
APPROXIMATIONS DE L'IDENTITÉ, INÉGALITÉS MAXIMALES ET LE PRINCIPE DE SAWYER-STEIN

Résumé. — Dans ce texte, on s'intéressera aux suites de fonctions $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ayant la propriété d'*approcher* l'identité au sens où l'on a $\|\varphi_k * u - u\|_1 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Appelées *approximations de l'identité*, ces suites se caractérisent (au moins dans le cas positif) par des propriétés simples. Elles donnent aussi lieu à l'existence de sous-suites *universelles* pour la convergence presque partout dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Nous travaillerons, dans la suite, avec les espaces de *fonctions* $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ et les espaces de *classes d'équivalence* $L^p(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables sur $\mathbb{R}$.

Pour $1 \leq p < \infty$, on définit :

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : |u|^p \text{ est L-intégrable sur } \mathbb{R}\}.$$

Cet espace est muni de la semi-norme $\|\cdot\|_p$ définie par :

$$\|u\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^p \right)^{1/p}.$$

On note également :

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) := \{u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \text{il existe } N \in \mathcal{N} \text{ tel que } u \text{ soit bornée sur } \mathbb{R} \setminus N\},$$

et on munit cet espace de la semi-norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\|u\|_\infty := \inf_{N \in \mathcal{N}} \sup_{\mathbb{R} \setminus N} |u| = \inf\{c \in \mathbb{R}_+ : |u| \leq c \text{ presque partout sur } \mathbb{R}\}.$$

Étant donné $1 < p < \infty$, on note $1 < p' < \infty$ l'*exposant conjugué* de p défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On pose aussi $1' = \infty$ et $\infty' = 1$. Étant donné $1 \leq p \leq \infty$, l'*inégalité de Hölder* assure que si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ sont données, alors leur produit fg vérifie $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ainsi que :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\sim_p$ la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ de la façon suivante : $f \sim_p g$ si et seulement si $f = g$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Étant donné $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ vérifiant $f \sim_p g$, on a $\|f\|_p = \|g\|_p$. Il s'ensuit que la semi-norme $\|\cdot\|_p$ induit une semi-norme (notée également $\|\cdot\|_p$) sur le quotient $L^p(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) / \sim_p$; cette semi-norme est par ailleurs une norme sur $L^p(\mathbb{R})$, comme cela suit aisément du fait qu'une fonction positive de L-intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, y est nulle presque partout.

On rappelle que l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}$, est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Exercice 1 (Approximation dans $\mathcal{L}^p$ par des fonctions étagées). — Dans cet exercice, on fixe $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée g pour laquelle on a $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Exercice 2 (Approximation dans $\mathcal{L}^p$ par des fonctions régulières). — Dans cet exercice, on fixe $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction lipschitzienne $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle on a $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Indication. On commencera par traiter le cas où $f = \chi_B$ avec B une partie Lebesgue-mesurable vérifiant $|B| < +\infty$; on pourra à cet effet utiliser la régularité extérieure de la mesure extérieure de Lebesgue et observer que si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, et que l'on pose, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{dist}(x, \complement U) := \inf\{|x - y| : y \in \complement U\},$$

alors pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la fonction $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_k(x) := \min[1, 2^k \text{dist}(x, \complement U)],$$

est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement sur $\mathbb{R}$ vers χ_U . On pourra généraliser ensuite au cas où f est une fonction étagée, puis au cas général en utilisant l'exercice précédent.

Exercice 3 (Densité de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$). — Étant donné $1 \leq p < \infty$, utiliser l'exercice précédent pour montrer que $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Finalement, étant donné $1 \leq p \leq \infty$ on utilisera la notation $\mathcal{L}_+^p(\mathbb{R})$ (resp. $L_+^p(\mathbb{R})$) pour désigner les fonctions (resp. les classes d'équivalences de fonctions) presque partout positives issues de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\mathbb{R})$).

Avant de pouvoir même formuler la définition d'une approximation de l'identité, il convient de revenir brièvement sur le produit de convolution de deux fonctions.

1. Convolution

Le résultat suivant constitue une définition du produit de convolution de deux fonctions $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.1. — Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. L'ensemble I des réels x pour lesquels la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est L -intégrable sur $\mathbb{R}$, vérifie $|\mathbb{R} \setminus I| = 0$; on définit alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f * g(x) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $f * g$ vérifie $f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et on a :

$$(1) \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Démonstration. — Le résultat étant clair si g est bornée, il suffit de traiter le cas où l'on a $1 \leq p < \infty$.

On commencera par supposer $p = 1$. On pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $F(x, y) := f(x - y)g(y)$. On observe que F est Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et que l'on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(z)| dz = |g(y)| \|f\|_1.$$

Il vient en outre :

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx \leq \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Il suit dès lors du théorème de Tonelli que F est L -intégrable sur $\mathbb{R}^2$; le théorème de Fubini assure alors l'existence d'une partie Lebesgue-négligeable N de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$, la fonction

$y \mapsto F(x, y) = f(x - y)g(y)$ soit L-intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $f * g$ définie ci-dessus soit L-intégrable (et donc aussi Lebesgue-mesurable) sur $\mathbb{R}$.

On calcule par ailleurs, à l'aide du théorème de Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |F| = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Le théorème s'ensuit dans ce cas particulier.

Dans le cas où l'on a $1 < p < \infty$, on sait (par le cas précédent, puisque la fonction $y \mapsto |g(y)|^p$ est L-intégrable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse) que la fonction $y \mapsto |f(x - y)||g(y)|^p$ est L-intégrable sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto |f(x - y)|^{1/p} |g(y)|$ est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Notant $p' \in]1, \infty[$ l'exposant conjugué de p vérifiant, par définition, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on observe que la fonction $y \mapsto |f(x, y)|^{1/p'}$ est évidemment dans $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Hölder appliquée à $u_x \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $v_x \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R})$ définies par $u_x(y) := |f(x, y)|^{1/p} |g(y)|$ et $v_x(y) := |f(x, y)|^{1/p'}$, assure que l'on a $u_x v_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ avec :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} dy \leq \|u_x\|_p \|v_x\|_{p'}.$$

Or on calcule, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\|u_x\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| |g(y)|^p dy = (|f| * |g|^p)(x),$$

et :

$$\|v_x\|_{p'}^{p'} = \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)| dy = \|f\|_1.$$

Il vient aussi, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $|f(x - y)g(y)| \leq u_x(y)v_x(y)$. On tire de ce qui précède qu'il vient, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)| dy \leq \|f\|_1^{1/p'} [(|f| * |g|^p)(x)]^{1/p} < +\infty.$$

Il en résulte que $f * g$ est bien définie et que l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)|^p dx &\leq \|f\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}} (|f| * |g|^p)(x) dx \\ &\leq \|f\|_1^{p/p'} \| |f| * |g|^p \|_1 \leq \|f\|_1^{p/p'} \|f\|_1 \| |g|^p \|_1 = \|f\|_1^{1 + \frac{p}{p'}} \|g\|_p^p, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité obtenue dans le cas précédent. Il vient donc $f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ainsi que :

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}} \|g\|_p = \|f\|_1 \|g\|_p.$$

La démonstration est complète. ■

Exercice 4. — Montrer que, pour $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a $f * g = g * f$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. — Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que si $1 \leq p \leq \infty$ est un réel donné et que $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g, \tilde{g} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ vérifient $f = \tilde{f}$ et $g = \tilde{g}$ presque partout sur $\mathbb{R}$, alors on a $f * g = \tilde{f} * \tilde{g}$ presque partout sur $\mathbb{R}$. En déduire que si $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $v \in L^p(\mathbb{R})$ sont donnés, alors le produit de convolution $u * v \in L^1(\mathbb{R})$ est bien défini et vérifie $\|u * v\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p$.

2. Un théorème de F. Riesz

Le résultat suivant, qui implique en particulier la complétude de $L^p(\mathbb{R})$, nous sera utile dans la suite.

Théorème 2.1. — Soit $1 \leq p < \infty$, $(u_k) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Dans ces conditions, il existe une sous-suite $(u_{k_l}) \subseteq (u_k)$ et des fonctions $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ telles que l'on ait :

- (i) $u_k \rightarrow u$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$;
- (ii) $u_{k_l} \rightarrow u$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- (iii) $|u_{k_l}| \leq f$ presque partout sur $\mathbb{R}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Puisque (u_k) est de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, il existe une sous-suite $(u_{k_l}) \subseteq (u_k)$ vérifiant $\|u_{k_{l+1}} - u_{k_l}\|_p \leq 2^{-l}$ pour chaque $l \in \mathbb{N}$. Posons, pour alléger les notations, $v_l := u_{k_l}$ dans la suite.

Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n := \sum_{l=0}^n |v_{l+1} - v_l|.$$

On trouve, en vertu de l'inégalité de Minkowski, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{l=0}^n \|v_{l+1} - v_l\|_p < 1.$$

Il vient donc :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} g_n^p \leq 1.$$

Comme la suite $(g_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives, il suit du théorème de convergence monotone (pour l'intégrale de Lebesgue) qu'il existe une fonction h , L-intégrable et positive sur $\mathbb{R}$, telle que l'on ait $g_n^p \rightarrow h$, $n \rightarrow \infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$ ainsi que $\int_{\mathbb{R}} h = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n^p$. On en tire l'existence d'un ensemble négligeable $N \subseteq \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$, la suite $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, i.e. tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$, la série réelle :

$$\sum_{l \in \mathbb{N}} [v_{l+1}(x) - v_l(x)]$$

soit absolument convergente. On peut donc définir une fonction Lebesgue-mesurable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) := \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} |v_{l+1}(x) - v_l(x)| & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme il vient $g^p = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^p = h$ presque partout sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que g^p est L-intégrable sur $\mathbb{R}$, et que l'on a donc $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Or on a par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(2) \quad v_n(x) = v_0(x) + \sum_{l=0}^{n-1} [v_{l+1}(x) - v_l(x)].$$

Il s'ensuit d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, presque partout sur $\mathbb{R}$:

$$|v_n| \leq |v_0| + \sum_{l=0}^{n-1} |v_{l+1} - v_l| \leq |v_0| + g,$$

par définition de g . En posant $f := |v_0| + g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on voit donc que l'on a bien $|u_{k_l}| = |v_l| \leq f$ presque partout sur $\mathbb{R}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, ce qui démontre (iii).

De l'égalité (2), il résulte aussi que la suite réelle $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$. On peut donc définir une fonction Lebesgue-mesurable $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) := \begin{cases} \lim_{l \rightarrow \infty} v_l(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus N, \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

on a évidemment $u = \lim_{l \rightarrow \infty} v_l = \lim_{l \rightarrow \infty} u_{k_l}$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Pour démontrer (ii), il reste donc à vérifier que l'on a $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Or on calcule, pour des entiers $l < m$ (en utilisant à nouveau l'inégalité de Minkowski) :

$$\int_{\mathbb{R}} |v_m - v_l|^p = \|v_m - v_l\|_p^p = \left\| \sum_{j=l}^{m-1} [v_{j+1} - v_j] \right\|_p^p \leq \left(\sum_{j=l}^{m-1} \|v_{j+1} - v_j\|_p \right)^p \leq 2^{-p(l-1)}.$$

Puisque, pour tout $l \in \mathbb{N}$, il vient $|u - v_l|^p = \lim_{m \rightarrow \infty} |u_m - v_l|^p$ presque partout sur $\mathbb{R}$, le lemme de Fatou assure que l'on a :

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}} |u - v_l|^p \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |u_m - v_l|^p \leq 2^{-p(l-1)},$$

et qu'il vient donc $u - v_l \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. En particulier, il vient $u = u - v_l + v_l \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, et (ii) est démontré.

