
LE THÉORÈME DE RECOUVREMENT DE VITALI « $5R$ »

Dans ces notes, on fixe $n \geq 1$ un entier et on travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne notée $|\cdot|$. Dans l'ensemble de ce texte, une boule (fermée, non dégénérée), est un ensemble de la forme :

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\},$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ sont donnés ; on appelle x le *centre* de B et r son *rayon*. Étant donné une boule B , on note $r(B)$ son rayon.

Si $B = B[x, r]$ est une boule (avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$), on note $\hat{B} := B[x, 5r]$ la boule de même centre que B et de rayon égal au quintuple de celui de B .

1. Le théorème de recouvrement de Vitali

Les lemmes suivants nous seront utiles.

Lemme 1. — Si $\mathcal{B}$ est une collection de boules deux à deux disjointes telle que leur réunion $\cup \mathcal{B}$ soit bornée et que l'on ait :

$$\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0,$$

alors $\mathcal{B}$ est finie.

Démonstration. — Supposons que $\mathcal{B}$ soit infinie ; il existe dès lors une suite $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ de boules distinctes issues de $\mathcal{B}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, notons x_k le centre de B_k . Posons aussi $\delta := \inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$. On a évidemment $r(B_k) \geq \delta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque les boules B_k , $k \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjointes, on trouve par ailleurs $x_j \notin B_k = B[x_k, r(B_k)]$, c'est-à-dire $|x_j - x_k| > r(B_k)$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}$ vérifiant $j \neq k$. On a donc aussi $|x_j - x_k| \geq \delta$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}$ vérifiant $j \neq k$. Mais alors la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, qui est bornée par hypothèse, ne peut admettre aucune sous-suite de Cauchy, et donc aucune sous-suite convergente. Ceci contredit la propriété de Bolzano-Weierstrass, et achève la démonstration. ■

Lemme 2. — Soient $\mathcal{B}$ une collection de boules, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble et $R > 0$. Si on a $\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$, alors il existe une famille finie maximale $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ constituée de boules deux à deux disjointes, disjointes de E et contenues dans $B[0, R]$.

Remarque 1. — Dans l'affirmation précédente, on entend que $\mathcal{B}'$ est maximale au sens suivant : il n'existe aucune famille $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{B}'' \supsetneq \mathcal{B}'$ qui soit constituée de boules contenues dans $B[0, R]$, deux à deux disjointes et disjointes de E .

Démonstration. — Il n'y a évidemment rien à démontrer si $\mathcal{B}$ est vide. Sinon, posons $0 < \delta := \inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) < +\infty$.

S'il n'existe aucune boule de $\mathcal{B}$ disjointe de E et contenue dans $B[0, R]$, on pose $\mathcal{B}' := \emptyset$. Dans le cas contraire, on choisit B_0 une telle boule. S'il n'existe aucune boule de $\mathcal{B}$ disjointe de E , de B_0 et contenue dans $B[0, R]$, on pose $\mathcal{B}' := \{B_0\}$. Dans le cas contraire, on choisit B_1 une telle boule. De proche en proche, on choisit tant que possible, des boules $B_0, B_1, \dots$ de la façon suivante. Si $B_0, \dots, B_k$ ont été construites pour $k \in \mathbb{N}$, de deux choses l'une : soit il n'existe aucune boule de $\mathcal{B}$ qui soit à la fois contenue dans $B[0, R]$ et disjointe de E et de B_j pour tout $0 \leq j \leq k$, et on pose $\mathcal{B}' := \{B_0, \dots, B_k\}$, soit une telle boule existe, auquel cas on en choisit une notée B_{k+1} . Si ce processus se poursuivait indéfiniment, la famille $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ vérifierait les hypothèses du Lemme 1 ; ce serait absurde puisque cette famille est infinie. Ce procédé s'achève donc après un nombre fini d'étapes, et permet de définir une collection finie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ de boules deux à deux disjointes, disjointes de E et contenues dans $B[0, R]$. Elle est maximale par construction. ■

Lemme 3. — Soient $\mathcal{B}$ une collection de boules, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. Si on a $\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$, alors il existe une famille au plus dénombrable maximale $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ constituée de boules deux à deux disjointes et disjointes de E .

