique, il s'agit donc de calculer la moyenne de la densité de charges $\langle \rho \rangle$. L'astuce consiste à remarquer que pour la très grande majorité des matériaux, la charge moyenne est nulle quel que soit le volume macroscopique de matériau V considéré, c'est-à-dire

$$\int_V \langle \rho \rangle dV = 0. \quad (6.15)$$

On supposera également que $\langle \rho \rangle = 0$ en dehors du matériau. On vérifie aisément qu'un champ vectoriel noté $\mathbf{P}$ tel que

$$\langle \rho \rangle = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (6.16)$$

est solution du problème. À noter qu'on retient $\mathbf{P} = 0$ à l'extérieur du volume V . En effet, par utilisation du théorème de Green-Ostrogradski, on a

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (6.17)$$

où S est l'enveloppe du volume V (supposée toutefois extérieure au volume V tout en y étant tangente). $\mathbf{n}$ est la normale sortante. Ainsi, la nullité de l'expression précédente vient simplement du fait que $\mathbf{P}$ est nul à l'extérieur du matériau. À partir de l'Eq. (6.14) et de l'Eq. 6.16, on en déduit

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (6.18)$$

L'exploitation de l'Éq. (6.18)) pour calculer le champ macroscopique nécessite la connaissance de $\mathbf{P}$. En d'autres termes, le champ électrique en un point de la matière dépend des charges électriques environnantes. Bien entendu, il s'agit pour l'instant uniquement d'une démonstration mathématique et le sens physique de la nouvelle quantité $\mathbf{P}$ reste à déterminer. Pour ce faire, calculons la composante, suivant x , du moment dipolaire associé à la densité de charge moyenne. Cela s'écrit

$$\mathbf{p}_x = \int_V \langle \rho \rangle x dV = - \int_V x \operatorname{div} \mathbf{P} dV \quad (6.19)$$

$$= \int_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{grad} x dV - \int_V \operatorname{div}(x \mathbf{P}) dV \quad (6.20)$$

$$= \int_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_x dV - \int_S x \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.21)$$

$$= \int_V \mathbf{P}_x dV \quad (6.22)$$

où on a utilisé le fait que $\operatorname{div}(x \mathbf{P}) = x \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{grad} x \cdot \mathbf{P}$. Le calcul des composantes suivant y et z étant similaire et on déduit finalement que $\mathbf{P}$ représente la densité de polarisation créée à l'intérieur du matériau sous l'effet du champ

$$\mathbf{p} = \int_V \langle \rho \rangle \mathbf{r} dV = - \int_V (\operatorname{div} \mathbf{P}) \mathbf{r} dV \quad (6.23)$$

$$= \int_V (\mathbf{P} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{r} dV - \int_S (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} dS \quad (6.24)$$

$$= \int_V \mathbf{P} dV \quad (6.25)$$

En effet, le champ qui règne à l'intérieur du matériau le polarise par déplacement de charges (voir figure 6.2). Cela se traduit donc par l'existence du vecteur $\mathbf{P}$. À noter que $\mathbf{P}$ est un vecteur inconnu. Dans la suite et afin de pouvoir résoudre entièrement le problème de la propagation d'ondes dans la matière, il faudra introduire une relation entre $\mathbf{P}$ et $\langle \mathbf{E} \rangle$. Cette relation, caractéristique d'un matériau donné, est appelée relation constitutive (Chapitre 7).

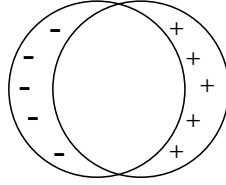


Figure 6.2 – Atome polarisé sous l'action d'un champ.

Équation de Maxwell-Ampère

On effectue maintenant le même calcul à partir de l'équation de Maxwell-Ampère donnée par

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.26)$$

dans le cas microscopique. Après moyenne, cela donne

$$\mathbf{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t}. \quad (6.27)$$

L'idée consiste maintenant à se ramener à la densité de charges en passant par l'équation de conservation de la charge donnée par

$$\mathbf{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6.28)$$

dans sa version microscopique, ce qui devient en moyenne

$$\mathbf{div} \langle \mathbf{j} \rangle + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} = 0. \quad (6.29)$$

En utilisant l'Éq. (6.16), on obtient ainsi

$$\mathbf{div} \left[\langle \mathbf{j} \rangle - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] = 0. \quad (6.30)$$

Un champ de vecteurs dont la divergence est nulle s'écrit comme le rotationnel d'un autre champ de vecteur qu'on note ici $\mathbf{M}$. On obtient donc l'expression de la densité de courants moyenne suivante

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{M}. \quad (6.31)$$

Les courants moyens sont donc dus à deux contributions : d'une part celle résultant de la polarisation du milieu (déformation des nuages électroniques sous l'effet du champ), et d'autre part une nouvelle contribution dont le sens physique sera éclairci plus loin.

Une fois cette dernière équation insérée dans l'Éq. (6.27), on obtient

$$\mathbf{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{M} \quad (6.32)$$

De même que pour l'équation de Maxwell-Gauss, il reste à donner un sens à la quantité $\mathbf{M}$. Pour ce faire, calculons le moment magnétique qui s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \langle \mathbf{j} \rangle dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{rot} \mathbf{M} dV. \quad (6.33)$$

On s'intéresse par la suite au terme

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{rot} \mathbf{M} dV \quad (6.34)$$

qui n'est pas nul en régime quasi-statique ($\partial/\partial t \rightarrow 0$) et qui est relié directement à $\mathbf{M}$. On utilise ensuite la relation vectorielle suivante :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{rot} \mathbf{M} = \mathbf{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{M}) - \mathbf{r} \mathbf{div} \mathbf{M} + \mathbf{M} + \mathbf{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) \quad (6.35)$$

ce qui donne

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{M}) dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{grad}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) dV. \quad (6.36)$$

Les première et dernière intégrales se transforment facilement en intégrales surfaciques (D.2) tandis que la deuxième se met sous la même forme volumique que celle concernant la densité de polarisation $\mathbf{P}$. On a ainsi

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{n} dS. \quad (6.37)$$

Ainsi, les première et dernière intégrales s'annulent puisque comme $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ est nul à l'extérieur du matériau. On obtient finalement

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{M} dV \quad (6.38)$$

$\mathbf{M}$ s'interprète donc comme une densité de moment magnétique (encore appelée aimantation). Il est dû aux courants électroniques (éventuels) intramoléculaires, c'est-à-dire aux moments magnétiques élémentaires. C'est donc un terme essentiellement quantique. Tout comme pour l'équation de Maxwell-Gauss, il sera nécessaire d'introduire une relation entre $\mathbf{H}$ et $\mathbf{B}$ afin de résoudre totalement le problème. Il s'agira une nouvelle fois d'une relation constitutive caractéristique du matériau.

Synthèse

Les équations de Maxwell avec sources (6.18) et (6.32) ont été obtenues dans l'hypothèse où le milieu est fini et que toutes les charges sont liées. Or pour tenir compte des milieux susceptibles de conduire des courants électriques avec déplacement de charges libres, il faut ajouter leurs contributions dans ces équations. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle &= \frac{-\operatorname{div} \mathbf{P}}{\varepsilon_0} + \frac{\langle \rho \rangle_{\text{libre}}}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{rot} \langle \mathbf{B} \rangle &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{M} + \mu_0 \langle \mathbf{j} \rangle_{\text{libre}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Rappelons que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{M}$ sont induits respectivement par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. Il est possible de dissimuler formellement cette dépendance explicite des champs par rapport aux charges liés en introduisant, $\mathbf{D}$, le vecteur induction électrique également appelé excitation électrique ou déplacement électrique par

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{P}$$

et le vecteur champ magnétique, $\mathbf{H}$, donnée par

$$\mathbf{H} = \langle \mathbf{B} \rangle / \mu_0 - \mathbf{M}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \mathbf{D} \rangle &= \langle \rho \rangle_{\text{libre}} \\ \mathbf{rot} \langle \mathbf{H} \rangle &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \langle \mathbf{j} \rangle_{\text{libre}} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Durant les applications on utilisera essentiellement la forme (6.40) avec des charges et courants libres nuls. On verra dans le chapitre suivant une autre écriture, en régime monochromatique, en utilisant les relations constitutives reliant $\mathbf{D}$ à $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ à $\mathbf{B}$ et $\mathbf{j}_{\text{libre}}$ à $\mathbf{E}$.

Points clés

- ❶ Distinction champ microscopique et champ dans la matière.
- ❷ Équations de Maxwell dans la matière. Définition de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$.

Chapitre 7

Relations constitutives

Table des matières

7.1	Introduction	76
7.2	Propriétés	76
7.2.1	Homogénéité	76
7.2.2	Isotropie	76
7.2.3	Linéarité	76
7.2.4	Localité	77
7.2.5	Dispersion	78
7.3	Origine de la dispersion	78
7.3.1	Exemple de l'oscillateur harmonique	78
7.3.2	Cas d'un milieu	79
7.4	Constante diélectrique généralisée	79
7.4.1	Régime statique	80
7.4.2	Régime dynamique	80

7.1 Introduction

NOUS avons besoin de décrire le comportement des milieux matériels en spécifiant par exemple leur aptitude à être polarisés ou la quantité de courant pour un champ électromagnétique donné. Ces relations constitutives peuvent être par exemple :

- $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, la loi d'Ohm avec σ la conductivité ;
- $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$ ou $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ pour un diélectrique avec ϵ_r la permittivité relative et χ la susceptibilité électrique ;
- $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ pour un milieu magnétique avec μ_r la perméabilité relative.

Remarque : à partir de maintenant, nous ne considérons plus que les champs moyennés, c'est-à-dire les champs macroscopiques vérifiant les équations de Maxwell dans la matière établies au chapitre 6. Pour cette raison, nous omettons à partir de ce point la notation $\langle \cdot \rangle$.

7.2 Propriétés

Nous allons illustrer les différentes propriétés d'une relation constitutive en prenant comme exemple la polarisation. Ces mêmes propriétés peuvent bien sûr concerner d'autres caractéristiques du milieu.

7.2.1 Homogénéité

Le milieu est dit homogène si ses propriétés ne dépendent pas du point considéré. Par exemple :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

si χ ne dépend pas de $\mathbf{r}$.

7.2.2 Isotropie

Le milieu est dit isotrope si ses propriétés ne dépendent pas de l'orientation du champ :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Si χ est un scalaire, la polarisation induite, $\mathbf{P}$, est colinéaire au champ électrique $\mathbf{E}$. Dans le cas contraire, si le milieu est anisotrope, certaines directions de $\mathbf{E}$ produiront une plus forte polarisation, en général $\mathbf{P}$ et $\mathbf{E}$ ne seront plus colinéaires et χ sera un tenseur de rang 2 :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 [\chi] \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Ou, en utilisant la convention d'Einstein¹ :

$$P_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j(\mathbf{r})$$

avec $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$.

7.2.3 Linéarité

Le milieu est dit linéaire si la relation entre le vecteur $\mathbf{P}$ et le vecteur $\mathbf{E}$ est linéaire :

$$P_i = \epsilon_0 \chi E_i$$

1. Il y a dans cette convention une somme implicite sur l'indice qui se trouve répété. La relation précédente est donc équivalente à $P_i(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j(\mathbf{r})$.

Dans le cas le plus général, anisotrope et non linéaire, on peut écrire par exemple :

$$P_i = \epsilon_0 [\chi_{ij} E_j + \underbrace{\chi_{ijk} E_j E_k + \dots}_{\text{termes non linéaires}}]$$

On voit ici que si le champ électrique est suffisamment faible, le milieu pourra être approximativement considéré comme linéaire. Pour des champs forts comme ceux parfois générés par les lasers, les effets non linéaires commencent à apparaître.

Considérons un électron d'un atome. Le potentiel « vu » par l'électron a l'allure représentée sur la figure 7.1. Au voisinage de la position d'équilibre $\mathbf{r}_{\text{eq}}$, le potentiel peut être approximé par une fonction parabolique $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{eq}})^2 - V_0$.

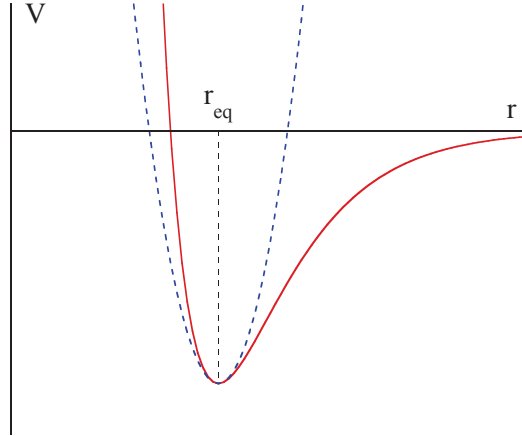


Figure 7.1 – Approximation parabolique du potentiel

Dans le cadre d'un modèle classique, l'électron soumis au champ électromagnétique aura alors un mouvement donné par l'équation :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{E}_{\text{inc}}e^{i(\mathbf{k}_{\text{inc}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

où γ rend compte des pertes énergétiques par rayonnement et où on a appliqué un changement d'origine afin de simplifier l'écriture ; $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{eq}} \rightarrow \mathbf{r}$. Lorsque $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ augmente, l'amplitude du mouvement de l'électron augmente de sorte que l'approximation parabolique du potentiel n'est plus correcte. Si on considère alors un potentiel de la forme $V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2r^2 + \frac{1}{3}m\omega_0^2r^3/a_0$, l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\omega_0^2\frac{r}{a_0}\mathbf{r} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{E}_{\text{inc}}e^{i(\mathbf{k}_{\text{inc}}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

et la force dite de rappel n'est plus linéaire.

7.2.4 Localité

La localité suppose que le déplacement de l'électron ne dépend que du champ au point où il se trouve.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\chi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Mais, dans la mesure où la vitesse de l'électron ne dépend pas que de la force au point considéré, mais aussi de l'histoire (au sens à un autre instant donc à un autre endroit) de la force on devrait avoir :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \int \chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' \quad (7.1)$$

où χ est une susceptibilité par unité de volume. La largeur de la fonction $\chi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ est liée au libre parcours moyen. Un électron assurant un transport de charge en $\mathbf{r}$ provient de $\mathbf{r}'$ où il a subi le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$. Dans la mesure où $\mathbf{E}$ ne varie pas de façon appréciable sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen de l'électron ℓ (distance moyenne entre deux chocs), on peut considérer que les porteurs de charge sont soumis à un champ uniforme. Dans la plupart des cas, $\lambda \gg \ell$ et le milieu peut être étudié dans l'approximation

locale. Néanmoins, il peut y avoir des effets non locaux près des interfaces. Dans le cas des semi-conducteurs, des paires électrons-trous appelées excitons peuvent constituer une contribution non locale aux propriétés optiques des semi-conducteurs. Dans ce cas, la relation constitutive (7.1) donne une relation linéaire dans l'espace des vecteurs d'onde

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{k}) \mathbf{E}(\mathbf{k})$$

grâce à la propriété de la transformé de Fourier d'un produit de convolution.

7.2.5 Dispersion

Le milieu est dit dispersif si son comportement dépend de la fréquence :

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega)$$

ou, dans l'espace direct :

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \int \chi(t - t') \mathbf{E}(t') dt',$$

où l'on a introduit la transformée de Fourier de la susceptibilité par

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (7.2)$$

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (7.3)$$

7.3 Origine de la dispersion

Le phénomène de dispersion est directement lié au temps de réponse du matériau. Prenons pour exemple la polarisation d'un matériau. On peut parler d'une réponse non instantanée du matériau de la même façon que l'on a parlé d'une réponse non locale plus haut. La valeur du moment dipolaire d'un élément de volume dV à l'instant t dépend de la valeur du champ électrique qui induit le dipôle à l'instant t mais également des valeurs prises par le champ pendant les instants précédant t . Ceci est un effet dû au comportement dynamique des charges. Toutefois, alors que la plupart des matériaux peuvent être décrits par une relation locale, seul le vide est non dispersif. Notons néanmoins que l'on peut généralement négliger la dispersion pour des fréquences inférieures à quelques GHz dans le cas général. Il est également possible de la négliger dans certains cas dans d'autres domaines spectraux.

7.3.1 Exemple de l'oscillateur harmonique

L'origine de la dispersion peut se discuter à l'aide d'un simple modèle mécanique. Écrivons la conservation de la quantité de mouvement appliqué à la masse de la figure 7.2.

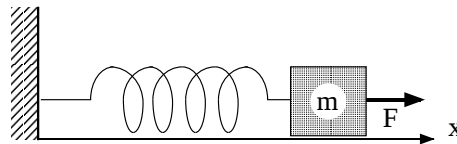


Figure 7.2 – Modèle d'oscillateur harmonique amorti et forcé

$$m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} + F(t)$$

Si

$$\begin{cases} F(t) = \text{Re}[F_0 e^{-i\omega t}] \\ x(t) = \text{Re}[X_0 e^{-i\omega t}], \end{cases}$$

alors

$$X_0[-m\omega^2 + k - im\gamma\omega] = F_0$$

d'où,

$$X_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\frac{k}{m} - \omega^2 - i\gamma\omega} = F_0 C(\omega)$$

Si

$$\begin{cases} F(t) = \int F(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ x(t) = \int X(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \end{cases}$$

alors,

$$X(\omega) = C(\omega)F(\omega) \quad \text{d'où} \quad x(t) = \int C(t-t')F(t')dt' \quad (7.4)$$

Si la masse m tend vers zéro, alors la relation entre X et $F(\omega)$ se réduit à $X(\omega) = \frac{1}{k}F(\omega)$ soit $x(t) = \frac{1}{k}F(t)$ ce qui correspond à une réponse instantanée. Il n'y a donc plus de dispersion. Il apparaît que *la dispersion est une conséquence directe de l'inertie*.

On voit sur cet exemple qu'en l'absence de dissipation d'énergie, $C(\omega)$ est réel ($\text{Im}[C] \rightarrow 0$ si $\gamma \rightarrow 0$). Dans l'équation (7.4), si $C(\omega)$ est réel positif, le déplacement de la masse est en phase avec la force. Cependant, on a toujours

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t-t')F(t')dt',$$

le déplacement dépend de l'histoire de la force. Ce n'est pas une réponse instantanée.

La puissance dissipée par le système a pour moyenne temporelle :

$$\begin{aligned} P &= \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{v}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{F}^* \cdot (-i\omega) \mathbf{X}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{F}^* \cdot (-i\omega) C(\omega) \mathbf{F}] \\ &= \frac{\omega |\mathbf{F}|^2}{2} \text{Im}[C(\omega)] \end{aligned} \quad (7.5)$$

On observe que les pertes sont proportionnelles à la partie imaginaire du facteur de réponse C . Il est rassurant de constater que la partie imaginaire de C est nulle si le terme de frottement visqueux γ est nul. On en conclut que *le déphasage entre la réponse X et l'excitation F est relié à l'existence de phénomènes dissipatifs*.

7.3.2 Cas d'un milieu

Du fait que les masses des charges d'un milieu matériel ne sont jamais strictement nulles, il y a toujours de la dispersion, sauf dans le vide. La dispersion peut être négligée dans deux cas :

- si la fréquence est très petite devant la fréquence de résonance $\omega \ll \omega_0$. Cette fréquence correspond à une transition optique (IR - proche UV).
- si $\omega \gg \omega_0$, les électrons ne peuvent pas osciller à la fréquence du champ car elle est trop élevée. Le milieu se comporte alors comme le vide.

Le premier cas correspond aux ondes radio et micro-ondes. De façon plus précise, à toutes les fréquences inférieures à la plus basse fréquence pour laquelle le milieu a une résonance. Le second cas correspond aux rayons X. L'indice est alors proche de 1.

7.4 Constante diélectrique généralisée

On considère ici le cas d'un matériau homogène, isotrope, linéaire et local.

7.4.1 Régime statique

Dans le cas du régime statique, les relations constitutives sont les suivantes :

- Pour un matériau conducteur (électrons libres dans les métaux, électrons de conduction dans les semiconducteurs ou encore ions dans les électrolytes), on utilise la notion de conductivité reliant la densité de courant au champ macroscopique par la relation (loi d'Ohm)

$$\mathbf{j}_s = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.6)$$

- Dans le cas d'un matériau isolant, on passe par la notion de permittivité statique reliant la densité de polarisation au champ macroscopique par

$$\mathbf{P}_s = \epsilon_0 [\epsilon_s - 1] \mathbf{E} \quad (7.7)$$

En statique, ces deux paramètres, σ et ϵ_s , peuvent être mesurés séparément. Ainsi, on pourra faire des mesures de résistance pour déterminer σ et des mesures de capacité de condensateurs plan fourniront ϵ_s .

7.4.2 Régime dynamique

En régime dynamique *basse fréquence* (fréquence petite devant l'inverse du temps de réponse microscopique du matériau), la séparation formulée dans le cas statique a toujours un sens. Le premier terme (impliquant σ) correspond aux charges dites libres et le second (impliquant ϵ_s) aux charges de polarisation (souvent appelées charges liées par opposition aux charges libres). Pour englober les deux termes, on peut ainsi définir une constante diélectrique généralisée par

$$-i\omega \mathbf{P} = -i\omega \mathbf{P}_s + \mathbf{j}_s = -i\omega \epsilon_0 [\epsilon(\omega) - 1] \mathbf{E} \quad (7.8)$$

ce qui donne

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_s(\omega) + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega \epsilon_0}. \quad (7.9)$$

La densité de polarisation $\mathbf{P}$ telle que définie au chapitre précédent contient donc bien les deux contributions. Ainsi, dans l'Éq. (6.31), la densité de courant moyenne est divisée en deux termes : contribution des charges libres et liées ($\partial \mathbf{P} / \partial t$) et contribution des « boucles de courant interne » ($\text{rot } \mathbf{M}$) qui est nul pour un matériau non magnétique.

En régime dynamique *haute fréquence* par contre, la séparation entre charges libres et liées n'a plus de sens. En effet, dans ce cas, une charge libre a un comportement oscillatoire autour de sa position moyenne fixe. De la même façon, une charge liée à un atome oscille tout en restant au voisinage de l'atome. Il n'y a plus de différence fondamentale de comportement entre une charge libre et une charge liée mis à part une dépendance en fréquence très différente liée à l'existence de fréquences de résonance pour les charges liées. De ce fait, il est impossible de concevoir une mesure portant sur un type de charge et pas sur l'autre. La constante diélectrique ϵ est alors le seul paramètre à considérer.

Points clés

- ❶ Relations constitutives usuelles.
- ❷ Propriétés (linéarité, isotropie, localité, dispersion).
- ❸ Constante diélectrique généralisée. Équivalence des descriptions en terme de densité de courant ou de polarisation en régime dépendant du temps.

Compléments du chapitre 7

7A Complément A : modèle de Drude (1^{ère} partie). Transport électronique dans les métaux

L'objectif de l'exercice est d'étudier, sur la base de modèles simples, les propriétés de conduction électrique et thermique des métaux.

7A.1 Énoncé

Modèle de Drude pour les électrons

En 1900, Drude proposa un modèle permettant d'expliquer les propriétés de conduction électrique et thermique des métaux. Dans ce modèle, on considère que les électrons de conduction forment un gaz de particules *classiques* de masse m et de charge $-e$, auquel on applique les méthodes issues de la théorie cinétique des gaz. Les électrons effectuent des collisions, considérées comme instantanées devant le temps de propagation entre chaque collision. Ils sont supposés indépendants (interaction électron-électron négligée) et libres (interaction avec les ions fixes négligée entre les collisions). Drude attribua les collisions aux chocs entre les électrons et les ions, plutôt qu'aux chocs entre les électrons entre eux comme pour un gaz ordinaire. A l'issue d'une collision, la vitesse de l'électron a une direction aléatoire (pas de direction privilégiée), et une valeur correspondant à la température à l'endroit où a lieu la collision.

Temps de relaxation. Équation d'évolution de la vitesse moyenne

Le paramètre fondamental du modèle de Drude est le temps de collision τ (ou temps de relaxation). Pour un électron donné, la probabilité de subir une collision pendant un intervalle de temps infinitésimal dt est dt/τ .

- Montrer que pour un électron donné observé à partir du temps $t = 0$, la probabilité $\Pi(t)$ de ne pas subir de collision avant l'instant t est $\exp(-t/\tau)$.
- En déduire que pour un électron observé à partir d'un temps t arbitraire, le temps moyen qui s'écoule avant la prochaine collision (ou qui s'est écoulé depuis la dernière collision) est τ .
- On soumet le métal à un champ de force extérieur, et on note $\mathbf{f}(t)$ la force subie par chaque électron.

Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse moyenne $\mathbf{v}$ d'un électron. On pourra raisonner sur la quantité de mouvement par électron $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, définie par $\mathbf{p} = \mathbf{P}/N_0$ où $\mathbf{P}$ est la quantité de mouvement totale du système d'électrons et N_0 le nombre d'électrons.

Pour cela on distinguera les électrons ayant subi un choc pendant dt et ceux qui ont uniquement ressenti l'influence du champ de force.

Conductivité électrique

On applique au métal un champ électrique monochromatique uniforme $\mathbf{E}(t) = \text{Re}[\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)]$.

- a) En appliquant le résultat du 1 c), calculer la densité de courant $\mathbf{j}$ en fonction de m , τ , e et du nombre d'électrons par unité de volume n . En déduire l'expression de la conductivité électrique $\sigma(\omega)$ du métal,
- b) En admettant que chaque atome du métal libère un électron de conduction, exprimer n en fonction de la masse volumique du métal ρ_m , de sa masse atomique A et du nombre d'Avogadro N_A (application numérique : pour le cuivre, $\rho_m = 8,96 \text{ g/cm}^3$, $A = 63,5 \text{ g/mol}$).
- c) La résistivité statique (inverse de la conductivité statique) mesurée du cuivre à $T = 273 \text{ K}$ est $\rho = 1,56 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Calculer le temps de relaxation τ .

Effet Hall

On soumet un conducteur à un champ électrique statique longitudinal E_x , et à un champ magnétique statique transverse B_z . Sous l'action de la force de Lorentz due au champ magnétique, les électrons mis en mouvement dans la direction (Ox) par le champ E_x vont être déviés.

- a) Montrer qualitativement qu'un champ électrique transverse E_y va apparaître dans le conducteur à l'équilibre. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Hall.
- b) On considère les deux composantes du champ électrique E_x et E_y , et on suppose que le conducteur est infini dans les directions (Ox) et (Oy) . En utilisant le résultat de la question c) de la première partie, établir un système d'équations pour les densités de courant j_x et j_y en régime stationnaire.
- c) En déduire, dans l'expérience décrite ci-dessus, le champ électrique transverse E_y en fonction de B_z , n , e et j_x .

À quoi cette expérience peut-elle servir ?

7A.2 Solution

Temps de relaxation. Équation d'évolution de la vitesse moyenne

- a) Considérons un grand nombre N_0 d'électrons à l'instant $t = 0$, et notons $N(t)$ le nombre de ces électrons qui n'ont pas subi de collision entre l'instant $t = 0$ et l'instant t . A l'instant $t + dt$, ce nombre est :

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}$$

ce qui donne l'équation d'évolution de $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}$$

et donc $N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)$. La probabilité $\Pi(t)$ cherchée est alors

$$\Pi(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \exp(-t/\tau) \quad (7A.1)$$

- b) Parmi les mêmes N_0 électrons observés à partir d'un instant $t = 0$ arbitraire, un nombre $N(t)$ n'a pas subi de collisions jusqu'en t . Parmi ceux-ci, une fraction dt/τ subira une collision entre t et $t + dt$. Le nombre d'électrons ayant leur première collision entre t et $t + dt$ est donc $N(t) dt/\tau$. Pour un électron individuel observé à partir de $t = 0$, la probabilité d'avoir sa première collision entre t et $t + dt$ est donc $\Pi(t) dt/\tau = [N(t)/N_0] dt/\tau$. D'après la question a), on a donc $\Pi(t) dt/\tau = \exp(-t/\tau) dt/\tau$.

Pour calculer le temps moyen $\langle t \rangle$ avant la première collision, on a donc à calculer :

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t \Pi(t) \frac{dt}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t \exp(-t/\tau) dt = \tau$$

- c) Pour un grand nombre N_0 d'électrons, la quantité de mouvement $\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t)/N_0$ est la quantité de mouvement moyenne d'un électron. La vitesse moyenne est simplement $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t)/m$.

Étudions l'évolution de ce système entre t et $t + dt$. Parmi les N_0 électrons, une fraction $N_0 dt/\tau$ subit une collision instantanée, à l'issue de laquelle la quantité de mouvement de chaque électron est aléatoire. La quantité de mouvement de ces électrons est nulle et ne contribue pas à la quantité de mouvement totale (la somme des quantités de mouvement aléatoires de tous les électrons donne zéro). La quantité de mouvement de ces électrons à l'instant $t + dt$ est donc uniquement celle due à l'action de la force $\mathbf{f}(t)$. Une fraction $N_0(1 - dt/\tau)$ des électrons ne subit pas de collision. Leur quantité de mouvement $\mathbf{p}(t)$ change sous l'action de la force $\mathbf{f}(t)$. En bilan, on a donc :

$$\mathbf{P}(t + dt) = N_0 \mathbf{p}(t + dt) = N_0 \frac{dt}{\tau} [\mathbf{f}(t) dt] + N_0(1 - \frac{dt}{\tau}) [\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t) dt]$$

$$\mathbf{P}(t + dt) = N_0 \mathbf{p}(t + dt) = N_0 [\mathbf{f}(t) dt] + N_0(1 - \frac{dt}{\tau}) [\mathbf{p}(t)]$$

$$\mathbf{p}(t + dt) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t) \frac{dt}{\tau} + \mathbf{f}(t) dt$$

ce qui donne finalement pour la vitesse moyenne :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \frac{-\mathbf{v}(t)}{\tau} + \frac{\mathbf{f}(t)}{m} \quad (7A.2)$$

Le terme en $1/\tau$ est analogue à celui produit par une force de type « frottement visqueux », proportionnelle à la vitesse (rencontrée par exemple en mécanique des fluides).