Finalement, il vient pour $l \in \mathbb{N}$ (en utilisant l'inégalité (3) ci-dessus et la définition de v_l) :

$$\|u - u_l\|_p \leq \|u - v_l\|_p + \|v_l - u_l\|_p \leq 2^{1-l} + \|u_{k_l} - u_l\|_p.$$

Puisque (u_k) est de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, il vient $\|u_{k_l} - u_l\|_p \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$; il s'ensuit que l'on a $\|u - u_l\|_p \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$, ce qui prouve (i). ■

Nous aurons besoin, avant d'étudier les approximations de l'identité, de quelques outils d'analyse parmi lesquels le *théorème de Banach-Steinhaus* aussi appelé *principe de la borne uniforme*.

3. Le principe de la borne uniforme

Étant donné X et Y des espaces (semi-)normés, on définit $\mathcal{L}(X, Y)$ comme l'espace des applications linéaires continues de X vers Y , i.e. des applications linéaires $T : X \rightarrow Y$ vérifiant :

$$\|T\| := \sup\{\|T(u)\| : u \in X, \|u\| = 1\} < +\infty.$$

On appelle $\|T\|$ la *norme (d'opérateur) de T* .

Pour une suite d'applications linéaires continues définies sur un espace de Banach, le théorème de Banach-Steinhaus assure qu'elle est bornée en norme (i.e. uniformément bornée sur la sphère unité) dès qu'elle est bornée en chaque point.

Théorème 3.1 (Banach-Steinhaus, principe de la borne uniforme). — Soient X un espace (semi-)normé complet, Y un espace (semi-)normé et $(T_k) \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ une suite d'applications linéaires continues de X vers Y . Si, pour tout $u \in X$, on a $\sup_k \|T_k(u)\| < +\infty$, alors (T_k) est bornée en norme, i.e. on a $\sup_k \|T_k\| < +\infty$.

Démonstration. — Procédons par contraposition, et supposons que l'on ait $\sup_k \|T_k\| = +\infty$. Posons alors, pour $l \in \mathbb{N}$:

$$F_l := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{u \in X : \|T_k u\| \leq l\}.$$

Il est facile de voir (puisque, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, l'application $X \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|T_k u\|$ est continue) que F_l est fermé pour chaque $l \in \mathbb{N}$. Montrons que F_l est également d'intérieur vide pour chaque $l \in \mathbb{N}$.

À cet effet, fixons $l \in \mathbb{N}$ et $B = B[u, r]$ une boule fermée dans X , avec $u \in X$ et $r > 0$. Si on a $u \notin F_l$, alors il est clair que l'on a $B \not\subseteq F_l$. Sinon, il vient donc $\|T_k u\| \leq l$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais par

hypothèse, on sait qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel on a $\|T_{k_0}\| > \frac{2l}{r}$. Il existe dès lors $v \in X$ vérifiant $\|v\| = 1$ et $\|T_{k_0}v\| > \frac{2l}{r}$, et on trouve alors :

$$\|T_{k_0}(u + rv)\| \geq r\|T_{k_0}v\| - \|T_{k_0}u\| > 2l - l = l.$$

Il vient par conséquent $u + rv \in B(u, r) \setminus F_l = B \setminus F_l$, c'est-à-dire $B \not\subset F_l$. Autrement dit, F_l est d'intérieur vide.

Le théorème de Baire assure à présent que l'ensemble $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} F_l$ est d'intérieur vide. En particulier, il existe $u_0 \in X \setminus \bigcup_{l \in \mathbb{N}} F_l = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} (X \setminus F_l)$. On a donc, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $u_0 \notin F_l$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\|T_k u_0\| > l$; on en tire aussitôt que l'on a :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k u_0\| = +\infty,$$

et la démonstration est complète. ■

Remarque 3.2. — On observera que le théorème de Baire, invoqué dans la démonstration précédente, demeure en effet valable dans un espace semi-normé complet (on n'utilise nulle part dans sa démonstration une propriété d'unicité de la limite).

Il n'est pas *nécessaire* qu'un espace (semi-)normé soit complet pour qu'y soit vrai un principe de la borne uniforme; on va le montrer dans la série d'exercices suivante.

Exercices : espaces tonnelés et principe de la borne uniforme. — Une partie E d'un espace vectoriel X est dite :

- (i) *absorbante* si, pour tout $u \in X$, il existe $\lambda > 0$ tel que l'on ait $u \in \lambda S$;
- (ii) *équilibrée* si, pour tout $u \in S$ et tout $\lambda \in [-1, 1]$, on a $\lambda u \in S$;
- (iii) *symétrique* si, pour tout $u \in S$, on a $-u \in S$;
- (iv) *convexe* si, pour tous $u, v \in S$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $(1 - \lambda)u + \lambda v \in S$.

On observe qu'une partie convexe de X est équilibrée si et seulement si elle est symétrique.

Un *tonneau* de X est une partie convexe, équilibrée, absorbante et fermée de X .

Finalement, un espace (semi-)normé X est dit *tonnelé* si tout tonneau de X est un voisinage de 0.

Exercice 6 (complétude et caractère tonnelé). — Soit X un espace (semi-)normé complet. On va montrer que X est tonnelé. À cet effet, fixer S un tonneau de X ; on pourra procéder comme suit pour montrer que S est un voisinage de 0.

1. Montrer que l'on a $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (kS)$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$, un point $x_0 \in X$ et un réel $r_0 > 0$ tels que l'on ait $B(x_0, r_0) \subseteq k_0 S$.
3. En déduire que l'on a $B(-x_0, r_0) \subseteq k_0 S$ puis $B(0, r_0) \subseteq k_0 S$ et conclure.

Exercice 7 (Principe de la borne uniforme). — Montrer que l'énoncé du principe de la borne uniforme (Théorème 3.1) demeure valide si on y remplace le mot “complet” par “tonnelé”. À cet effet, on pourra (en conservant les notations de cet énoncé) poser, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$S_k := \{u \in X : \|T_k(u)\| \leq 1\},$$

ainsi que $S := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k$, et procéder comme suit.

1. Montrer que S est convexe, équilibré et fermé.
2. Pour montrer que S est absorbant, fixer $u \in X$ et poser $c(u) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k(u)\|$; on sait que l'on a $0 \leq c(u) < +\infty$ par hypothèse. Si l'on a $c(u) > 0$, montrer qu'il vient alors $u/c(u) \in S$. Conclure que S est absorbant.
3. En utilisant le caractère tonnelé de X , montrer que l'on a $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| < +\infty$.

Nous sommes à présent prêts pour introduire et étudier les *approximations de l'identité*.

4. Approximations de l'identité : définition et premiers exemples

Une approximation de l'identité est une suite de fonctions L-intégrables qui, par convolution, permet d'approcher l'identité en moyenne (*i.e.* en norme L^1).

Définition 4.1. — Une *approximation de l'identité* est une suite $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que, pour chaque $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * u)$ converge vers u dans $\mathcal{L}^1$, *i.e.* telle que l'on ait $\|\varphi_k * u - u\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Les définitions suivantes faciliteront la formulation des résultats dans la suite.

Définition 4.2. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une suite de fonctions L-intégrables sur $\mathbb{R}$.

- (i) On dit que (φ_k) est *normalisée* si on a $\|\varphi_k\|_1 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (ii) On dit que (φ_k) est *asymptotiquement normalisée* si on a $\|\varphi_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$.
- (iii) On dit que (φ_k) est *asymptotiquement locale* si, pour tout $\delta > 0$, on a $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} |\varphi_k| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

La proposition suivante assure que toute suite asymptotiquement locale et asymptotiquement normalisée de fonctions intégrables, est une approximation de l'identité.

Proposition 4.3. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une suite de fonctions L-intégrables positives, asymptotiquement normalisée et asymptotiquement locale. Dans ces conditions, (φ_k) est une approximation de l'identité.

Démonstration. — On va commencer par démontrer la convergence uniforme de $\varphi_k * v$ vers v pour tout $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$.

Affirmation 1. — Si $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}$, alors $(\varphi_k * v)$ converge uniformément vers v sur $\mathbb{R}$.

Pour démontrer cette affirmation, commençons par observer que, $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ étant donnée, la fonction $y \mapsto \varphi_k(x - y)v(y)$ est L-intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_k * v(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x - y)v(y) dy.$$

En outre, v étant continu et à support compact dans $\mathbb{R}$, le théorème de Heine assure qu'il est aussi uniformément continu sur $\mathbb{R}$. On va montrer à présent que $(\varphi_k * v)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers v .

À cet effet, commençons par supposer que (φ_k) soit *normalisée*, auquel cas il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x - y) dy,$$

en utilisant le changement de variables $t = x - y$. On trouve donc, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x - y)v(x) dy.$$

Il vient donc aussi, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_k * v(x) - v(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x - y)[v(y) - v(x)] dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(x - y)|v(y) - v(x)| dy.$$

En effectuant à nouveau le changement de variables $t = x - y$, il vient donc, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_k * v(x) - v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) |v(x-t) - v(x)| dt.$$

Fixons à présent $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ un réel tel que si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $|x - y| \leq \delta$, on ait $|v(x) - v(y)| \leq \varepsilon$ (rappelons que v est uniformément continu sur $\mathbb{R}$). Soit $M > 0$ un réel tel que l'on ait $|v| \leq M$ sur $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on calcule alors :

$$|\varphi_k * v(x) - v(x)| \leq 2M \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k + \varepsilon \int_{[-\delta, \delta]} \varphi_k \leq \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k,$$

en utilisant le fait que, pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, on a $|v(x-t) - v(x)| \leq \varepsilon$, et que l'on a $\int_{[-\delta, \delta]} \varphi_k \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_k = 1$. Il vient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \leq \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k.$$

En utilisant le fait que (φ_k) est asymptotiquement locale, on trouve donc :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \right) \leq \varepsilon + 2M \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k = \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité précédente, il vient finalement :

$$0 \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \right) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \right) \leq 0,$$

ce qui montre que l'on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \right) = 0,$$

c'est-à-dire que $(\varphi_k * v)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers v .

Si (φ_k) est asymptotiquement normalisée, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k\|_1 = 1$; il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\|\varphi_k\|_1 \geq \frac{1}{2}$ pour tout $k \geq k_0$. Posons alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\psi_k := \begin{cases} \chi_{[0,1]} & \text{si } k < k_0, \\ \|\varphi_k\|_1^{-1} \varphi_k & \text{si } k \geq k_0. \end{cases}$$

Il est clair que (ψ_k) est normalisée ; par ailleurs, on calcule, pour $\delta > 0$ et $k \geq k_0$:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \psi_k = \|\varphi_k\|_1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k \leq 2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k.$$

Il s'ensuit que l'on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \psi_k = 0$ pour tout $\delta > 0$. La suite (ψ_k) est donc normalisée et asymptotiquement locale ; par conséquent, il résulte de ce qui précède que $(\psi_k * v)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers v . Utilisant le fait que $\|\varphi_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$ et, pour $k \geq k_0$, l'écriture :

$$\varphi_k * v = \|\varphi_k\|_1 \cdot (\psi_k * v),$$

on voit que $(\varphi_k * v)$ converge uniformément vers v sur $\mathbb{R}$, ce qui achève la preuve de l'affirmation.