Remarque 2. — Dans l'affirmation précédente, dire que $\mathcal{B}'$ est maximale signifie qu'il n'existe aucune famille $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{B}'' \supsetneq \mathcal{B}'$ qui soit constituée de boules deux à deux disjointes et disjointes de E .

Démonstration. — Il n'y a évidemment rien à démontrer si $\mathcal{B}$ est vide. Sinon, posons $0 < \delta := \inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) < +\infty$ et construisons des familles finies $\mathcal{B}'_k \subseteq \mathcal{B}$, $k \in \mathbb{N}$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. On commence par choisir, en vertu du Lemme 2, une famille finie maximale $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}$ de boules deux à deux disjointes, disjointes de E et contenues dans $B[0, 1]$. Si $\mathcal{B}'_0, \dots, \mathcal{B}'_k$ ont été construites pour $k \in \mathbb{N}$, on utilise le Lemme 2 pour former une famille finie maximale $\mathcal{B}'_{k+1} \subseteq \mathcal{B}$ de boules contenues dans $B[0, 2^{k+1}]$, deux à deux disjointes et disjointes de $E \cup \bigcup_{j=0}^k \mathcal{B}'_j$. On pose alors $\mathcal{B}' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}'_k$. Cette famille, qui est évidemment au plus dénombrable, convient.

Pour le voir, supposons qu'au contraire il existe une famille $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}$ vérifiant $\mathcal{B}'' \supsetneq \mathcal{B}'$, constituée de boules deux à deux disjointes et disjointes de E . Soit alors $B \in \mathcal{B}'' \setminus \mathcal{B}'$; il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour que l'on ait $B \subseteq B[0, 2^k]$. Mais alors la famille $\mathcal{B}'_k \cup \{B\}$ serait constituée de boules deux à deux disjointes, disjointes de E et contenues dans $B[0, 2^k]$, ce qui contredirait la maximalité de $\mathcal{B}'_k$. ■

Remarque 3. — Le lemme de Zorn (voir le Théorème 4 ci-dessous) permet de démontrer que le lemme précédent reste valide même sans l'hypothèse d'après laquelle $\inf_{B \in \mathcal{B}} r(B) > 0$.

Plus précisément, si $\mathcal{B}$ est une famille quelconque de boules (fermées, non dégénérées), et si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble, il existe une famille maximale $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ constituée de boules deux à deux disjointes et disjointes de E ; en outre, $\mathcal{B}'$ est au plus dénombrable.

Pour le voir, observons que ce résultat est immédiat s'il n'y a aucune boule dans $\mathcal{B}$ qui soit disjointe de E . Dans le cas contraire, notons $\mathfrak{B}$ l'ensemble des collections $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ constituées de boules deux à deux disjointes et disjointes de E . Par hypothèse, $\mathfrak{B}$ est non vide. Muni de l'inclusion, $(\mathfrak{B}, \subseteq)$ est par ailleurs un ensemble partiellement ordonné inductif (voir la Définition 3 ci-dessous) : si $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{B}$ est totalement ordonné par l'inclusion, alors $\bigcup \mathcal{C} \in \mathfrak{B}$ est une borne supérieure pour $\mathcal{C}$. Le lemme de Zorn assure dès lors que $\mathfrak{B}$ admet un élément maximal. Si $\mathcal{B}' \in \mathfrak{B}$ est un tel élément maximal, alors il est clair que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ est une famille maximale constituée de boules deux à deux disjointes et disjointes de E . Puisque les boules de $\mathcal{B}'$ sont non dégénérées, on peut associer à chaque boule $B \in \mathcal{B}'$ un point $x_B \in B \cap \mathbb{Q}^n$ à coordonnées rationnelles issu de B ; mais puisque les boules de $\mathcal{B}'$ sont deux à deux disjointes, l'application $\mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{Q}^n$, $B \mapsto x_B$ est injective ; il en résulte que $\mathcal{B}'$ est au plus dénombrable.

On peut à présent énoncer et démontrer le théorème de recouvrement de Vitali (démontré en dimension 1 par G. Vitali).