Conductivité électrique

a) L'équation (2) s'applique directement avec $\mathbf{f}(t) = -e\mathbf{E}(t)$. En régime monochromatique, et en notation complexe on a :

$$-i\omega \mathbf{v}(\omega) = -\frac{\mathbf{v}(\omega)}{\tau} - \frac{e\mathbf{E}(\omega)}{m}$$

ce qui donne finalement :

$$\mathbf{v}(\omega) = \frac{-e\tau\mathbf{E}(\omega)}{m(1 - i\omega\tau)}$$

La densité de courant $\mathbf{j}(\omega) = -ne\mathbf{v}(\omega)$ est donc reliée linéairement au champ électrique par :

$$\mathbf{j}(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m(1 - i\omega\tau)} \mathbf{E}(\omega)$$

On retrouve la loi d'Ohm, avec la conductivité :

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (7A.3)$$

b) Le nombre d'électrons de conduction par unité de volume est $n = N_A \rho_m / A$ pour un métal dont chaque atome donne un électron de conduction.

Pour le cuivre, on obtient $n = 8,5 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. On peut remarquer que ce nombre de particules par unité de volume est environ 10^3 plus grand que celui d'un gaz à pression atmosphérique et température ambiante.

c) La conductivité statique s'obtient à partir de la formule (3), en prenant $\omega = 0$. On a donc $\sigma = 1/\rho = ne^2\tau/m$, d'où $\tau = m/(\rho ne^2)$.

Pour le cuivre, on obtient $\tau = 2,5 \times 10^{-14} \text{ s}$.

Effet Hall

a) Sous l'action du champ E_x (supposé positif), les électrons se déplacent vers les x négatifs. Ils subissent la force de Lorentz $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, qui est ici orientée dans la direction de l'axe (Oy), vers les y négatifs. On a accumulation de charges $-$ sur le bord du conducteur du côté des y négatifs, et accumulation de charges $+$ du côté des y positifs. Ceci crée un champ électrique dirigé selon (Oy), et pointant vers les y négatifs.

b) On suppose E_x et E_y fixés. L'équation (2) peut s'appliquer, en tenant compte à la fois de la force électrique et de la force de Lorentz. En projection sur (Ox) , on obtient en régime permanent :

$$\frac{mv_x}{\tau} = -eE_x - ev_y B_z$$

En multipliant cette équation par $(-ne\tau)/m$, on fait apparaître les densités de courant j_x , j_y , et la conductivité statique σ :

$$j_x = \sigma E_x - j_y \frac{e\tau B_z}{m}$$

De même, en projection sur (Oy) , on obtient :

$$j_y = \sigma E_y + j_x \frac{e\tau B_z}{m} \quad (7A.4)$$

c) Dans l'expérience de Hall, on a $j_y = 0$. Cette condition introduite dans l'équation (4) donne :

$$E_y = -j_x \frac{e\tau B_z}{m\sigma} = -j_x \frac{B_z}{n e}$$

On montre donc que le champ transverse E_y est proportionnel au courant j_x et au champ magnétique. Le facteur de proportionnalité ne dépend pas de la nature du métal, mais seulement du nombre d'électrons par unité de volume. L'expérience de Hall permet donc de déterminer la densité n . Ceci est valable que pour certains métaux (Rb, Cs, et les métaux nobles : Au, Ag, Cu) pour lesquels le modèle des électrons libres s'applique.

7B Complément B : modèle de Drude (2^{ème} partie). Électrons libres

Nous allons étudier ici un modèle microscopique pour un milieu contenant des électrons libres. Nous allons montrer que ses propriétés optiques peuvent être aussi bien décrites par une conductivité σ complexe que par une constante diélectrique ϵ_r complexe. Utiliser l'une ou l'autre est purement conventionnel. L'usage est de travailler avec une conductivité complexe pour des fréquences inférieures à 10 GHz (radioélectricité) et avec une constante diélectrique complexe pour des fréquences supérieures à 10 GHz (de l'infrarouge aux rayons X).

7B.1 Modélisation du comportement du milieu par sa constante diélectrique

La polarisation dans le milieu peut s'écrire :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = n\mathbf{p}$$

où n est le nombre d'atomes par unité de volume et $\mathbf{p}$ le moment dipolaire d'un atome.

Nous ne considérerons ici que la contribution des électrons libres aux propriétés optiques.

Si chaque atome fournit un seul électron libre, sa contribution à la polarisation est $\mathbf{p} = (-e)\mathbf{r}$. En présence d'une onde électromagnétique, la position $\mathbf{r}$ de l'électron est donnée par l'équation du mouvement :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = (-e)\mathbf{E}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + (-e)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - m\gamma\dot{\mathbf{r}}$$

où m est la masse de l'électron. $\mathbf{r}$ représente ici la composante du mouvement qui est induite par le champ électromagnétique. On utilise un modèle de mécanique classique pour simplifier la discussion. Le dernier terme traduit les pertes dues à la diffusion des électrons libres sur les défauts du cristal. Le mouvement des électrons se faisant sur des distances très petites devant la longueur d'onde λ , $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \approx 1$.

$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$ dans le vide. Si $|\dot{\mathbf{r}}| \ll c$, la force magnétique peut être négligée devant la force électrique. On a alors :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = (-e)\mathbf{E}e^{-i\omega t} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} \quad (7B.1)$$

La solution de l'équation (7B.1) s'écrit alors :

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{1}{\omega^2 + i\omega\gamma}$$

D'où l'expression de la polarisation :

$$\mathbf{P} = -\frac{ne^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega^2 + i\gamma\omega} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$$

On en déduit :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (7B.2)$$

$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$ est la pulsation plasma du milieu.

Pour $\omega \gg \omega_p$, $\epsilon_r \approx 1$ et le milieu est quasi transparent. Ceci rend compte du comportement des rayons X. Si la fréquence augmente encore, le milieu n'est plus transparent. Ceci résulte de l'interaction des photons avec les nucléons. On parle alors de rayons γ . Ceci n'apparaît pas dans notre modèle car nous n'avons pas pris en compte la présence des nucléons.

7B.2 Modélisation à l'aide de la conductivité

La conductivité σ est définie par la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Or, $\mathbf{j} = n(-e)\dot{\mathbf{r}}$. De même que précédemment, $\mathbf{r}$ est donné par l'équation du mouvement de l'électron :

$$m(-i\omega)\dot{\mathbf{r}} = -m\gamma\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{E}$$

Soit :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{e\tau}{m} \frac{-\mathbf{E}}{1 - i\omega\tau}$$

où $\tau = 1/\gamma$ représente le temps moyen entre deux collisions. La conductivité vaut donc :

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (7B.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega \ll \frac{1}{\tau} & : \quad \sigma \rightarrow \frac{ne^2\tau}{m} \\ \omega \gg \frac{1}{\tau} & : \quad \sigma \rightarrow i \frac{ne^2}{m\omega} \end{array} \right.$$

On retrouve à basse fréquence une conductivité réelle. À haute fréquence, la conductivité est imaginaire. Dans ce cas, $\mathbf{E}$ est en quadrature avec $\mathbf{j}$ et le milieu réfléchira les ondes. Lorsque ω augmente, $|\sigma|$ tend vers zéro. Les électrons - du fait de leur masse - ne peuvent plus suivre la force excitatrice. L'amplitude de leur mouvement tendant vers zéro, tout se passe comme s'ils n'étaient pas là (vide). Ceci correspond à $\epsilon_r \rightarrow 1$ ou $\sigma \rightarrow 0$.

7B.3 Comparaison entre les deux points de vue

Comme on l'a vu dans le chapitre 6, en régime dépendant du temps, on ne peut pas distinguer les effets des électrons libres et liés. Les uns comme les autres oscillent sous l'effet des champs oscillants sans avoir de déplacement moyen. Calculer une conductivité σ ou une constante diélectrique ϵ relève d'un choix conventionnel. Ces deux quantités sont alors reliées par la relation : $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} \end{array} \right\} \sigma = -i\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1) \quad \text{ou} \quad \epsilon_r = 1 + \frac{i\sigma}{\epsilon_0\omega}$$

En utilisant les expressions explicites de ϵ_r et σ pour un gaz d'électrons libres, on peut vérifier sur cet exemple les relations ci-dessus.

7B.4 Calcul des pertes

On peut exprimer la puissance volumique dissipée dans le milieu, à l'aide de l'un ou l'autre des deux modèles. L'expression générale est donnée par :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*]$$

En utilisant la constante diélectrique, on obtient :

$$\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P} = -i\omega(\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$$

soit

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{\omega \epsilon_0}{2} \operatorname{Re}[-i(\epsilon_r - 1)] |\mathbf{E}|^2 \\
&= \frac{\omega \epsilon_0}{2} \operatorname{Im}(\epsilon_r) |\mathbf{E}|^2
\end{aligned} \tag{7B.4}$$

En utilisant la conductivité, on obtient :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\sigma] |\mathbf{E}|^2.$$

On retrouve là la forme habituelle des pertes par effet Joule. En remplaçant σ et ϵ_r par les valeurs précédemment obtenues :

$$\longrightarrow \epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \operatorname{Im}(\epsilon_r) = \frac{\omega_p^2 \omega \gamma}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2}$$

D'où :

$$\langle P \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} |\mathbf{E}|^2$$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau}, \quad \operatorname{Re}(\sigma) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

En utilisant

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\gamma}$$

on obtient :

$$\langle P \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} |\mathbf{E}|^2$$

On obtient donc le même résultat par les deux méthodes. Il serait incorrect de penser que la première expression décrit des pertes diélectriques et la seconde des pertes par effet Joule et qu'il faut ajouter les deux. Les deux termes décrivent la même chose : les pertes dues aux électrons libres.

7C Complément C : modèle de l'électron élastiquement lié

Le but de cette étude est d'établir un modèle permettant de calculer le moment dipolaire induit d'un atome. On raisonne sur un électron particulier occupant un état quantique donné. Afin de décrire son mouvement, on utilise le potentiel $V(r)$ supposé à symétrie sphérique. L'électron est au voisinage de r_{eq} qui correspond à la position où le potentiel est minimum $V_{eq} = V(r_{eq})$. Notons que si l'on considère un électron différent, occupant un autre état quantique, le potentiel $V(r)$ est différent.

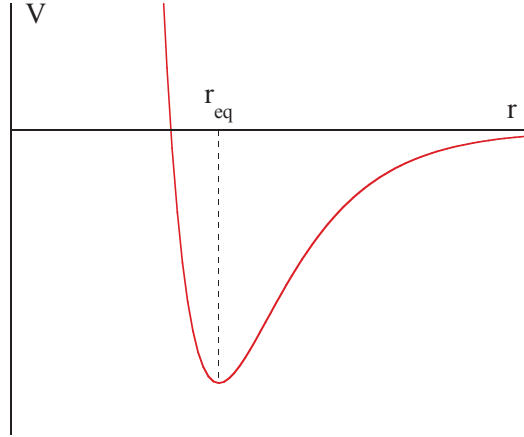


Figure 7C.1 – Potentiel ressenti par un électron particulier. Celui-ci résulte de la présence des autres charges.

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'expression du potentiel est exacte, mais pour tout autre atome on l'approxime par un potentiel effectif moyen qui inclut un effet d'écrantage du noyau par les autres électrons. C'est l'approximation des électrons indépendants.

On suppose que l'on peut utiliser la mécanique quantique pour étudier la trajectoire de l'électron. On obtient ainsi :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{grad}V(r) - m\nu \mathbf{v} - e\mathbf{E}e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) - \omega t]} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B}e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) - \omega t]} \quad (7C.1)$$

où $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ est le champ électromagnétique d'une onde se propageant dans la vapeur atomique, et où $-m\nu \mathbf{v}$ est un terme qui permet de décrire la perte d'énergie due aux phénomènes de collisions ou aux pertes par rayonnement.

Au niveau de l'étude microscopique, *ce terme n'a pas de signification physique simple*. Il permet d'introduire dans le modèle un terme dissipatif qui prend tout son sens, en bout de course, sur les quantités microscopiques.

7C.1 Hypothèses simplificatrices

- $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)$ apparaît dans l'expression de la phase du champ. Pour une longueur d'onde dans le visible ou l'infrarouge et une amplitude du mouvement de l'ordre de 10^{-10} m, la fluctuation de la phase est très inférieure à 1 :

$$\Delta\varphi \approx 2\pi \frac{10^{-10}}{10^{-6}} = 2\pi 10^{-4} \ll 1$$

On fait alors l'approximation $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t)} \approx 1$.

- Le terme $e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ est négligeable devant $e\mathbf{E}$ puisque

$$|\mathbf{B}| \approx \left| \frac{\mathbf{E}}{c} \right| \quad \text{d'où} \quad \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{E} \right| \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

sauf si l'électron est relativiste...

- L'amplitude du mouvement induit par le champ externe est très faible car les champs externes que l'on sait faire sont généralement très faibles devant les champs intramoléculaires. Ainsi, le champ électrique d'un laser de 1 mW ayant un spot de 5 mm est donné par :

$$\epsilon_0 c E^2 \Delta S = 10^{-3} \text{ W} \Rightarrow E \approx 16 \text{ Vm}^{-1}$$

Pour estimer les champs intramoléculaires, on peut les assimiler au champ électrostatique.

$$E_{\text{intra}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2} \quad \text{avec} \quad a \approx 10^{-10} \text{ m} \quad \text{d'où} \quad E_{\text{intra}} \approx 1,5 \times 10^{10} \text{ Vm}^{-1}$$

7C.2 Conclusions

Le champ extérieur est une très faible perturbation ce qui permet de considérer que :

- le mouvement $\mathbf{r}(t)$ est sensiblement le mouvement en l'absence de la perturbation auquel il faut ajouter une correction $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)$
- le potentiel $V(r)$ peut être développé au voisinage de r_{eq} .

Étude de $\mathbf{r}(t)$

(i) Développement du potentiel au voisinage de r_{eq}

$$\begin{aligned} V(r) &= V(r_{\text{eq}}) + (r - r_{\text{eq}}) \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r_{\text{eq}}} + \frac{1}{2} (r - r_{\text{eq}})^2 \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{\text{eq}}} \\ &= V(r_{\text{eq}}) + \frac{1}{2} (r - r_{\text{eq}})^2 \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{\text{eq}}} \end{aligned} \quad (7C.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= -\mathbf{grad}V(r) \\ &= - \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{\text{eq}}} (r - r_{\text{eq}}) \mathbf{u}_r \\ &= -m\omega_0^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{eq}}) \end{aligned} \quad (7C.3)$$

En posant

$$m\omega_0^2 = \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r_{\text{eq}}} \quad (7C.4)$$

(ii) Mise en équation

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\text{eq}}) - m\nu \mathbf{v} - e\mathbf{E} \quad (7C.5)$$

On pose $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}_1(t)$, d'où :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = -m\omega_0^2 (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{\text{eq}}) - m\nu \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \quad (7C.6)$$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}_1 - m\nu \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - e\mathbf{E} \quad (7C.7)$$

La première équation décrit le mouvement de l'électron en l'absence de champ. Elle est complètement fautive puisque pour résoudre ce problème il faut faire de la mécanique quantique !!

La seconde équation décrit l'évolution de $\mathbf{r}_1$ qui seul contribue au moment dipolaire induit. On voit apparaître la force de rappel élastique du modèle de Thomson. Cette équation, obtenue dans le cadre de la mécanique classique, peut être retrouvée à l'aide de la mécanique quantique grâce au théorème d'Ehrenfest (voir Cohen-Tannoudji Chap XIII, B-XIII).

(iii) Résolution classique

On obtient aisément l'amplitude du mouvement de l'électron en régime permanent.

$$\mathbf{r}_1(\omega) = \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\nu\omega} \quad (7C.8)$$

et $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$

Soit n_0 le nombre de particules par unité de volume :

$$\mathbf{P} = n_0 \langle \mathbf{p} \rangle = -\frac{n_0 e^2}{m} \frac{\mathbf{E}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\nu\omega} \quad (7C.9)$$

Or $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$, donc :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\nu\omega} \quad (7C.10)$$

En posant $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}$, on obtient :

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2\omega^2} + i \frac{\nu\omega\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2\omega^2} \quad (7C.11)$$

Remarque 1 : Si $\nu = 0$, alors il n'y a pas de dissipation d'énergie et $\text{Im}[\epsilon_r(\omega)] = \epsilon''(\omega) = 0$. En effet, la puissance dissipée est donnée par $\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle$ et est proportionnelle à $\epsilon''(\omega)$.

Remarque 2 : Ce modèle est proche de celui des électrons libres. On le retrouve en « libérant » les électrons, c'est-à-dire en supprimant la force de rappel élastique qui provient du potentiel. Si $V(r) = 0$, alors $\omega_0 = 0$ et

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega}$$

Les modèles se ressemblent parce que dans les deux cas, on ne s'intéresse qu'au mouvement perturbatif des électrons, négligeant tous les autres effets plus fins qui sont radicalement différents.

7D Complément D : polarisation d'orientation, relaxation et pertes diélectriques

On se propose d'étudier l'absorption de micro-ondes (2,5 GHz) par de l'eau pure constituée de n molécules par unité de volume.

7D.1 Énoncé

1) On modélise chaque molécule par un dipôle électrique permanent $\mathbf{p}_0$. Calculer la polarisation d'orientation induite par un champ électrique permanent $\mathbf{E}$ à la température T . Calculer la polarisation $\mathbf{P}$ au premier ordre par rapport à E_m/kT où $\mathbf{E}_m$ est le champ moléculaire ou champ local.

On rappelle que la probabilité pour qu'un dipôle $\mathbf{p}$ fasse l'angle θ avec le champ électrique $\mathbf{E}_m$ est proportionnelle à $\exp(E_m p \cos \theta / kT)$.

La polarisation électronique est caractérisée par la polarisabilité α qui est réelle dans le domaine des micro-ondes. Donner l'expression complète de $\mathbf{P}$ à l'ordre le plus bas par rapport à $E_m p / kT$.

2) Le champ électrique est brusquement coupé à l'instant $t = 0$. On observe alors que la *polarisation d'orientation* décroît exponentiellement avec une constante de temps τ . Cette étape de retour à l'équilibre est appelée relaxation diélectrique. Écrire l'équation d'évolution de la polarisation en l'absence de champ électrique.

3) On applique maintenant un champ électrique de pulsation ω : le champ moléculaire est alors de la forme $\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \text{Cte}$. En admettant qu'il suffit de rajouter un terme de force proportionnel à $\mathbf{E}_m$ à l'équation obtenue en 2-, écrire l'équation d'évolution de la polarisation. Calculer $\mathbf{P}(t)$ en régime permanent.

4) Dans un milieu condensé, il est incorrect de considérer que le champ éclairant un atome ou une molécule est le champ moyen. Il faut en fait retrancher du champ moyen la contribution de la molécule elle-même qui vaut $-\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$. On obtient alors ce qu'on appelle le champ local ou moléculaire qui s'écrit $\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$. Montrer que l'on a :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{n}{3\epsilon_0} \left[\alpha + \frac{p_0^2}{3kT} + \frac{1}{1 - i\omega\tau} \right]$$

On obtient ainsi une expression de ϵ_r en fonction des quantités microscopiques p_0 et α . En introduisant les quantités macroscopiques $\epsilon_s(\omega = 0)$ et $\epsilon(\omega \rightarrow \infty)$ montrer que la constante diélectrique peut s'écrire à l'aide des trois paramètres ϵ_s , $\epsilon(\omega \rightarrow \infty)$ et τ .

5) Donner l'expression de la partie imaginaire de ϵ_r . En déduire la puissance dissipée par unité de volume.

AN : Dans un four à micro-ondes la fréquence est de 2,5 GHz, les paramètres de l'eau pure à 17 ° C sont : $\epsilon_s = 80$, $\epsilon(\omega \rightarrow \infty) = 5,5$ (valeur à 1 MHz) et $\tau = 10^{-11}$ s.

7D.2 Solution

1) La polarisation du milieu résulte de l'effet de deux mécanismes : l'orientation des dipôles permanents $\mathbf{p}$ et la déformation des nuages électroniques décrite par la polarisation α .

Le dipôle associé à une molécule est de la forme $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{E}_m$ où $\mathbf{E}_m$ est le champ moléculaire. Le dipôle présente un angle θ par rapport à l'orientation du champ $\mathbf{E}_m$. Du fait de l'absence de structure du milieu, le champ $\mathbf{E}_m$ est parallèle au champ $\mathbf{E}$. La densité de probabilité par rapport à l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ pour que le moment dipolaire fasse un angle θ avec le champ est donnée par :

$$P(\theta) = \frac{\exp[\beta p E_m \cos \theta]}{\int_0^\pi \exp[\beta p E_m \cos \theta] 2\pi \sin \theta d\theta} \quad (7D.1)$$

Où l'on note $\beta = 1/kT$. On en tire la valeur moyenne du moment dipolaire d'une molécule. Seule la composante $p_{\parallel}$ parallèle à $\mathbf{E}_m$ est non nulle.

$$\langle p_{\parallel} \rangle = \frac{\int_0^\pi \exp[\beta p_{\parallel} E_m] p_{\parallel} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp[\beta p_{\parallel} E_m] \sin \theta d\theta} \quad (7D.2)$$

où $p_{\parallel} = p_0 \cos \theta + \alpha E_m$. On peut aisément effectuer le calcul en remarquant que le numérateur se déduit du dénominateur $D(p_{\parallel}, E_m)$ par dérivation par rapport à β . On obtient ainsi :

$$\langle p_{\parallel} \rangle = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \beta} \frac{1}{E_m} \quad (7D.3)$$

Il est toutefois plus facile de développer directement à l'ordre le plus bas l'expression de $\langle p_{\parallel} \rangle$. Après simplification par $\exp[\beta \alpha E_m^2]$, on obtient, en utilisant le changement de variable $u = \cos \theta$:

$$\langle p_{\parallel} \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} (\alpha E_m + p_{\parallel} u) \exp[\beta p_0 E_m u] du}{\int_{-1}^{+1} \exp[\beta p_0 E_m u] du} \quad (7D.4)$$

En développant l'expression, il vient :

$$\langle p_{\parallel} \rangle = \alpha E_m + \frac{1}{3} \frac{p_0^2 E_m}{kT} \quad (7D.5)$$

On en tire la polarisation $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = n(p) = n \left[\alpha + \frac{p_0^2}{3kT} \right] \mathbf{E}_m \quad (7D.6)$$

Ce résultat montre que la polarisation est la somme de deux termes. Le premier est la polarisation de déformation associée à la séparation des charges de la molécule. Le second est associé à l'orientation des dipôles permanents $\mathbf{p}_0$ parallèlement au champ extérieur. L'agitation thermique tend à casser cet alignement. Cet effet explique la dépendance en T de la contribution à la polarisabilité.

2) En séparant les deux contributions, on peut écrire $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{él}} + \mathbf{P}_{\text{or}}$ où $\mathbf{P}_{\text{él}}$ représente la contribution liée à la déformation du cortège électronique et $\mathbf{P}_{\text{or}}$ celle des dipôles permanents. Lorsque le champ extérieur est supprimé, le retour à l'équilibre ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$) se fait beaucoup plus vite pour $\mathbf{P}_{\text{él}}$ que pour $\mathbf{P}_{\text{or}}$. L'observation expérimentale d'une décroissance exponentielle correspond au phénomène le plus lent. On peut en déduire l'équation d'évolution temporelle de $\mathbf{P}_{\text{or}}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{or}}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{\text{or}}(t) = \mathbf{0} \quad (7D.7)$$

3) Afin de modéliser le comportement dynamique de $\mathbf{P}_{\text{or}}(t)$, on fait l'hypothèse que $\mathbf{P}_{\text{or}}(t)$ obéit à l'équation (7D.7) à laquelle on a ajouté un terme source :

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{or}}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{P}_{\text{or}} = C \mathbf{E}_m \quad (7D.8)$$

On en tire en régime permanent, en notant $\mathbf{P}_{\text{or}}(t) = \text{Re}[\mathbf{P}_{\text{or}} e^{-i\omega t}]$,

$$\mathbf{P}_{\text{or}} = \frac{C\tau}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E}_m \quad (7D.9)$$

Afin de fixer la constante C on utilise le résultat en statique du 1) :

$$C\tau = \frac{np_0^2}{3kT} \quad (7D.10)$$

Finalement :

$$\mathbf{P}_{\text{or}} = \left[n\alpha + \frac{np_0^2}{3kT} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \right] \mathbf{E}_m \quad (7D.11)$$

4) L'expression du champ moléculaire donnée par la loi de Lorenz est :

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0},$$

la constante diélectrique est définie par $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ d'où l'on tire, d'après la définition de $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, l'expression $\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$. On a établi à l'aide du modèle microscopique qui précède une autre forme de $\mathbf{P}$: $\mathbf{P} = n\alpha' \mathbf{E}_m$. Par identification, on obtient :

$$n\alpha' \left[1 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{3\epsilon_0} \right] \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \quad (7D.12)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} &= \frac{n\alpha'}{3\epsilon_0} \\ &= \frac{n\alpha}{3\epsilon_0} + \frac{n^2 p_0^2}{9kT\epsilon_0} \frac{1}{1 - i\omega\tau}\end{aligned}\quad (7D.13)$$

Il existe trois paramètres dans cette expression : $\frac{n\alpha}{3\epsilon_0}$, $\frac{np_0^2}{9\epsilon_0}$ et τ . Le premier correspond à $\frac{\epsilon(\omega \rightarrow \infty) - 1}{\epsilon(\omega \rightarrow \infty) + 2}$ le second se déduit de la valeur statique ϵ_s de ϵ .

On obtient, tous calculs faits :

$$\epsilon = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 - ix} \quad \text{où} \quad x = \frac{\epsilon_s + 2}{\epsilon_\infty + 2} \omega\tau \quad (7D.14)$$

5) La puissance dissipée est donnée par :

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*] \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{E}^* \right] \\ &= \frac{\omega \epsilon_0}{2} \text{Im}[\epsilon_r] |\mathbf{E}|^2\end{aligned}\quad (7D.15)$$

où l'on a utilisé $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$. On trouve, avec les valeurs données, $\text{Im}[\epsilon_r] = 32,3$ à 2,5 GHz. On en tire $P = 2,2|E|^2 \text{ Wm}^{-3}$ où E est en Vm^{-1} .

7E Complément E : causalité et relations de Kramers-Krönig

Les relations de Kramers-Krönig s'appliquent à tout système pour lequel la réponse à une excitation donnée est une fonction linéaire de cette excitation. Cette relation linéaire simple entre cause et effet est très courante en physique. On peut citer par exemple

- la loi d'Ohm qui relie la densité de courant $\mathbf{j}$ au champ électrique $\mathbf{E}$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

- la susceptibilité électrique reliant la polarisation $\mathbf{P}$ au champ électrique,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E},$$

- l'impédance Z reliant l'intensité du courant I à la différence de potentiel V

$$V = ZI,$$

- la fonction de transfert d'un circuit linéaire reliant la tension d'entrée et la tension de sortie, etc...

$$U_{\text{out}} = H(\omega)U_{\text{in}}.$$

Toutes ces relations décrivent des systèmes dispersifs. Les coefficients impliqués dépendent donc de la fréquence. Ils sont aussi nécessairement complexes pour rendre compte du déphasage entre l'excitation et la réponse. Pour tous ces systèmes, on sait que le déphasage est lié à l'existence de pertes dans le système.