Affirmation 2. — Pour tout $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * v)$ converge vers v dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Pour démontrer cette affirmation, fixons $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et fixons $a \geq 0$ un réel tel que l'on ait $v = 0$ hors de $[-a, a]$. Fixons également $\varepsilon > 0$ et choisissons un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait $\|v\|_1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \varphi_k \leq \varepsilon/2$. On calcule alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_k * v(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) v(x-t) dt = \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \varphi_k(t) v(x-t) dt,$$

puisque, pour $t \in [-1, 1]$, il vient $v(x - t) = 0$. Il vient donc, en utilisant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]} |\varphi_k * v| &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]} dx \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \varphi_k(t) |v(x - t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} dt \varphi_k(t) \int_{\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]} |v(x - t)| dx ; \end{aligned}$$

comme on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]} |v(x - t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |v(x - t)| dx = \|v\|_1$, on obtient en conséquence, pour $k \geq k_0$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]} |\varphi_k * v| \leq \|v\|_1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \varphi_k(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

À l'aide de l'Affirmation 1, choisissons maintenant un entier $k_1 \geq k_0$ tel que, pour tout $k \geq k_1$, on ait :

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \leq \frac{\varepsilon}{4a + 4}.$$

On calcule alors, pour $k \geq k_1$ (en observant pour commencer que l'on a $v = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]$) :

$$\|\varphi_k * v - v\|_1 = \int_{\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]} |\varphi_k * v| + \int_{[-a-1, a+1]} |\varphi_k * v - v| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (2a + 2) \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\varphi_k * v - v| \leq \varepsilon.$$

Ceci conclut la preuve de l'affirmation.

Pour achever la preuve de la proposition, fixons $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe, par la densité de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, un $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u - v\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On calcule alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_k * u - u\|_1 \leq \|\varphi_k * u - \varphi_k * v\|_1 + \|\varphi_k * v - v\|_1 + \|v - u\|_1.$$

Or on a, en utilisant l'inégalité (1) du Théorème 1.1 :

$$\|\varphi_k * u - \varphi_k * v\|_1 = \|\varphi_k * (u - v)\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 \|u - v\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi_k\|_1.$$

Il vient donc, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_k * u - u\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} (1 + \|\varphi_k\|_1) + \|\varphi_k * v - v\|_1.$$

En utilisant l'Affirmation 2 et le fait que (φ_k) est asymptotiquement normalisée, on trouve dès lors :

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_1 \leq \varepsilon.$$

Comme ceci est valable quel que soit $\varepsilon > 0$, il vient :

$$0 \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_1 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_1 \leq 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_1 = 0$. La proposition est démontrée. ■

Exemple 4.4 (Approximations de l'identité usuelles). — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une suite de fonctions intégrables vérifiant les conditions suivantes :

(AI1) $\varphi_k \geq 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;

(AI2) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;

(AI3) pour tout $\delta > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on ait $\varphi_k = 0$ presque partout hors de $[-\delta, \delta]$.

Dans ces conditions, (φ_k) est une approximation de l'identité. Cela résulte immédiatement de la proposition précédente.

Exemple 4.5 (Dérivation de Lebesgue). — Définissons, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, une fonction $\lambda_k \in L^1_+(\mathbb{R})$ par $\lambda_k := 2^{k-1} \chi_{[-2^{-k}, 2^{-k}]}$. Il résulte immédiatement de la proposition précédente que (λ_k) est une approximation de l'identité. Autrement dit, il vient, pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\lambda_k * u \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{dans } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Exemple 4.6 (Suites régularisantes). — Soient $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable et à support compact dans $\mathbb{R}$. Supposons que l'on ait $\rho \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, $\rho = 0$ hors de $[-1, 1]$ et $\int_{[-1, 1]} \rho = 1$. Dans ces conditions, la suite $(\rho_k) \subseteq \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_k(x) := 2^k \rho(2^k x),$$

est une approximation de l'identité.

Les suites régularisantes permettent de démontrer la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 < p < \infty$.

On traitera cet exemple en détails dans l'Exercice 9 ci-dessous.

5. Approximations de l'identité : conditions nécessaires

Étant donné $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, rappelons qu'on appelle *transformée de Fourier* de u la fonction continue et bornée $\hat{u}$ définie par :

$$\hat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2i\pi x \xi} dx.$$

On a évidemment, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (puisque $|e^{-2i\pi x \xi}| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$(4) \quad |\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x)| dx = \|u\|_1.$$

Il vient donc $\sup_{\mathbb{R}} |\hat{u}| \leq \|u\|_1$ pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Le *lemme de Riemann-Lebesgue* assure que, pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a $|\hat{u}(\xi)| \rightarrow 0$ lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$.

On rappelle également que si deux fonctions $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sont données, alors on a $\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$ partout sur $\mathbb{R}$.

Étant donné $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on montre que l'on a $\hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$. Puisque $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (ce sous-espace contient en particulier $\mathcal{K}(\mathbb{R})$), il s'ensuit que la transformation $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $u \mapsto \hat{u}$ possède une unique extension par densité à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ notée :

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}),$$

et vérifiant, pour tout $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\|\mathcal{F}(u)\|_2 = \|u\|_2$; cette dernière égalité est appelée l'*identité de Plancherel*.

Si on note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à *décroissance rapide* défini par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |v^{(l)}(x)| < +\infty \text{ pour tous } k, l \in \mathbb{N} \right\},$$

on a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, et la restriction de la transformée de Fourier à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En outre, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sont données, on a $\mathcal{F}(f * u) = \hat{f} \mathcal{F}(u)$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Les approximations de l'identité *positives* sont *nécessairement* asymptotiquement normalisées et asymptotiquement locales. C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition 5.1. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^1_+(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité positive. Dans ces conditions, (φ_k) est toujours asymptotiquement normalisée et asymptotiquement locale.

Démonstration. — Commençons par montrer que (φ_k) est asymptotiquement normalisée. À cet effet, observons que l'on a, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_k\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k = \hat{\varphi}_k(0).$$

Posons $f := \chi_{[0,1]}$. Il vient aussi $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f = 1$.

On trouve donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant l'égalité $\widehat{\varphi_k * f} = \hat{\varphi}_k \hat{f}$ et l'inégalité (4) ci-dessus :

$$\|\varphi_k\|_1 - 1 = |\hat{\varphi}_k(0)\hat{f}(0) - \hat{f}(0)| = |\widehat{\varphi_k * f}(0) - \hat{f}(0)| \leq \|\varphi_k * f - f\|_1.$$

Comme on a, par hypothèse, $\|\varphi_k * f - f\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, cela montre que (φ_k) est asymptotiquement normalisée.

Pour montrer que (φ_k) est asymptotiquement locale, fixons $\delta > 0$ et posons $g := \chi_{[-\delta/2, \delta/2]}$. Fixons aussi $k \in \mathbb{N}$ et observons que l'on a $g = 0$ hors de $[-\delta/2, \delta/2]$ et que l'on peut donc écrire :

$$\|\varphi_k * g - g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k * g - g| \geq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} |\varphi_k * g - g| = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k * g.$$

On a, par définition :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k * g = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) g(x-t) dt.$$

Or, étant donné $x \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$ et $t \in [-\delta/2, \delta/2]$, il vient $|x-t| > |x| - |t| > \delta/2$ et donc $g(x-t) = 0$; il en résulte que l'on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(t) g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dx \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \varphi_k(t) g(x-t) dt.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on calcule :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dx \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \varphi_k(t) g(x-t) dt &= \int_{\mathbb{R} \setminus [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} dt \varphi_k(t) \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} g(x-t) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dt \varphi_k(t) \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(x-t) dx. \end{aligned}$$

Puisque, étant donné $t \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$, il vient $\chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(x-t) = 1$ si et seulement si on a $t-\delta/2 \leq x \leq t+\delta/2$, on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dt \varphi_k(t) \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(x-t) dx &= \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} dt \varphi_k(t) \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \chi_{[t-\frac{\delta}{2}, t+\frac{\delta}{2}]}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k(t) \cdot \left| (\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]) \cap \left[t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2} \right] \right| dt. \end{aligned}$$

Étant donné qu'il est clair que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$, l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]) \cap [t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}]$ contient toujours un intervalle de longueur $\delta/2$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k(t) \cdot \left| (\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]) \cap \left[t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2} \right] \right| dt \geq \frac{\delta}{2} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k.$$

Il suit donc de la série de calculs ci-dessus que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k \leq \frac{2}{\delta} \|\varphi_k * g - g\|_1.$$

Puisque (φ_k) est une approximation de l'identité, il vient $\|\varphi_k * g - g\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et on trouve finalement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k = 0.$$

La démonstration est complète. ■

En combinant les Propositions 4.3 et 5.1, on obtient une caractérisation particulièrement simple des approximations de l'identité positives dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Corollaire 5.2. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une suite de fonctions L -intégrables et positives sur $\mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) (φ_k) est une approximation de l'identité ;
- (ii) (φ_k) est asymptotiquement normalisée et asymptotiquement locale.

L'exercice suivant montre que les approximations de l'identité non positives peuvent n'être ni asymptotiquement normalisées ni asymptotiquement locales.

Exercice 8. — Définissons, pour $k \in \mathbb{N}$, des fonctions α_k, β_k et γ_k par les formules :

$$\alpha_k := 2^k \chi_{[0, 2^{-k}]}, \quad \beta_k := 2^k \chi_{[1-2^{-k}, 1]} \quad \text{et} \quad \gamma_k := 2^k \chi_{[1, 1+2^{-k}]}.$$

Posons aussi $\varphi_k := \alpha_k + \beta_k - \gamma_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'on a, pour $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$:

$$\varphi_k * u = \alpha_k * u + \check{\alpha}_k * \tau_1 u - \alpha_k * \tau_1 u,$$

où, étant donné une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $h \in \mathbb{R}$, la symétrisée $\check{f}$ de f et la translatée $\tau_h f$ de f par h sont définies, pour $x \in \mathbb{R}$, par $\check{f}(x) := f(-x)$ et $\tau_h u(x) := u(x - h)$.

2. Montrer que (α_k) et $(\check{\alpha}_k)$ sont des approximations de l'identité.
3. En déduire que (φ_k) est une approximation de l'identité.
4. Montrer que (φ_k) n'est ni asymptotiquement normalisée, ni asymptotiquement locale.

6. Approximations de l'identité et convergence en norme $\mathcal{L}^p$

Commençons par un lemme qui nous sera utile dans un instant.

Lemme 6.1. — Étant donné $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, l'application linéaire $T_f : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ définie par :

$$T_f(u) := f * u,$$

est continue et vérifie $\|T_f\| = \|f\|_1$.

Démonstration. — Commençons par observer qu'il suit de l'inégalité (1) que l'on a, pour $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u\|_1 = 1$:

$$\|T_f(u)\| \leq \|f\|_1 \|u\|_1 = \|f\|_1.$$

Il s'ensuit que T_f est continue et que l'on a $\|T_f\| \leq \|f\|_1$.

Soit à présent (λ_k) l'approximation de l'identité introduite dans l'Exemple 4.5 (ou n'importe quelle approximation de l'identité normalisée). Il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (puisque l'on a $\|\lambda_k\|_1 = 1$) :

$$\|T_f(\lambda_k)\|_1 \leq \|T_f\|.$$

Or on a, pour $k \in \mathbb{N}$ (en utilisant l'Exercice 4) :

$$T_f(\lambda_k) = f * \lambda_k = \lambda_k * f \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{dans } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$\|T_f\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_f(\lambda_k)\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k * f\|_1 = \|f\|_1.$$

Le lemme est ainsi démontré. ■

À l'aide du lemme précédent et du principe de la borne uniforme, on peut montrer que, si une approximation de l'identité non positive n'est pas toujours asymptotiquement normalisée, elle est néanmoins toujours *bornée* en (semi-)norme $\mathcal{L}^1$.