Théorème 1 (Vitali). — Soit $\mathcal{B}$ une famille de boules (fermées, non dégénérées) vérifiant :

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} r(B) < +\infty.$$

Dans ces conditions, il existe une famille au plus dénombrable $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ constituée de boules deux à deux disjointes et telle que l'on ait :

$$\cup \mathcal{B} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} \hat{B}.$$

Démonstration. — Si $\mathcal{B}$ est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on pose $0 < M := \sup_{B \in \mathcal{B}} r(B) < +\infty$ et, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{B}_k := \{B \in \mathcal{B} : 2^{-k-1}M \leq r(B) \leq 2^{-k}M\}.$$

On a alors $\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_k$.

On construit des familles $\mathcal{B}'_k \subseteq \mathcal{B}_k$, $k \in \mathbb{N}$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. On note pour commencer $\mathcal{B}'_0 \subseteq \mathcal{B}_0$ une famille (au plus dénombrable) maximale de boules deux à deux disjointes issues de $\mathcal{B}_0$ (une telle famille existe en vertu du Lemme 3). Si $\mathcal{B}'_0, \dots, \mathcal{B}'_k$ ont été construites pour $k \in \mathbb{N}$, alors on utilise le Lemme 3 pour construire une famille (au plus dénombrable) maximale $\mathcal{B}'_{k+1} \subseteq \mathcal{B}_{k+1}$ constituée de boules deux à deux disjointes et disjointes de $\bigcup_{j=0}^k \cup \mathcal{B}_j$. On forme finalement $\mathcal{B}' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{B}'_k$. Il est clair que $\mathcal{B}'$ est au plus dénombrable.

Pour achever la démonstration, fixons $B \in \mathcal{B}$ et montrons qu'il existe $B' \in \mathcal{B}'$ telle que l'on ait $B \subseteq \hat{B}'$. À cet effet, commençons par choisir un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $B \in \mathcal{B}_k$. Puisque l'on a $B \notin \mathcal{B}'$, et donc aussi $B \notin \mathcal{B}'_k$, on a $B \in \mathcal{B}_k \setminus \mathcal{B}'_k$; la maximalité de $\mathcal{B}'_k$ assure dès lors que B rencontre soit une boule de la collection $\mathcal{B}'_k$, soit l'ensemble $\bigcup_{j=0}^{k-1} \cup \mathcal{B}_j$ (ce second volet de l'alternative ne se présentant évidemment pas lorsque $k = 0$). Il existe donc toujours une boule $B' \in \bigcup_{j=0}^k \mathcal{B}'_j$ telle que l'on ait $B \cap B' \neq \emptyset$.

Puisque l'on a $B' \in \mathcal{B}'_j \subseteq \mathcal{B}_j$ pour un $0 \leq j \leq k$, on a en particulier $r(B') \geq 2^{-j-1}M \geq 2^{-k-1}M$. Or on a $r(B) \leq 2^{-k}M$ puisque B est issue de $\mathcal{B}_k$. Il vient donc :

$$r(B') \geq \frac{1}{2}r(B). \quad (1)$$

Fixons à présent $x \in B$, notons $y \in B \cap B'$ un point commun à B et B' et soit finalement z le centre de la boule B' . Il vient :

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

En notant c le centre de B , on calcule d'une part $|x - y| \leq |x - c| + |c - y| \leq 2r(B)$ puisque l'on a $x, y \in B$. Comme d'autre part on a $y \in B'$, il vient aussi $|y - z| \leq r(B')$. On trouve donc finalement, en utilisant (1) :

$$|x - z| \leq 2r(B) + r(B') \leq 4r(B') + r(B') = 5r(B'),$$

c'est-à-dire que l'on a $x \in \hat{B}'$. La démonstration est complète. ■

2. Complément : le lemme de Zorn

Commençons par préciser les notations et les définitions d'ensemble ordonné. Rappelons qu'étant donné un ensemble X , on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X , c'est-à-dire l'ensemble de tous les sous-ensembles de X . On utilise ici indifféremment le terme « collection » ou « ensemble ».

Définition 1. — Soit X un ensemble muni d'une relation binaire $\preceq$. On dit que $\preceq$ est un ordre partiel sur X si $\preceq$ est une relation réflexive et transitive, i.e. si les conditions suivantes sont remplies :

1. $(\forall x \in X) : x \preceq x$;
2. $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X) : x \preceq y \text{ et } y \preceq z \text{ implique } x \preceq z$.