L'hypothèse de causalité, c'est-à-dire l'hypothèse que l'effet ne peut pas précéder la cause, entraîne une relation entre la partie réelle et la partie imaginaire du coefficient de réponse. C'est cette relation que nous allons étudier. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la susceptibilité χ qui relie la polarisation au champ électrique et qui est reliée à la constante diélectrique par :

$$\chi(\omega) = \epsilon_r(\omega) - 1$$

7E.1 Conséquence de la causalité

Pour prendre en compte la dispersion, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (7E.1)$$

où $\mathbf{P}(\omega)$ et $\mathbf{E}(\omega)$ sont les transformées de Fourier par rapport au temps de la polarisation et du champ électrique respectivement. Nous avons omis d'indiquer la dépendance en fonction des variables d'espace pour alléger les notations. Prendre la transformée de Fourier de cette relation conduit à :

$$\mathbf{P}(t) = \int G(t - t') \mathbf{E}(t') dt', \quad (7E.2)$$

où $\mathbf{P}(t)$ et $\mathbf{E}(t)$ sont la polarisation et le champ électrique dépendant du temps. G est la transformée de Fourier inverse de $\epsilon_0 \chi(\omega)$:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 \chi(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (7E.3)$$

La causalité impose la relation suivante :

$$G(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad (7E.4)$$

Il s'ensuit que la formule d'inversion de l'équation (7E.3) peut se mettre sous la forme :

$$\epsilon_0 \chi(\omega) = \int_0^{\infty} G(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (7E.5)$$

La causalité apparaît dans la relation ci-dessus par le fait que l'intégrale n'est prise que sur les valeurs positives de t . Dans ce qui suit, nous allons avoir besoin de définir $\chi(\omega)$ pour des valeurs complexes de ω ($\omega = \omega' + i\omega''$). L'équation (7E.5) permet de calculer $\chi(\omega)$ pour toute valeur complexe de ω (on parle d'un

prolongement analytique). Nous allons maintenant examiner les conséquences de la causalité sur $\epsilon_0\chi(\omega)$. Nous allons montrer que la susceptibilité $\chi(\omega)$ est une fonction à valeur finie pour tout ω tel que $\text{Im}(\omega) > 0$ et que donc, la fonction n'a pas de pôle pour $\text{Im}(\omega) > 0$, c'est à dire qu'elle est analytique dans le demi-plan supérieur. Pour cela, nous allons montrer que l'intégrale de l'équation (7E.5) admet une borne supérieure :

$$\left| \int_0^\infty G(t) \exp(i\omega t) dt \right| < \int_0^\infty |G(t) \exp(i\omega t)| dt \quad (7E.6)$$

$$= \int_0^\infty |G(t)| dt \quad (7E.7)$$

Il faut noter que cette dernière inégalité n'est pas valable si $\text{Im}(\omega) < 0$. Cette borne supérieure est finie dans la plupart des cas. En effet, dans le cas où G est positive, elle correspond à la réponse du système à une excitation constante. Si l'on considère une excitation constante commençant à $t = -\infty$, la polarisation à l'instant t est donnée par :

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \mathbf{E}_0 dt' = \left[\int_{-\infty}^t G(t-t') dt' \right] \mathbf{E}_0 \quad (7E.8)$$

En choisissant l'origine des temps à l'instant d'observation t et en changeant la variable t' en $-t'$, l'équation (7E.8) conduit à :

$$\mathbf{P}(0) = \left[\int_0^\infty G(t') dt' \right] \mathbf{E}_0 \quad (7E.9)$$

Ainsi, pour tout système dont la réponse à fréquence nulle ne diverge pas, l'intégrale est finie. Dans le cas de la polarisation, ceci est valable pour les matériaux qui sont isolants en régime continu, comme discuté au paragraphe suivant. Dans le cas contraire, il faut modifier quelque peu la démonstration. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin. D'après ce que nous venons de voir, la fonction $\chi(\omega)$ est bornée et donc n'a pas de pôle pour $\text{Im}(\omega) > 0$. Si elle n'a pas de pôle, elle est dite analytique dans ce demi-plan. Cette propriété entraîne l'égalité :

$$\chi(\omega_0) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega_0} d\omega' \quad (7E.10)$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire de ces relations, on obtient les relations de Kramers-Krönig :

$$\chi'(\omega_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega_0} d\omega' \quad \chi''(\omega_0) = \frac{-1}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega_0} d\omega' \quad (7E.11)$$

On peut les écrire sous une forme légèrement différente en utilisant le fait que la fonction G est à valeur réelle et que donc χ doit satisfaire :

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega), \quad (7E.12)$$

où χ^* est le complexe conjugué de χ . D'où :

$$\chi'(\omega_0) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega_0^2} d\omega' \quad (7E.13)$$

Cette relation est intéressante car elle permet d'obtenir une fonction $\chi'(\omega_0)$ réelle et qui satisfait au principe de causalité à partir d'une fonction approchée pour χ'' . C'est une méthode très efficace pour déterminer la partie réelle de la susceptibilité à partir de mesures d'absorption. Considérons par exemple la contribution à $\chi'(\omega)$ d'une raie d'absorption en ω_0 pour une vapeur atomique quelconque. Dans le cadre d'un modèle simple, on peut écrire la partie imaginaire de la susceptibilité électrique :

$$\chi''(\omega) = K \delta(\omega - \omega_0), \quad (7E.14)$$

où K est une constante. En utilisant l'équation (7E.13), on obtient la contribution suivante pour la partie réelle de χ :

$$\chi'(\omega) = \frac{2\omega_0}{\pi} \frac{K}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (7E.15)$$

Les données en réflexion et en transmission peuvent aussi être utilisées de la même façon. Il suffit de considérer que les facteurs de réflexion et de transmission satisfont aussi au principe de causalité. Leur

partie réelle et leur partie imaginaire sont donc aussi liées par les relations de Kramers-Krönig. En fait, il est plus commode de travailler avec le logarithme du facteur de réflexion de sorte que la partie réelle corresponde au module du facteur de réflexion et la partie imaginaire à sa phase. On voit donc que les relations de Kramers-Krönig établissent un lien entre la phase et l'amplitude du facteur de réflexion (voir le livre de Kittel pour plus de détails).

7E.2 Cas des conducteurs en régime continu

Revenons aux propriétés des conducteurs à fréquence nulle. Par définition, la polarisation s'écrit :

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^N q\mathbf{r}_j. \quad (7E.16)$$

où $\mathbf{r}_j$ représente la position de la particule chargée j et q sa charge. Les charges peuvent être des électrons libres dans le cas d'un métal ou d'un semi-conducteur, des ions dans le cas d'une solution ou d'un plasma, etc... Supposons que l'on applique un champ électrique continu $\mathbf{E}_0$ au milieu. Les électrons des couches internes étant liés au noyau, le champ génère une déformation du nuage électronique et induit une polarisation. En revanche, les électrons libres se déplacent à vitesse constante. En d'autres termes, la « polarisation » diverge avec t et produit une contribution de la forme $nq\mathbf{v}t = \sigma\mathbf{E}t$ où n est le nombre de charges par unité de volume, et σ est la conductivité en continu. Néanmoins, pour une fréquence non nulle, la polarisation induite par un champ électrique ne diverge pas. Il s'agit d'une singularité à la fréquence nulle seulement. Ceci n'est rien d'autre que la contribution à la susceptibilité correspondant à $i\sigma/\omega\epsilon_0$. Cette singularité est un pôle simple. Puisque la conductivité en régime continu est un réel positif, ce terme produira une contribution à la partie imaginaire de χ'' . Cette contribution peut être ajoutée au résultat précédent :

$$\chi''(\omega_0) = \frac{-1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega_0} d\omega' + \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} \quad (7E.17)$$

7E.3 Fonctions analytiques

Dans cette partie, on considère ω comme une variable complexe ($\omega = \omega' + i\omega''$). Nous avons établi qu'une conséquence de la causalité est l'absence de pôle pour la fonction χ dans le demi-plan supérieur i.e. la fonction est analytique. Pour toute fonction $f(\omega)$ analytique dans le demi-plan supérieur, on peut définir $f(\omega)/(\omega - \omega_0)$ où ω_0 est réel. De façon évidente, cette dernière fonction possède un pôle en ω_0 . On peut appliquer le théorème des résidus sur le contour représenté ci-dessous.

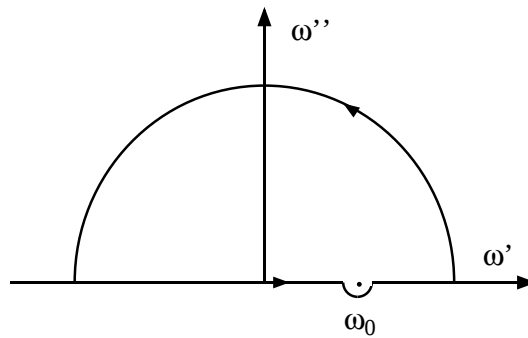


Figure 7E.1 – Le contour entoure un seul pôle en ω_0 car la fonction f est analytique dans le demi-plan supérieur. La contribution de l'intégrale le long de l'axe réel fournit le terme correspondant à une valeur principale.

L'intégrale sur le demi-cercle à l'infini est nulle pourvu que la fonction $|f(\omega)|$ tende vers zéro quand ω tend vers l'infini. Dans le cas de la susceptibilité, ceci est garanti par le fait que tous les matériaux deviennent transparents à haute fréquence à cause de l'inertie des particules chargées. L'intégrale sur l'axe réel fournit la valeur principale et l'intégrale sur le contour qui évite le pôle produit le résidu multiplié par $i\pi$. On obtient finalement :

$$i\pi f(\omega_0) + P \int \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega_0} d\omega' = 2i\pi f(\omega_0) \quad (7E.18)$$

Ce qui fournit l'expression suivante pour la fonction f :

$$f(\omega_0) = \frac{1}{i\pi} P \int \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega_0} d\omega' \quad (7E.19)$$

Chapitre 8

Propagation dans la matière

Table des matières

8.1	Cas particulier : propagation en milieu homogène, isotrope et <i>non dispersif</i> . . .	100
8.1.1	Modèle	100
8.1.2	Équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$	100
8.2	Cas général : équation de propagation dans un milieu homogène, isotrope et <i>dispersif</i>	101
8.2.1	Modèle et équations de Maxwell en régime monochromatique	101
8.2.2	Constante diélectrique généralisée d'un milieu non magnétique	101
8.2.3	Équation de Helmholtz : équation de propagation en régime monochromatique	102
8.2.4	Propagation dans un milieu matériel	102
8.2.5	Exemple : propagation dans un plasma	103
8.2.6	Discussion de la propagation dans l'espace réciproque	104
8.3	Aspects énergétiques	104
8.3.1	Puissance échangée entre le champ et la matière	104
8.3.2	Puissance moyenne absorbée	105
8.3.3	Bilan d'énergie	105

DANS ce chapitre, nous examinons la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel homogène. La présence de charges dans la matière modifie profondément les champs électromagnétiques par le mécanisme suivant. Les champs excitateurs induisent des courants dans la matière. Ces courants induits rayonnent à leur tour et le rayonnement ainsi généré s'ajoute aux champs incidents. On peut décrire avec ce type d'approche le phénomène de faible pénétration d'une onde dans un métal. Les courants induits au voisinage de l'interface rayonnent une onde qui interfère destructivement avec le champ incident.

Dans ce chapitre, nous adopterons une démarche purement macroscopique. Nous utiliserons les relations constitutives pour établir les équations de propagation en milieu matériel. On pourra alors mettre en évidence les effets d'absorption (c'est-à-dire de conversion d'énergie électromagnétique en chaleur), d'atténuation d'une onde et de dispersion. On verra également comment la relation de dispersion permet de rendre compte de ces effets.

8.1 Cas particulier : propagation en milieu homogène, isotrope et non dispersif

Dans le cas d'ondes électromagnétiques basse-fréquence, on peut souvent négliger la dispersion. En pratique, cela correspond à un domaine de fréquences inférieures à 1 GHz environ. Plus précisément, pour un matériau donné, c'est le domaine des fréquences inférieures aux fréquences de résonance d'absorption de ce milieu.

8.1.1 Modèle

Le milieu est supposé linéaire, homogène et isotrope. S'il est non dispersif, il est décrit par les relations constitutives qui ne dépendent pas de la fréquence :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (8.1)$$

$$\mathbf{j}_{\text{libre}}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (8.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (8.3)$$

où ϵ_r , μ_r et la conductivité σ sont supposés constants dans la gamme de fréquence étudiée.

8.1.2 Équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$

Dans l'hypothèse où le milieu est neutre, l'équation de Maxwell-Gauss donne $\text{div} \mathbf{D} = 0$. Pour un milieu homogène et isotrope, on en déduit $\text{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \text{div}(\mathbf{E}) = 0$. On a donc deux solutions possibles de cette équation : soit $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ qui correspond à un champ transverse, soit $\epsilon = 0$ et une solution avec un champ longitudinal est possible. On ne considère que la solution transverse dans ce qui suit. Les équations de Maxwell (6.39) du chapitre 6 permettent d'écrire :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \mathbf{B}) \\ \text{grad}(\text{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} &= -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ \Delta \mathbf{E} - \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Cette dernière équation est appelée équation des télégraphistes. À noter que dans le cas non dispersif, la permittivité ϵ_r intervenant dans le terme $\partial \mathbf{D} / \partial t$ est en réalité la polarisabilité ϵ_r^{pol} .

Le second membre est lié à l'existence de pertes par effet Joule (due aux charges libres) dans le milieu.

La vitesse de phase de l'onde électromagnétique dépend donc des caractéristiques du milieu $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$.

8.2 Cas général : équation de propagation dans un milieu homogène, isotrope et *dispersif*

8.2.1 Modèle et équations de Maxwell en régime monochromatique

Dans le cas de la propagation d'ondes optique ou infrarouge par exemple, il est souvent nécessaire de prendre en compte la dispersion. De façon plus générale, cela est nécessaire dès que l'on considère des milieux qui absorbent. En effet, les relations de Kramers-Krönig, décrites dans le complément (7E.1) montrent que les milieux qui absorbent sont nécessairement dispersifs. Les relations constitutives suivantes ne sont pas correctes :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{j}_{\text{libre}}(\mathbf{r},t) &= \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

On doit utiliser la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \int \epsilon(t,t') \mathbf{E}(\mathbf{r},t') dt' \\ \mathbf{j}_{\text{libre}}(\mathbf{r},t) &= \int \sigma(t,t') \mathbf{E}(\mathbf{r},t') dt'\end{aligned}$$

Dans le cas d'un milieu stationnaire¹, la fonction réponse linéaire G la plus générale est telle que $G(t + \tau, t' + \tau) = G(t, t')$. Ceci entraîne que G est une fonction de $t - t'$ seulement. La relation ci-dessus se ramène alors à un produit de convolution :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \int \epsilon(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r},t') dt' \\ \mathbf{j}_{\text{libre}}(\mathbf{r},t) &= \int \sigma(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r},t') dt'\end{aligned}$$

La difficulté d'utiliser de telles relations conduit naturellement à travailler dans l'espace de Fourier. En effet, les transformées de Fourier par rapport au temps des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ sont simplement reliées par :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) \quad (8.5)$$

Ainsi, les produits de convolution deviennent des produits dans l'espace des fréquences. On va donc cesser de travailler avec des champs dépendant du temps pour travailler avec leurs transformées de Fourier. Il faut donc déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ qui remplace l'équation de propagation satisfaite par $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$.

8.2.2 Constante diélectrique généralisée d'un milieu non magnétique

D'après le chapitre 6, la relation (6.39) permet de définir un courant effectif qui est la somme du courant libre et de courant induit par la variation temporelle de la polarisation due aux charges liées

$$\mathbf{j}^{\text{eff}} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (8.6)$$

En régime monochromatique, cette équation s'écrit sous la forme

$$\mathbf{j}^{\text{eff}} = [\sigma(\omega) \mathbf{E} - i \omega \epsilon_0 (\epsilon_r(\omega) - 1)] \mathbf{E} \quad (8.7)$$

On peut alors définir une polarisation effective telle que

$$\mathbf{j}^{\text{eff}} = \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{eff}}}{\partial t} = -i \omega \epsilon_0 (\epsilon_{r,\text{eff}}(\omega) - 1) \mathbf{E}$$

où $\epsilon_{r,\text{eff}}$ est appelée constante diélectrique généralisée

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \epsilon_r(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \quad (8.8)$$

1. Un milieu instationnaire est décrit par un indice dépendant du temps. C'est par exemple un milieu traversé par une onde acoustique, une suspension de particules agitées par le mouvement brownien, l'atmosphère, etc...

8.2.3 Équation de Helmholtz : équation de propagation en régime monochromatique

Les équations de Maxwell peuvent être réécrites pour les transformées de Fourier des champs. Par exemple,

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega).$$

En pratique, il suffit de remplacer une dérivée partielle par rapport au temps par un produit par $-i\omega$, et de substituer $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ à $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Dans l'espace des fréquences, l'équation (8.4) s'écrit :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mu_0 \mu_r(\omega) \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (8.9)$$

On peut mettre cette équation sous la forme d'une équation d'Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_{r,\text{eff}}(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (8.10)$$

en introduisant la constante généralisée $\epsilon_{r,\text{eff}}(\omega)$ (8.8) qui rend compte à la fois du phénomène de polarisation et de la conduction par les charges libres du milieu. En posant $n^2(\omega) = \epsilon_{r,\text{eff}}(\omega) \mu_r(\omega)$, on obtient :

$$\boxed{\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0} \quad (8.11)$$

Remarques

- A cause du produit $n^2(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, cette équation met en jeu un produit de convolution dans l'espace direct.
- On sait que $\epsilon_r(\omega)$ est généralement complexe. Il s'ensuit que l'indice est généralement complexe.

8.2.4 Propagation dans un milieu matériel

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\mathbf{E}$ s'écrit :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Cherchons une solution de la forme $\mathbf{E} = E(x, \omega) \mathbf{e}_y$, ce qui présuppose que l'onde est plane et transverse. Elle vérifie alors :

$$\frac{\partial^2 E(x, \omega)}{\partial x^2} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} E(x, \omega) = 0$$

qui a pour solution $E(x, \omega) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ avec

$$k^2(\omega) = n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (8.12)$$

Ceci est la relation de dispersion pour un milieu isotrope, homogène, dispersif et local. L'indice du milieu étant complexe, le vecteur d'onde le sera aussi.

Si on se limite à l'onde se propageant dans le sens des x croissants,

$$\begin{aligned} E(x, \omega) &= A e^{i(n' + in'') \frac{\omega}{c} x} \\ &= A e^{in'(\omega) \frac{\omega}{c} x} e^{-n''(\omega) \frac{\omega}{c} x} \end{aligned}$$

Il faut alors choisir la partie imaginaire de n positive : $n'' > 0$ pour assurer la décroissance de l'onde au fur et à mesure de sa propagation (avec l'autre convention $E \propto e^{i\omega t}$, l'onde se propagerait dans le sens des x décroissants et il faudrait choisir $n'' < 0$).

Signification des parties réelle et imaginaire de n :

- La partie réelle de n est reliée à la vitesse de phase de l'onde

$$v_\varphi = \frac{c}{n'(\omega)}.$$

- La partie imaginaire de n donne l'atténuation de l'onde : $E \propto e^{-x/\delta}$. La longueur caractéristique de la décroissance est donnée par

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n''(\omega)},$$

λ_0 étant la longueur d'onde dans le vide. Cette décroissance peut être due soit aux *pertes* dans le milieu soit à la *réflexion* de l'onde.

Supposons $n = 1,5 + i10^{-3}$.

La partie imaginaire de n semble très petite comparée à la partie réelle. Néanmoins, comparer n'' à n' n'a pas de sens. Il faut comparer l'épaisseur du milieu à la longueur de décroissance de l'onde. Cette longueur est souvent appelée profondeur de peau dans le cas des métaux.

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n''(\omega)} \approx \frac{5 \cdot 10^{-7}}{10 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ m} = 50 \text{ } \mu\text{m}$$

Ce milieu est donc opaque pour une épaisseur de $200 \text{ } \mu\text{m}$! Il apparaît donc que, dans le visible, $n'' = 10^{-3}$ est une valeur très grande.

8.2.5 Exemple : propagation dans un plasma

En reprenant le modèle de Drude qui conduit à une constante diélectrique de la forme

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega},$$

il est possible d'étudier la propagation dans un plasma. Dans le cas où on peut négliger les pertes ($\gamma = 0$), la relation de dispersion s'écrit :

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Soit $\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_p^2$. La relation de dispersion (8.12) est représentée sur la figure 1. Pour $\omega < \omega_p$, la propagation est impossible. L'onde électromagnétique est réfléchiée par le milieu. Dans ce cas, n et k sont des imaginaires purs.

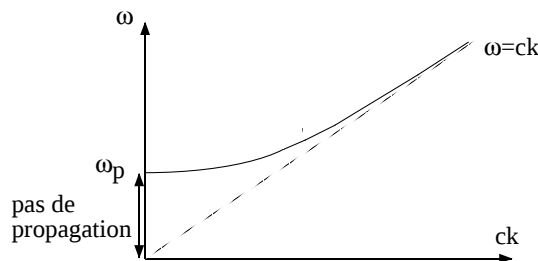


Figure 8.1 – Relation de dispersion dans un plasma sans pertes

Deux cas particuliers sont à considérer :

- Le cas $\epsilon_r(\omega) \rightarrow 0$ qui correspond au mode longitudinal à la fréquence ω_p . En effet

$$\text{div} \mathbf{D} = 0$$

s'écrit

$$\epsilon_0 \epsilon_r \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Si $\epsilon_r = 0$, cette relation peut être vérifiée pour $\operatorname{div} \mathbf{E} \neq 0$ et donc pour $\mathbf{E}$ non transverse. Ces solutions sont reprises dans le paragraphe suivant.

- Le cas $\epsilon_r(\omega) \rightarrow \infty$. Puisque l'on a $\mathbf{P}(\omega) = [\epsilon_r(\omega) - 1]\mathbf{E}(\omega)$, une divergence de $\epsilon_r(\omega)$ signifie que le milieu peut être polarisé en l'absence de champ électrique. Cela correspond à une résonance du milieu. On observe par exemple ce type de comportement pour la polarisation d'un cristal polaire à la fréquence des phonons optiques.

8.2.6 Discussion de la propagation dans l'espace réciproque

Les équations de Maxwell couplant les champs électrique et magnétique peuvent s'écrire dans l'espace des vecteurs d'onde :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mu_r \omega \mathbf{H} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon_0 \epsilon_r \omega \mathbf{E} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) &= -\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2 \mathbf{E} \\ \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \mu_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Cette équation contient à la fois les solutions où le champ $\mathbf{E}$ est transverse et celles où il est longitudinal. En multipliant scalairement l'équation par $\mathbf{k}$, nous allons sélectionner les solutions *longitudinales*.

$$0 = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$$

Si $\mathbf{E}_{\parallel} \neq 0$ alors il faut $\epsilon_r(\omega) = 0$ ou $\mu_r(\omega) = 0$. Ces équations constituent alors les relations de dispersion pour les ondes longitudinales.

Les solutions *transverses* sont caractérisées par $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0$. L'équation (8.14) devient alors :

$$\mathbf{E}_{\perp} \left[k^2 - \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right] = 0$$

Dans ce cas, la relation de dispersion est donnée par :

$$k^2 = \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$$

C'est celle que l'on a obtenue à la section 8.2.4. La solution longitudinale avait été éliminée par l'hypothèse $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ qui est faite en passant de $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E})$ à $-\Delta \mathbf{E}$.

8.3 Aspects énergétiques

8.3.1 Puissance échangée entre le champ et la matière

Le champ électromagnétique contient de l'énergie. La puissance des efforts du champ sur une distribution de charges microscopique est aisée à calculer. On part de la définition habituelle du travail d'une force. Dans le cas d'une seule charge q , on obtient :

$$P_{\text{CEM} \rightarrow \text{matière}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (8.15)$$

Le champ magnétique donne lieu à une force qui est perpendiculaire à la vitesse de sorte qu'elle ne travaille pas. Dans le cas d'une distribution de N charges microscopiques, on obtient :

$$P = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (8.16)$$

Nous admettrons que cette expression reste valable après passage aux champs et densité de courant moyens. Le travail effectué par les forces électromagnétiques sur la matière par unité de temps et de volume est alors donné par

$$\frac{\partial P}{\partial V} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.17)$$

8.3.2 Puissance moyenne absorbée

Nous pouvons maintenant calculer la puissance absorbée par unité de volume dans un milieu matériel non magnétique en moyenne temporelle. Nous choisissons tout d'abord de décrire le milieu par une conductivité équivalente σ . On obtient alors :

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial V} \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*) = \frac{\operatorname{Re}(\sigma)}{2} |\mathbf{E}|^2, \quad (8.18)$$

où les crochets désignent la valeur moyenne temporelle. On retrouve ainsi la forme habituelle de l'effet Joule sous sa forme locale. En choisissant de décrire les propriétés de la matière à l'aide d'une constante diélectrique, on obtient une forme légèrement différente. Le courant s'exprime en fonction de la polarisation par $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$ de sorte que $\mathbf{j} = -i\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$. On obtient finalement :

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial V} \right\rangle = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \operatorname{Im}(\epsilon_r) |\mathbf{E}|^2. \quad (8.19)$$

C'est cette expression qui fournit par exemple la puissance dissipée par unité de volume dans une tasse de thé placée dans un four à micro-ondes.

8.3.3 Bilan d'énergie

Il est possible d'obtenir une forme locale de la conservation de l'énergie électromagnétique en partant de l'équation de Maxwell-Ampère et en faisant apparaître le terme de puissance cédée à la matière :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{libre}} \quad (8.20)$$

Nous conviendrons que le terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ contient les courants induits dans la matière, dus à des charges de polarisation. En prenant le produit scalaire de cette équation avec le champ électrique, nous obtenons :

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{libre}} \quad (8.21)$$

Il est alors utile d'utiliser l'identité $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$ pour obtenir :

$$\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{libre}} \quad (8.22)$$

Finalement, en remplaçant $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ par $-\partial \mathbf{B} / \partial t$, on obtient l'équation :

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_{\text{libre}} \quad (8.23)$$

Cette équation peut s'interpréter comme une équation de conservation locale de l'énergie. Le premier terme de droite correspond à l'énergie apportée par les courants extérieurs. Le second décrit l'énergie rayonnée qui apparaît comme le flux du vecteur de Poynting $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Les deux termes de gauche de l'égalité recouvrent plusieurs contributions : les variations d'énergie du champ électromagnétique et de l'énergie potentielle stockée dans la matière d'une part, l'absorption d'autre part.

Une forme légèrement différente de cette équation est obtenue en fonction des champs électrique et magnétique $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) = -\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{libre}} \right) + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}. \quad (8.24)$$

Cette dernière équation peut s'interpréter de la façon suivante : le terme de gauche représente la densité d'énergie associée au champ électromagnétique dans la matière. Les deux termes $-\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{libre}} \right) + \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ représentent l'énergie cédée par la matière au champ. Cette énergie peut être soit de l'énergie emmagasinée par la matière sous forme d'énergie potentielle, soit de l'énergie dissipée en chaleur². Enfin, le dernier terme est la divergence du vecteur de Poynting qui décrit l'énergie rayonnée.

Dans le cas d'un régime monochromatique permanent, le bilan d'énergie se simplifie. En effet, le taux de variation de l'énergie électromagnétique est nul. L'équation de conservation de l'énergie se ramène alors à :

$$0 = \left\langle \frac{\partial P_{\text{abs}}}{\partial V} \right\rangle + \text{div}(\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle). \quad (8.25)$$

où les crochets désignent une moyenne temporelle. Le membre de gauche représente l'énergie cédée par les sources extérieures au champ. Le bilan montre ainsi que la puissance par unité de volume est égale à la somme de ce qui est absorbé et de ce qui est rayonné.

Le terme d'absorption est donné par :

$$\left\langle \frac{\partial P_{\text{abs}}}{\partial V} \right\rangle = \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}^{\text{eff}}}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\omega \epsilon_0 \text{Im}(\epsilon_{r,\text{eff}})}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\omega \text{Im}(\mu_r)}{2 |\mu_r|^2 \mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (8.26)$$

Le premier terme décrit les pertes diélectriques ainsi que l'effet Joule puisque nous n'avons pas séparé les contributions des charges libres de celles des charges de polarisation ($\epsilon_{r,\text{eff}}$, (8.8)). Le second terme décrit les pertes magnétiques.

Points clés

- ❶ Propagation en milieu dispersif : nécessité d'une description avec les transformées de Fourier des champs. Équation de Helmholtz dans un milieu.
- ❷ Relation de dispersion dans un milieu linéaire, homogène, isotrope.
- ❸ Puissance moyenne absorbée. Distinction atténuation-absorption.
- ❹ Signification physique des parties réelles et imaginaires de l'indice et de la constante diélectrique.
- ❺ Bilan d'énergie.

2. Imaginons que l'on éclaire un cristal ionique avec une onde infrarouge dont la fréquence coïncide avec un phonon optique. Une partie de l'énergie de l'onde va servir à exciter le phonon optique et sera donc emmagasinée sous forme d'énergie potentielle et cinétique dans la matière. Une autre partie de l'énergie de l'onde sera dissipée dans le cristal du fait des collisions phonon-phonon. Cette énergie est également associée à de l'énergie cinétique et potentielle des atomes du cristal mais il s'agit de l'énergie associée aux fluctuations des mouvements des atomes que l'on appelle chaleur.

Complément du chapitre 8

8A Complément A : vitesses de propagation

Le but de ce complément est de discuter les différentes vitesses attachées à une onde électromagnétique. Nous allons également rappeler pourquoi dans le cadre de la relativité un signal ne peut pas se propager à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Nous discuterons brièvement quelques expériences ayant mesuré des vitesses de groupe supraluminiques. Nous évoquerons enfin brièvement la discussion du problème effectuée par Brillouin qui reste d'actualité.

8A.1 Vitesse et relativité

On sait que la théorie de la relativité repose sur deux postulats :

- **Toute loi physique doit pouvoir se formuler de la même façon dans tous les référentiels inertiels.**
- **La vitesse de la lumière dans le vide est donnée par une constante c dans tout référentiel.**

Ces deux postulats imposent une limite à la vitesse de propagation d'un signal. Il faut noter que l'on ne précise pas quelle est la nature du mécanisme de transmission de l'information dans la discussion qui suit.