Proposition 6.2. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité. Dans ces conditions, on a toujours :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_1 < +\infty.$$

Démonstration. — Définissons, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, un opérateur linéaire et continu $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1(\mathbb{R}))$ par $T_k(u) := \varphi_k * u$. Si $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est fixée, on sait que $(\varphi_k * u)$ converge dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vers u ; il s'ensuit que cette suite est bornée dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, i.e. que l'on a :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k(u)\|_1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k * u\|_1 < \infty.$$

Le principe de la borne uniforme (Théorème 3.1) assure dès lors (puisque $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est complet) que l'on a :

$$M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| < +\infty.$$

En vertu du Lemme 6.1, on trouve donc :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T_k\| = M < +\infty.$$

La démonstration est complète. ■

Étant donné une approximation de l'identité (φ_k) , il suit du Théorème 1.1 que $\varphi_k * u$ est bien défini pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Nous allons montrer que, si on a $1 \leq p < \infty$, alors $(\varphi_k * u)$ converge vers u aussi en (semi-)norme $\mathcal{L}^p$.

Proposition 6.3. — Soient (φ_k) une approximation de l'identité et $1 \leq p < \infty$ un réel. Pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * u)$ converge vers u dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, i.e. on a :

$$\|\varphi_k * u - u\|_p \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Démonstration. — On peut évidemment supposer que l'on a $1 < p < \infty$. On sait, au vu de la Proposition 6.2, que l'on a :

$$K := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_1 < +\infty.$$

Affirmation 3. — Pour tout $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * v)$ converge vers v dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Pour démontrer cette affirmation, fixons $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et soit $M \geq 0$ un réel tel que l'on ait $|v| \leq M$ sur $\mathbb{R}$. On calcule, pour $k \in \mathbb{N}$ et *tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi_k * v(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(x-y)| |v(y)| dy \leq M \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(x-y)| dy \leq M \|\varphi_k\|_1 \leq KM.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on écrit donc :

$$|\varphi_k * v(x) - v(x)|^p = |\varphi_k * v(x) - v(x)|^{p-1} \cdot |\varphi_k * v(x) - v(x)| \leq (K+1)^{p-1} M^{p-1} |\varphi_k * v(x) - v(x)|.$$

Il vient donc, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_k * v - v\|_p^p \leq (K+1)^{p-1} M^{p-1} \|\varphi_k * v - v\|_1,$$

et il résulte dès lors aussitôt de ce que (φ_k) est une approximation de l'identité, que l'on a $\|\varphi_k * v - v\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. L'affirmation est donc démontrée.

Pour achever la preuve de la proposition, fixons $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe, par la densité de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, un $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u - v\|_p \leq \frac{\varepsilon}{K+1}$. On calcule alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_k * u - u\|_p \leq \|\varphi_k * u - \varphi_k * v\|_p + \|\varphi_k * v - v\|_p + \|v - u\|_p.$$

Or on a, en utilisant l'inégalité (1) du Théorème 1.1 :

$$\|\varphi_k * u - \varphi_k * v\|_p = \|\varphi_k * (u - v)\|_p \leq \|\varphi_k\|_1 \|u - v\|_p \leq \frac{\varepsilon}{K+1} \cdot \|\varphi_k\|_1 \leq \varepsilon \cdot \frac{K}{K+1} \leq \varepsilon.$$

Il vient donc, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_k * u - u\|_p \leq \varepsilon + \|\varphi_k * v - v\|_p.$$

On trouve alors, en vertu de l'Affirmation 3 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_p \leq \varepsilon.$$

Comme ceci est valable quel que soit $\varepsilon > 0$, il vient :

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_p \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_p \leq 0,$$

i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k * u - u\|_p = 0$; c'est ce qu'il fallait démontrer. ■

Exercice 9 (Régularisation). — 1. Soient $1 \leq p < \infty$ un réel, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction indéfiniment dérivable et à support compact ainsi que $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi * u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(\varphi * u)^{(k)} = \varphi^{(k)} * u.$$

Indication. Commencer par supposer que $k = 1$ et calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, le quotient différentiel :

$$\frac{\varphi * u(x+h) - \varphi * u(x)}{h}.$$

2. Soit (ρ_k) une suite régularisante comme dans l'Exemple 4.6. Montrer que l'on a $\rho_k * u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Conclure que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

L'approximation de l'identité introduite dans l'Exemple 4.5 donne aussi lieu à la convergence presque partout dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Proposition 6.4. — Soit (λ_k) l'approximation de l'identité introduite dans l'Exemple 4.5. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda_k * u \rightarrow u, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Fixons $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et commençons par observer qu'il résulte de l'inégalité de Hölder que u est localement intégrable : si K est compact, on a en effet $u = u \chi_K$ sur K , et il est clair que l'on a $u \in \mathcal{L}^p(K)$ et $\chi_K \in \mathcal{L}^{p'}(K)$ où l'on a défini $1 \leq p' \leq \infty$ par $1/p + 1/p' = 1$. La proposition résulte alors de la version forte du théorème de dérivation de Lebesgue puisque l'on écrit, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lambda_k * u(x) &:= 2^{k-1} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-2^{-k}, 2^{-k}]}(x-y) u(y) dy \\ &= 2^{k-2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-2^{-k}, x+2^{-k}]}(y) u(y) dy = \frac{1}{|[x-2^{-k}, x+2^{-k}]|} \int_{[x-2^{-k}, x+2^{-k}]} u, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que l'on a $x - y \in [-2^{-k}, 2^{-k}]$ si et seulement si l'on a $y \in [x - 2^{-k}, x + 2^{-k}]$. ■

Remarque 6.5. — En général, étant donné une approximation de l'identité (φ_k) , un réel $1 \leq p < \infty$ et $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on sait que $(\varphi_k * u)$ converge dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ vers u ; il s'ensuit qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (k_l) telle que $(\varphi_{k_l} * u)$ converge *presque partout* vers u ; en revanche, cette sous-suite *dépend généralement de u* .

L'approximation de l'identité que nous avons appelée *dérivation de Lebesgue* a cette propriété supplémentaire que $(\lambda_k * u)$ converge presque partout vers u pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Nous allons voir, dans la section suivante, que pour $p = 2$, toute approximation de l'identité (positive ou non) contient une sous-suite donnant lieu à la convergence presque partout pour toute fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; cette suite sera dite *universelle* au sens où elle ne dépend pas de la fonction choisie.

7. Un théorème de J. Rosenblatt

Nous avons annoncé le théorème suivant ; il a été démontré en 2008 par J.M. Rosenblatt.

Théorème 7.1 (Rosenblatt, 2008). — Si $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ est une approximation de l'identité (non nécessairement positive), alors il existe une suite croissante d'entiers (k_l) telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on ait :

$$\varphi_{k_l} * u \rightarrow u, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}.$$

Démonstration. — Commençons par poser $K := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_1 < +\infty$ (on sait que cette borne supérieure est finie en vertu de la Proposition 6.2).

Affirmation 4. — La suite $(\hat{\varphi}_k)$ converge uniformément vers 1 sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et choisissons $v_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $v_n = 1$ sur $[-n, n]$. Il existe donc $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\hat{f}_n = v_n$ sur $\mathbb{R}$; on a donc $\hat{f}_n = 1$ sur $[-n, n]$. On a alors, en utilisant l'inégalité (4) :

$$\sup_{[-n, n]} |\hat{\varphi}_k - 1| = \sup_{[-n, n]} |\hat{\varphi}_k \hat{f}_n - \hat{f}_n| \leq \sup_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi_k * f_n} - \hat{f}_n| \leq \|\varphi_k * f_n - f_n\|_1.$$

Puisque (φ_k) est une approximation de l'identité, il vient $\|\varphi_k * f_n - f_n\|_1 \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$; il s'ensuit que $(\hat{\varphi}_k)$ converge uniformément vers 1 sur $[-n, n]$, ce qui achève la démonstration de l'affirmation.

Notons à présent, pour $k \in \mathbb{N}$, $d_k := \varphi_k - \lambda_k$, où (λ_k) est l'approximation de l'identité définie dans l'Exemple 4.5. En appliquant à (φ_k) et (λ_k) l'affirmation précédente, on voit que $(\hat{d}_k)$ converge uniformément vers zéro sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En outre, il vient, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\|d_k\|_1 \leq \|\varphi_k\|_1 + \|\lambda_k\| \leq K + 1.$$

On a donc $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|d_k\|_1 \leq K + 1$.

Affirmation 5. — Il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_l)_l$ telle que l'on ait, sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} |\hat{d}_{k_l}|^2 \leq (K + 2)^2.$$

Pour démontrer cette affirmation, on se propose de construire inductivement une suite (k_l) d'entiers tels que l'on ait, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{\mathbb{R}} \sum_{l=0}^m |\hat{d}_{k_l}|^2 \leq \left[K + 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^m \right]^2.$$

Posons, pour simplifier les notations, $K_m := \left[K + 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^m \right]^2$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$; il est clair que $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante, que l'on a $K_0 = (K + 1)^2$ et $K_m > (K + 1)^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour construire la suite (k_l) , commençons par observer que l'on a, en vertu de l'inégalité (4) :

$$\sup_{\mathbb{R}} |\hat{d}_0|^2 \leq \|d_0\|_1^2 \leq (K+1)^2 = K_0;$$

on peut donc prendre $k_0 = 0$.

Supposant, pour $m \in \mathbb{N}$, que l'on ait construit des entiers $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_m$ ayant la propriété voulue, commençons par choisir, en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue, un intervalle fermé borné I de $\mathbb{R}$ tel que l'on ait :

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus I} \sum_{l=0}^m |\hat{d}_{k_l}|^2 \leq K_{m+1} - (K+1)^2.$$

Puisque la suite $(\hat{d}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers 0, choisissons également un entier $k_{m+1} > k_m$ tel que l'on ait :

$$\sup_I |\hat{d}_{k_{m+1}}| \leq \sqrt{K_{m+1} - K_m}.$$

Observons à présent que si $x \in I$ est donné, on a :

$$\sum_{l=0}^{m+1} |\hat{d}_{k_l}(x)|^2 = \sum_{l=0}^m |\hat{d}_{k_l}(x)|^2 + |\hat{d}_{k_{m+1}}(x)|^2 \leq K_m + K_{m+1} - K_m = K_{m+1}.$$

Si, d'autre part, $x \in \mathbb{R} \setminus I$ est donné, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+1} |\hat{d}_{k_l}(x)|^2 &= \sum_{l=0}^m |\hat{d}_{k_l}(x)|^2 + |\hat{d}_{k_{m+1}}(x)|^2 \\ &\leq K_{m+1} - (K+1)^2 + \left(\sup_{\mathbb{R}} |\hat{d}_{k_{m+1}}| \right)^2 \leq K_{m+1} - (K+1)^2 + \|d_{k_{m+1}}\|_1^2 \leq K_{m+1}, \end{aligned}$$

de sorte que k_{m+1} jouit de la propriété requise. La démonstration de l'affirmation est donc complète.