On dit alors que $(X, \preceq)$ est un ensemble partiellement ordonné.

On dit que $\preceq$ est un ordre total sur X si $\preceq$ est un ordre partiel sur X et si en outre on a

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X) : x \preceq y \text{ ou } y \preceq x.$$

On dit alors que $(X, \preceq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Soit $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné et soit $Y \subseteq X$. On dit que $x \in X$ est une borne supérieure pour Y si on a :

$$(\forall y \in Y) : y \preceq x.$$

Une borne supérieure x pour Y est dite minimale si toute borne supérieure $\tilde{x}$ pour Y vérifie $x \preceq \tilde{x}$.

Soit $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné. Un élément $x \in X$ est dit maximal si on a :

$$(\forall y \in X) : x \preceq y \text{ implique } y \preceq x.$$

Exemple 1. — Soit X un ensemble. Le couple $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné. La réflexivité et la transitivité de l'inclusion sont claires.

Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si $Y \subseteq X$ est une borne supérieure pour $\mathcal{A}$, on doit avoir $Z \subseteq Y$ pour tout $Z \in \mathcal{A}$. En conséquence, on doit avoir :

$$\bigcup \mathcal{A} \subseteq Y.$$

Réciproquement, si $Y \subseteq X$ contient $\bigcup \mathcal{A}$, on a pour tout $Z \in \mathcal{A}$:

$$Z \subseteq \bigcup \mathcal{A} \subseteq Y,$$

et Y est une borne supérieure pour $\mathcal{A}$. Il résulte de ceci que $\bigcup \mathcal{A}$ est la seule borne supérieure minimale pour $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Le seul élément maximal de $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est X . S'il en était autrement, il existerait $Y \subsetneq X$ maximal. On pourrait alors trouver $x \in X \setminus Y$. Cela entraînerait

$$Y \subseteq Y \cup \{x\} \text{ et non } (Y \cup \{x\} \subseteq Y),$$

qui contredit l'hypothèse de maximalité faite sur Y . Contradiction.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 2. — Soient $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné et $f : X \rightarrow X$ une application telle que l'on ait :

$$(\forall x \in X) : x \preceq f(x).$$

Si, en outre, les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) $(\forall x \in X)(\forall y \in X) : x \preceq y \text{ et } y \preceq x \text{ implique } x = y$;
- (ii) toute partie $Y \subseteq X$ totalement ordonnée par $\preceq$ possède une borne supérieure minimale.

Alors, il existe $z \in X$ tel que $f(z) = z$.

Démonstration. — Commençons par remarquer que tous les singletons sont totalement ordonnés par $\preceq$. L'ensemble des parties totalement ordonnées de X n'est donc pas vide.

Fixons $a \in X$.

Une partie $Y \subseteq X$ de X sera dite *admissible* si elle satisfait les conditions suivantes :

- (a) $a \in Y$;
- (b) $f(Y) \subseteq Y$;
- (c) toute borne supérieure minimale d'une partie totalement ordonnée de Y appartient à Y .

Il est clair que X est admissible. Formons alors les ensembles non vides :

$$\mathcal{A} = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est admissible}\},$$

et

$$\mathcal{B} = \{Y \in \mathcal{P}(X) : X \setminus Y \text{ est admissible}\}.$$

Considérons aussi l'ensemble :

$$A = \bigcap_{Y \in \mathcal{A}} Y = X \setminus \bigcup \mathcal{B}.$$

Il vient que A est admissible, et que tout ensemble admissible contient A .