Considérons deux événements : l'événement $A(x, t)$ et l'événement $B(x + \Delta x, t + \Delta t)$ dans un référentiel appelé référentiel du laboratoire. Dans ce référentiel, l'événement $A(x, t)$ précède l'événement $B(x + \Delta x, t + \Delta t)$. Voyons s'il suffit que A précède B pour en être la cause. D'après les transformations de Lorentz, pour un observateur se déplaçant à la vitesse v , l'intervalle de temps entre les deux événements est donné par :

$$\Delta t' = \gamma \left[\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right]$$

Supposons que le deuxième événement soit déclenché par un signal émis par le premier événement. Alors, la vitesse de propagation du signal est donnée par $v_s = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. On peut alors réécrire l'intervalle de temps entre les deux événements sous la forme :

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \left[1 - \frac{v v_s}{c^2} \right]$$

Il apparaît clairement que si $v_s > c$, alors $\Delta t'$ peut être de signe opposé à Δt . Ceci signifie que la causalité n'est plus la même dans les deux référentiels, ce qui revient à violer le principe de relativité.

Une vitesse de signal supérieure à c est donc incompatible avec la théorie de la relativité restreinte. Ceci ne signifie pas que l'on ne puisse pas trouver d'exemples de vitesses supérieures à c . Cela signifie que ces vitesses correspondent à des phénomènes qui ne peuvent pas être utilisés pour déclencher un événement. Un exemple classique consiste à considérer la vitesse de déplacement de l'intersection de l'axe Oy avec une droite faisant l'angle θ avec l'axe Ox . Lorsque la droite se déplace d'une quantité Δx le long de l'axe Ox , l'intersection avec l'axe Oy se déplace d'une quantité $\Delta x / \tan \theta$. Lorsque θ se rapproche de 90° , on voit que le déplacement suivant Oy est arbitrairement grand. Si ce déplacement est effectué pendant une durée Δt , on voit que la vitesse correspondante est également arbitrairement grande. Cela étant, ce dispositif ne peut pas être utilisé pour transmettre une information. On ne peut donc pas considérer cette vitesse comme la vitesse d'un signal.

Dans ce qui suit, nous allons étudier différentes définitions de la vitesse. Certaines d'entre elles peuvent être supérieures à la vitesse de la lumière. Lorsque c'est le cas, elles correspondent à des vitesses qui ne peuvent pas s'identifier à la vitesse de propagation d'un signal.

8A.2 Vitesse de phase

Considérons une onde plane dont le champ électrique se met sous la forme

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_0 \exp[i(kx - \omega t)] = \mathbf{E}_0 \exp[ik(x - \frac{\omega}{k}t)]$$

La vitesse de phase est la vitesse à laquelle se déplace un plan de phase constante

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Le vecteur d'onde peut se mettre sous la forme

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c} = [n'(\omega) + in''(\omega)] \frac{\omega}{c}$$

Donc $v_\varphi = \frac{c}{n'(\omega)}$ est supérieur à c si la partie réelle de l'indice n' est inférieure à 1. Cela est notamment le cas pour les rayons X, pour les métaux dans le visible, etc. . .

8A.3 Vitesse de groupe

La vitesse de groupe est la vitesse du centre d'un paquet d'onde. Nous allons montrer comment elle est reliée aux propriétés d'un milieu matériel.

Forme générale de l'onde

Supposons un champ valant $E_0(t)$ en $x = 0$ et se propageant dans la direction des x croissants.

Écrivons $E(x,t)$ en fonction de sa transformée de Fourier par rapport au temps.

$$E(x,t) = \int \tilde{E}(x,\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

En utilisant l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}(x,\omega)}{\partial x^2} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{E}(x,\omega) = 0$$

on peut écrire $\tilde{E}(x,\omega) = A e^{ik(\omega)x}$ où $k(\omega) = n(\omega)\omega/c$.

Pour $x = 0$, $\tilde{E}(0,\omega) = \tilde{E}_0(\omega) = A(\omega)$. On peut donc écrire,

$$E(x,t) = \int \tilde{E}_0(\omega) e^{i[k(\omega)x - \omega t]} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Vitesse de groupe

Supposons que $\tilde{E}_0(\omega)$ a un spectre suffisamment étroit et centré sur ω_0 de telle sorte que l'on puisse développer $\text{Re}[k(\omega)] = k'(\omega)$ autour de ω_0 . Ceci signifie que le spectre est plus étroit que toute résonance en $k(\omega)$. On a alors :

$$k'(\omega) = k'(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk'}{d\omega} \right)_{\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left(\frac{d^2k'}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots$$

En reportant les deux premiers termes du développement dans la solution, on obtient :

$$E(x,t) = \underbrace{e^{i[k'(\omega_0)x - \omega_0 t]}}_{\substack{\text{vitesse de phase} \\ v_\varphi = \frac{\omega_0}{k'(\omega_0)}}} \int \tilde{E}_0(\omega) \underbrace{e^{i[\frac{dk'}{d\omega}(\omega_0)x - t](\omega - \omega_0)}}_{\substack{\text{vitesse de groupe} \\ v_g = (\frac{d\omega}{dk'})_{\omega_0}}} \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{e^{-k''(\omega_0)x}}_{\text{atténuation}}$$

L'onde apparaît alors comme le produit de trois termes. Le premier décrit la phase de l'onde. Le second décrit l'enveloppe qui se déplace à une vitesse qui est par définition la vitesse de groupe. Le troisième décrit l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation. La vitesse de groupe peut se mettre sous une forme différente :

$$\begin{aligned}
 v_g &= \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} \\
 &= \frac{c}{\frac{d(n'\omega)}{d\omega}} \\
 &= \frac{c}{n' + \omega \frac{dn'}{d\omega}} \\
 &= v_\varphi \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n'} \frac{dn'}{d\omega}}
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{dn'}{d\omega}$ peut être négatif, on constate que la vitesse de groupe peut être négative, tendre vers l'infini ou être nulle. Cela semble à première vue devoir poser problème : en effet un paquet d'ondes n'est rien d'autre qu'une impulsion de lumière. C'est bien ainsi que l'on transmet de l'information dans une fibre optique. Néanmoins, une analyse détaillée du problème montre qu'il n'y a pas de contradiction avec le principe de relativité. Ce problème a été discuté peu de temps après la publication de la théorie de la relativité par Sommerfeld et Brillouin.

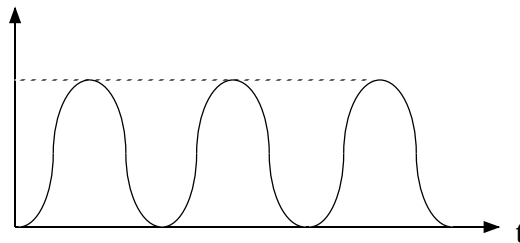
Avant de résumer ce travail notons que l'on peut prendre en compte le terme d'ordre supérieur dans le développement $\frac{1}{2} \frac{dk'}{d\omega}(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2$ en introduisant la valeur effective

$$\frac{dk'_{\text{eff}}}{d\omega}(\omega_0) = \frac{dk'}{d\omega}(\omega_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2k'}{d\omega^2}(\omega - \omega_0)$$

On obtient ainsi une vitesse de groupe qui dépend de ω . Ceci signifie que le paquet d'onde va s'élargir au cours du temps. On parle couramment d'étalement du paquet d'ondes. Ce phénomène est une conséquence de la dispersion du milieu.

8A.4 Vitesse de signal et Relativité (Brillouin 1920)

L'idée essentielle de Brillouin et Sommerfeld consiste à examiner en détail ce qu'est l'instant zéro. L'apparente contradiction entre la relativité et la possibilité d'une vitesse de groupe supérieure à c tient au fait que l'impulsion lumineuse (le paquet d'ondes) n'est pas clairement localisé dans le temps. Prenons le cas d'un paquet d'ondes gaussien pour se fixer les idées. Dans le domaine temporel, un pulse gaussien existe de $t = -\infty$ jusqu'à $t = \infty$. Il n'est donc pas possible de définir de façon précise le moment où le récepteur détecte le signal. Il est totalement arbitraire de décider que c'est au moment où passe le maximum du signal. Afin d'éviter toute ambiguïté associée à la définition d'un seuil de détection, Brillouin considère la propagation d'un signal strictement nul pour $t < 0$. C'est par exemple une sinusoïde définie pour $t > 0$ uniquement comme pour la figure ci-dessous.



Ce signal commence à $t = 0$. Il est strictement nul pour $t < 0$. On peut calculer de façon exacte le signal transmis par un milieu matériel pour ce système à l'aide de l'intégrale écrite plus haut. Il est assez facile d'évaluer numériquement cette intégrale. Il apparaît alors que le signal est effectivement strictement nul en $x > ct$. Une analyse asymptotique de l'intégrale permet de montrer que le champ transmis est composé de plusieurs composantes : i) un signal dit précurseur qui se propage à la vitesse c quel que soit le milieu, ii) le reste du signal.

Il existe une interprétation physique très claire de l'existence d'un précurseur se propageant exactement à la vitesse de la lumière dans le vide. Elle est basée sur le fait que l'onde transmise résulte de l'interférence du champ incident et du champ rayonné par les charges dans la matière mises en mouvement par le champ incident. Avant que le précurseur n'atteigne un point donné, les charges y sont au repos. De ce fait, elles ne rayonnent pas, de sorte que le champ se propage comme il le ferait dans le vide. Le précurseur étant passé, les charges sont mises en mouvement. Le champ qu'elles rayonnent peut alors interférer avec le champ incident.

8A.5 Expériences de transmission. Délai de phase

Une étude expérimentale de la vitesse d'un signal peut être faite par une mesure de temps de vol en transmission. Plusieurs situations correspondent à des vitesses de propagation d'impulsion apparemment supérieures à la vitesse de la lumière. Certaines expériences ont montré que l'on pouvait aussi avoir des vitesses extrêmement faibles (comparables à la vitesse d'une bicyclette). Toutes ces expériences sont très bien modélisées de façon très simple à l'aide de la notion de délai de phase. On peut définir le facteur de transmission d'un système reliant le champ incident et le champ transmis par $E_t(x, \omega) = t(\omega)E_{\text{inc}}(x, \omega)$ pour un signal monochromatique. Dans le cas général, on peut écrire le champ transmis sous la forme,

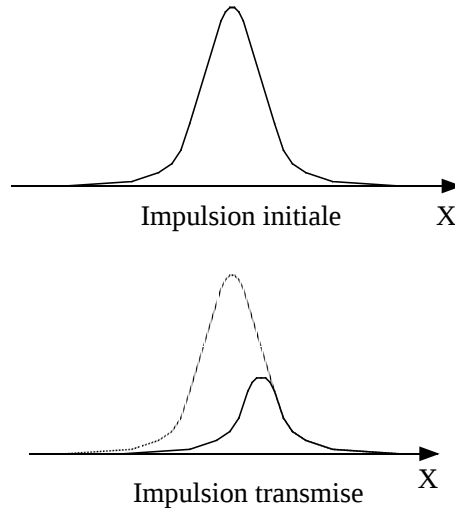
$$\begin{aligned} E_t(x, t) &= \int t(\omega) \tilde{E}_0(x, \omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int |t(\omega)| \tilde{E}_0(x, \omega) e^{i\Phi(\omega)} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\sim \int |t(\omega_0)| \tilde{E}_0(x, \omega) e^{i\Phi(\omega_0)} e^{i \left. \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\sim |t(\omega_0)| e^{i[\Phi(\omega_0) - \left. \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega_0} \omega_0]} \int \tilde{E}_0(x, \omega) e^{-i\omega [t - \left. \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega_0}]} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &\sim |t(\omega_0)| e^{i[\Phi(\omega_0) - \left. \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega_0} \omega_0]} E_{\text{inc}} \left[x, t - \left(\frac{d\Phi}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right] \end{aligned}$$

On observe que le signal transmis a la même structure que le signal incident mais est translaté dans le temps d'une quantité donnée par $\left. \frac{d\Phi}{d\omega} \right|_{\omega_0}$. Ce terme est appelé délai de phase. Suivant son signe, le retard peut être négatif ou positif. Pour cela, il suffit de se placer soit juste avant, soit juste après une résonance. De ce fait, l'impulsion peut dans certains cas paraître se propager plus vite que la lumière (propagation supraluminique).

On peut comprendre ceci sur l'exemple de la transmission par un miroir multicouches diélectrique. Un tel miroir est constitué d'un empilement de couches diélectriques d'indices alternativement élevés et faibles. Le principe de fonctionnement d'un tel miroir est basé sur le mécanisme de réflexion de Bragg, les ondes réfléchies sur différentes interfaces interfèrent constructivement en réflexion. On peut ainsi obtenir une réflectivité très élevée et donc une transmission voisine de zéro. Lorsque l'on éclaire un tel système, la vitesse de groupe est supérieure à c , en d'autres termes, le sommet de l'impulsion se déplace à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.

Pour comprendre cela, considérons une impulsion qui éclaire l'empilement de couches. Le début de l'impulsion est transmis directement puisqu'il ne peut pas y avoir d'interférences avec des ondes ayant subies des réflexions. La lumière qui subit deux réflexions internes à l'intérieur de l'une des couches n'arrive qu'après un délai de $2d/c$ où d est l'épaisseur de la couche. Elle peut alors atténuer le signal de sortie par interférences destructives. Ainsi la partie avant de l'impulsion est transmise tandis que la partie arrière de l'impulsion est réfléchi. De ce fait l'impulsion transmise est découpée dans la partie avant du front de montée de l'impulsion incidente. Le maximum de l'impulsion semble donc se déplacer plus vite que la lumière.

De telles expériences suggèrent qu'un signal peut se propager plus vite que la lumière. Cette interprétation retombe sur le même problème que celui évoqué dans le cas de la propagation en milieu dispersif. L'impulsion temporelle n'est pas définie clairement et a une extension très grande dans le temps. Si l'on introduit un signal strictement nul pour les instants négatifs, on peut à nouveau définir un précurseur qui se propage à la vitesse de la lumière dans le vide.



Il existe une autre façon d'aborder le problème de la vitesse de propagation d'un signal à l'aide d'une impulsion lumineuse. Comme signalé plus haut, cela implique d'introduire la notion d'énergie de seuil permettant une détection. Cela ne peut se faire que si l'on introduit également la notion de bruit dans le processus de détection. Une telle discussion a été réalisée récemment. Elle conduit à conclure là encore qu'il n'y a pas de contradiction entre les expériences de mesure de vitesse d'impulsions lumineuses et la relativité restreinte.

8A.6 Vitesse d'énergie

La vitesse d'énergie correspond à la vitesse de propagation de l'énergie dans un milieu. Lorsque le milieu est sans pertes, la vitesse d'énergie coïncide avec la vitesse de groupe v_g . En revanche, ceci n'est plus vrai dans le cas de milieux dispersifs à pertes. Cette vitesse peut être définie par analogie avec celle des charges de conduction. De même que l'on a, pour les charges, $\mathbf{j}_q = \rho_q \mathbf{v}$, on peut écrire $\mathbf{j}_E = \langle \mathbf{\Pi} \rangle = \langle u_E \rangle \mathbf{v}_E$ où $\langle u_E \rangle$ est la densité moyenne d'énergie, c'est-à-dire la densité moyenne d'énergie du champ plus la densité d'énergie de la matière polarisée (énergie cinétique et énergie potentielle des atomes ou des électrons en mouvement). La vitesse de l'énergie sera donc déterminée par

$$v_E = \frac{\langle \mathbf{\Pi} \rangle}{\langle u_E \rangle}.$$

Elle décroît fortement au voisinage des résonances. *Puisque l'énergie électromagnétique peut être utilisée pour propager un signal, sa vitesse de propagation doit être inférieure à c . Parmi les vitesses que nous avons définies, vitesse de phase, vitesse de groupe, vitesse d'énergie, c'est la seule qui doit satisfaire cette condition.*

Chapitre 9

Réflexion, réfraction

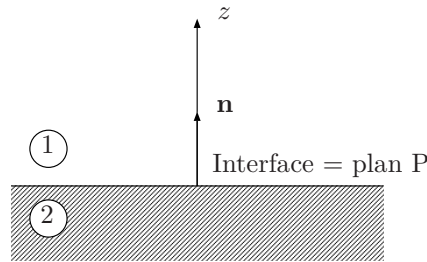
Table des matières

9.1	Introduction	114
9.2	Relations de continuité	114
9.3	Lois de Snell-Descartes	116
9.4	Facteur de réflexion et de transmission en amplitude en polarisation TE	117
9.4.1	Notations : polarisations TE et TM	117
9.4.2	Facteurs de réflexion et de transmission	117
9.4.3	Cas de la réflexion totale	119
9.5	Facteurs de réflexion et de transmission en intensité	119
9.5.1	Définition	119
9.5.2	Vecteur de Poynting	119
9.5.3	Conservation de l'énergie à une interface	120
	Dans quels cas la partie imaginaire de γ_i est-elle différente de zéro ?	121
9.5.4	Émissivité et absorptivité	121
9.6	Cas de l'incidence normale	122
9.6.1	Facteur de réflexion	122
9.6.2	Dispositifs antirélecteurs	122
	Utilisation de milieux magnétiques	122
	Système antireflet interférentiel	122
	Revêtement antireflet multicouche	123
9.6.3	Paradoxe de l'absorbeur	123
9.6.4	Couleur d'un corps	123
9.7	Cas d'une polarisation quelconque	124
9.7.1	Facteurs de réflexion et de transmission	124
9.7.2	Angle de Brewster	124

9.1 Introduction

Le mécanisme à l'origine de la réflexion peut être décrit de la façon suivante : l'onde incidente met en mouvement les charges du milieu éclairé et celles-ci deviennent sources d'un rayonnement secondaire. L'onde rayonnée vers l'arrière est l'onde réfléchie. La superposition de l'onde incidente et de l'onde rayonnée vers l'avant correspond à l'onde dite transmise. Ce problème peut donc être traité en utilisant la théorie du rayonnement. Dans le cas de géométries simples telles que deux demi-espaces séparés par une interface, il est plus simple de procéder à la résolution des équations différentielles vérifiées par les champs, compte tenu des conditions aux limites.

Dans ce qui suit, nous allons travailler avec des indices complexes. Afin d'éviter l'introduction d'angles complexes, nous travaillerons avec les composantes complexes des vecteurs d'onde. On pourra alors traiter avec le même formalisme les diélectriques, les métaux et le cas des ondes évanescentes. On pourra notamment en déduire l'émissivité et l'absorptivité d'un corps.



Considérons l'interface représentée sur la figure ci-dessus, séparant deux milieux supposés non magnétiques ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$). L'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} + \epsilon_r(\omega, z) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0 \quad (9.1)$$

peut être décomposée en deux parties :

$$\Delta \mathbf{E}_1 + \epsilon_{r,1}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 = 0 \quad z > 0 \quad (9.2)$$

$$\Delta \mathbf{E}_2 + \epsilon_{r,2}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_2 = 0 \quad z < 0 \quad (9.3)$$

et résolue en tenant compte

- des conditions aux limites en $z \rightarrow \pm\infty$;
- des relations de continuité en $z = 0$.

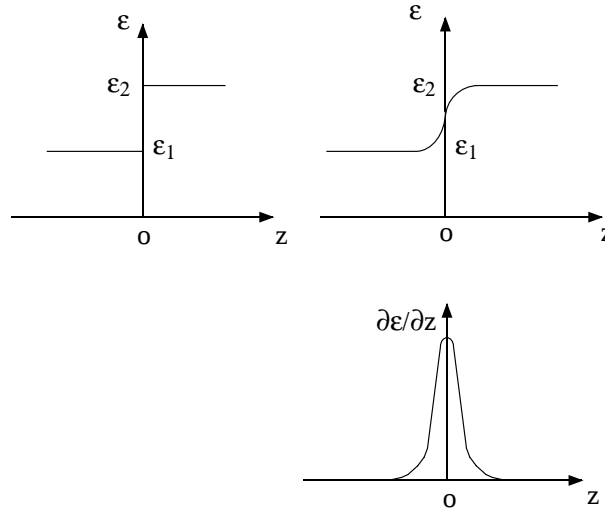
9.2 Relations de continuité

Les relations de continuité (ou relations de passage) *se déduisent des équations de Maxwell*. Avant d'introduire une technique générale de recherche de ces conditions, précisons les notations du problème : le plan P dont la normale $\mathbf{n}$ est confondue avec $\mathbf{e}_z$ sépare les milieux 1 et 2 de constantes diélectriques ϵ_1 et ϵ_2 . La constante diélectrique est donc discontinue en $z = 0$. Nous allons considérer dans ce qui suit que les quantités discontinues sont des limites de fonctions continues à variations très rapides. On peut alors définir la dérivée de $\epsilon(z)$ au sens des fonctions. C'est une fonction à support très petit et prenant de très grandes valeurs. Ce point de vue est schématisé sur la figure 9.1 :

On a bien sûr la relation :

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \int_{-z_0}^{+z_0} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} dz = \epsilon_2 - \epsilon_1$$

En revanche, la même intégrale effectuée avec un intégrand correspondant à une fonction ne présentant pas de singularité en $z = 0$ donne 0. La démarche pratique consiste donc à écrire explicitement les équations de Maxwell, puis à identifier les termes susceptibles d'avoir des singularités :

Figure 9.1 – Fonction discontinue en $z = 0$.

- soit $\partial X/\partial z$ si X présente une discontinuité
- soit ρ s'il y a une charge surfacique
- soit $\mathbf{j}$ s'il y a un courant surfacique.

Enfin, il reste à intégrer de $-z_0$ à $+z_0$ et à prendre la limite pour passer de $\partial X/\partial z$ à X .

1^{er} exemple : $\text{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$

On obtient :

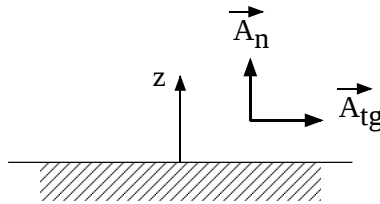
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_{\text{libre}}$$

Seuls $\partial D_z/\partial z$ et ρ peuvent présenter des singularités. D'où, après intégration :

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \int_{-z_0}^{+z_0} \frac{\partial D_z}{\partial z} dz = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \int_{-z_0}^{+z_0} \rho_{\text{libre}} dz$$

$$\boxed{D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma_{\text{libre}}}$$

où l'indice n signifie composante normale.

Figure 9.2 – Composantes tangentielle et normale d'un vecteur $\mathbf{A}$.

2^{ème} exemple : $\text{div} \mathbf{B} = 0$

On en tire $\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ d'où

$$\boxed{B_{n,1} - B_{n,2} = 0}$$

3^{ème} exemple : $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

En ne gardant que les termes susceptibles d'être singuliers, on en tire $-\partial E_y/\partial z = 0$ et $\partial E_x/\partial z = 0$, d'où $E_{y,1} = E_{y,2}$ et $E_{x,1} = E_{x,2}$ soit

$$\boxed{\mathbf{E}_{tg,1} = \mathbf{E}_{tg,2}}$$

4^{ème} exemple : $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Là encore, en ne gardant que les termes susceptibles d'être singuliers, on en tire $-\partial H_y/\partial z = j_{\text{libre},x}$ et

$$\partial \mathbf{H}_x / \partial z = j_{\text{libre}, y}.$$

Il est essentiel de bien réaliser que le courant de charge libre surfacique n'est qu'un modèle simplificateur (modèle du métal infiniment conducteur) reposant sur le fait que la profondeur de peau d'un métal est très faible. Dans tous les autres cas, $j_{s, \text{libre}} = 0$.

D'où $H_{y,1} - H_{y,2} = 0$ et $H_{x,1} - H_{x,2} = 0$, soit :

$$\boxed{\mathbf{H}_{tg,1} - \mathbf{H}_{tg,2} = 0}$$

Cette équation est valable pour tous les matériaux réels. Dans le cas particulier où l'on choisit de travailler avec le modèle du métal infiniment conducteur, on a $\mathbf{H}_{tg,2} = 0$ et la relation de continuité devient $\mathbf{H}_{tg,1} = \mathbf{j}_{s, \text{libre}} \times \mathbf{n}$.

Remarque : en utilisant les notions de distributions, on peut définir les dérivées de quantités discontinues. On obtient alors une formulation des équations de Maxwell qui fait apparaître les termes de discontinuité (Voir par exemple R. Petit, Électromagnétisme, Masson; C. Vassallo, Théorie des guides d'ondes EM, Eyrolles).

9.3 Lois de Snell-Descartes

Les lois de Snell-Descartes sont une conséquence de la continuité de la phase sur l'interface. On peut le voir graphiquement de la façon suivante sur la figure 4.

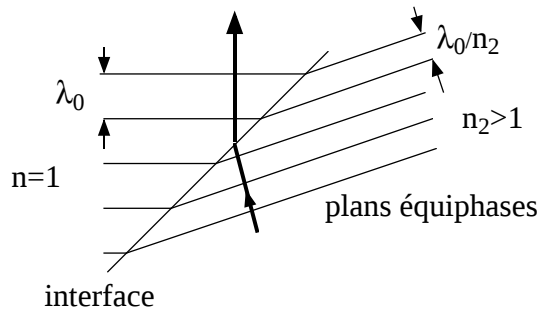


Figure 9.3 – Lois de Snell-Descartes et continuité de la phase : pour deux milieux d'indices $n_1 = 1$ et $n_2 > 1$, la distance entre deux plans équi-phases est donnée par λ_0 et λ_0/n_2 respectivement. La continuité de la phase n'est possible que si l'on effectue une rotation de l'ensemble des plans de phase d'un milieu par rapport à ceux de l'autre milieu. Ceci est équivalent à un changement de direction du rayon associé.

Les champs incident, réfléchi et transmis s'écrivent dans le plan $z = 0$:

$$\begin{cases} E_i(z=0) = E_0 e^{i(\alpha_i x + \beta_i y)} \\ E_r(z=0) = r E_0 e^{i(\alpha_r x + \beta_r y)} \\ E_t(z=0) = t E_0 e^{i(\alpha_t x + \beta_t y)} \end{cases}$$

On suppose que le champ électrique est tangentiel, c'est-à-dire $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{tg}$. La continuité de la composante tangentielle entraîne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tg1}(z=0) &= \mathbf{E}_{tg2}(z=0) \\ E_i(z=0) + E_r(z=0) &= E_t(z=0) \\ e^{i(\alpha_i x + \beta_i y)} + r e^{i(\alpha_r x + \beta_r y)} &= t e^{i(\alpha_t x + \beta_t y)} \\ t &= e^{i(\alpha_i - \alpha_t)x + i(\beta_i - \beta_t)y} + r e^{i(\alpha_r - \alpha_t)x + i(\beta_r - \beta_t)y} \end{aligned}$$

Ceci doit être vrai pour tout x et tout y , ce qui entraîne $\alpha_i = \alpha_r = \alpha_t$ et $\beta_i = \beta_r = \beta_t$.

Les vecteurs d'onde sont donnés sans perte de généralité par :

$$\mathbf{k}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = 0 \\ -\gamma_i \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_r = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r = 0 \\ \gamma_r \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}_t = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t = 0 \\ -\gamma_t \end{pmatrix}$$

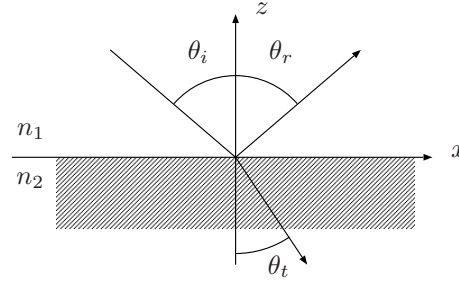


Figure 9.4 – Angles d'incidence, de réflexion et de réfraction

où $\alpha_i = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_i$; $\alpha_r = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta_r$ et $\alpha_t = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_t$ avec n_1 et n_2 des indices optiques supposés réels. On obtient donc :

$$\begin{array}{lcl} \sin \theta_i & = & \sin \theta_r \\ n_1 \sin \theta_i & = & n_2 \sin \theta_t \end{array} \quad (9.4)$$

Si l'on raisonne en termes de photons, ceci correspond à la continuité de la composante de la quantité de mouvement parallèle à l'interface. On peut montrer que cela est une conséquence de l'invariance par translation le long de Ox et Oy du système physique.

9.4 Facteur de réflexion et de transmission en amplitude en polarisation TE

9.4.1 Notations : polarisations TE et TM

L'interface $z = 0$ sépare deux milieux semi-infinis d'indices n_1 et n_2 a priori complexes. On note :

$$\mathbf{k}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i = 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

Le plan d'incidence est le plan défini par les vecteurs $\mathbf{k}_i$ et $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. La polarisation de l'onde est dite TE si le champ électrique $\mathbf{E}$ est orthogonal au plan d'incidence.

La polarisation de l'onde est dite TM si le champ magnétique $\mathbf{B}$ est orthogonal au plan d'incidence. $\mathbf{E}$ appartient alors au plan d'incidence.

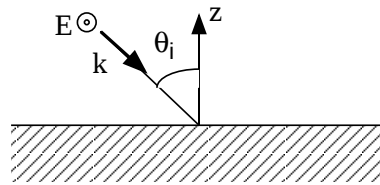


Figure 9.5 – Polarisation TE

D'autres dénominations sont parfois utilisées. Elles sont présentées dans le tableau ci-dessous :

TE	s	V	⊥
TM	p	H	

En optique, on utilise habituellement les notations s et p. Dans le domaine radar, les notations sont H pour horizontal et V pour vertical.