Revenant à la démonstration du théorème, fixons $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et posons, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$S_m := \sum_{l=0}^m |d_{k_l} * u|^2.$$

Utilisant l'égalité $\mathcal{F}(d_{k_l} * u) = \hat{d}_{k_l} \mathcal{F}(u)$ valable presque partout sur $\mathbb{R}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ ainsi que l'identité de Plancherel à plusieurs reprises, on trouve pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l=0}^m |d_{k_l} * u|^2 &= \sum_{l=0}^m \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(d_{k_l} * u)|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{l=0}^m \hat{d}_{k_l}^2 \right) |\mathcal{F}(u)|^2 \\ &\leq (K+2)^2 \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(u)|^2 = (K+2) \int_{\mathbb{R}} |u|^2 < +\infty, \end{aligned}$$

Il suit dès lors du théorème de convergence monotone que la série $\sum_{l \in \mathbb{N}} |d_{k_l} * u|^2$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers une fonction intégrable ; puisque le terme général d'une série convergente tend vers zéro, il vient donc, presque partout sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} d_{k_l} * u = 0.$$

Or on a, presque partout sur $\mathbb{R}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_{k_l} * u = d_{k_l} * u + \lambda_{k_l} * u.$$

Comme on sait, en vertu de la Proposition 6.4, que l'on a $\lambda_{k_l} * u \rightarrow u$, $l \rightarrow \infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$, il résulte des deux égalités précédentes que l'on a :

$$\varphi_{k_l} * u \rightarrow u, \quad l \rightarrow \infty \quad \text{presque partout sur } \mathbb{R}.$$

La démonstration est complète. ■

Remarque 7.2. — J. Rosenblatt a montré que le résultat précédent possédait un analogue dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 < p < \infty$. Pour $p = 1$, et pour les approximations de l'identité *positives*, un énoncé du même type demeure vrai ; cela a été établi, indépendamment, par S. Kostyukovsky et A. Olevskii en 2005/2006, et par P. LaVictoire en 2010 (et en utilisant des techniques légèrement différentes). Bien sûr, le cas $p = 2$ est particulier (et plus simple à exposer) grâce à l'efficacité des techniques hilbertiennes. Les sections suivantes sont destinées à nous permettre d'établir le théorème de Kostyukovsky-Olevskii et LaVictoire.

8. Un théorème de Sawyer-Stein pour les approximations de l'identité positives

Étant donné une approximation de l'identité *positive* $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$, il existe un lien intime entre la convergence presque partout de la suite $(\varphi_k * u)$ pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, et la *fonction maximale* associée à cette approximation de l'identité. Ce lien est exprimé par le principe de Sawyer-Stein ci-dessous (voir le Théorème 8.10). Avant d'arriver à ce résultat, identifions déjà un lien entre cette fonction maximale et la convergence presque partout de $(\varphi_k * u)$ pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, dont la preuve rappellera celle du théorème de dérivation de Lebesgue.

Définition 8.1. — Étant donné une approximation de l'identité $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p \leq \infty$, on appelle *fonction maximale* à cette approximation de l'identité la fonction $M_\varphi u$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$(5) \quad M_\varphi u(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\varphi_k * u(x)|.$$

Il est clair que cette fonction, obtenue comme la borne supérieure d'une suite de fonctions Lebesgue-mesurables sur $\mathbb{R}$, est Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8.2. — Soient $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité positive et $1 \leq p < \infty$ un réel. S'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$:

$$(6) \quad |\{x \in \mathbb{R} : M_\varphi u(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|u\|_p^p,$$

où $M_\varphi u$ désigne la fonction maximale de u associée à (φ_k) par (5), alors, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * u)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers u .

Remarque 8.3. — L'inégalité (6) est souvent appelée une inégalité *de type faible* (p, p) . Elle rappelle l'inégalité de Markov et l'inégalité de Tchebycheff, qui assure que si $1 \leq p < \infty$, un ensemble Lebesgue-mesurable $A \subseteq \mathbb{R}$, une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ sont donnés, alors on a :

$$(7) \quad |\{x \in A : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda^p} \int_A |f|^p,$$

où l'intégrale s'interprète comme $+\infty$ lorsque $|f|^p$ n'est pas intégrable sur A (auquel cas l'inégalité ci-dessus n'apporte aucune information).

En posant $A_\lambda := \{x \in A : |f(x)| > \lambda\}$ (qui est évidemment Lebesgue-mesurable), cette inégalité suit immédiatement du fait que l'on a, sur $\mathbb{R}$, $\lambda^p \chi_{A_\lambda} \leq |f|^p \chi_A$ et donc aussi, par intégration de cette dernière inégalité sur $\mathbb{R}$ dans le cas où $|f|^p$ est intégrable sur A :

$$\lambda^p |A_\lambda| \leq \int_A |f|^p = \|f\|_p^p.$$

Démonstration. — Pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on définit une fonction $\omega_f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$ pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\omega_f(x) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f(x) - \varphi_k * f(x)|.$$

Il suit immédiatement de cette définition que l'on a $\omega_f \leq |f| + Mf$ pour tout $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, où $Mf := M_\varphi f$ est la fonction maximale de f associée à (φ_k) par la formule (5) (on omettra, dans la suite de cette démonstration, l'indice φ). En outre, puisque (φ_k) est une approximation de l'identité positive, il suit de la Proposition 5.1 que (φ_k) est asymptotiquement normalisée et asymptotiquement locale. Par l'Affirmation 1 dans la démonstration de la Proposition 4.3, on sait donc que $(\varphi_k * g)$ converge uniformément vers g pour tout $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que l'on a $\omega_g = 0$ partout sur $\mathbb{R}$ pour tout $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$. Finalement, comme il est facile de voir que pour tous $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ on a $\omega_{f+g} \leq \omega_f + \omega_g$ sur $\mathbb{R}$, il vient sur $\mathbb{R}$, pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$:

$$\omega_f = \omega_{f-g+g} \leq \omega_{f-g} + \omega_g = \omega_{f-g} \quad \text{et} \quad \omega_{f-g} \leq \omega_f + \omega_{-g} = \omega_f,$$

puisque l'on a $\omega_g = 0$ partout sur $\mathbb{R}$; on a donc, sur $\mathbb{R}$, $\omega_f = \omega_{f-g}$.

Fixons à présent $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On va montrer que l'on a $\omega_u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$, ce qui suffira à conclure. Pour cela, commençons par fixer $\lambda > 0$ et montrons que l'on a $|\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > \lambda\}| = 0$. À cet effet, posons $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > \lambda\}$, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons, par densité de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ (voir l'Exercice 3), une fonction $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u - v\|_p \leq \varepsilon$. On vient de voir que l'on a $\omega_u = \omega_{u-v}$ sur $\mathbb{R}$. Si $x \in E_\lambda$ est donné, alors on a, puisque l'on a $\omega_{u-v} \leq |u - v| + M(u - v)$ sur $\mathbb{R}$:

$$M(u - v)(x) + |(u - v)(x)| \geq \omega_{u-v}f(x) = \omega_f(x) > \lambda.$$

Il vient donc nécessairement soit $M(u - v)(x) > \lambda/2$, soit $|(u - v)(x)| > \lambda/2$ (sans quoi on aurait $|(u - v)(x)| + M(u - v)(x) \leq \lambda/2 + \lambda/2 = \lambda$). Autrement dit, on a :

$$E_\lambda \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} : M(u - v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : |(u - v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Il vient donc en particulier :

$$|E_\lambda| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R} : M(u - v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R} : |(u - v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Or on a, par l'hypothèse (6) :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : M(u - v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2C}{\lambda^p} \|u - v\|_p^p \leq \frac{2C\varepsilon^p}{\lambda^p},$$

tandis qu'il résulte de l'inégalité de Markov (voir l'équation (7) dans la Remarque 8.3 ci-dessus) que l'on a :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |(u - v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda^p} \|u - v\|_p^p \leq \frac{2\varepsilon^p}{\lambda^p}.$$

Il vient donc finalement :

$$|E_\lambda| \leq 2\varepsilon^p \cdot \frac{1 + C}{\lambda^p}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité précédente, on trouve par conséquent $|E_\lambda| = 0$.

Il vient finalement :

$$\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 2^{-k}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2^{-k}}.$$

La sous-additivité de la mesure extérieure de Lebesgue assure dès lors que l'on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 0\}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |E_{2^{-k}}| = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a $\omega_u = 0$ hors d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$. C'est ce qu'il nous fallait démontrer. ■

La Proposition 8.2 admet une réciproque lorsque l'approximation de l'identité (φ_k) est localisée (au sens où il existe un compact hors duquel toutes les fonctions φ_k sont nulles presque partout), comme nous le verrons ci-dessous. Avant de pouvoir l'établir, il nous faut énoncer et démontrer quelques résultats préliminaires.

Lemme 8.4. — Soient $(a_k) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et $(b_k) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ deux suites de réels positifs. On suppose en outre que (b_k) est bornée et que l'on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_k} = +\infty$. Dans ces conditions, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_l)_l \subseteq \mathbb{N}$ et une suite d'entiers non nuls $(m_l)_l \subseteq \mathbb{N}^*$ telles que l'on ait :

$$\sum_{l=0}^{\infty} m_l a_{k_l} < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^{\infty} m_l b_{k_l} = +\infty.$$

Démonstration. — Choisissons une suite $(k_l)_l \subseteq \mathbb{N}$ strictement croissante de sorte que l'on ait, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

$$\frac{b_{k_l}}{a_{k_l}} \geq (l+1)^2.$$

Pour $l \in \mathbb{N}$, on choisit $m_l \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul vérifiant :

$$\frac{1}{(l+1)^3 a_{k_l}} \leq m_l \leq 2 + \frac{1}{(l+1)^3 a_{k_l}}.$$

Il est facile, à présent, de montrer que (k_l) et (m_l) vérifient les conditions demandées. ■

Lemme 8.5. — Soient $A \subseteq [0, 1]$ et $B \subseteq [0, 1]$ deux ensembles Lebesgue-mesurables. Dans ces conditions, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait :

$$|A \cap (x + B)| \geq \frac{1}{3} |A| |B|.$$

Démonstration. — Comme le résultat est clair si l'on a $|A| = 0$ ou $|B| = 0$, on peut supposer que l'on a $|A| > 0$ et $|B| > 0$.

Définissons une fonction intégrable η sur $\mathbb{R}$ par $\eta := \chi_{-B} * \chi_A$. Il résulte des théorèmes de Tonelli et Fubini et d'un changement de variable que l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \eta = \int_{\mathbb{R}} dy \chi_A(y) \int_{\mathbb{R}} \chi_{-B}(x-y) dx = \int_{\mathbb{R}} dy \chi_A(y) \int_{\mathbb{R}} \chi_{-B}(z) dz = |A| |B|.$$

En outre, on voit facilement que l'on a $\eta = 0$ hors de $[-1, 1]$ (si on a $|x| > 1$, alors il vient $\chi_A(y) \chi_{-B}(x-y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$).