Remarquons que l'ensemble

$$Y_1 = \{x \in X : a \preccurlyeq x\}$$

est admissible. En effet, $a \in A$ par réflexivité de $\preccurlyeq$. De plus, si $x \in Y_1$, alors on a :

$$a \preccurlyeq x \preccurlyeq f(x),$$

et dès lors $f(Y_1) \subseteq Y_1$. Enfin, soit x_1 une borne supérieure minimale de $Z_1 \subseteq X$ totalement ordonné par $\preccurlyeq$. Soit alors $z_1 \in Z_1$. On a

$$a \preccurlyeq z_1 \preccurlyeq x_1,$$

et la transitivité de $\preccurlyeq$ donne $x_1 \in Y_1$. Par définition de A , on a $A \subseteq Y_1$, d'où l'on tire :

$$(\forall x \in A) : a \preccurlyeq x. \quad (2)$$

Posons

$$P = \{x \in A : (\forall y \in A) : y \prec x \text{ implique } f(y) \preccurlyeq x\},$$

où l'on a noté $(y \prec x)$ pour $(y \preccurlyeq x \text{ et non } x = y)$. On va montrer :

$$(\forall x \in P)(\forall z \in A) : z \preccurlyeq x \text{ ou } f(x) \preccurlyeq z. \quad (3)$$

Pour cela, fixons $x \in P$. Définissons

$$B = \{z \in A : z \preccurlyeq x \text{ ou } f(x) \preccurlyeq z\} \subseteq A.$$

La condition (2) implique que l'on a $a \in B$.

Montrons qu'on a $f(B) \subseteq B$. Si $z \in A$, alors on a $f(z) \in f(A) \subseteq A$. Si $z \in A$ est tel que $f(x) \preccurlyeq z$, alors $f(x) \preccurlyeq z \preccurlyeq f(z)$ et donc $f(z) \in B$. Si $z \in A$ est tel que $z = x$, alors $f(x) = f(z)$ et dès lors $f(z) \in B$. Si $z \in A$ est tel que $z \prec x$, alors, on obtient puisque $x \in P$:

$$f(z) \preccurlyeq x,$$

d'où il suit que $f(z) \in B$.

Soit $Z_2 \subseteq B$ une partie totalement ordonnée et soit x_2 une borne supérieure minimale pour Z_2 . Si on a $z \preccurlyeq x$ pour tout $z \in Z_2$, alors x est une borne supérieure pour Z_2 et donc $x_2 \preccurlyeq x$, d'où l'on tire $x_2 \in B$. Si par contre il existe $z \in Z_2$ tel que $f(x) \preccurlyeq z$, alors on obtient

$$f(x) \preccurlyeq z \preccurlyeq x_2,$$

et $x_2 \in B$.

De cela, on déduit que B est admissible. Comme $B \subseteq A$, et que toute partie admissible contient A , il vient $B = A$, et la formule (3) est prouvée.

Montrons maintenant que P est admissible.

On a bien $a \in P$. En effet, $a \in A$ et la condition $y \prec a$ n'est jamais satisfaite pour $y \in a$.

Montrons maintenant que $f(P) \subseteq P$. Soit $x \in P$ et montrons que si $z \in A$ vérifie $z \prec f(x)$, alors on a $f(z) \preceq f(x)$. Par (3), on sait que l'on a soit $z \preceq x$, soit $f(x) \preceq z$. En conséquence, l'hypothèse $z \prec f(x)$ implique $z \preceq x$. Si $z \prec x$, alors $f(z) \preceq x \preceq f(x)$ et $f(z) \preceq f(x)$. Si $z = x$, alors $f(z) = f(x)$. Dans tous les cas, on a donc $f(z) \preceq f(x)$.

Pour finir, montrons que si x_3 est une borne supérieure minimale de $Z_3 \subseteq P$ totalement ordonné par $\preceq$, alors $x_3 \in P$. Si $x_3 \in Z_3$, il est clair que l'on a $x_3 \in P$. Dans le cas contraire, soit $z \in Z_3$ tel que $z \prec x_3$. On déduit de (3) que tout élément $x \in Z_3$ vérifie

$$z \preceq x \text{ ou } f(x) \preceq z.$$

Si $f(x) \preceq z$ était valable pour tout $x \in Z_3$, on aurait pour ces mêmes x :

$$x \preceq f(x) \preceq z \prec x_3,$$

et x_3 ne serait pas une borne supérieure minimale pour Z_3 ! Par conséquent, il existe $x \in Z_3$ tel que $z \preceq x$. Si $z \prec x$, alors, par définition de P , on a $f(z) \preceq x \preceq x_3$, et $x_3 \in P$. Si $z = x$, alors $z \neq x_3$ implique l'existence d'un $y \in Z_3$ avec $z \prec y$. Alors, par définition de P , on obtient

$$f(z) \preceq y \preceq x_3,$$

et $x_3 \in P$.