9.4.2 Facteurs de réflexion et de transmission

La démarche que nous allons utiliser pour déterminer les ondes réfléchi et transmise comporte les étapes suivantes :

- i) Écriture des équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs
- ii) Détermination de la solution générale
- iii) Utilisation des conditions aux limites et des équations de continuité pour écrire un système linéaire
- iv) Résolution du système donnant les facteurs de réflexion et de transmission.

i)

$$\Delta \mathbf{E}_1 + \epsilon_{r,1} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 = 0 \quad z > 0 \quad (9.5)$$

$$\Delta \mathbf{E}_2 + \epsilon_{r,2} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_2 = 0 \quad z < 0 \quad (9.6)$$

ii) Le champ incident a pour amplitude complexe :

$$\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{e}_y e^{i(\alpha_i x - \gamma_i z)} \quad (9.7)$$

avec $\gamma_i^2 = \epsilon_{r,1} \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_i^2$, $\text{Re}[\gamma_i] > 0$, $\text{Im}[\gamma_i] > 0$. Ce choix est conventionnel. La convention choisie ici, associée au choix conventionnel $e^{-i\omega t}$ entraîne qu'une onde du type $\exp[i(\gamma z - \omega t)]$ se propage dans le sens des z croissants¹.

On peut donc écrire les amplitudes complexes des champs réfléchi et transmis sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r &= r E_0 \mathbf{e}_y e^{i(\alpha_i x + \gamma_i z)} \\ \mathbf{E}_t &= t E_0 \mathbf{e}_y e^{i(\alpha_i x - \gamma_t z)} \end{aligned}$$

avec $\gamma_r^2 = \epsilon_{r,1} \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_i^2$, $\text{Re}[\gamma_r] > 0$, $\text{Im}[\gamma_r] > 0$ et $\gamma_t^2 = \epsilon_{r,2} \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_i^2$, $\text{Re}[\gamma_t] > 0$, $\text{Im}[\gamma_t] > 0$. L'absence d'onde incidente venant de $-\infty$ conduit à ne pas prendre d'onde en $e^{r + i\gamma_t z}$. L'onde incidente venant de $+\infty$ a une amplitude E_0 connue : c'est l'amplitude de l'onde en $e^{-\gamma_i z}$. On a ainsi une solution générale du problème qui incorpore déjà les conditions à l'infini et les lois de Snell-Descartes.

iii) La continuité de $\mathbf{E}_{tg}$ sur le plan $z = 0$ s'écrit :

$$1 + r = t$$

Il faut bien noter que ceci n'est pas une équation de conservation de l'énergie !

Continuité de $\mathbf{H}_{tg}$:

$$B_x = \frac{1}{i\omega} (\text{rot} \mathbf{E})_x = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

La continuité de H_x entraîne donc la continuité de $\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}$, ce qui se traduit par :

$$\frac{1}{\mu_1} (-\gamma_i + \gamma_i r) = -t \frac{\gamma_t}{\mu_2}$$

On obtient ainsi un système linéaire :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ 1 - r = t \frac{\gamma_t \mu_1}{\gamma_i \mu_2} \end{cases}$$

iv) Les facteurs de réflexion et de transmission sont donnés par :

$$\begin{cases} r = \frac{\mu_2 \gamma_i - \mu_1 \gamma_t}{\mu_2 \gamma_i + \mu_1 \gamma_t} \\ t = \frac{2\mu_2 \gamma_i}{\mu_2 \gamma_i + \mu_1 \gamma_t} \end{cases} \quad \text{ou, si } \mu_1 = \mu_2 = \mu_0 \quad \begin{cases} r = \frac{\gamma_i - \gamma_t}{\gamma_i + \gamma_t} \\ t = \frac{2\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_t} \end{cases}$$

En général, r et t sont complexes ce qui traduit un déphasage entre le champ incident et le champ réfléchi ou transmis.

1. Ces deux critères sont compatibles dans un milieu non amplificateur. En effet, on a d'une part $\text{Im}[\gamma^2] = \text{Im}[\epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2] = \text{Im}[\epsilon_r] \frac{\omega^2}{c^2} > 0$ et d'autre part, $\text{Im}[\gamma^2] = 2\text{Re}[\gamma]\text{Im}[\gamma]$. Donc $\text{Re}[\gamma]$ et $\text{Im}[\gamma]$ ont le même signe

9.4.3 Cas de la réflexion totale

Supposons que le milieu 1 ait un indice réel plus élevé que celui du milieu 2. C'est le cas de la réflexion sur une interface verre-air par exemple. Si l'angle d'incidence est suffisamment grand, il y a réflexion totale. Ceci correspond à une onde transmise évanescente et un facteur de réflexion de module égal à 1.

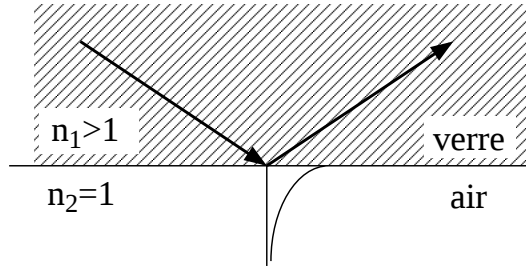


Figure 9.6 – Réflexion totale

$$\begin{aligned}\gamma_t &= \left[\frac{\omega^2}{c^2} - n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \\ &= \frac{\omega}{c} [1 - n_1^2 \sin^2 \theta_i]^{1/2}\end{aligned}$$

Lorsque $\sin \theta_i > \frac{1}{n_1}$, alors $\gamma_t = i|\gamma_t|$ est un imaginaire pur. On peut alors réécrire l'amplitude complexe du champ transmis (si $\mu_2 = 1$) :

$$E_t = \frac{2\gamma_i}{\gamma_i + i|\gamma_t|} E_0 e^{i\alpha_i x} e^{-|\gamma_t| |z|} \quad (9.8)$$

Le champ transmis n'est pas strictement nul dans le milieu 2 mais l'onde se propage selon Ox et son amplitude décroît selon $-Oz$ avec une longueur caractéristique $1/|\gamma_t|$.

9.5 Facteurs de réflexion et de transmission en intensité

9.5.1 Définition

Les facteurs de réflexion et de transmission en intensité sont définis à partir du vecteur de Poynting à travers une portion de l'interface d'aire unité par :

$$R = \frac{|\langle \Pi_z^r \rangle|}{|\langle \Pi_z^i \rangle|} \quad T = \frac{|\langle \Pi_z^t \rangle|}{|\langle \Pi_z^i \rangle|} \quad (9.9)$$

Nous allons montrer comment calculer R et T en fonction de r et t .

9.5.2 Vecteur de Poynting

Dans le cas de la polarisation TE, les amplitudes complexes des champs électriques incident et réfléchi sont prises sous la forme :

$$\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{e}_y e^{i(\alpha_i x - \gamma_i z)}$$

$$\mathbf{E}_r = r E_0 \mathbf{e}_y e^{i(\alpha_i x + \gamma_i z)}$$

La composante selon z du vecteur de Poynting dans le milieu 1 a pour valeur moyenne :

$$\begin{aligned}\langle \Pi_z^{(1)} \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re}[E_y H_x^*]\end{aligned}$$

En supposant le milieu non magnétique, $\text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$, d'où :

$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

Sur l'interface $z = 0$,

$$E_y = E_0(1 + r)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\gamma_i E_0(1 - r)$$

Les composantes selon Oz des vecteurs de Poynting s'écrivent alors :

$$\langle \Pi_z^{(i)}(z = 0) \rangle = -\frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \text{Re}[\gamma_i] \quad (9.10)$$

$$\langle \Pi_z^{(r)}(z = 0) \rangle = +\frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 |r|^2 \text{Re}[\gamma_i] \quad (9.11)$$

$$\langle \Pi_z^{(t)}(z = 0) \rangle = -\frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 |t|^2 \text{Re}[\gamma_t] \quad (9.12)$$

D'où les valeurs des facteurs de réflexion et de transmission en intensité :

$$R = |r|^2 \quad (9.13)$$

$$T = |t|^2 \frac{\text{Re}[\gamma_t]}{\text{Re}[\gamma_i]} \quad (9.14)$$

On peut remarquer que dans le cas de la réflexion totale, le champ transmis n'est pas nul mais décroît exponentiellement. En revanche, le facteur de transmission T est nul car $\text{Re}[\gamma_t] = 0$.

Lorsque l'on compare les expressions de R et T , on s'aperçoit que R est simplement le facteur de réflexion en amplitude en module au carré tandis qu'un facteur supplémentaire $\text{Re}[\gamma_t]/\text{Re}[\gamma_i]$ apparaît dans le cas de la transmission. La figure ci-dessous illustre la variation de section d'un faisceau réfracté. Par ailleurs, la vitesse de propagation de l'énergie, ainsi que l'énergie par unité de volume dépendent de l'indice. Le facteur $\text{Re}[\gamma_t]/\text{Re}[\gamma_i]$ rend compte de ces trois effets liés à la différence d'indice des deux milieux.

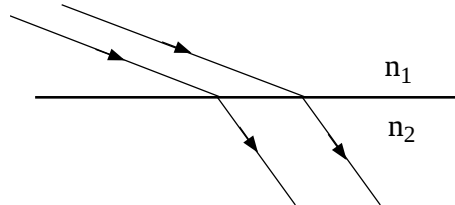


Figure 9.7 – Faisceau réfracté

9.5.3 Conservation de l'énergie à une interface

Pour des milieux diélectriques sans pertes, on peut constater sans difficulté que l'on a la relation $R + T = 1$. Cette relation s'interprète comme une relation de conservation de l'énergie. Cependant, il faut prendre garde à ne pas considérer que cette relation est la forme générale de la conservation de l'énergie à une interface. Bien qu'elle semble exprimer naturellement le fait que tout ce qui arrive est soit réfléchi, soit transmis, cette relation tombe en défaut dans plusieurs cas. Si la relation semble si naturelle, c'est qu'elle correspond à une vision intuitive (corpusculaire) de la lumière. Si elle tombe en défaut, c'est parce que cette vision ne prend pas en compte l'aspect ondulatoire de la lumière.

Lorsque l'on effectue un bilan d'énergie sur un volume fermé compris entre deux plans parallèles situés de part et d'autre d'une interface et séparés par une distance infiniment faible, on obtient directement la continuité du vecteur de Poynting. En notant $z = 0$ l'équation de l'interface plane, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\langle \Pi_z^{(1)}(z = 0) \rangle = \langle \Pi_z^{(2)}(z = 0) \rangle \quad (9.15)$$

Dans le cas d'une onde plane telle qu'on l'a écrit au paragraphe qui précède, on obtient :

$$\langle \Pi_z^{(1)}(z=0) \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \operatorname{Re}[(1+r^*)(1-r)\gamma_i] \quad (9.16)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \{ (1-|r|^2) \operatorname{Re}[\gamma_i] + \operatorname{Re}[(r^*-r)\gamma_i] \} \quad (9.17)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \{ (1-|r|^2) \operatorname{Re}[\gamma_i] + 2\operatorname{Im}[\gamma_i] \operatorname{Im}[r] \} \quad (9.18)$$

Nous avons mené le calcul sans faire d'hypothèses particulières sur α et γ qui peuvent être complexes. Examinons la signification de ces parties imaginaires. Si α_i est imaginaire, cela signifie que l'onde s'atténue lors de sa propagation suivant l'axe des x . Si γ_i est imaginaire, de la même façon, on a une onde qui s'atténue ou bien qui croît lorsque l'on s'éloigne de l'interface. Le premier cas correspond à une onde guidée par l'interface : on parle d'onde de surface. Le second cas semble au premier abord non physique puisque l'onde semble croître en s'éloignant de la surface et finalement diverger à l'infini. Supposons toutefois qu'une source soit placée au-dessus de l'interface à distance finie : ce type de solution décrit alors une onde générée par la source et qui décroît en s'approchant de la surface. On a vu au chapitre 2 que la représentation générale d'un champ comporte des ondes évanescentes. Le problème de la divergence disparaît puisque cette solution ne doit être retenue que dans l'espace compris entre la source et l'interface.

L'équation (9.15) devient alors :

$$(1-|r|^2)\operatorname{Re}[\gamma_i] + 2\operatorname{Im}[\gamma_i]\operatorname{Im}[r] = |t|^2\operatorname{Re}[\gamma_t]$$

ce qui entraîne $R + T = 1$ seulement dans le cas où $\operatorname{Im}[\gamma_i] = 0$. La relation générale s'écrit sous la forme :

$$R + T = 1 + 2 \frac{\operatorname{Im}[\gamma_i]\operatorname{Im}[r]}{\operatorname{Re}[\gamma_i]} \quad (9.19)$$

Dans quels cas la partie imaginaire de γ_i est-elle différente de zéro ?

1^{er} cas : s'il y a des pertes dans le milieu 1.

2^{ème} cas : en l'absence de pertes dans le milieu 1, si l'onde incidente est évanescente. Ceci correspond au cas d'une source placée au-dessus de l'interface, mais également au cas de la réflexion totale.

Supposons par exemple n_1 réel et $\alpha > n_1 \frac{\omega}{c}$.

$$\gamma_i = [n_1^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2]^{1/2} = i|\gamma_i|$$

Dans ce cas, $\langle \Pi_z^i(z=0) \rangle = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \operatorname{Re}[\gamma_i] = 0$. Néanmoins, pour la superposition des deux ondes évanescentes, incidente et réfléchie, $\langle \Pi_z^{(1)}(z=0) \rangle \neq 0$.

9.5.4 Émissivité et absorptivité

Des considérations thermodynamiques permettent d'établir qu'un corps chauffé à température T rayonne une luminance qui est donnée par le produit de la luminance du corps noir par une quantité comprise entre 0 et 1 appelée émissivité. La loi de Kirchhoff stipule que l'émissivité est égale à l'absorptivité α de la surface². La conservation de l'énergie d'un faisceau éclairant une interface donne $\alpha = 1 - R$. Dans le cas d'une interface séparant un milieu transparent d'un milieu absorbant, on a la relation simple $R + T = 1$. On peut donc écrire $1 - R = T$. Il s'en suit que l'absorptivité (et donc l'émissivité) d'un milieu est donnée par $1 - R$. L'absorptivité du demi-espace apparaît ainsi comme égale à la transmittivité de l'interface. En effet, tout photon traversant l'interface sera absorbé dans le demi-espace contenant le milieu absorbant. Les propriétés radiatives d'émission et d'absorption d'un corps opaque sont donc décrites à l'aide des facteurs de réflexion et de transmission de Fresnel.

². On peut montrer que cette propriété est une conséquence directe de la propriété de réciprocité des équations de Maxwell. Le théorème de réciprocité revient à dire que l'on obtient le même signal en permutant source et détecteur.

9.6 Cas de l'incidence normale

9.6.1 Facteur de réflexion

En incidence normale, $\alpha = 0$ et $\gamma = n \frac{\omega}{c}$. Le facteur de réflexion peut s'écrire en fonction des indices des deux milieux :

$$r = \frac{\gamma_i - \gamma_t}{\gamma_i + \gamma_t} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Pour une interface verre-air, $n_1 \approx 1,5$, $n_2 = 1$ d'où $r = 0,2$ (et $r = -0,2$ pour une interface air-verre) et $R = |r|^2 = (0,2)^2 = 4\%$. Ce qui correspond à une transmission $T = 96\%$ en énergie (si $\text{Im}[\gamma_i] = 0$). Cette valeur du coefficient de transmission peut sembler élevée, mais pour un système comportant plusieurs interfaces, les « pertes » énergétiques deviennent trop importantes pour un fonctionnement satisfaisant. Ainsi par exemple, un système comportant 5 lentilles a 10 dioptries de sorte que la transmission est de $0,96^{10} = 0,66$. D'où la nécessité de mettre au point des dispositifs limitant encore la réflexion.

9.6.2 Dispositifs antirélecteurs

Différents concepts peuvent être utilisés pour limiter la réflexion.

Utilisation de milieux magnétiques

Dans le cas de milieux magnétiques, le facteur de réflexion s'écrit :

$$r = \frac{\gamma_i/\mu_1 - \gamma_t/\mu_2}{\gamma_i/\mu_1 + \gamma_t/\mu_2}$$

En incidence normale $\gamma_i = n_1 \frac{\omega}{c} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \frac{\omega}{c}$. Dans ce cas, le facteur de réflexion s'annule si :

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}$$

Un revêtement magnétique déposé sur la carlingue métallique d'un avion, par exemple, peut constituer un système antireflet à condition que le revêtement soit absorbant de manière à éviter toute réflexion à l'interface revêtement-métal.

Système antireflet interférentiel

Une couche d'indice n' déposée à la surface d'un milieu d'indice n pourra servir de couche antireflet si les ondes réfléchies 1 et 2 (voir figure 9.8) se détruisent par interférences.

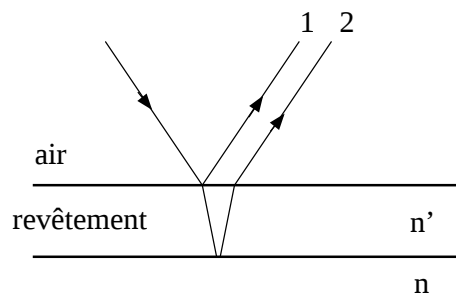


Figure 9.8 – Dispositif antireflet interférentiel

Deux conditions doivent donc être satisfaites :

- 1 et 2 doivent être en opposition de phase, ce qui fixe l'épaisseur d de la couche : $d = \lambda/4n'$.
- 1 et 2 doivent avoir la même amplitude ce qui fixe l'indice n' tel que $n' = \sqrt{n}$.

Ce dispositif est utilisé pour les verres de lunettes sur lesquels on dépose une couche de quartz. Il faut noter que la condition d'interférences destructives n'est vérifiée qu'en incidence normale et pour une longueur d'onde donnée, ce qui limite l'efficacité du système.

Revêtement antireflet multicouche

Le facteur de réflexion étant proportionnel à la différence d'indice entre les deux milieux, on peut diminuer la réflexion en déposant sur la surface un revêtement multicouche de telle sorte que la différence d'indice soit faible pour chaque interface (cf figure 9.9). Ceci correspond à une « adaptation d'impédance » progressive.

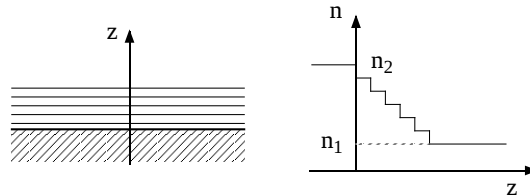


Figure 9.9 – Dispositif multicouche

9.6.3 Paradoxe de l'absorbeur

Considérons l'interface entre le vide ou de l'air et un milieu absorbant. L'indice généralisé du milieu absorbant étant complexe, on le notera $n = n' + in''$. Le facteur de réflexion en intensité devient :

$$R = \left| \frac{n - 1}{n + 1} \right|^2 = \frac{(n' - 1)^2 + n''^2}{(n' + 1)^2 + n''^2}$$

Dans le cas d'un milieu fortement absorbant tel que la partie imaginaire de sa constante diélectrique soit très grande devant 1, le module de l'indice est très grand devant 1. Dans ce cas, on constate que $R \rightarrow 1$. Le milieu réfléchira donc presque totalement la lumière et de ce fait, ne l'absorbera pas !

Le paradoxe repose sur deux définitions distinctes de la notion d'absorbeur. D'une part, on peut considérer qu'un milieu est très absorbant si la longueur de propagation de l'onde dans le matériau est très faible : l'onde est absorbée sur une distance très courte. D'autre part, un milieu remplissant un demi-espace est un bon absorbeur s'il ne réfléchit pas la lumière. Ces deux notions sont distinctes et, comme on l'a vu, incompatibles.

Pour absorber de l'énergie lumineuse incidente, il ne faut pas la réfléchir ce qui nécessite un faible contraste d'indice. Il ne faut donc pas que la partie imaginaire de la constante diélectrique soit très élevée. La longueur de pénétration de l'onde doit simplement être plus petite que l'épaisseur du corps pour qu'il y ait absorption.

9.6.4 Couleur d'un corps

Nous pouvons utiliser les notions introduites pour discuter de la couleur des corps. Lorsqu'un milieu opaque absorbe les longueurs d'onde correspondant à une couleur spécifique, il apparaît alors en réflexion la couleur complémentaire. Considérons une goutte d'encre déposée sur une feuille de papier. Si elle comporte des pigments qui absorbent dans le bleu/vert, la lumière sera plus atténuée dans cette région spectrale que dans le rouge lors de la propagation au travers de la goutte. La feuille de papier blanche diffuse en réflexion la lumière qui s'atténue à nouveau lors du trajet retour. La lumière réfléchie apparaît alors rouge. Si l'on utilise cette même encre sur un transparent, la couleur apparaît moins nettement en projection que lorsque l'on regarde le transparent posé sur une feuille de papier. En effet, dans le cas de la projection, la lumière ne traverse le colorant qu'une seule fois.

L'eau de mer absorbe le rouge et les couleurs observées en plongée ont une forte dominante bleue. Cela est dû au fait que la lumière incidente éclairant les objets est fortement atténuée dans la zone rouge du spectre. La dominante bleue disparaît si le plongeur éclaire ce qu'il regarde près de lui avec une lampe car le trajet effectué par la lumière issue de cette lampe est trop court pour qu'une forte proportion du rouge soit absorbée.

Essayons maintenant de relier la couleur de l'or aux valeurs de l'indice optique. Considérons les valeurs de l'indice complexe et de la constante diélectrique de l'or pour le vert ($0,5 \mu\text{m}$) et l'infrarouge proche ($0,8 \mu\text{m}$).

Au	$n = n' + in''$	$\epsilon_r = \epsilon'_r + i\epsilon''_r$
0,5 μm	0,84 + i 1,84	-2,68 + i 3,09
0,8 μm	0,16 + i 4,84	-23,4 + i 1,55

On voit que le module de l'indice est plus élevé dans le proche infrarouge que dans le vert. L'or réfléchit donc plus fortement le rouge que le bleu/vert. Ceci explique la couleur de l'or vu en réflexion. Lorsque l'on observe un film mince d'or en transmission, on constate que la lumière transmise est verte. Cela est dû à deux phénomènes. D'une part, comme on vient de le voir, la réflexion aux interfaces est plus forte pour le rouge que pour le bleu. D'autre part, le bleu est plus atténué lors de la propagation que le rouge comme on peut le voir en examinant les valeurs des parties imaginaires des indices. Ces deux effets jouent donc dans le même sens : l'or est vert en transmission.

9.7 Cas d'une polarisation quelconque

9.7.1 Facteurs de réflexion et de transmission

Les courbes de la figure 9.10 donnent l'allure de la variation du facteur de réflexion en intensité pour une interface verre-air puis pour une interface air-verre en fonction de l'angle d'incidence i . Les deux courbes de chaque graphe correspondent aux deux polarisations TE et TM. On peut remarquer que dans le cas de l'interface verre-air, le facteur de réflexion vaut 1 lorsque l'angle d'incidence est supérieur à une certaine valeur i_c , ce qui correspond à la réflexion totale. On peut aussi noter qu'en incidence normale les courbes correspondant aux deux polarisations sont confondues. Une lentille ne modifiera pas la polarisation de la lumière uniquement si elle est éclairée sous de faibles angles d'incidence ($< 30^\circ$ en pratique pour du verre).

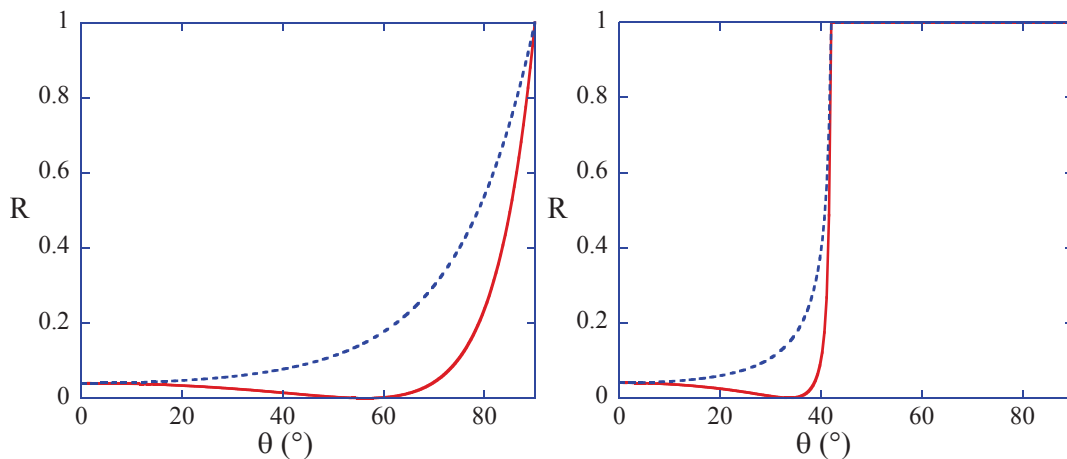


Figure 9.10 – Facteur de réflexion en puissance d'une onde plane en fonction de l'angle d'incidence dans les cas $n_1 = 1$; $n_2 = 1,5$ et $n_1 = 1,5$; $n_2 = 1$. Ligne bleue pointillée : polarisation TE. Ligne rouge : polarisation TM.

Pour les deux interfaces, dans le cas d'une polarisation TM, le facteur de réflexion s'annule pour une valeur particulière de l'angle d'incidence appelée angle de Brewster et notée i_B .

9.7.2 Angle de Brewster

Cette propriété de l'angle de Brewster est utilisée pour réaliser des polariseurs. En effet, de la lumière non polarisée éclairant une lame de verre sous l'incidence i_B donnera un faisceau réfléchi de polarisation TE.

On peut expliquer simplement l'existence de ce phénomène. Considérons une onde incidente arrivant sur l'interface sous l'angle θ_i . L'onde réfléchie ne peut avoir qu'une seule direction de propagation donnée par $\theta_r = \theta_i$. Cette onde réfléchie est due au rayonnement des dipôles induits par l'onde incidente et on sait que le rayonnement d'un dipôle électrique est nul le long de son axe. Donc, si la direction $\theta_r = \theta_i$ correspond à l'axe des dipôles induits, il n'y aura pas d'onde réfléchie.

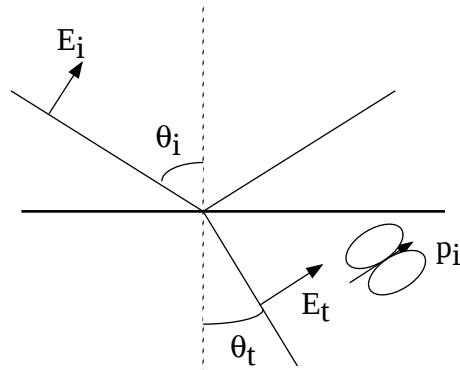


Figure 9.11 – Angle de Brewster

Dans le cas de l'interface air-verre, prenons un indice de 1 pour l'air et un indice noté n pour le verre. Si la direction des moments des dipôles induits $\mathbf{p}$ est parallèle à la direction de propagation de l'onde réfléchie pour un angle d'incidence i_B , on peut écrire (cf figure 9.11) :

$$\pi = i_B + \frac{\pi}{2} + \theta_t.$$

Soit :

$$\theta_t = \frac{\pi}{2} - i_B.$$

La relation de Snell-Descartes $\sin i_B = n \sin \theta_t$ s'écrit alors $\sin i_B = n \cos i_B$, et la valeur de l'angle de Brewster est donc donnée par :

$$\tan i_B = n.$$

Cette relation coïncide bien avec la valeur de i pour laquelle $r_{\parallel}$ s'annule.

Points clés

- ❶ Relations de continuité.
- ❷ Lois de Snell-Descartes.
- ❸ Démarche du calcul des facteurs de réflexion et de transmission en amplitude et en intensité.
- ❹ Réflexion totale, angle de Brewster.
- ❺ Conservation de l'énergie à une interface.

Compléments du chapitre 9

9A Complément A : réflexion d'une onde plane par une surface plane

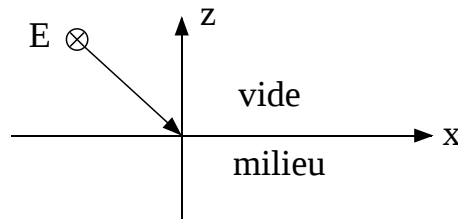
Le but de cet exercice est de montrer que lorsqu'une surface plane est éclairée par une onde plane, l'onde réfléchie est elle aussi une onde plane.

9A.1 Énoncé

Par souci de simplification, nous supposons que la surface étudiée est parfaitement conductrice et qu'elle est éclairée par une onde plane polarisée s que l'on caractérisera par la composante selon Oy de son champ électrique :

$$\mathbf{E}_i = E_0 \mathbf{e}_y \exp[i(\alpha_i x - \gamma_i z) - i\omega t].$$

où $\alpha_i = \frac{\omega}{c} \sin \theta_i$. Nous nous limiterons à la propagation dans le plan (xOy) et tous les champs seront supposés polarisés selon Oy . Il s'agit donc d'un problème à 2 dimensions.



1) En tout point au-dessus de l'interface, le champ électrique est la somme des champs incident et réfléchi. Que vaut le champ électrique sur l'interface ($z = 0$) ?

2) Donner la forme générale du champ réfléchi en utilisant le développement en spectre angulaire. On notera $E_d(\alpha)$ l'amplitude des ondes planes réfléchies.

3) Déterminer la forme du champ réfléchi en utilisant la condition de continuité.