Si l'on avait $\eta(x) \leq \frac{1}{3} |A| |B|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il viendrait alors :

$$|A| |B| = \int_{\mathbb{R}} \eta = \int_{[-1, 1]} \eta \leq \frac{2}{3} |A| |B|,$$

ce qui serait absurde. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\eta(x) > \frac{1}{3} |A| |B|$. Il vient alors :

$$\frac{1}{3} |A| |B| < \eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(y) \chi_{-B}(x-y) dy = \int_A \chi_{x+B}(y) dy = |A \cap (x + B)|,$$

et la démonstration est complète. ■

Lemme 8.6. — Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties Lebesgue-mesurables contenues dans $[0, 1]$ et qui vérifient $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| = \infty$. Dans ces conditions, il existe une suite $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ telle que l'on ait :

$$\left| [0, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k + A_k) \right| = 0.$$

Démonstration. — Pour démontrer ce lemme, construisons la suite (x_k) de proche en proche. À cet effet, posons $x_0 := 0$; si $x_0, \dots, x_n$ ont été construits pour un entier $n \in \mathbb{N}$, soit $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ un réel associé à $A := [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n (x_k + A_k)$ et $B := A_{n+1}$ par le Lemme 8.5. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons p_n la proportion de points de $[0, 1]$ recouverte par les $x_k + A_k$, $0 \leq k \leq n$:

$$p_n := \left| [0, 1] \cap \bigcup_{k=0}^n (x_k + A_k) \right|.$$

On écrit alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n + \left| \left[[0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n (x_k + A_k) \right] \cap (x_{n+1} + A_{n+1}) \right| \\ &\geq p_n + \frac{1}{3} \left| [0, 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n (x_k + A_k) \right| |x_{n+1} \cap A_{n+1}| = p_n + \frac{1}{3} (1 - p_n) |A_{n+1}|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$p_{n+1} - p_n \geq \frac{1}{3} (1 - p_n) |A_{n+1}|.$$

Il est clair que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante et majorée par 1, est convergente ; posons $p := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$, de sorte que l'on a $0 \leq p \leq 1$. Si l'on avait $p < 1$, alors on trouverait, pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} - p_n \geq \frac{1}{3} (1 - p) |A_{n+1}|,$$

et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (p_{n+1} - p_n)$ serait divergente puisque $\sum_{k \in \mathbb{N}} |A_k|$ l'est ; c'est absurde puisque $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On a donc $p = 1$, c'est-à-dire :

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| [0, 1] \cap \bigcup_{k=0}^n (x_k + A_k) \right| = \left| [0, 1] \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k + A_k) \right| ;$$

il vient donc, comme annoncé :

$$\left| [0, 1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k + A_k) \right| = 1 - \left| [0, 1] \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (x_k + A_k) \right| = 0.$$

■

Lemme 8.7. — Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties Lebesgue-mesurables contenues dans $[0, 1]$ et qui vérifient $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| = \infty$ et soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de longueur 1. Dans ces conditions, il existe une suite $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ et un ensemble Lebesgue-négligeable $N \subseteq I$ tels que l'on ait :

$$(8) \quad I \setminus N \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} (x_k + A_k).$$

Démonstration. — On peut évidemment supposer que l'on a $I = [0, 1]$.

Notons $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on ait $\sum_{l=0}^{\infty} |A_{b(j,l)}| = +\infty$. Étant donné $j \in \mathbb{N}$, on sait, par le Lemme 8.6, qu'il existe une suite $(x'_{j,l})_{l \in \mathbb{N}}$ telle que l'on ait $|N_j| = 0$, où l'on a posé :

$$N_j := [0, 1] \setminus \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (x'_{j,l} + A_{b(j,l)}).$$

On pose ensuite $N := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $x_k := x'_{b^{-1}(k)}$. Pour voir que N et (x_k) vérifient l'équation (8), fixons $x \in [0, 1] \setminus N$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on a $x \in [0, 1] \setminus N_j$, et il existe donc $l_j \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x \in x'_{j,l_j} + A_{b(j,l_j)}$. Or l'ensemble :

$$\{b(j, l_j) : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$$

est infini, et il existe donc $j \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $k := b(j, l_j) \geq n$. Mais il vient alors :

$$x \in x'_{j, l_j} + A_{b(j, l_j)} = x'_{b^{-1}(k)} + A_k = x_k + A_k,$$

et le lemme est démontré. ■

La proposition suivante est un résultat de presque recouvrement « infiniment souvent ».

Proposition 8.8. — *Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties Lebesgue-mesurables dont la réunion est bornée, et qui vérifient $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k| = \infty$. Dans ces conditions, il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels telle que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $x \in x_k + A_k$ infiniment souvent, c'est-à-dire telle que, pour un ensemble Lebesgue-négligeable $N \subseteq \mathbb{R}$, on ait :*

$$\mathbb{R} \setminus N \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} (x_k + A_k).$$

Démonstration. — Pour fixer les idées, supposons que l'on ait $A_k \subseteq [0, 1]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on peut toujours ce ramener à cette situation à l'aide d'une similitude).

Notons alors $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on ait $\sum_{l=0}^{\infty} |A_{b(j, l)}| = +\infty$. Soit également $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles de longueur 1 telle que l'on ait $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$. Par le Lemme 8.7, il existe pour chaque $j \in \mathbb{N}$, une suite $(x'_{j, k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ et un ensemble Lebesgue-négligeable $N_j \subseteq I_j$ tels que l'on ait :

$$(9) \quad I_j \setminus N_j \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \geq n} (x'_{j, l} + A_{b(j, l)}).$$

On pose à présent $N := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $x_k := x'_{b^{-1}(k)}$. On a alors :

$$\mathbb{R} \setminus N \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} (x_k + A_k).$$

Pour voir cela, fixons $x \in \mathbb{R} \setminus N$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe évidemment un entier $j \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x \in I_j$. On a alors $x \in I_j \setminus N \subseteq I_j \setminus N_j$. Il résulte dès lors de l'inclusion (9) que l'ensemble :

$$\{l \in \mathbb{N} : x \in x'_{j, l} + A_{b(j, l)}\}$$

est infini. Par conséquent, l'ensemble :

$$\{k \in \mathbb{N} : x \in x'_{b^{-1}(k)} + A_k\} \supseteq \{b(j, l) : l \in \mathbb{N}, x \in x'_{j, l} + A_{b(j, l)}\}$$

est infini lui aussi ; il existe donc $k \geq n$ tel que l'on ait $x \in x'_{b^{-1}(k)} + A_k = x_k + A_k$, et la proposition est démontrée. ■

La proposition suivante est une forme de « réciproque » à la Proposition 8.2 sous l'hypothèse de « localisation » de l'approximation de l'identité en jeu.

Proposition 8.9. — *Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité positive et $1 \leq p < \infty$ un réel. On suppose qu'il existe un intervalle borné en dehors duquel on a $\varphi_k = 0$ presque partout pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que, pour chaque $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la fonction maximale $M_{\varphi} u$ de u associée à (φ_k) par la formule (5), vérifie $M_{\varphi} u < +\infty$ sur un ensemble de mesure (extérieure) de Lebesgue strictement positive. Dans ces conditions, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :*

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_{\varphi} u(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

Démonstration. — Pour alléger les notations, on écrira, dans cette démonstration, Mu au lieu de $M_{\varphi} u$.

Commençons par nous restreindre aux cas où u est localisée dans un intervalle de longueur 1. Plus précisément, montrons l'affirmation suivante.

Affirmation 6. — Soit K un intervalle de longueur 1. Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ vérifiant $u = 0$ presque partout hors de K , et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{R} : Mu(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

Pour démontrer cette affirmation, commençons par remarquer que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que l'on a $K = [0, 1]$. Rappelons aussi qu'il existe, par hypothèse, un intervalle borné hors duquel on a $\varphi_k = 0$ presque partout pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Il est alors facile de voir que l'on peut trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\varphi_k * u = 0$ partout hors de l'intervalle $I := [-N, N]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute fonction $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ vérifiant $u = 0$ presque partout hors de $[0, 1]$. Si $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ est une telle fonction et que $\lambda > 0$ est donné, on a alors :

$$\{x \in \mathbb{R} : Mu(x) > \lambda\} = \{x \in I : Mu(x) > \lambda\}.$$

Procédons par l'absurde, et supposons que l'Affirmation 6 soit fausse. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existerait donc un réel $\lambda_k > 0$ et une fonction $v_k \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ vérifiant $v_k = 0$ hors de $[0, 1]$ et tels que l'on ait, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\{x \in I : Mv_k(x) > \lambda_k\}| = |\{x \in \mathbb{R} : Mv_k(x) > \lambda_k\}| > \frac{3^{kp}}{\lambda_k^p} \|v_k\|_p^p.$$

Quitte à remplacer, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, v_k par $|v_k|$ et à tirer profit de l'inégalité $M|v_k| \geq Mv_k$, aisée à vérifier sur $\mathbb{R}$, on peut supposer que l'on a $v_k \in \mathcal{L}_+^p(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, *i.e.* que (v_k) est en outre une suite de fonctions positives.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, cette inégalité se récrit, en posant $w_k := 2^k \lambda_k^{-1} v_k \in \mathcal{L}_+^p(\mathbb{R})$:

$$|\{x \in I : Mw_k(x) > 2^k\}| > \left(\frac{3^p}{2^p}\right)^k \|w_k\|_p^p ;$$

remarquons au passage que cette inégalité implique en particulier que l'on a $\|w_k\|_p > 0$ (sans quoi w_k serait nulle presque partout, et l'inégalité précédente se lirait $0 > 0$, ce qui serait absurde). Les suites de réels (strictement) positifs (a_k) et (b_k) définies pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$a_k := \|w_k\|_p^p \quad \text{et} \quad b_k := |\{x \in I : Mw_k(x) > 2^k\}|,$$

vérifient donc les hypothèses du Lemme 8.4. Il existe donc, en vertu de ce dernier lemme, une suite strictement croissante d'entiers $(k_l)_l \subseteq \mathbb{N}$ et une suite d'entiers non nuls $(m_l) \subseteq \mathbb{N}$ telles que l'on ait $\sum_{l=0}^{\infty} m_l a_{k_l} < +\infty$ et $\sum_{l=0}^{\infty} m_l b_{k_l} = +\infty$. Définissons alors une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_+^p(\mathbb{R})$ en posant $u_k := w_{k_0}$ pour $0 \leq k \leq m_0 - 1$ et, si $l \in \mathbb{N}$ est donné :

$$u_k := w_{k_{l+1}} \quad \text{pour} \quad \sum_{j=0}^l m_j \leq k \leq \left(\sum_{j=0}^{l+1} m_j\right) - 1.$$

Autrement dit, (u_k) est la suite :

$$\underbrace{w_{k_0}, \dots, w_{k_0}}_{m_0 \text{ fois}}, \underbrace{w_{k_1}, \dots, w_{k_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \underbrace{w_{k_2}, \dots, w_{k_2}}_{m_2 \text{ fois}}, \dots$$

où chaque fonction v_{k_l} , $l \in \mathbb{N}$ est répétée m_l fois. Il vient par conséquent :

$$(10) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p^p = \sum_{l=0}^{\infty} m_l \|w_{k_l}\|_p^p = \sum_{l=0}^{\infty} m_l a_{k_l} < +\infty.$$

Définissons aussi une suite $(\Lambda_k) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ en posant $\Lambda_k := 2^{k_0}$ pour $0 \leq k \leq m_0 - 1$ et, si $l \in \mathbb{N}$ est donné :

$$\Lambda_k := 2^{k_{l+1}} \quad \text{pour} \quad \sum_{j=0}^l m_j \leq k \leq \left(\sum_{j=0}^{l+1} m_j\right) - 1.$$

Il vient alors $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = +\infty$ et on écrit, en posant $A_k := \{x \in I : Mu_k(x) > \Lambda_k\}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$:

$$(11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |A_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |\{x \in I : Mu_k(x) > \Lambda_k\}| = \sum_{l=0}^{\infty} m_l |\{x \in I : Mw_{k_l}(x) > 2^{k_l}\}| = +\infty.$$

Observons aussi que l'ensemble A_k est Lebesgue-mesurable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Choisissons à présent, en vertu de la Proposition 8.8, une suite $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ de nombres réels tels et un ensemble Lebesgue-négligeable $N \subseteq \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\mathbb{R}^n \setminus N \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} (x_k + A_k).$$

Définissons aussi, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, une fonction $\tilde{u}_k \in \mathcal{L}_+^p(\mathbb{R})$ par la formule suivante pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{u}_k(x) := u_k(x - x_k).$$

Définissons à présent une fonction $\tilde{u}$ sur $\mathbb{R}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} \sup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{u}_k(x) & \text{si } (\tilde{u}_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bornée,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il vient, sur $\mathbb{R}$:

$$0 \leq \tilde{u}^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k^p.$$

Or on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le théorème du changement de variables :

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^n \tilde{u}_k^p = \sum_{k=0}^n \int_{\mathbb{R}} u_k^p = \sum_{k=0}^n \|u_k\|_p^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\|_p^p < \infty.$$

Il suit donc du théorème de convergence monotone que la série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{u}_k^p$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers une fonction intégrable ; le théorème de comparaison assure dès lors que $\tilde{u}^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'on a $\tilde{u} \in \mathcal{L}_+^p(\mathbb{R})$.