De tout ce qui précède, on déduit que P est admissible, et donc $P = A$. On peut réécrire (3) :

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) : x \preceq y \text{ ou } f(y) \preceq x.$$

Comme on a toujours $y \preceq f(y)$, on en tire :

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) : x \preceq y \text{ ou } y \preceq x,$$

c'est-à-dire que A est totalement ordonné.

Soit z une borne supérieure minimale pour A . Alors, il vient $f(z) \in A$ et donc aussi :

$$z \preceq f(z) \preceq z,$$

ce qui achève la démonstration. ■

De cela, déduisons que tout ensemble partiellement ordonné possède un sous-ensemble totalement ordonné maximal pour l'inclusion. Plus précisément, introduisons la définition suivante.

Définition 2. — Soit $(X, \preceq)$ un ensemble partiellement ordonné. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est dit totalement ordonné si l'ordre induit sur Y par celui de X fait de Y un ensemble totalement ordonné. Un sous-ensemble totalement ordonné de $(X, \preceq)$ est dit maximal si c'est un élément maximal de l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{X}, \subseteq)$, où $\mathcal{X}$ est l'ensemble des parties totalement ordonnées de X .

Rappelons ici une version de l'axiome du choix.

Axiome. — Étant donné $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ une collection d'ensembles non vides, il existe une fonction $f : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ vérifiant $f(\alpha) \in X_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$. On dit qu'une telle fonction f est une fonction de choix pour la collection $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$.

On démontre alors le principe de maximalité de Hausdorff.

Théorème 3 (Hausdorff). — Tout ensemble partiellement ordonné contient un sous-ensemble totalement ordonné maximal.

Démonstration. — Soit $(X, \preceq)$ l'ensemble partiellement ordonné dont il est question et soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des parties totalement ordonnées (par $\preceq$) de X . Supposons que $\mathcal{X}$ n'ait pas d'élément maximal pour l'inclusion. On a dans ce cas, par négation de la définition d'élément maximal :

$$(\forall Y \in \mathcal{X})(\exists Z \in \mathcal{X}) : \text{non}(Z \subseteq Y) \text{ et } Y \subseteq Z.$$

On en déduit

$$(\forall Y \in \mathcal{X})(\exists Z \in \mathcal{X}) : Y \subsetneq Z.$$

Pour chaque $Y \in \mathcal{X}$, l'ensemble

$$\mathcal{Z}_Y = \{Z \in \mathcal{X} : Y \subsetneq Z\}$$

est donc non vide.

Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \bigcup_{Y \in \mathcal{X}} \mathcal{Z}_Y$ une fonction de choix associée à la collection $(\mathcal{Z}_Y)_{Y \in \mathcal{X}}$ (l'existence d'une telle fonction de choix est assurée par l'axiome du choix); on a donc $f(Y) \in \mathcal{Z}_Y$ pour tout $Y \in \mathcal{X}$. Par définition de $\mathcal{Z}_Y$, on a donc $Y \subsetneq f(Y)$ pour chaque $Y \in \mathcal{X}$. Le Théorème 2 est alors contredit puisque f n'a aucun point fixe. ■

Définition 3. — *Un ensemble partiellement ordonné $(X, \preccurlyeq)$ est dit inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de X admet une borne supérieure.*

Démontrons à présent le lemme de Zorn.

Théorème 4 (Lemme de Zorn). — *Tout ensemble partiellement ordonné inductif admet un élément maximal.*

Démonstration. — Soit x une borne supérieure de $(X_0, \preccurlyeq)$, sous-ensemble totalement ordonné maximal de l'ensemble partiellement ordonné $(X, \preccurlyeq)$. Supposons que $y \in X$ vérifie $x \preccurlyeq y$. Si $y \notin X_0$, alors $X_0 \cup \{y\}$ est un sous-ensemble totalement ordonné de X contenant strictement X_0 , ce qui est impossible. En conséquence, on a $y \in X_0$, d'où $y \preccurlyeq x$, et x est maximal. ■

Le 16 octobre 2024

- E-mail : Laurent.Moonens@centralesupelec.fr