9A.2 Solution

1) Les champs étant nuls dans le milieu, la relation de continuité s'écrit :

$$E_i(z = 0) + E_r(z = 0) = 0 \quad (9A.1)$$

2) Développement en spectre angulaire :

$$E_r(x, z) = \int E_d(\alpha) e^{i(\alpha x + \gamma z)} \frac{d\alpha}{2\pi}$$

3) L'équation de continuité (9A.1) conduit alors à :

$$E_0 e^{i\alpha_i x} = - \int E_d(\alpha) e^{i\alpha x} \frac{d\alpha}{2\pi}$$

D'où $E_d(\alpha) = -E_0 2\pi\delta(\alpha - \alpha_i)$. Le champ réfléchi peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} E_r &= - \int E_0 2\pi\delta(\alpha - \alpha_i) e^{i(\alpha x + \gamma z)} \frac{d\alpha}{2\pi} \\ &= -E_0 e^{i(\alpha_i x + \gamma_i z)} \quad (\alpha = \alpha_i \Rightarrow \gamma = \gamma_i) \end{aligned} \tag{9A.2}$$

Chapitre 10

Ingénierie de réfraction négative - Métamatériaux

Table des matières

10.1	Introduction	130
10.2	Propagation dans un matériau double-négatif	130
10.2.1	Matériau double négatif	130
10.2.2	Conséquences	130
	Vecteur d'onde et vecteur de Poynting	130
	Réfraction à une interface	131
10.3	Métamatériaux à réfraction négative	132
10.3.1	Indice négatif dans la matière "naturelle"	132
	Modèle de l'électron élastiquement lié (ou modèle de Lorentz)	132
	modèle de Drude-Sommerfeld	133
10.3.2	Métamatériau : définition	134
10.3.3	Métamatériau : réalisation	134
	Réseau de tiges métalliques	134
	Réseau de boucles fendues (<i>split-ring resonators</i> , SRRs)	135
	Première réalisation expérimentale	136
	Des pistes pour le domaine visible	136
10.4	Quelques applications	137
10.4.1	Lentille parfaite	137
10.4.2	Invisibilité	138
10.4.3	Autres effets	138

10.1 Introduction

JUSQU'À maintenant, nous n'avons considéré que des propriétés d'ondes dans des milieux matériels d'indice de réfraction positif. Or rien ne nous empêche d'examiner ce qui se passe lorsque la partie réelle de l'indice est négative. Une part importante des développements actuels en optique (électromagnétisme), voire en acoustique, est consacrée à ce domaine. Dans ce chapitre, nous allons décrire dans quelles conditions n peut être négatif, puis nous déduirons les conséquences étonnantes de cette propriété pour la propagation des ondes. Nous verrons ensuite quels sont les principes de base de la réalisation d'un tel milieu, dénommé métamatériau. Nous évoquerons les limitations actuelles, en particulier pour l'extension au domaine visible, puis nous donnerons quelques exemples d'applications très prometteuses et spectaculaires.

10.2 Propagation dans un matériau double-négatif

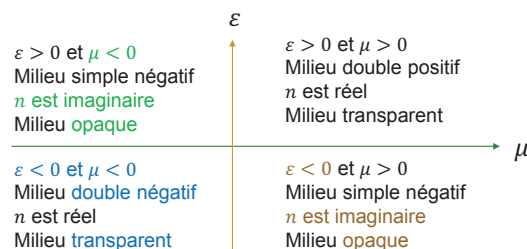
10.2.1 Matériau double négatif

Les propriétés électromagnétiques de la matière vues jusqu'ici sont principalement dues à la nature chimique de ses constituants et, dans le cas des solides, à leur arrangement spatial. Nous avons vu que la propagation d'une onde dans un matériau non magnétique ($\mu_r = 1$) est associée à une valeur positive de la partie réelle de n , alors qu'une valeur négative correspond à une onde évanescence. Une valeur non nulle (et positive) de la partie imaginaire de la constante diélectrique traduit la dissipation, c'est-à-dire la perte d'énergie (ou la diminution d'amplitude) au cours de la propagation. Une partie imaginaire négative traduirait un apport d'énergie au cours de la propagation, résultant en une amplification de l'onde (comme dans un milieu laser dans lequel on apporte de l'énergie de l'extérieur).

On suppose maintenant des milieux sans pertes – $\text{Im}(\varepsilon) = \text{Im}(\mu) = 0$ – mais dans lesquels ε et μ peuvent prendre toutes deux des valeurs réelles positives ou négatives. En rappelant l'équation de dispersion :

$$\begin{aligned} k^2 &= \varepsilon \mu \omega^2 \\ &= \varepsilon_r \mu_r \frac{\omega^2}{c^2} \\ &= n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

on obtient alors les quatre domaines suivants :



On verra dans la suite du chapitre que dans le cas d'un milieu double-négatif la solution où l'indice est négatif, $n = -\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, bien que le produit des deux constantes négatives ε_r et μ_r soit positif, est une solution physique qui donne des propriétés intéressantes lors de la réfraction à travers une interface.

10.2.2 Conséquences

Vecteur d'onde et vecteur de Poynting

Les matériaux double-négatifs sont considérés ici isotropes. Nous avons vu au chapitre 3 que toute onde peut être décomposée sur une base d'ondes planes du type $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$. Par souci de simplification, comme

nous l'avons déjà fait précédemment, considérons donc une telle onde plane. Les équations de Maxwell (cf. 8.2.6) conduisent aux relations suivantes :

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \mu_r \omega \mathbf{H} \quad (10.1)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon_0 \epsilon_r \omega \mathbf{E} \quad (10.2)$$

Puisque $\epsilon < 0$ et $\mu < 0$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ forment un trièdre indirect. On parle alors de matériau "main gauche". Le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ représente la propagation des surfaces d'onde (surfaces équiphase). Par ailleurs, le vecteur de Poynting qui représente la propagation de l'énergie s'écrit toujours :

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (10.3)$$

et donc $\mathbf{\Pi}$, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ forment un trièdre direct. En conséquence, $\mathbf{k}$ et $\mathbf{\Pi}$ pointent dans des sens opposés (Fig. 10.1)! On peut écrire :

$$\mathbf{k} = -\sqrt{|\epsilon_r \mu_r|} \frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{\Pi}}{|\mathbf{\Pi}|} \quad (10.4)$$

Les vitesses de phase et de groupe ont donc également des directions opposées. Autrement dit, l'énergie et les plans d'onde se propagent en sens inverse.

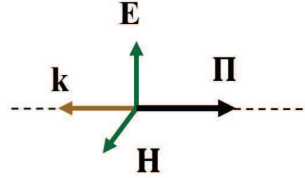


Figure 10.1 – Représentation des vecteurs champ électrique et champ magnétique, et des vecteurs d'onde et de Poynting pour une onde plane dans un matériau double-négatif, dit aussi "main gauche".

Réfraction à une interface

Considérons une interface entre un milieu double-positif (permittivité et perméabilité relatives $\epsilon_1 > 0$, $\mu_1 > 0$)¹ et un matériau double-négatif ($\epsilon_2 < 0$, $\mu_2 < 0$). En l'absence de charges libres à l'interface, les conditions de passage des composantes des champs imposent (cf. Chap. 9) :

- la conservation des composantes tangentielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. En conséquence, la conservation de la composante de $\mathbf{k}$ parallèle à l'interface (loi de Snell-Descartes)
- l'inversion du signe de la composante normale de $\mathbf{E}_\perp$:

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_{1\perp} = \epsilon_2 \mathbf{E}_{2\perp}$$

- la conservation de la composante du vecteur de Poynting dans la direction perpendiculaire à l'interface.

Puisque dans le milieu 2, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{\Pi}_2$ sont antiparallèles, et que la conservation de l'énergie impose un flux dans le sens des z positifs, le faisceau est réfracté à un angle négatif (Fig. 10.2) :

$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin(\theta_1) = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin(\theta_2) \quad (10.5)$$

Ces propriétés inhabituelles avaient été soulignées déjà en 1904 par H. Lamb² pour des ondes mécaniques : la propagation de l'onde (vitesse de phase) peut être opposée à la direction du flux d'énergie (vitesse de groupe). La même année, Arthur Schuster³ en déduisit les conséquences pour une onde électromagnétique. D'autres chercheurs se sont penchés depuis sur ce type d'ondes. On attribue à Viktor Veselago⁴ la paternité des métamatériaux en 1968, liant le signe négatif de la permittivité et de la perméabilité à l'indice de réfraction négatif, et établissant les principes régissant la propagation des ondes et leur exploitation potentielle pour l'imagerie. Nous allons maintenant approfondir ces notions.

1. L'indice r a été omis pour simplifier la notation.
 2. H. Lamb, "On group-velocity", Proc. London Math. Soc. 1, 473-479 (1904).
 3. Arthur Schuster, An Introduction to the Theory of Optics (Edward Arnold, London, 1904).
 4. V. G. Veselago, "The Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ", Sov. Phys.—Usp. 10, 509-518 (1968).

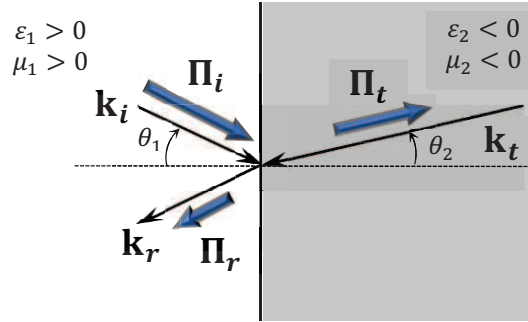


Figure 10.2 – Réfraction et réflexion d'une onde à l'interface entre un milieu double-positif et un milieu double-négatif.

10.3 Métamatériaux à réfraction négative

10.3.1 Indice négatif dans la matière "naturelle"

La notion d'indice de réfraction négatif semble inhabituelle. Nous avons vu qu'elle était liée à la conjonction de valeurs négatives de la permittivité diélectrique et de la perméabilité magnétique. Or nous avons déjà rencontré la première condition dans la matière. En effet, ϵ peut prendre des valeurs négatives, d'une part dans les plasmas et les conducteurs, d'autre part dans les milieux au voisinage d'un domaine spectral des ondes électromagnétiques où une transition électronique peut être induite par absorption de photons (résonance). Examinons brièvement ces deux cas pour des électrons dans la matière. L'objectif est de déduire d'une modélisation "microscopique" de la réponse de la matière à une onde électromagnétique une forme analytique pour la susceptibilité électrique, puis de montrer que ses variations spectrales peuvent conduire à des valeurs négatives de ϵ .

Modèle de l'électron élastiquement lié (ou modèle de Lorentz)

Nous avons décrit, dans le cours (Complément 7C) et dans le devoir libre DL2, la fonction diélectrique associée à la réponse d'électrons liés ou d'électrons libres (conducteurs) à une onde électromagnétique. Dans ce modèle (7C.10), la constante diélectrique associée à un ensemble d'électrons liés est donnée par la relation :

$$\epsilon_r = 1 - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\Gamma\omega} \quad (10.6)$$

où Γ est le taux de collisions. En posant ω_p la pulsation de plasmon de volume

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$$

on obtient (7C.11)

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\omega_p^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} + i \frac{\Gamma\omega_p^2\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \quad (10.7)$$

La variation en fonction de la fréquence de ϵ_r est présentée sur la figure 10.3. On remarque que la permittivité obtenue présente un caractère résonnant lorsque la fréquence de l'onde est accordée à la fréquence propre du système lié. De plus, comme déjà souligné dans d'autres chapitres du cours, on voit que la dissipation de l'énergie au cours du mouvement électronique induit par l'onde (on parle de polarisation de la matière) a pour conséquence le déphasage de la réponse par rapport à l'excitation (valeur complexe de la fonction réponse). Enfin, et c'est le plus important dans ce chapitre, on voit que dans une certaine gamme spectrale proche de la résonance (c'est-à-dire pour des fréquences angulaires légèrement plus élevées que ω_0) la partie réelle de ϵ_r est négative. Malheureusement, les pertes par dissipation sont importantes dans ce domaine spectral, ce qui empêche l'utilisation directe d'atomes près de résonances pour élaborer un milieu à indice négatif avec propagation. Nous verrons néanmoins que le fait de générer une permittivité négative au voisinage d'une résonance peut être mis à profit dans d'autres configurations.

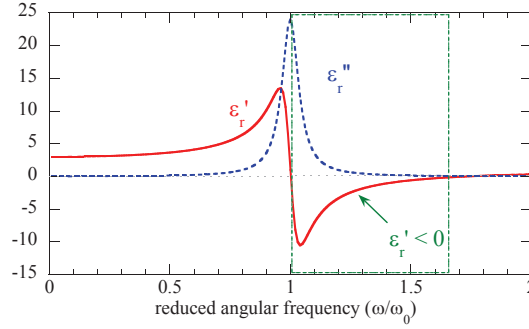


Figure 10.3 – Parties réelle et imaginaire de la permittivité relative en fonction de la fréquence réduite ω/ω_0 , décrite par le modèle du résonateur de Lorentz (électrons élastiquement liés) avec des valeurs réalistes des paramètres dans la matière. La zone dans laquelle la permittivité est négative est identifiée par la zone encadrée en vert. $\omega_p/\omega_0 = 1.41$, $\Gamma/\omega_0 = 0.083$.

modèle de Drude-Sommerfeld

On modélise la réponse des électrons libres dans un conducteur électrique de la même manière que précédemment. Il y a néanmoins deux différences : le terme de force de rappel liée au potentiel harmonique disparaît puisque maintenant les électrons sont libres ($\omega_0 = 0$), et la masse de l'électron doit être remplacée par une masse « effective » pour tenir compte de l'influence du potentiel périodique induit par le réseau ionique cristallin (la démonstration dépasse le cadre de ce cours, voir cours "Physique de la matière" en ST7). On obtient alors la permittivité relative qui est réelle :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \Gamma^2} + i \frac{\Gamma \omega_p^2}{\omega^3 + \Gamma^2 \omega} \quad (10.8)$$

Comme on peut le voir sur la figure 10.4, aux fréquences les plus basses on a $\varepsilon'_r < 0$. On voit donc

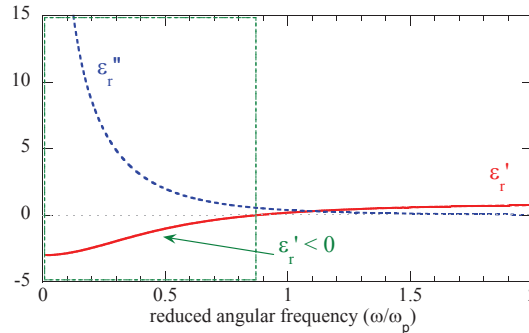


Figure 10.4 – Parties réelle et imaginaire de la permittivité relative en fonction de la fréquence réduite ω/ω_p , calculées dans le cadre du modèle de Drude-Sommerfeld (électrons libres) avec des valeurs réalistes des paramètres dans la matière. La zone dans laquelle la permittivité est négative est identifiée par l'encadrement en vert. $\Gamma/\omega_p = 0.5$.

que des charges libres (ou un plasma) peuvent conduire également à une permittivité négative dans une certaine gamme spectrale. Cependant, dans cette gamme les pertes sont trop importantes pour permettre la propagation des ondes avec des conducteurs.

En conclusion, on voit que certains milieux "naturels" peuvent présenter une valeur négative de permittivité. Il peut en être de même pour la perméabilité magnétique. Néanmoins, dans les gammes spectrales correspondantes, les pertes sont trop importantes pour imaginer réaliser la propagation d'ondes dans de tels milieux. Nous allons voir dans la suite comment ces concepts ont toutefois permis de concevoir des matériaux d'indice négatif : les métamatériaux.

10.3.2 Métamatériau : définition

Meta : au-delà en Grec.

Il s'agit d'un matériau artificiel dont les propriétés ne sont pas observées dans la nature ni même dans les matériaux le constituant. En électromagnétisme, il désigne un matériau composite dont les propriétés mésoscopiques effectives (permittivité diélectrique et perméabilité magnétique) sont contrôlées grâce à une structuration – à une échelle plus petite que la longueur d'onde – de "méta-atomes", à l'instar des atomes dans un solide à une plus petite échelle. Les nouvelles propriétés résultent à la fois de la nature chimique des constituants, de leur arrangement dans les méta-atomes, et de la répartition spatiale de ces derniers, qui peut être périodique ou non.

10.3.3 Métamatériau : réalisation

Réseau de tiges métalliques

A la fin des années 1990, J. Pendry⁵ propose d'utiliser les propriétés des conducteurs pour exploiter leur permittivité négative. Son principe est de diminuer à la fois les pertes volumiques et la valeur de ω_p en "diluant" les charges libres. Il remplace ainsi le métal massif par un métamatériau constitué d'un réseau de fils métalliques ; celui-ci suit toujours une loi de type Drude, mais avec une pulsation de plasmon liée aux propriétés géométriques du réseau de fils. On considère un réseau périodique de fils métalliques infinis et

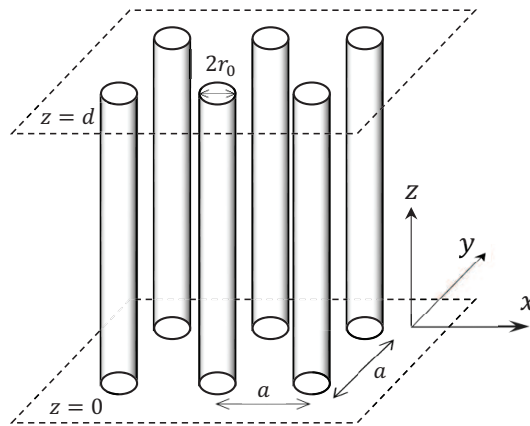


Figure 10.5 – Réseau carré de tiges métalliques infinies.

parallèles à l'axe, de rayon r_0 et espacés de a dans les directions x et y (Fig. 10.5). Le champ électrique associé à une onde plane monochromatique se propageant dans la structure est polarisé le long des fils. La propagation se fait dans la direction x perpendiculaire aux fils (onde transverse). Entre deux plans transverses virtuels distants de d la différence de potentiel ΔV est liée au courant induit dans un fil, I , par l'inductance effective du fil par unité de longueur, L_f :

$$\Delta V = -i I \omega L_f d \quad (10.9)$$

Puisque $\mathbf{E} = -\text{grad}V$, on a $\Delta V = -E_z d$ et donc $E_z = i\omega L_f I$.

Par ailleurs, en régime monochromatique le vecteur polarisation $\mathbf{P}$ est relié au vecteur densité de courant $\mathbf{j}$ par :

$$\mathbf{P} = -\frac{\mathbf{j}}{i\omega} \quad (10.10)$$

La densité surfacique des fils sur un plan transverse valant $1/a^2$, la densité de courant vaut $\mathbf{j} = -I/a^2 \mathbf{e}_z$, où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire porté par l'axe z . On en déduit donc : $\mathbf{P} = -E_z/(\omega^2 a^2 L_f) \mathbf{e}_z$, et par conséquent :

$$D_z = \left(\epsilon_0 - \frac{1}{\omega^2 a^2 L_f} \right) E_z \quad (10.11)$$

5. J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, I. Youngs, "Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures", Phys. Rev. Lett. 76, 4773 (1996).

La permittivité prend donc une forme similaire à celle du modèle de Drude sans pertes :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} \quad (10.12)$$

où

$$\Omega_p^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 a^2 L_f}$$

Reste à déterminer l'inductance par unité de longueur de fil, L_f . D'après la loi de Biot et Savart, le champ $\mathbf{B}$ en un point $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x$ d'un fil unique infiniment long est porté par $\mathbf{e}_y$ et sa norme vaut $(\mu_0 I)/(2\pi x)$. Le champ entre deux fils le long de l'axe des x s'écrit donc ⁶ :

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a-x} \right) \quad (10.13)$$

Le flux magnétique à travers une surface S d'un plan (x, z) est égal à :

$$\phi = \int \int B_y dx dz \quad (10.14)$$

Intégré sur une longueur unité selon z ce flux s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{r_0}^{a/2} B_y dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a^2}{4r_0(a-r_0)} \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $\phi = L_f I$:

$$\Omega_p^2 = \frac{2\pi}{\varepsilon_0 \mu_0 a^2 \ln \frac{a^2}{4r_0(a-r_0)}} \quad (10.15)$$

On voit donc que grâce à ce réseau périodique de fils on aboutit à une permittivité de forme similaire à celle d'un métal, mais dont les propriétés peuvent être maintenant ajustées grâce aux paramètres géométriques des fils (rayon et espacement). En particulier, il est possible d'obtenir des valeurs négatives de permittivité dans le domaine micro-ondes ou infrarouge lointain, avec des pertes beaucoup plus faibles qu'avec un métal massif. Reste maintenant à trouver un moyen de réaliser une perméabilité magnétique négative dans le même domaine spectral.

Réseau de boucles fendues (*split-ring resonators*, SRRs)

Nous avons vu que le modèle du résonateur de Lorentz permettait d'obtenir des valeurs négatives de permittivité électrique à proximité d'une résonance dans un dipôle électrique induit. On peut alors transposer ce concept à un dipôle magnétique résonant afin de générer une perméabilité magnétique négative. Pour cela, on induit par interaction avec l'onde incidente un moment magnétique dans une boucle conductrice, à laquelle on donne un caractère résonnant en introduisant une capacité non nulle, par exemple en ouvrant la boucle. C'est le concept de "résonateur à boucle fendue" (*split ring resonator* en Anglais)⁷.

On considère un tel objet placé perpendiculairement au champ magnétique oscillant, lui-même dirigé selon y (Fig. 10.6). Il apparaît une force électromotrice $e = i\omega S \mu_0 H_y$ dans la boucle, égale à l'opposé de la dérivée temporelle du flux magnétique induit par le champ⁸. En négligeant les pertes, le courant induit dans la boucle s'écrit⁹ :

6. On peut vérifier facilement que les termes dus aux autres fils qui font apparaître les termes :

$$-\frac{1}{2a-x} + \frac{1}{a+x} - \frac{1}{3a-x} + \frac{1}{2a+x} \dots$$

sont négligeables.

7. J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart, "Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena", IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques 47(11), 2075–2084 (1999).

8. $e = -\frac{d\phi}{dt}$ et $\phi = S \mu_0 H_y$

9. Le schéma électrique équivalent est une force électromotrice e appliquée aux bornes d'une inductance et une capacité en série. En régime monochromatique et dans la convention $e^{-i\omega t}$, l'impédance du circuit est égale à

$$Z = -i\omega L_b - \frac{1}{i\omega C_b}$$

Le courant induit est alors exprimé à l'aide de la relation $I = e/Z$.

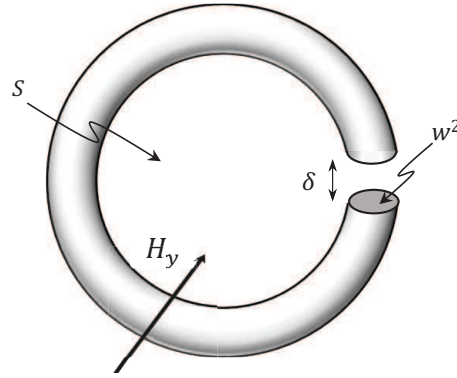


Figure 10.6 – Résonateur à boucle fendue.

$$I = \frac{\mu_0 S H_y C_b \omega^2}{1 - L_b C_b \omega^2} \quad (10.16)$$

L_b et C_b représentent respectivement l'inductance et la capacité de la boucle. Par ailleurs, le moment magnétique induit vaut $m_y = SI$. Avec N_b boucles par unité de volume, on en déduit la susceptibilité magnétique $\chi_m = N_b m_y / H_y$ du milieu, puis sa perméabilité magnétique relative :

$$\mu_r = 1 + N_b \frac{\mu_0 S^2 C_b \omega^2}{1 - L_b C_b \omega^2} \quad (10.17)$$

On voit donc que l'on peut obtenir des valeurs négatives de μ_r à proximité de la résonance dont la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{L_b C_b}$ est fixée par les caractéristiques géométriques de la boucle. Si l'on considère celle-ci comme un conducteur parfait, l'inductance est proportionnelle à son rayon r_b tandis que sa capacité à w^2/δ , si bien que $\omega_0 = \sqrt{\delta/(\varepsilon_0 \mu_0 r_b w^2)}$. Lorsqu'on diminue la taille de la boucle, en maintenant constant le rapport w^2/δ , on augmente la fréquence de résonance, ce qui permet de déplacer vers les faibles longueurs d'onde le domaine spectral dans lequel la perméabilité est négative.

On peut remarquer que l'expression du moment magnétique induit obtenue plus haut se comporte comme ω^2 aux basses fréquences : le magnétisme artificiel disparaît à la limite statique. En revanche, à très haute fréquence le modèle prédit un moment $m_y \rightarrow -(S^2 \mu_0 H_y)/L_b$ ce qui n'est pas acceptable physiquement : en raison de l'inertie des porteurs de charge (électrons dans la boucle) à haute fréquence, l'aimantation tend vers zéro. Ceci souligne la limite de validité du modèle quasi-statique développé ici. Par ailleurs, les métaux ne sont pas des conducteurs parfaits et à haute fréquence il faut tenir compte de l'inductance dans le métal lui-même, ce qui sort du cadre de ce cours. Quoi qu'il en soit, nous avons vu qu'en se basant sur le modèle du dipôle électrique induit avec résonance nous avons pu concevoir un matériau magnétique artificiel basé sur des "méta-atomes" dans lesquels l'onde induit un dipôle magnétique.

Première réalisation expérimentale

Au début des années 2000, David R. Smith¹⁰ a conçu le premier métamatériau dans le domaine micro-ondes, en suivant les travaux de Pendry : ses "méta-atomes" sont constitués de l'association d'une tige métallique et d'un double SRR (Fig. 10.7). Il a ainsi pu démontrer la réfraction négative d'une onde à travers cette méta-structure.

Des pistes pour le domaine visible

Étendre le design ci-dessus vers le domaine visible, grâce à la miniaturisation des "méta-atomes" (domaine des nanosciences), fait néanmoins face à un problème de taille lié aux pertes dans les conducteurs. D'autres solutions ont depuis ces travaux pionniers été envisagées avec des structures différentes, en "pile de bois", en "filet" gravé dans des empilements de différents matériaux, en utilisant des résonances plasmoniques ou

10. D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, "Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity", Phys. Rev. Lett. 84, 4184 (2000).

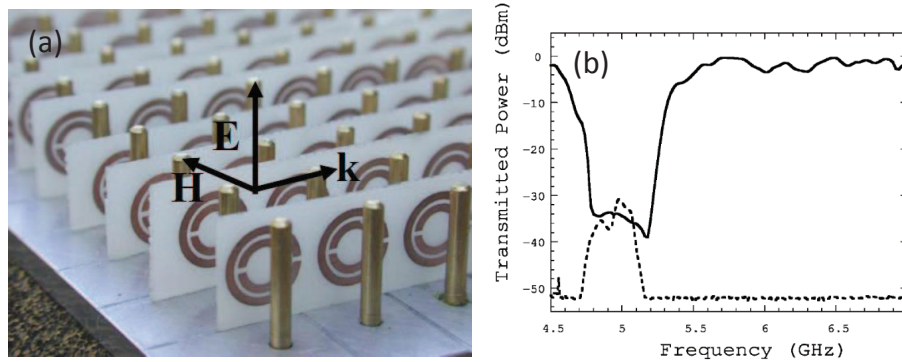


Figure 10.7 – (a) Premier métamatériau jamais réalisé, associant réseau de tiges et de boucles fendues. La période est 8 mm, soit $1/8^e$ de la longueur d'onde centrale où l'on obtient la réfraction négative. La structure est placée entre deux guides d'onde métalliques plans (celui du dessus a été retiré pour la photo). (b) Puissance transmise à travers la structure en fonction de la fréquence (domaine micro-ondes). Traits pleins : structure avec seulement les SRRs (perméabilité négative, permittivité positive) : le métamatériau est opaque (coupe-bande) dans une certaine gamme de fréquences. Traits pointillés : métamatériau complet (perméabilité et permittivité négatives) : malgré des pertes par absorption, l'onde se propage maintenant dans le milieu (passe-bande) dans la même gamme spectrale. D'après D. R. Smith, UCSD, USA (2000). Cette première démonstration fut suivie de preuves de l'effet de la réfraction négative sur les lois de Snell-Descartes grâce à un prisme en métamatériau.

des propriétés de cristaux photoniques. La nanophotonique se penche aujourd'hui sur des développements très sophistiqués, s'appuyant sur le concept de "métasurface" (un revêtement plan nanostructuré présentant pour une onde incidente des propriétés liées aux valeurs négatives et/ou proches de zéro de la permittivité et de la perméabilité), objets d'intenses recherches tant fondamentales qu'appliquées.

10.4 Quelques applications

10.4.1 Lentille parfaite

Nous avons vu au chapitre 3 que pour la formation des images en champ lointain, la propagation joue le rôle de filtre passe-bas. Ainsi, il n'est pas possible d'imager des détails de taille caractéristique inférieure à la longueur d'onde. En effet, les composantes de Fourier de ces "variations rapides" dans l'espace donnent lieu à des vecteurs d'onde très inclinés sur l'axe de propagation tels que $\alpha > \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \omega / c$. Ces détails contribuent alors sous la forme d'ondes évanescentes dont l'amplitude décroît exponentiellement lorsqu'on s'éloigne de la source, en champ proche. Seules les fréquences spatiales les plus petites se propagent en champ lointain. C'est ce qu'on appelle la *limite de diffraction*. Le phénomène de réfraction négative permet de s'affranchir de ce problème comme nous allons le voir simplement maintenant. Une "tranche" à faces parallèles d'épaisseur t , constituée d'un milieu à réfraction négative, est placée dans le vide (Fig. 10.8).