Si $k \in \mathbb{N}$ et $x \in x_k + A_k$ sont donnés, écrivons $x = x_k + y$ avec $y \in A_k$. On calcule alors, pour $l \in \mathbb{N}$, en effectuant un changement de variable :

$$\begin{aligned} \varphi_l * \tilde{u}_k(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_l(x - z) \tilde{u}_k(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \varphi_l(x - z) u_k(z - x_k) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_l(x - x_k - t) u_k(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi_k(y - t) u_k(t) dt = \varphi_l * u_k(y). \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$M\tilde{u}(x) \geq M\tilde{u}_k(x) \geq \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_l * \tilde{u}_k(x) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \varphi_l * u_k(y) > \Lambda_k,$$

puisque l'on a $y \in A_k$.

Finalement, si $x \in \mathbb{R} \setminus N$ est donné, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \geq n$ tel que l'on ait $x \in x_k + A_k$ et donc aussi :

$$M\tilde{u}(x) \geq \Lambda_k.$$

Comme on a $\Lambda_k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, ceci montre que l'on a $M\tilde{u}(x) = +\infty$. Il vient donc $M\tilde{u} = +\infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$, ce qui contredit les hypothèses de la proposition et achève la preuve de l'affirmation.

Pour démontrer la proposition dans le cas général, fixons $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$ et observons que l'on a, partout sur $\mathbb{R}$:

$$u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u \chi_{[j, j+1]}.$$

Posons alors, pour $j \in \mathbb{Z}$, $u_j := u\chi_{[j, j+1]}$. On a donc $u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j$ sur $\mathbb{R}$, mais aussi, sur $\mathbb{R}$:

$$u^p = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j^p,$$

d'où l'on tire également $\|u\|_p^p = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|u_j\|_p^p$. Posons par ailleurs, pour $j \in \mathbb{Z}$, $I_j := j + I$. Il est clair que l'on a $Mu_j = 0$ hors de I_j pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et on voit sans difficulté que l'on a aussi, sur $\mathbb{R}$:

$$Mu \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} Mu_j.$$

En outre, observons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{j \in \mathbb{Z} : x \in I_j\}$ contient au maximum $4N + 2$ éléments (rappelons que l'on a $I = [-N, N]$ et qu'il vient donc $I_j \cap I_k = (j + I) \cap (k + I) = \emptyset$ si $|j - k| > 2N$). Si $x \in \mathbb{R}^n$ est tel que l'on ait $Mu(x) > \lambda$, il vient alors :

$$\lambda < Mu(x) \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} Mu_j(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ x \in I_j}} Mu_j(x) ;$$

comme la dernière somme compte au maximum $4N + 2$ termes, il existe donc au moins un $j \in \mathbb{Z}$ vérifiant $x \in I_j$ et $Mu_j(x) > \frac{\lambda}{4N+2}$. Il vient donc, pour résumer ce qui précède :

$$\{x \in \mathbb{R} : Mu(x) > \lambda\} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{x \in \mathbb{R} : Mu_j(x) > \frac{\lambda}{4N+2}\right\}.$$

En utilisant alors la sous-additivité de la mesure (extérieure) de Lebesgue et l'Affirmation 6 pour chaque fonction u_j , $j \in \mathbb{Z}$, on trouve dès lors :

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R} : Mu(x) > \lambda\}| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \left\{x \in \mathbb{R} : Mu_j(x) > \frac{\lambda}{4N+2}\right\} \right| \\ &\leq \frac{c(4N+2)^p}{\lambda^p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|u_j\|_p^p = \frac{c(4N+2)^p}{\lambda^p} \|u\|_p^p. \end{aligned}$$

La proposition s'en déduit avec $C = c(4N+2)^p$. ■

Le théorème suivant résume ce que nous avons établi dans cette section.

Théorème 8.10 (Principe de Sawyer-Stein pour les approximations de l'identité positives)

Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité positive et $1 \leq p < \infty$ un réel. On suppose qu'il existe un intervalle borné en dehors duquel on a $\varphi_k = 0$ presque partout pour tout $k \in \mathbb{N}$. Les conditions suivantes sont équivalentes (on note $M_\varphi u$ la fonction maximale de u associée à (φ_k) par la formule (5)) :

- (i) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * u)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers u ;
- (ii) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on a $M_\varphi u < +\infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- (iii) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on a $M_\varphi u < +\infty$ sur un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive ;
- (iv) il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\varphi u(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

Démonstration. — Que (i) implique (ii) résulte du fait que si $(\varphi_k * u)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ pour $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la suite convergente $(\varphi_k * u(x))_k$ est bornée, de sorte que l'on a :

$$M_\varphi u(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\varphi_k * u(x)| < +\infty.$$

Il est clair que (ii) implique (iii). La Proposition 8.9 affirme précisément que (iii) implique (iv). Finalement, il résulte de la Proposition 8.2 que (iv) entraîne (i). ■

Le dernier résultat de cette section permet souvent de ramener un problème de convergence presque partout pour une approximation de l'identité (positive) donnée, au problème correspondant pour une approximation de l'identité « proche » de la suite initiale.

Lemme 8.11. — Soient $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ et $(\psi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ deux approximations de l'identité et $1 \leq p < \infty$ un réel. On suppose qu'il existe un intervalle borné en dehors duquel on a $\psi_k = 0$ presque partout et que l'on a :

$$(12) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|_1 < +\infty.$$

Supposons en outre que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée (on note $M_\psi u$ la fonction maximale de u associée à l'approximation de l'identité (ψ_k) par la formule (5)) :

- (i) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la suite $(\psi_k * u)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers u ;
- (ii) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on a $M_\psi u < +\infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- (iii) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on a $M_\psi u < +\infty$ sur un ensemble de mesure de Lebesgue strictement positive ;
- (iv) il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\psi u(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

Dans ces conditions, chacune des conditions suivantes est vérifiée (on note $M_\varphi u$ la fonction maximale de u associée à (φ_k) par la formule (5)) :

- (a) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * u)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$ vers u ;
- (b) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, on a $M_\varphi u < +\infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$;
- (c) il existe $C' > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\varphi u(x) > \lambda\}| \leq \frac{C'}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

Démonstration. — On sait, par le principe de Sawyer-Stein (Théorème 8.10) que les conditions (i) à (iv) sont équivalentes. Si l'une d'entre elles est satisfaite, on sait donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$(13) \quad |\{x \in \mathbb{R} : M_\psi u(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

Fixons à présent $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\varphi_k * u(x)| &\leq |(\varphi_k - \psi_k) * u(x)| + |\psi_k * u(x)| \\ &\leq |\varphi_k - \psi_k| * |u|(x) + M_\psi u(x) \leq \Delta * |u|(x) + M_\psi u(x), \end{aligned}$$

où $\Delta \in \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ est donnée pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par $\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k(x) - \varphi_k(x)|$ et vérifie $\|\Delta\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|_1 < +\infty$ (le fait qu'il existe une telle fonction $\Delta \in \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ étant une conséquence immédiate de l'hypothèse (12) et du théorème de convergence monotone). Il vient donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$M_\varphi u(x) \leq \Delta * |u|(x) + M_\psi u(x).$$

Fixons à présent $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. Observons que si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $M_\varphi u(x) > \lambda$, il vient alors soit $\Delta * |u|(x) > \lambda/2$, soit $M_\psi u(x) > \lambda/2$, de sorte que l'on peut écrire :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\varphi u(x) > \lambda\}| \leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \Delta * |u|(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : M_\psi u(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|.$$

Or il résulte de l'inégalité de Markov (voir la Remarque 8.3 ci-dessus) que l'on a :

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \Delta * |u|(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{2^p}{\lambda^p} \|\Delta * |u|\|_p^p \leq \frac{2^p}{\lambda^p} \|\Delta\|_1^p \|u\|_p^p = \frac{2^p \|\Delta\|_1^p}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

D'autre part, il résulte de (13) que l'on a :

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} : M_\psi u(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{2^p C}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

On trouve donc finalement :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\varphi u(x) > \lambda\}| \leq \frac{2^p (C + \|\Delta\|_1^p)}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

La condition (b) est donc satisfaite avec $C' = 2^p (C + \|\Delta\|_1^p)$. Il résulte à présent de la Proposition 8.2 que la condition (a) est satisfaite. Comme (a) entraîne facilement (b), la démonstration est complète. ■

Lemme 8.12. — Soient $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ et $(\psi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ deux approximations de l'identité et $1 \leq p < \infty$ un réel. On suppose qu'il existe un intervalle borné en dehors duquel on a $\varphi_k = 0$ et $\psi_k = 0$ presque partout, et que l'on a :

$$(14) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|_1 < +\infty.$$

Dans ces conditions, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite $(\varphi_k * u)$ converge presque partout vers u pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$;
- (ii) la suite $(\psi_k * u)$ converge presque partout vers u pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Il suffit évidemment de prouver que (i) entraîne (ii), quitte à intervertir les rôles de (φ_k) et (ψ_k) .

Supposons donc que la propriété (i) soit satisfaite, et notons, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $M_\varphi u$ la fonction maximale de u associée à l'approximation de l'identité (φ_k) par la formule (5), et $M_\psi u$ la fonction maximale de u associée à (ψ_k) et définie pour $x \in \mathbb{R}$ par la formule :

$$M_\psi u(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |\psi_k * u(x)|.$$

Puisque (i) est satisfaite, il est clair que pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\varphi_k * u(x))_k$ est convergente, et donc bornée, c'est-à-dire que l'on a $M_\varphi u(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Fixons à présent $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\psi_k * u(x)| &\leq |(\psi_k - \varphi_k) * u(x)| + |\varphi_k * u(x)| \\ &\leq |\psi_k - \varphi_k| * |u|(x) + M_\varphi u(x) \leq \Delta * |u|(x) + M_\varphi u(x), \end{aligned}$$

où $\Delta \in \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ est donnée pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par $\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k(x) - \varphi_k(x)|$ et vérifie $\|\Delta\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|_1 < +\infty$ (le fait qu'il existe une telle fonction $\Delta \in \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ étant une conséquence immédiate de l'hypothèse (12) et du théorème de convergence monotone). Il vient donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$M_\psi u(x) \leq \Delta * |u|(x) + M_\varphi u(x).$$

Puisque l'on a $M_\varphi u(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, il vient donc aussi $M_\psi u(x) < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

On vient d'établir que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $M_\psi u(x) < +\infty$. Il résulte dès lors du principe de Sawyer-Stein (Théorème 8.10) que $(\psi_k * u)$ converge presque partout vers u pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. ■

On se propose à présent de montrer, à titre d'exercice, que le principe de Sawyer-Stein a un équivalent dans les espaces *probabilisés*, et en particulier pour les approximations de l'identité dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{T})$.

Dans la suite, on travaille avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $1 \leq p < \infty$. On pose, pour alléger les notations, $\mathcal{L}^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. On dit qu'un opérateur linéaire $T : \mathcal{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$ est *continu en mesure* s'il satisfait la condition suivante :

(CM) si $(u_k) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifient $\|u_k - u\|_p \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\mu(\{x \in \Omega : |Tu_k(x) - Tu(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Exercice 10 (Principe de Banach). — On fixe à présent une suite (T_k) d'opérateurs linéaires continus en mesure sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ et on pose, pour $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $l \in \mathbb{N}$:

$$T^*u(x) := \sup_{k \in \mathbb{N}} |T_k u(x)| \quad \text{et} \quad T_l^*u(x) := \sup_{0 \leq k \leq l} |T_k(x)|.$$

On se propose de montrer que, dans ces conditions, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème 8.13. — Si, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, on a $T^*u(x) < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$, alors il existe une fonction décroissante $C :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ vérifiant $C(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, telle que l'on ait, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et tout $\lambda > 0$:

$$(15) \quad \mu(\{x \in \Omega : T^*u(x) > \lambda \|u\|\}) \leq C(\lambda).$$

On pourra, à cet effet, supposer désormais que l'on a $T^*u(x) < +\infty$ μ -presque partout sur Ω , pour chaque $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, et procéder comme suit.