Pour simplifier le problème, considérons que $\epsilon_r = -1$ et $\mu_r = -1$. Un objet source à une distance d de la "tranche" émet des ondes dans toutes les directions, d'abord en espace libre. Lorsque les rayons (supports du vecteur de Poynting, c'est-à-dire du flux d'énergie électromagnétique) arrivent sur la première interface, ils sont réfractés vers l'axe et convergent tous au même point à l'intérieur de la tranche, d'où ils divergent avant d'être à nouveau réfractés à la traversée de la seconde interface. Ils convergent ensuite tous en espace libre vers le même point. Il est important de noter que ce point de convergence ne dépend pas de l'angle d'émission initial : il constitue donc un point image. La "tranche" se comporte comme une lentille plate de grandissement 1. L'onde parcourt une distance d entre la source et la tranche, puis t dans la tranche, puis $t - d$. La distance totale entre l'objet et l'image est donc de $2t$. Examinons maintenant ce que devient une onde évanescente émise par l'objet. Pour simplifier, on considère ce dernier comme une ligne de courant le long de l'axe y de sorte que le champ électrique émis s'écrit :

$$\mathbf{E} = E_0 \exp[i(\alpha_0 x + \gamma_0 z)] \mathbf{e}_y \quad (10.18)$$

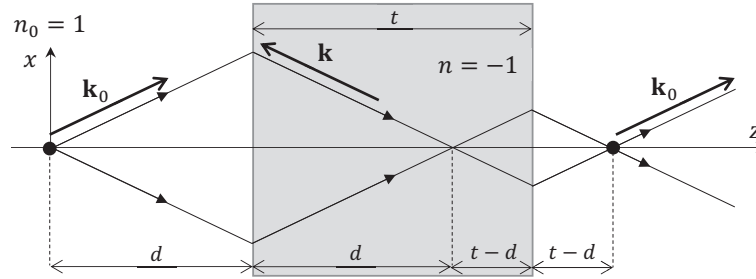


Figure 10.8 – Principe de la lentille parfaite.

Puisque $\alpha_0^2 > k_0^2 = \omega^2/c^2$ (onde évanescente), on a :

$$\gamma_0 = i\sqrt{\alpha_0^2 - k_0^2} \quad (10.19)$$

et donc

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(i\alpha_0 x) \exp(-|\gamma_0|z) \mathbf{e}_y \quad (10.20)$$

Les lois de Snell-Descartes à la première interface impliquent que dans le milieu constituant la tranche on a : $\alpha = \alpha_0$ et $\gamma = -\gamma_0$, si bien que le champ à l'intérieur s'écrit :

$$\mathbf{E} = E_0 \exp(i\alpha_0 x) \exp(+|\gamma_0|z) \mathbf{e}_y \quad (10.21)$$

Alors que l'amplitude du champ décroît au cours de la propagation en espace libre, elle augmente dans le milieu "main gauche"! Le calcul des coefficients de Fresnel montre que le passage à travers la tranche résulte en une réflectance (en intensité) $R = 0$ et une transmittance $T = \exp(|\gamma|d)$ pour tout angle. L'amplitude décroît sur une distance t au total (hors milieu) et croît sur toute l'épaisseur t de la tranche. Au final, toute l'énergie émise par l'objet dans le demi-espace de propagation se retrouve sur l'image, y compris celle associée aux ondes évanescentes. On récupère donc ainsi l'ensemble des détails de l'objet, contrairement au cas d'une imagerie classique. C'est le concept de *lentille parfaite*, énoncé pour la première fois par Veselago en 1968 et formalisé par Pendry¹¹ en 2000. Une démonstration expérimentale a été publiée en 2005. De nombreux travaux sont aujourd'hui consacrés à l'amélioration des performances par l'ingénierie des "métasurfaces", voire à leur exploitation à des fins technologiques.

10.4.2 Invisibilité

L'ingénierie de champ électromagnétique à petite échelle rendue possible par le concept de métamatériau permet de concevoir des dispositifs d'invisibilité dont le principe est de forcer les ondes à contourner un objet et à se reconstituer après lui (Fig. 10.9)¹². À l'instar de la relativité générale, conduisant à la notion de déformation de l'espace-temps, le formalisme de l'*optique de transformation* permet de traiter aujourd'hui mathématiquement ce genre de problèmes.

10.4.3 Autres effets

On peut citer quelques phénomènes sur lesquels la propagation d'ondes en milieu à indice négatif a des conséquences étonnantes : inversion de l'effet Doppler, effet Goos-Haenchen négatif, inversion de la radiation Tchererenkov ... Plus généralement, un indice inférieur à un, une permittivité proche de zéro, la chiralité, l'anisotropie ... sont des paramètres sur lesquels chercheurs et ingénieurs travaillent pour développer de nouvelles fonctionnalités en électromagnétisme, optique et photonique. Plusieurs entreprises (comme Kymeta, Holosense, Sensormetrix, Evolv Technologies, Metalenz, Echodyne ...) proposent des solutions innovantes basées sur les métamatériaux, dans différents domaines du spectre électromagnétique, pour l'imagerie, les capteurs ultrasensibles, la détection de polluants, le traitement optique de l'information, les télécommunications, la microscopie. Le concept est également transposé au domaine des ondes acoustiques, avec le design de structures antisismiques par exemple.

11. J. B. Pendry, "Negative refraction makes a perfect lens", Phys. Rev. Lett. 85, 3966 (2000)

12. D. Schurig et al., "Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies", Science, 314, 977-980 (2006)

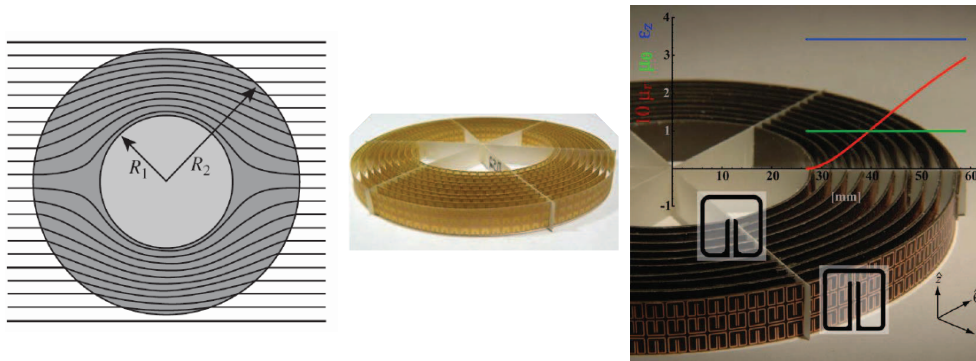


Figure 10.9 – Dispositif expérimental ayant permis de mettre en oeuvre le principe de la "cape d'invisibilité" à 2D en régime micro-onde. Les caractéristiques des SRRs sont modifiées dans le métamatériau (photo de droite) de manière à ce que l'onde contourne le centre de la structure comme le montrent les lignes de champ (schéma de gauche). La permittivité et la composante angulaire de la perméabilité sont constantes, tandis que la composante radiale de la perméabilité augmente avec le rayon. Le dispositif (photo au centre) fait une douzaine de centimètres. Un objet placé au centre sera totalement invisible lors de la détection de l'onde incidente. D'après *D. Schurig et al. (2006)*.

Points clés

- ❶ Il est possible de concevoir et fabriquer des matériaux artificiels basés sur des structures de dimensions petites devant la longueur d'onde de manière à obtenir des propriétés électromagnétiques que l'on ne trouve pas dans la nature.
- ❷ En particulier, l'association d'une permittivité électrique et d'une perméabilité magnétique négatives permet de disposer de métamatériaux à indice de réfraction négatif.
- ❸ Dans un tel milieu, les vecteurs d'onde et de Poynting se propagent en directions opposées. Les lois de Snell-Descartes impliquent une direction "miroir" de l'onde réfractée par rapport à celle obtenue dans des milieux habituels.
- ❹ En s'inspirant des milieux à électrons libres (conducteurs) et des résonances dipolaires, il a été possible de concevoir les premiers métamatériaux dans le domaine des micro-ondes au tout début de notre siècle.
- ❺ Les concepts de lentille parfaite ou de cape d'invisibilité illustrent parfaitement la nouvelle physique permise par les métamatériaux, et les nombreuses applications qui en découlent.
- ❻ Ce champ disciplinaire fait aujourd'hui l'objet d'intenses recherches et de développements technologiques, en particulier grâce à la nanophotonique.

Annexes

Annexe A

Guides d'ondes

Table des matières

A.1	Définitions et exemples	144
A.2	Guide d'ondes métallique plan	144
A.2.1	Géométrie du problème	144
A.2.2	Équations du problème	145
A.2.3	Étude d'une solution	145
A.2.4	Propriétés	146
A.2.5	Interprétation physique de la discrétisation des modes	146
A.3	Équations générales pour un guide à milieux isotropes homogènes	147
A.3.1	Décomposition du champ électromagnétique	147
Introduction		147
Décomposition du champ		147
A.3.2	Équations du problème	148
A.3.3	Modes TE et TM	148
A.4	Guide métallique rectangulaire	149
A.4.1	Formulation du problème	149
A.4.2	Étude du mode TE	149
A.4.3	Description du mode $TE_{0,1}$	150

A.1 Définitions et exemples

LE rôle d'un guide d'ondes est d'assurer la propagation d'un signal sur une grande distance et sans altérations. Il est généralement utilisé pour transporter de l'information (télécommunications par fibres optiques, par câbles), ou pour transporter de l'énergie. À basse fréquence, cette fonction est très bien remplie par un simple fil métallique. C'est ainsi que fonctionne le téléphone et la distribution d'électricité. Lorsque l'on utilise des fréquences plus élevées, cela n'est plus possible car *un simple fil devient une antenne rayonnante*. Les pertes radiatives, qui sont négligeables à 50 Hz, deviennent considérables lorsque l'on travaille à 50 MHz. La puissance rayonnée variant comme la puissance 4 de la fréquence, les pertes par rayonnement sont multipliées par 10^{24} ! La solution consiste à éliminer les pertes par rayonnement en localisant (emprisonnant) l'énergie dans un guide. On peut donner une définition générale d'un guide d'ondes. Il s'agit d'un système linéaire possédant un axe d'invariance par translation le long duquel s'effectue la propagation d'une onde. Différents systèmes très divers correspondent à cette définition très générale, nous en citons quelques-uns dans ce qui suit :

- Un guide d'ondes métallique est un cylindre creux de section quelconque (figure A.1 a). Parmi les exemples les plus courants, citons d'une part le câble coaxial, d'autre part, les guides d'ondes rectangulaires qui jouent le rôle de câbles dans le domaine des micro-ondes.
- Le guide d'ondes diélectrique plan (figure A.1 b) joue un rôle considérable dans le domaine de l'optoélectronique. Un exemple typique de ces dispositifs est schématisé ci-dessous. Le rayonnement est astreint à se propager dans le milieu intermédiaire du fait des réflexions totales qu'il subit aux interfaces. L'intérêt majeur de ce type de dispositif tient au fait qu'il devient ainsi possible de manipuler des faisceaux optiques comme on le fait de courants électriques dans les circuits intégrés. À titre d'exemple, on sait faire aujourd'hui des interféromètres de Michelson en optique intégrée ; ceci implique que l'on sache modifier localement les propriétés du guide d'ondes afin de réaliser une séparatrice et des miroirs. Ce type de dispositif est obtenu sur des plaquettes par des procédés analogues à ceux qui sont utilisés en électronique. De la même façon, il est possible de réaliser des dispositifs très compacts. Le développement de l'optique intégrée a été spectaculaire ces dernières années au point qu'elle est devenue l'une des branches les plus actives de l'optique, elle est à la base du développement de l'optronique, contraction de opto-électronique, mot qui désigne l'ensemble des techniques mêlant les systèmes optiques et électroniques.
- Les fibres optiques (figure A.1 c) constituent un autre exemple de guide diélectrique, le mécanisme de base est là aussi la réflexion totale à l'intérieur de la fibre.

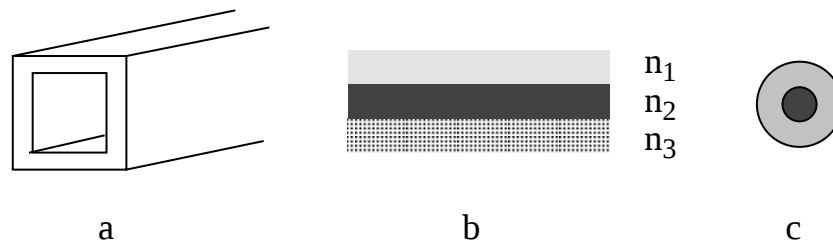


Figure A.1 – Exemples de guides d'ondes

Une onde se propageant le long de l'axe, caractérisée par la projection de son vecteur d'onde le long de cet axe notée γ et par sa pulsation ω est appelée mode. Pour certaines géométries, nous verrons qu'il existe différents champs du type $f_n(x,y) \exp[i(\gamma z - \omega t)]$ où f_n est le n ème champ du mode (ω, γ) . L'usage confond le champ associé à un mode et le mode lui-même. Dans le paragraphe suivant, nous allons faire une étude simplifiée d'un guide d'ondes plan métallique. Cet exemple simple permettra d'introduire les notions essentielles de la théorie des guides d'ondes que nous développerons au paragraphe suivant.

A.2 Guide d'ondes métallique plan

A.2.1 Géométrie du problème

Le guide d'ondes envisagé dans cette partie est constitué de deux plaques infiniment conductrices situées dans les plans $y = b/2$ et $y = -b/2$. Le milieu interstitiel est assimilé au vide. On étudie la propagation

d'une onde le long de l'axe Oz .

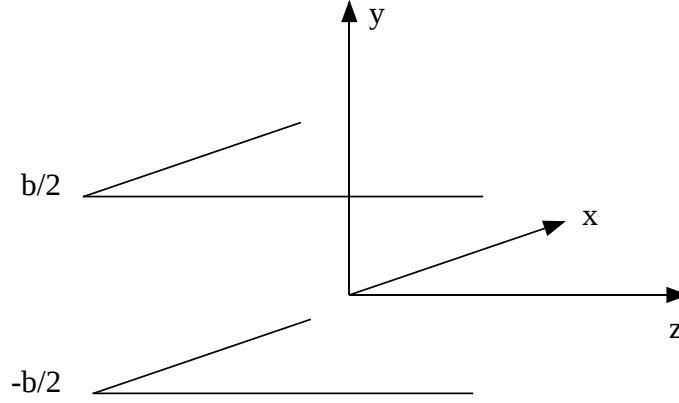


Figure A.2 – Guide d'ondes plan

A.2.2 Équations du problème

Afin de simplifier, nous cherchons une solution du type $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$. En outre, le système étant invariant par translation le long de Ox , on suppose que E_x ne dépend que de y et z . L'étude générale sera effectuée par la suite.

- Le champ doit satisfaire à l'équation de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0 \quad (\text{A.1})$$

- Les conditions aux limites sont :

$$E_x(b/2) = E_x(-b/2) = 0 \quad (\text{A.2})$$

A.2.3 Étude d'une solution

Plutôt que de résoudre (A.1), nous cherchons une solution de la forme $E_0 \cos(ky)e^{i\gamma z}$. Ce faisant, nous n'allons obtenir qu'une seule des solutions du problème; nous procéderons à une résolution complète du problème de la propagation dans un guide rectangulaire au paragraphe suivant. L'équation (A.1) impose alors la condition suivante sur k et γ .

$$-k^2 - \gamma^2 + \omega^2/c^2 = 0 \quad (\text{A.3})$$

et (A.2) impose :

$$\cos(kb/2) = 0$$

soit

$$k = (2p + 1)\pi/b \quad p \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.4})$$

En reportant (A.4) dans (A.3) on obtient :

$$\gamma^2 = \omega^2/c^2 - [(2p + 1)\pi/b]^2 \quad (\text{A.5})$$

Il est important de souligner que le fait de *localiser* l'onde dans un espace fini se traduit par la *quantification du vecteur d'onde*. En effet ce sont les conditions aux limites (A.2) qui imposent à k de prendre des valeurs discrètes. Lorsqu'une onde est localisée, son vecteur d'onde est nécessairement quantifié. Ceci était bien connu au début du siècle lorsque s'est posé le problème de la description théorique des spectres atomiques qui présentent des raies discrètes. L'idée de Louis de Broglie consiste à associer une onde à des grandeurs mécaniques telles que l'impulsion ou l'énergie dont on savait par l'expérience qu'elles étaient quantifiées. Ainsi, ce nouveau formalisme était en mesure de décrire naturellement la quantification.

On peut également interpréter la quantification en termes d'interférences : les conditions aux limites traduisent mathématiquement l'existence de frontières du système. Les ondes se réfléchissent (au moins partiellement) sur ces frontières, il ne se produit d'interférences constructives entre les ondes réfléchies une fois, deux fois, etc que pour certaines valeurs particulières de la différence de marche, donc du vecteur d'onde. Ce point est repris et développé au paragraphe A.2.5.

A.2.4 Propriétés

- Fréquence de coupure : L'équation (A.5) montre que, pour une valeur de p (donc de k) donnée, γ peut être soit réel, soit imaginaire. *Il n'y a de propagation que tant que γ est réel* ; dans le cas contraire, l'onde est évanescence. De l'équation (A.5) on déduit qu'il existe une fréquence minimum dite *fréquence de coupure* ($\omega_c = \pi c/b$) en deçà de laquelle il ne peut y avoir de propagation.
- Structure transverse du champ : Du fait même de l'existence de conditions aux limites, les champs ont nécessairement une *variation transversale d'amplitude*. Par conséquent, les solutions de ce type de problème ne peuvent pas être des ondes planes. En revanche, il reste possible de décomposer les solutions en ondes planes. Il faut prendre garde au fait que les règles de calcul applicables aux ondes planes ne sont plus valables. Ce point est illustré au § suivant. Ainsi, par exemple, la solution adoptée plus haut peut s'écrire comme la superposition de deux ondes planes, il suffit pour cela de remplacer $\cos(ky)$ par $[\exp(iky) + \exp(-iky)]/2$. Il est clair que pour chacune des deux ondes planes qui apparaissent, il est associé un vecteur d'onde. La règle de calcul qui consiste à remplacer le calcul d'un rotationnel par un produit vectoriel par $i\mathbf{k}$ ne peut s'appliquer qu'après décomposition en ondes planes.
- Guides monomode et multimode : Dans de nombreuses applications, il est essentiel d'avoir un guide monomode. En effet, dans le cas d'un guide multimode, c'est-à-dire un guide tel que plusieurs modes puissent se propager, les différents modes sont généralement excités. Il y aura donc des vitesses de propagation différentes pour le signal. Cela se voit sur l'exemple traité, la vitesse de phase $v_\phi = \omega/\gamma$ dépend de l'indice p du mode d'après (A.5). En sortie du guide on obtient un mélange des modes déphasés. Pour des applications de type télécommunications, cela se traduit par un brouillage ; dans le cas d'une fibre optique transportant un faisceau laser, cela se traduit par une dégradation importante du faisceau. Un guide possède d'autant plus de modes que sa taille est grande. Un guide monomode sera donc un guide de taille comparable à la longueur d'onde.

A.2.5 Interprétation physique de la discrétisation des modes

Supposons que la source S du champ qui règne dans le guide soit un fil parallèle à Ox situé en $y = z = 0$. On peut remplacer le problème d'une source entre deux plans parallèles infiniment conducteurs par celui d'une collection de sources images deux à deux par rapport aux plans. Du fait de la présence en vis-à-vis de deux miroirs, il va apparaître une infinité de sources réparties sur un axe. Comme dans le cas d'un réseau, seules certaines directions donneront lieu à des interférences constructives entre toutes les sources. Appelons S_1 l'image de S par le plan $y = b/2$. L'image de S_1 par le plan $y = -b/2$ est S_3 située en $y = -2b$, etc. Notons que la source image doit être choisie afin que le champ soit nul sur le plan, ceci impose qu'elle soit symétrique par rapport au plan comme on l'a vu et qu'elle soit en *opposition de phase*. On aboutit ainsi à un réseau périodique de sources tel que deux sources consécutives soient en opposition de phase (voir figure). Ce réseau crée *entre les plans* $z = -b/2$ et $z = b/2$ le *même* champ électromagnétique que le système $\{S + \text{miroirs}\}$. En écrivant que seules les directions pour lesquelles toutes les sources émettent en phase ne seront pas éteintes par interférences destructives, on obtient les directions discrètes de propagation possibles, c'est-à-dire les ondes planes qui composent les modes. Cette condition revient à écrire que la différence de marche entre deux sources voisines est un multiple impair de la demi-longueur d'onde, elles interfèrent alors destructivement (c'est une façon simple et directe de retrouver le résultat classique des réseaux qui s'obtient également en explicitant la somme sur toutes les sources).

$$[SH] = b \sin \alpha = (2p + 1)\lambda/2 \quad \text{soit} \quad \omega/c \sin \alpha = (2p + 1)\pi/b$$

Nous venons de voir que les modes ne sont pas des ondes planes. Toutefois, la structure des champs peut être analysée en termes d'ondes planes. Les résultats sont assez simples dans le cas de guides rectangulaires,

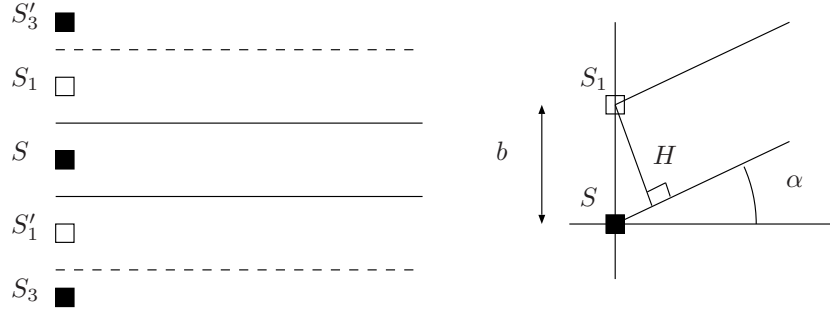


Figure A.3 – Source S et ses images en phase en blanc et en opposition de phase en noir

en revanche ce type de décomposition est beaucoup moins utile dans le cas de guides à géométrie cylindrique tels que les fibres optiques.

Dans les exercices 1, 2 et 3, nous exploitons la solution obtenue pour analyser les propriétés du mode : polarisation et flux d'énergie.

A.3 Équations générales pour un guide à milieux isotropes homogènes

A.3.1 Décomposition du champ électromagnétique

Introduction

Le but de cette partie est de montrer qu'il suffit de connaître *les composantes longitudinales*, (c'est-à-dire les composantes sur l'axe du guide) des champs électromagnétiques pour connaître toute la solution. Ceci est une simplification considérable du problème puisque au lieu d'avoir six inconnues (3 composantes pour $\mathbf{E}$ et pour $\mathbf{B}$) le problème se ramènera à la recherche de E_z et de B_z , Oz étant l'axe du guide. Pour montrer ce résultat, la seule hypothèse que nous faisons consiste à exprimer que les champs se propagent le long de l'axe du guide Oz . Les solutions sont alors de la forme :

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}(x,y)e^{i\gamma z} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \mathbf{H}(x,y)e^{i\gamma z} \quad (\text{A.7})$$

Nous introduisons maintenant la décomposition des champs $\mathbf{E}(x,y)$ et $\mathbf{H}(x,y)$ en composantes longitudinale et transversales. En notant $\mathbf{A}$ un champ de vecteurs quelconque, on pose :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_z \mathbf{e}_z \quad (\text{A.8})$$

À l'aide des équations de Maxwell, nous allons montrer qu'il est possible d'exprimer $\mathbf{E}_\perp$ et $\mathbf{H}_\perp$ en fonction de $E_z(x,y)$ et $H_z(x,y)$.

Décomposition du champ

Commençons par établir un résultat qui nous servira dans la suite, nous calculons $\text{rot}\mathbf{E}$:

$$\text{rot}\mathbf{E} = \text{rot}\{(\mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{e}_z)e^{i\gamma z}\} \quad (\text{A.9})$$

$$= e^{i\gamma z}\{i\gamma \mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{e}_z) + \text{rot}(\mathbf{E}_\perp + E_z \mathbf{e}_z)\} \quad (\text{A.10})$$

soit :

$$\text{rot}\mathbf{E} = e^{i\gamma z}\{i\gamma \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\perp + \text{rot}(\mathbf{E}_\perp) + \text{grad}(E_z) \times \mathbf{e}_z\} \quad (\text{A.11})$$

Le premier et le troisième termes sont transverses tandis que le second n'a de composante non nulle que sur l'axe Oz : il est donc longitudinal. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit alors en séparant les composantes transverses et longitudinales :

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\omega\mu\mathbf{H}$$

soit :

$$i\omega\mu\mathbf{H}_\perp = i\gamma\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\perp + \mathbf{grad}(E_z) \times \mathbf{e}_z$$

ou encore :

$$-i\gamma\mathbf{E}_\perp + \mathbf{grad}(E_z) = i\omega\mu\mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_\perp \quad (\text{A.12})$$

De même, l'équation de Maxwell-Ampère donne en projection sur les composantes transverses :

$$-i\gamma\mathbf{H}_\perp + \mathbf{grad}(H_z) = -i\omega\epsilon\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\perp \quad (\text{A.13})$$

En éliminant $\mathbf{H}_\perp$ entre (A.12) et (A.13) on obtient :

$$(\omega^2\epsilon\mu - \gamma^2)\mathbf{E}_\perp = i\gamma\mathbf{grad}(E_z) - i\omega\mu\mathbf{e}_z \times \mathbf{grad}(H_z) \quad (\text{A.14})$$

De même, en éliminant $\mathbf{E}_\perp$, il vient :

$$(\omega^2\epsilon\mu - \gamma^2)\mathbf{H}_\perp = i\gamma\mathbf{grad}(H_z) + i\omega\epsilon\mathbf{e}_z \times \mathbf{grad}(E_z) \quad (\text{A.15})$$

A.3.2 Équations du problème

Les champs transverses se déduisant de E_z et H_z d'après (A.14) et (A.15), il reste à étudier les composantes longitudinales des champs. Afin d'obtenir les équations différentielles qui régissent E_z et H_z , nous projetons les équations de Helmholtz sur l'axe Oz .

$$\Delta E_z + \epsilon\mu\omega^2 E_z = 0$$

$$\Delta H_z + \epsilon\mu\omega^2 H_z = 0$$

En tenant compte du fait que les champs sont de la forme $A(x,y)e^{i\gamma z}$, les équations deviennent :

$$\Delta_\perp E_z + (\epsilon\mu\omega^2 - \gamma^2)E_z = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta_\perp H_z + (\epsilon\mu\omega^2 - \gamma^2)H_z = 0 \quad (\text{A.17})$$

où le symbole $\Delta_\perp$ correspond au laplacien restreint au plan (x,y) :

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Dans le cas d'une fibre optique, le système de coordonnées cylindriques s'impose, tout le reste demeurant inchangé. Par ailleurs, ce système doit être complété par les conditions aux limites nécessaires que l'on obtient en écrivant la continuité des champs aux frontières du guide.

A.3.3 Modes TE et TM

Découplage des modes :

Les équations (A.16) et (A.17) montrent que E_z et H_z sont solutions de la même équation différentielle. Si les conditions aux limites ne couplent pas E_z et H_z , alors on peut traiter séparément les cas $E_z = 0, H_z \neq 0$ et $E_z \neq 0, H_z = 0$. Le premier type de solution est appelé onde TE (Transverse Electrique), le second type correspond aux ondes TM (Transverse Magnétique).

Structure des modes :

Dans le cas $E_z = 0$, le mode TE vérifie les équations :

$$(\omega^2\epsilon\mu - \gamma^2)\mathbf{E}_\perp = -i\omega\mu\mathbf{e}_z \times \mathbf{grad}(H_z) \quad (\text{A.18})$$

$$(\omega^2\epsilon\mu - \gamma^2)\mathbf{H}_\perp = i\gamma\mathbf{grad}(H_z) \quad (\text{A.19})$$

Ces équations montrent que $(\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp, \mathbf{H}_\perp)$ forment un trièdre direct. Ce résultat reste vrai dans le cas TM.

Dans ce qui suit nous allons illustrer cette méthode d'étude sur l'exemple du guide d'ondes rectangulaire métallique. Il s'agit d'un dispositif qui est utilisé pour transporter les ondes centimétriques.

A.4 Guide métallique rectangulaire

L'une des applications principales des micro-ondes est la réalisation de radars (typiquement quelques GHz). Dans ce cas, il est impossible d'utiliser un simple fil pour transporter le signal de l'oscillateur à l'antenne d'émission car il se comporterait comme une antenne. Les pertes par rayonnement seraient alors beaucoup trop importantes. Afin d'éviter ce problème on peut alors utiliser un câble coaxial, c'est-à-dire un fil métallique dit âme entouré d'un deuxième fil métallique cylindrique creux dit gaine, les deux fils étant alors séparés par un milieu isolant. La gaine joue en quelque sorte le rôle d'une cage de Faraday. Ce système est un guide d'ondes qui inhibe les pertes radiatives. C'est ce qui est utilisé pour relier une antenne parabolique à un récepteur TV. Pour des puissances importantes, on ne peut pas utiliser cela du fait des pertes diélectriques dans l'isolant. Le système utilisé est une cavité qui permet de confiner le champ dans l'espace. Le métal utilisé est choisi de façon à minimiser les pertes par effet Joule dues aux courants de surface qui se développent le long du guide. Nous allons nous restreindre dans cette partie à l'étude d'un guide sans pertes.

A.4.1 Formulation du problème

Nous savons qu'il suffit d'étudier les composantes longitudinales E_z et H_z . Pour cela il faut :

- une équation différentielle (A.16) ou (A.17) ;
- des conditions aux limites.

Pour pouvoir écrire ces dernières, il faut préciser la géométrie du problème. Nous considérons un guide cylindrique de section rectangulaire, de côtés a et b suivant les axes Ox et Oy respectivement. Le métal est supposé infiniment conducteur. On sait qu'il apparaît alors des charges surfaciques ainsi que des courants surfaciques qui ne sont connus que lorsque les champs sont connus. Les conditions exploitables sont donc :

$$\mathbf{E}_{tg} = \mathbf{0} \text{ et } B_n = 0$$

Il est clair que ces conditions ne couplent pas E_z et H_z , par conséquent, il est possible d'étudier séparément les modes TE et TM. Chacun de ces problèmes se ramène donc à l'étude d'une *fonction scalaire*.

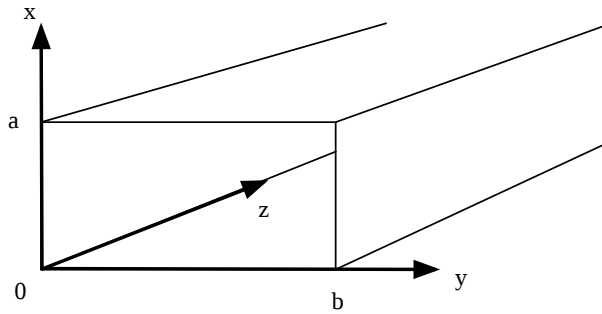


Figure A.4 – Guide métallique rectangulaire

A.4.2 Étude du mode TE

- Par définition du mode TE, $E_z = 0$ donc l'équation différentielle du problème est :

$$\Delta_{\perp} H_z + (\epsilon\mu\omega^2 - \gamma^2) H_z = 0 \quad (\text{A.20})$$

- La condition sur B_n donne $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ où $\mathbf{n}$ désigne la normale à la surface du guide considérée ($\pm \mathbf{e}_x$, $\pm \mathbf{e}_y$ suivant les faces). En vertu de (A.15), cette condition peut s'écrire

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}(H_z) = 0 \quad (\text{A.21})$$

Cette condition est usuellement notée plus simplement $\partial H_z / \partial n = 0$. Afin de résoudre ce système d'équations, nous allons employer la méthode de séparation des variables. Il s'agit de chercher une solution sous la forme suivante :

$$H_z(x, y) = f(x)g(y) \quad (\text{A.22})$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle (A.20) on obtient après division par le produit fg :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} - (\omega^2 \epsilon \mu - \gamma^2)$$

Il apparaît ainsi que le membre de gauche est une fonction de x tandis que le membre de droite est une fonction de y . Les deux membres de l'équation sont donc nécessairement des constantes. On pose alors :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha^2 f = 0 \text{ et } \frac{d^2 g}{dy^2} + \beta^2 g = 0$$

avec la condition sur les constantes α et β :

$$\omega^2 \epsilon \mu = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad (\text{A.23})$$

Solution générale :

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) \\ g(y) &= A' \cos(\beta y) + B' \sin(\beta y) \end{aligned}$$

Conditions aux limites : En $x = 0$ et $x = a$ la condition de continuité donne :

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{grad} H_z = 0 \text{ soit } \partial H_z / \partial x = 0$$

On obtient ainsi :

- i. $B = 0$
- ii. $\sin(\alpha a) = 0$ d'où $\alpha = p \pi / a$

On retrouve ici la *quantification* imposée par le fait que le milieu a une *étendue finie* ce qui apparaît au travers des conditions aux limites. De la même façon on obtient :

- i. $B' = 0$
- ii. $\beta = q \pi / b$

Finalement, à une constante multiplicative près, la solution est :

$$H_z(x, y) = H_0 \cos(p \pi x / a) \cos(q \pi y / b) \quad (\text{A.24})$$

avec

$$(p\pi/a)^2 + (q\pi/b)^2 + \gamma^2 = \epsilon \mu \omega^2 \quad (\text{A.25})$$

où p et q sont des entiers qui ne peuvent être simultanément nuls. Cette dernière relation fournit la valeur de la constante de propagation γ . La solution caractérisée par les indices p et q est appelée mode TE_{pq} . On retrouve l'un des résultats de l'introduction : pour qu'il y ait propagation il faut que γ soit réel donc le couple (p, q) doit satisfaire à la relation :

$$(p\pi/a)^2 + (q\pi/b)^2 \leq \epsilon \mu \omega^2$$

La pulsation ω doit donc être supérieure à une pulsation de coupure $\omega_{p,q}$ pour que le mode (p, q) puisse se propager :

$$\omega_{p,q} = \sqrt{\frac{(p\pi/a)^2 + (q\pi/b)^2}{\epsilon \mu}} \quad (\text{A.26})$$

La plus basse fréquence de coupure correspond au mode $\omega_{1,0}$ (si l'on a $b > a$)

$$\omega_{0,1} = \pi c / bn \text{ avec } n^2 = \epsilon \mu c^2$$

A.4.3 Description du mode $\text{TE}_{0,1}$

En pratique, les guides métalliques sont utilisés en fonctionnement monomode, le mode $\text{TE}_{0,1}$ étant utilisé dans la gamme de fréquence où il est seul à pouvoir se propager. D'après (A.18) et (A.24) on peut déduire les composantes transversales du champ électrique. On obtient ainsi dans le cas $\text{TE}_{0,1}$:

$$E_x = -H_0 \frac{i\omega \mu}{\epsilon \mu \omega^2 - \gamma^2} \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) = -H_0 \frac{i\omega \mu b}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right)$$

$$E_y = 0, E_z = 0$$

Le champ électrique reste perpendiculaire au grand côté et est maximum au centre (i.e. en $y = b/2$). Il est polarisé rectilignement suivant $\mathbf{e}_x$ dans tout le guide. Le champ magnétique est polarisé elliptiquement dans le plan (Oy, Oz) :

$$\begin{aligned} H_y &= -i\gamma b/\pi H_0 \sin(\pi y/b) \\ H_z &= H_0 \cos(\pi y/b) \end{aligned}$$

Cas particuliers

En $y = 0$ et $y = b$ cette polarisation elliptique devient rectiligne suivant z .

En $y = b/2$ cette polarisation elliptique devient rectiligne suivant y .

En y tel que $\tan(\pi y/b) = \pm\pi/\gamma b$, la polarisation devient circulaire.

Annexe B

Optique géométrique

Table des matières

B.1	Limite des courtes longueurs d'onde	154
B.1.1	Introduction	154
B.1.2	Équations de Maxwell (dans l'approximation $k_0 \rightarrow \infty$)	154
B.2	Rayons lumineux	155
B.2.1	Vecteur de Poynting	155
B.2.2	Rayons lumineux	155
B.3	Équation des rayons lumineux	156
B.4	Lois de Snell-Descartes	156
B.5	Applications	156
B.5.1	Effet mirage	156
B.5.2	Déviation par l'atmosphère	157
B.5.3	Applications aux mesures de température et de concentrations	158

B.1 Limite des courtes longueurs d'onde

B.1.1 Introduction

L'objet de cette annexe est d'établir un lien entre l'optique géométrique et la théorie électromagnétique de la lumière. Nous allons montrer que l'optique géométrique est obtenue à partir des équations de Maxwell dans la limite des faibles longueurs d'ondes. Pour effectuer ce passage, il faut se donner une définition du rayon qui est le concept de base de l'optique géométrique dans le langage des équations de Maxwell. A partir de là, il faut établir la loi d'évolution du rayon lumineux. Pour obtenir une telle description, il faut faire des approximations. La conséquence en est la perte de la nature ondulatoire de la lumière. Cela ne signifie pas que la notion de phase est perdue. Bien au contraire, dans une description en termes de rayons lumineux, il est naturel d'associer un chemin optique (et donc une phase) à un rayon lumineux. En revanche, la diffraction et la diffusion sont perdues dans la limite des courtes longueurs d'onde.

Dans tout l'annexe, nous raisonnerons sur un milieu diélectrique isotrope, non magnétique ($\mu_r = 1$) caractérisé par sa constante diélectrique $\epsilon_r = n^2$. Nous ne supposons pas le milieu homogène, ϵ_r est donc une fonction des variables d'espace.

En ce qui concerne les CEM, nous les choisissons monochromatiques et nous faisons apparaître explicitement leur phase et leur amplitude :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \exp[i \frac{\omega}{c} S(\mathbf{r}) - i \omega t] \right\} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathcal{B}(\mathbf{r}, t) \exp[i \frac{\omega}{c} S(\mathbf{r}) - i \omega t] \right\} \quad (\text{B.2})$$

La phase est une fonction réelle de $\mathbf{r}$. En revanche, les amplitudes $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ peuvent être complexes afin de décrire tous les états de polarisation. Illustrons ce choix par quelques exemples :

- onde sphérique : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e} \frac{\exp[ikr]}{r}$ c'est-à-dire $S(r) = r$ et $|\mathbf{E}| = \frac{1}{r}$
- onde plane : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$ c'est-à-dire $S(r) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{k}$ et $|\mathbf{E}| = \text{constante}$

où $\mathbf{e}$ est un vecteur complexe décrivant l'état de polarisation du champ. De façon générale, la phase $S(r)$ permet de décrire un front de phase quelconque. Dans la suite, nous poserons $k_0 = \omega/c$.

B.1.2 Équations de Maxwell (dans l'approximation $k_0 \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{div} \mathbf{B} &= 0 & \text{div}(\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dans cette écriture on a utilisé le fait que $\rho_{\text{libre}} = 0$ et $j_{\text{libre}} = 0$ (milieu neutre isolant). En introduisant la forme choisie en (3-I-1) pour représenter les champs, on obtient :

$$\text{rot}[\mathbf{E} \exp(ik_0 S)] = \exp(ik_0 S) [\text{rot} \mathbf{E} + ik_0 \nabla S \times \mathbf{E}] \quad (\text{B.4})$$

Dans la limite des faibles longueurs d'ondes, k_0 devient très grand. Le second terme est donc prépondérant dans le membre de droite lorsque la longueur d'onde est très petite devant une distance caractéristique de l'évolution de $\mathbf{E}$. Cela signifie physiquement que la phase du champ varie beaucoup plus rapidement que son amplitude. Cette hypothèse tombe en défaut lorsque l'amplitude varie appréciablement sur quelques longueurs d'ondes : au voisinage d'un point de focalisation, à la limite d'une ombre, sur un bord net, etc. En d'autres termes, en négligeant $\text{rot} \mathbf{E}$ devant $ik_0 \nabla S \times \mathbf{E}$, ce qui revient à négliger les dérivées de l'amplitude par rapport aux dérivées de la phase, on élimine tous les effets de diffraction.

De même, on aura :

$$\text{div}[\epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \exp(ik_0 S)] = \exp(ik_0 S) [\epsilon_0 \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) + \epsilon_r \epsilon_0 ik_0 \nabla S \cdot \mathbf{E}] \quad (\text{B.5})$$

Là encore, en supposant que ϵ_r (donc la structure du milieu) ne varie pas trop vite, le terme dominant est $k_0 \nabla S \cdot \mathbf{E}$. En négligeant les autres termes, on élimine les effets de diffraction dus aux poussières, rayures, etc.

Les équations de Maxwell se réécrivent dans cette limite :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla S = 0 \quad \mathbf{B} &= \frac{k_0}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \\ \mathbf{E} \cdot \nabla S = 0 \quad \mathbf{E} &= -\frac{\nabla S \times \mathbf{B}}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 c} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En éliminant $\mathbf{B}$ par exemple, on obtient l'équation qui régit la phase $S(r)$ appelée eikonale

$$(\nabla S)^2 = \epsilon_r = n^2(\mathbf{r}) \quad (\text{B.7})$$

Nous introduisons le vecteur unitaire $\mathbf{t}$ normale à la surface équiphase par la relation :

$$\nabla S = |\nabla S| \mathbf{t} \quad (\text{B.8})$$

On en déduit l'expression du gradient de la phase : $\nabla \Phi = n \frac{\omega}{c} \mathbf{t}$ qui apparaît ainsi comme le vecteur d'onde local du champ.

B.2 Rayons lumineux

Nous cherchons à obtenir l'équation donnant l'évolution d'un rayon lumineux. La première tâche est de définir la notion de rayon lumineux à partir des grandeurs électromagnétiques.

B.2.1 Vecteur de Poynting

Il est naturel de faire appel au vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$ qui caractérise le flux d'énergie dans le cadre de la théorie électromagnétique pour introduire la notion de rayon lumineux. Compte tenu de l'équation (B.6) on obtient :

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2c\mu_0} |\mathbf{E}|^2 \nabla S \quad (\text{B.9})$$

Introduisons la densité d'énergie dans cette expression :

$$u = \frac{1}{4} \text{Re} \{ \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r |\mathbf{E}|^2 \quad (\text{B.10})$$

On en tire, en reportant dans (B.9) :

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{c}{n} u \mathbf{t} \quad (\text{B.11})$$

où on a posé $\Delta S = n \mathbf{t}$ d'après (B.7) et B.8). La vitesse de propagation de l'énergie est, d'après (B.11) c/n , elle est donc égale à la vitesse de phase. Il faut rappeler à ce stade que nous raisonnons sur un champ monochromatique et qu'il n'apparaît pas de ce fait d'effets liés à la dispersion. Le vecteur de Poynting étant parallèle à $\mathbf{t}$, l'énergie se propage perpendiculairement aux fronts d'onde.

B.2.2 Rayons lumineux

On définit les rayons lumineux comme les lignes de champ du vecteur de Poynting. Ce sont donc, d'après ce qui précède, les trajectoires orthogonales aux fronts d'onde caractérisés par une phase $S(\mathbf{r})$ constante.

B.3 Équation des rayons lumineux

Le problème est de trouver la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu inhomogène. Il faut éliminer $S(\mathbf{r})$ pour obtenir une équation différentielle reliant la tangente à la trajectoire $\mathbf{t}$, à l'indice n .

D'après (B.8), on a :

$$\nabla S = n\mathbf{t} \quad (\text{B.12})$$

Nous allons introduire l'abscisse curviligne le long de la trajectoire. On rappelle que l'on a par définition :

$$\frac{d}{ds} = \mathbf{t} \cdot \nabla$$

En dérivant (B.12) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d(n\mathbf{t})}{ds} &= \frac{d}{ds}(\nabla S) \\ &= (\mathbf{t} \cdot \nabla) \nabla S \\ &= \left(\frac{\nabla S}{n} \cdot \nabla \right) \nabla S \\ &= \frac{1}{2n} \nabla [(\nabla S)^2] \\ &= \frac{1}{2n} \nabla (n^2) \\ &= \nabla n \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

où on a utilisé $\nabla(\mathbf{A}^2) = 2\{(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})\}$

Finalement, on obtient :

$$\frac{d(n\mathbf{t})}{ds} = \nabla n \quad (\text{B.14})$$

B.4 Lois de Snell-Descartes

Supposons que l'on ait $\nabla n = \partial n / \partial z \mathbf{e}_z$. Le cas du dioptre est un cas particulier de ce type. L'équation des rayons lumineux donne :

$$\frac{d(n\mathbf{t})}{ds} = \frac{\partial n}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.15})$$

Introduisons l'angle formé par le rayon et $\mathbf{e}_z$: $\theta = (\mathbf{e}_z, \mathbf{t})$. En effectuant le produit vectoriel de (B.15) par le vecteur $\mathbf{e}_z$ on obtient :

$$\mathbf{e}_z \times \frac{d(n\mathbf{t})}{ds} = \frac{d(\mathbf{e}_z \times n\mathbf{t})}{ds} = 0 \quad (\text{B.16})$$

donc $\mathbf{e}_z \times n\mathbf{t} = \mathbf{C}$ où $\mathbf{C}$ est un vecteur constant ; cette relation montre que la trajectoire est plane. Ceci constitue la première loi de Snell-Descartes. On en déduit $d(n \sin \theta)/ds = 0$ soit $n \sin \theta = \text{constante}$. On retrouve ainsi une loi qui généralise la loi de Snell-Descartes de la réfraction.

Remarque : la constante est définie le long d'un rayon lumineux donné.

B.5 Applications

B.5.1 Effet mirage

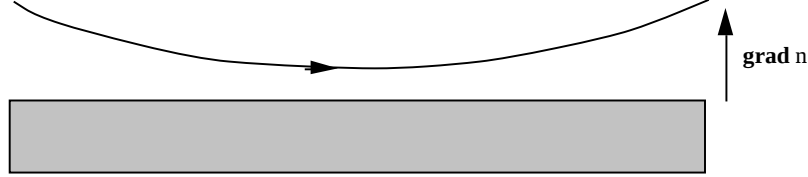
On peut réécrire (B.13) en introduisant la courbure des rayons lumineux :

$$\frac{dn}{ds} \mathbf{t} + \frac{n}{R} \mathbf{N} = \nabla n \quad (\text{B.17})$$

Cette expression montre que les rayons tournent leur concavité vers les indices croissants. Dans le cas d'un mirage, l'air est plus chaud donc plus dilué au voisinage du sol. On en déduit le sens de ∇n par la loi de Gladstone qui relie l'indice optique à la masse volumique d'un gaz :

$$\frac{n-1}{\rho} = \text{constante} \quad (\text{B.18})$$

Elle exprime que l'indice est d'autant plus grand que la matière est dense. On en déduit l'allure des rayons schématisée ci-dessous :



B.5.2 Déviation par l'atmosphère

On considère que l'atmosphère est un milieu d'indice à symétrie sphérique d'indice optique $n(r)$. On peut montrer alors que $\mathbf{r} \times n\mathbf{t}$ est constant le long d'un rayon lumineux :

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{r} \times n\mathbf{t})}{ds} &= \mathbf{t} \times n\mathbf{t} + \mathbf{r} \times \frac{d(n\mathbf{t})}{ds} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \nabla n \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

On a donc :

$$\mathbf{r} \times n\mathbf{t} = \mathbf{C} \quad (\text{B.20})$$

De ce fait, tous les points de la trajectoire du rayon appartiennent à un plan perpendiculaire à $\mathbf{C}$; la trajectoire est donc plane. De surcroît, on a $|\mathbf{r} \times n\mathbf{t}| = n r \sin \phi = |\mathbf{C}|$ où ϕ est l'angle formé par $\mathbf{r}$ et $\mathbf{t}$.

Calculons maintenant la déviation d'un faisceau lumineux par l'atmosphère d'épaisseur H . Supposons qu'en $r = R$, à la surface de la terre l'indice soit n_0 et qu'en $r = R + H$, l'indice soit 1. Soient i_0 et i les angles sous lesquels est vue une étoile en présence et en absence d'atmosphère. Ils sont liés par la relation :

$$n_0 R \sin i_0 = (R + H) \sin i$$

avec :

- H la hauteur de l'atmosphère ;
- $n_0 = 1,0003$;
- et Δ la déviation du rayon.

Posons $i = i_0 + \Delta$. On obtient, en supposant Δ petit devant l'unité, et i_0 différent de $\pi/2$:

$$\Delta = \left[\frac{n_0 R}{R + H} - 1 \right] \tan i_0 \quad (\text{B.21})$$

L'atmosphère introduit donc une erreur systématique dans les relevés astronomiques ainsi que dans les relevés de position au sextant sauf pour $i_0 = \pi/2$. Le cas du coucher de soleil correspond à $\pi/2 = i_0$. On a alors $n_0 R = (R + H) \cos \Delta$. Le soleil se trouve en dessous de l'horizon géométrique ! La déviation étant fonction de l'indice, elle dépend à travers lui de la longueur d'onde. Il y a donc autant de soleils couchants que de couleurs dans le spectre. Le premier à disparaître est le rouge. Ce phénomène implique que le dernier rayon lumineux aperçu soit... violet. Cependant, du fait de la diffusion du rayonnement par l'atmosphère, il y a mélange du violet avec les couleurs voisines du spectre : bleu, bleu vert et jaune. Ainsi, la couleur du sommet du disque solaire est verte... lorsque les turbulences atmosphériques ne sont pas trop importantes afin de ne pas entraîner un brouillage complet. En effet, si les fluctuations des angles de réfraction sont comparables ou supérieures aux valeurs moyennes des angles de réfraction, le phénomène est complètement masqué.

B.5.3 Applications aux mesures de température et de concentrations

Des mesures de déviation de faisceaux sondes peuvent être faites avec une grande précision par l'emploi de détecteurs de positions de faisceau. Des déplacements de quelques centaines d'angstroems peuvent être mesurés. On peut ainsi obtenir une information liée au gradient d'indice donc, d'après la loi de Gladstone à sa masse volumique. On dispose ainsi d'une technique de mesure non intrusive de température ou de concentration pour les écoulements, les flammes, etc.

Annexe C

Unités et constantes physiques

C.1 Système international d'unités

Nous utilisons le Système International, dit SI en France et adopté par la plupart des organismes internationaux. Ses unités fondamentales sont le mètre (m), le kilogramme (kg), la seconde (s), l'ampère (A), le kelvin (K), la mole (mol) et le candela (cd) auxquels s'ajoutent le radian (rad) et le stéradian (sr).

Les unités dérivées désignées par des noms spéciaux sont : le hertz ($\text{Hz} = \text{s}^{-1}$), le newton ($\text{N} = \text{m kg s}^{-2}$), le pascal ($\text{Pa} = \text{N m}^{-2}$), le joule ($\text{J} = \text{N m}$), le watt ($\text{W} = \text{J s}^{-1}$), le siemens ($\text{S} = \text{A V}^{-1}$), le weber ($\text{Wb} = \text{V s}$), le tesla ($\text{T} = \text{Wb m}^{-2}$), le henry ($\text{H} = \text{Wb A}^{-1}$), le degré Celsius ($^{\circ}\text{C}$), le lumen ($\text{lm} = \text{cd sr}$), le lux ($\text{lx} = \text{lm m}^{-2}$), le becquerel ($\text{Bq} = \text{s}^{-1}$), le gray ($\text{Gy} = \text{J kg}^{-1}$) et le sievert ($\text{Sv} = \text{J kg}^{-1}$).

Les multiples et sous-multiples sont désignés par les préfixes : déca (da = 10), hecto (h = 10²), kilo (k = 10³), méga (M = 10⁶), téra (T = 10¹²), péta (P = 10¹⁵), exa (E = 10¹⁸), déci (d = 10⁻¹), centi (c = 10⁻²), milli (m = 10⁻³), micro (μ = 10⁻⁶), nano (n = 10⁻⁹), pico (p = 10⁻¹²), femto (f = 10⁻¹⁵) et atto (a = 10⁻¹⁸).

C.2 Unités en dehors du système international

1 ångström (Å) = 10⁻¹⁰ m, 1 fermi (fm) = 10⁻¹⁵ m, 1 barn (b) = 10⁻²⁸ m², 1 bar = 10⁵ Pa, 1 gauss (G) = 10⁻⁴ T.

C.3 Constantes fondamentales et usuelles

Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ (définition de l'Ampère)
Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$, $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
Vitesse de la lumière :	$c = 299792458 \text{ m s}^{-1}$ (définition du mètre à partir de la seconde) $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,6260755 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Dirac :	$\hbar = h/(2\pi) = 1,055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (par définition, la masse d'une mole de ¹² C est de 12 g)
Masse atomique unité :	$1u = 10^{-3} \text{ kg} / N_A = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masses du neutron et du proton :	$m_n = 1,0014u$, $m_p = 1,008u$
Masse de l'électron :	$m = 1u/1823 = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Charge élémentaire :	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Faraday :	$N_A e = 96\,485 \text{ C mol}^{-1}$
Magnéton de Bohr :	$\mu_B = e\hbar/(2m) = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$

Magnéton nucléaire :	$e\hbar/(2m_p) = 5 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1}$
Constante de structure fine :	$\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \sim 1/137$
Atome d'hydrogène :	
Rayon de Bohr :	$a_0 = \hbar/[me^2/(4\pi\epsilon_0)] = 0,53 \text{ Å}$
Énergie de liaison :	$E_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0)/(2a_0) = 13,6 \text{ eV}$
Constante de Rydberg :	$R_\infty = E_0/(hc) = 109\,737 \text{ cm}^{-1}$
Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante molaire des gaz :	$R = N_A k_B = 8,32 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
Conditions normales :	
Pression :	$1 \text{ atm} = 760 \text{ torrs} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$
Température :	point triple de l'eau : $273,16 \text{ K} = 0,01^\circ \text{ C}$
Volume molaire :	$22,4 \times 10^3 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$
Constante de la gravitation :	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Accélération de la pesanteur :	$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$
Constante de Stefan :	$\sigma = \pi^2 k_B^4/(60\hbar^3 c^2) = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Équivalences :	
	$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$
Potentiel électrique :	$1 \text{ eV} \leftrightarrow 1,602 \times 10^{-19} \text{ J} \leftrightarrow 11\,600 \text{ K}$
Chaleur :	$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$
Liaison chimique :	$23 \text{ kcal mol}^{-1} \leftrightarrow 1 \text{ eV}$
Température :	$290 \text{ K} \leftrightarrow 1/40 \text{ eV}$
Masse :	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \leftrightarrow 0,511 \text{ MeV}$
Nombre d'onde :	$109\,700 \text{ cm}^{-1} \leftrightarrow 13,6 \text{ eV}$
Fréquence :	$3,3 \times 10^{15} \text{ Hz} \leftrightarrow 13,6 \text{ eV}$

Annexe D

Formulaire

D.1 Opérateurs d'analyse vectorielle

D.1.1 Composition d'opérateurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \equiv \triangle f \\ \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv \mathbf{0} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0 \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \triangle \mathbf{A} \end{array} \right.$$

D.1.2 Opérateurs s'appliquant sur un produit de deux fonctions

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(fg) &\equiv f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f \\ \operatorname{div}(f \mathbf{A}) &\equiv f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} f \\ \operatorname{rot}(f \mathbf{A}) &\equiv f \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{A} \\ \operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &\equiv \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &\equiv (\operatorname{div} \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\operatorname{div} \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} \\ \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &\equiv \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} \end{aligned}$$

D.2 Transformation d'une intégrale sur une surface fermée en intégrale de volume

$d\mathbf{S}$ est orienté selon la normale sortante à la surface fermée S qui limite le volume V .

Théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, d^3\mathbf{r}$$

Formule du gradient :

$$\oint_S f \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{grad} f \, d^3\mathbf{r}$$

Formule du rotationnel :

$$\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S} = - \iiint_V \operatorname{rot} \mathbf{A} \, d^3\mathbf{r}$$

D.3 Transformation d'une intégrale le long d'un contour fermé en une intégrale de surface

Dans toutes les relations, le contour fermé $\mathcal{C}$ qui limite la surface S est orienté par la normale à la surface.

Formule de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

Formule de Kelvin :

$$\oint_{\mathcal{C}} f \, dl = - \iint_S \mathbf{grad} f \times d\mathbf{S}$$

D.4 Opérateurs dans les principaux systèmes de coordonnées

D.4.1 Coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x) \mathbf{e}_x + (\Delta A_y) \mathbf{e}_y + (\Delta A_z) \mathbf{e}_z$$

D.4.2 Coordonnées cylindro-polaires (cylindriques)

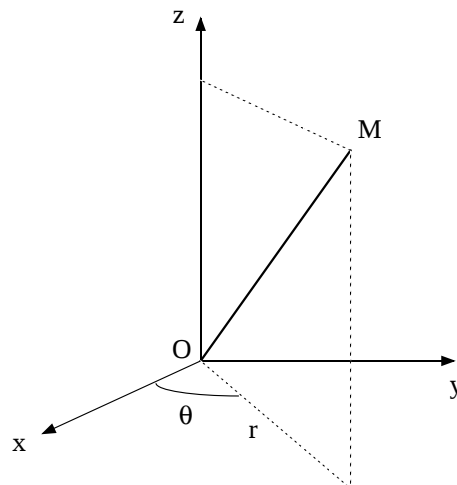


Figure D.1 – Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \\
\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\mathbf{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z \\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

D.4.3 Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \\
\operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
\mathbf{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi \\
\Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

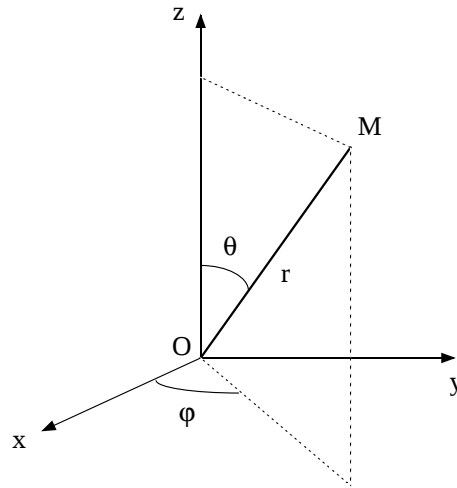


Figure D.2 – Coordonnées sphériques