1. Fixer $\varepsilon > 0$ et montrer que l'on a :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \mu(\{x \in \Omega : T^*u(x) > n\}) \leq \varepsilon\}.$$

2. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$F_n := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : \mu(\{x \in \Omega : T^*u(x) > n\}) \leq \varepsilon\}$$

est fermé.

Indication. Démontrer (et utiliser) le fait que, pour chaque $l \in \mathbb{N}$, l'opérateur T_l^* est continu en mesure en récrivant F_n à l'aide des opérateurs T_l^* .

3. Montrer qu'il existe par conséquent un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, ainsi que $u_0 \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $\delta > 0$ tels que l'on ait :

$$\mu(\{x \in \Omega : T^*(u_0 + \delta v)(x) > n_0\}) \leq \varepsilon,$$

pour chaque $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifiant $\|v\|_p \leq 1$.

4. En déduire que l'on a :

$$\mu\left(\left\{x \in \Omega : T^*v(x) > \frac{2n_0}{\delta}\right\}\right) \leq 2\varepsilon,$$

pour tout $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifiant $\|v\|_p \leq 1$.

5. Conclure.

Exercice 11. — Lorsqu'une suite (T_k) d'opérateurs linéaires et continus en mesure sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifie une condition du type (15), la convergence μ -presque partout sur Ω de la suite de fonctions $(T_k u)$ est assurée pour chaque $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ dès qu'on la sait vérifiée sur une partie dense de $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Le théorème suivant le montre.

Théorème 8.14. — Soit (T_k) une suite d'opérateurs linéaires et continus en mesure sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifiant l'inégalité (15) pour une fonction décroissante $C :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ vérifiant $C(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$. Alors l'ensemble

$$C := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : (T_k u) \text{ converge } \mu\text{-presque partout sur } \Omega\}$$

est fermé.

Pour prouver ce théorème, on pourra procéder comme suit.

1. Poser, pour $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $x \in \Omega$:

$$R(x, u) := \overline{\lim}_{j, k \rightarrow \infty} |T_j u(x) - T_k u(x)|$$

et montrer que l'on a $R(x, u) \leq 2T^*u(x)$.

2. En déduire que l'on a, pour $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$:

$$\mu(\{x \in \Omega : R(x, u) > \lambda \|u\|_p\}) \leq C\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

pour tout $\lambda > 0$.

3. En déduire que pour $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $v \in C$, on a :

$$\mu(\{x \in \Omega : R(x, u) > \lambda \|u - v\|_p\}) \leq C\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

4. Déduire de ce qui précède que si $u \in \text{adh}_{\mathcal{L}^p(\Omega)} C$ est donné, alors on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mu(\{x \in \Omega : R(x, u) > \varepsilon\}) \leq C\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right).$$

5. Conclure que $(T_k u)$ est μ -presque partout convergente.

Exercice 12. — Déduire des deux exercices précédents que si (T_k) est une suite d'opérateurs admissibles sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ telle qu'il existe $D \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega)$, dense dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$ avec la propriété que $(T_k u)$ soit μ -presque partout convergente sur Ω pour tout $u \in D$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(T_k u)$ est μ -presque partout convergente sur Ω , pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$;
- (ii) la suite (T_k) vérifie une condition du type (15), avec $C :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ décroissante et telle que $C(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$.

On suppose à présent que Ω est muni d'une famille $\mathcal{E}$ de transformations μ -mesurables $E : \Omega \rightarrow \Omega$ vérifiant $\mu(E^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$; on suppose également que $\mathcal{E}$ mélange Ω au sens suivant :

$$(\forall \alpha > 1)(\forall A, B \in \mathcal{F})(\exists E \in \mathcal{E}) : \mu(A \cap E^{-1}B) \leq \alpha \mu(A)\mu(B).$$

On pose, pour $E \in \mathcal{E}$ et $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, $Eu = u \circ E$.

On se donne, comme précédemment, une suite d'opérateurs linéaires continus en mesure $T_k : \mathcal{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}^p(\Omega)$ et on suppose en outre que :

- T_k est positif pour tout $k \in \mathbb{N}$ (i.e. on a $Tu \geq 0$ μ -p.p. pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifiant $u \geq 0$ μ -p.p.) ;
- pour tous $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et $E \in \mathcal{E}$, on a $T^*(Eu) \geq E(T^*u)$.

Exercice 13 (Principe de Sawyer-Stein dans les espaces probabilisés)

On se propose de démontrer que, dans les conditions précédentes, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $T^*u < +\infty$ μ -presque partout pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$;

(ii) il existe $0 < C < \infty$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$\mu(\{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) : T^*u(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|_p^p.$$

On pourra, pour démontrer que (i) implique (ii), procéder comme suit.

1. Utiliser le fait que $\mathcal{E}$ mélange Ω pour montrer que, si $l \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{F}$ vérifient $(l+1)\mu(A) \geq 1$, alors il existe $E_0, E_1, \dots, E_l \in \mathcal{E}$ pour lesquels on a :

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^l E_k^{-1}A\right) \geq \frac{1}{2}.$$

On fixe désormais $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ vérifiant $\|u\|_p = 1$ et $u \geq 0$, μ -p.p. et on pose, pour $\lambda > 0$ donné :

$$A := \{x \in \Omega : T^*u(x) > \lambda\}.$$

2. Étant donné $l \in \mathbb{N}$, $E_0, \dots, E_l \in \mathcal{E}$ et $M > 0$ vérifiant $M^p \geq l+1$, posons $u_k := E_k u$ pour $0 \leq k \leq l$ ainsi que :

$$F := \frac{1}{M} \max_{0 \leq k \leq l} u_k.$$

Montrer que l'on a alors $\|F\| \leq 1$ et :

$$\bigcup_{k=0}^l E_k^{-1}A \subseteq \left\{x \in \Omega : T^*F(x) \geq \frac{\lambda}{M}\right\}.$$

3. En utilisant le principe de Banach, montrer qu'il existe un choix de l du type $l \simeq C\lambda^p$ (et un choix de M correspondant) tel que l'on ait, pour tout choix de $E_0, \dots, E_l \in \mathcal{E}$ (en conservant les notations utilisées au point précédent) :

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^l E_k^{-1}A\right) < \frac{1}{2}.$$

4. En déduire que l'on a alors, pour un bon choix de $C > 0$ (indépendant de u et λ) :

$$\mu(\{x \in \Omega : T^*u(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p}.$$

5. Conclure.

On travaille à présent dans l'espace probabilisé $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (identifié au besoin avec un intervalle de longueur 1) muni de la mesure extérieure de Lebesgue et on fixe $1 \leq p < \infty$.

Exercice 14. — On pose $\mathcal{T} := \{\tau_h : h \in \mathbb{R}\}$ où, pour $h \in \mathbb{R}$, $\tau_h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ est défini par $\tau_h(x) := (x+h) \bmod 1$. Montrer que $\mathcal{T}$ mélange $\mathbb{T}$.

Exercice 15. — Soit (ρ_k) une approximation de l'identité positive sur $\mathbb{T}$, i.e. une suite $(\rho_k) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\rho_k \geq 0$ presque partout, pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- $\|\rho_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$;
- pour tout $0 < \delta < \frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{1-\delta} \rho_k(x) dx = 0.$$

Étant donné $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, définissons aussi une fonction mesurable Pu sur $\mathbb{T}$ en posant, pour $x \in \mathbb{T}$:

$$Pu(x) := \sup_k |\rho_k * u(x)|.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(\rho_k * u)$ converge presque partout pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$;

(ii) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, on a :

$$Pu(x) < +\infty \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{T};$$

(iii) il existe $0 < C < \infty$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{T} : Pu(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|^p.$$

Exercice 16. — Soient $\tau : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ une application mesurable et inversible vérifiant $|\tau^{-1}A| = |A|$ pour toute partie mesurable A de $\mathbb{T}$, $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ et $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites d'entiers avec $\lim_k l_k = +\infty$. On définit, pour $k \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, une fonction $M_k u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ en posant, pour $x \in \mathbb{T}$:

$$M_k u(x) := \frac{1}{l_k + 1} \sum_{l=0}^{l_k} u(\tau^{n_k+l} x).$$

Étant donné $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, on définit encore une fonction mesurable Mu sur $\mathbb{T}$ en posant, pour $x \in \mathbb{T}$:

$$Mu(x) := \sup_k |M_k u(x)|.$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes si τ est *ergodique* (i.e. si les seules fonctions mesurables τ -invariantes sont les constantes) :

- (i) $(M_k u)$ converge presque partout pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$;
- (ii) pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$, on a :

$$Mu(x) < +\infty \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{T};$$

(iii) il existe $0 < C < \infty$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{T})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{T} : Mu(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \|u\|^p.$$

Indication. On pourra étudier le comportement de $M_k u(x)$ pour u de la forme $v - v \circ \tau + c$ avec $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{T})$ et $c \in \mathbb{R}$.

9. Intervalles et fonction maximale dyadiques

Les intervalles dyadiques sont très utiles en analyse.

Définition 9.1. — Un *intervalle dyadique de génération* $k \in \mathbb{Z}$ est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ de la forme :

$$I = [j2^k, (j+1)2^k[,$$

pour un entier $j \in \mathbb{Z}$; on note $\mathcal{D}_k$ la collection des intervalles dyadiques de génération k .

On pose aussi $\mathcal{D} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$ et on appelle *intervalle dyadique* tout élément de $\mathcal{D}$; observons que $\mathcal{D}$ est dénombrable.

Étant donné $I \in \mathcal{D}$, on note $\text{gen}(I) \in \mathbb{Z}$ l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ pour lequel on a $I \in \mathcal{D}_k$ (on l'appelle la *génération* de I) ; il vient évidemment $|I| = 2^{\text{gen}(I)}$ pour tout $I \in \mathcal{D}$.

Finalement, si $I \in \mathcal{D}$ est donné, on note $\hat{I}$ l'unique intervalle dyadique de génération $\text{gen}(I) + 1$ tel que l'on ait $I \subseteq \hat{I}$; on l'appelle le *parent* de I .

Remarque 9.2. — Si $I, J \in \mathcal{D}$ sont deux intervalles dyadiques, on a soit $I \subseteq J$, soit $J \subseteq I$, soit $I \cap J = \emptyset$.

En outre, si $I, J \in \mathcal{D}$ vérifient $I \not\subseteq J$, on a nécessairement $|J| \geq 2|I|$.

Isoler, dans une collection d'intervalles dyadiques, les éléments maximaux est un outil clef en analyse réelle.

Lemme 9.3. — Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ est une collection d'intervalles dyadiques et que l'on a :

$$\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| < +\infty,$$

alors il existe une famille au plus dénombrable $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ vérifiant $\cup \mathcal{C}^* = \cup \mathcal{C}$, constituée d'intervalles deux à deux disjoints et maximaux (pour l'inclusion) dans $\mathcal{C}$ au sens suivant : si $I \in \mathcal{C}^*$ et $J \in \mathcal{C}$ vérifient $I \subseteq J$, on a nécessairement $I = J$.

Démonstration. — Commençons par observer que l'hypothèse se réécrit $\sup_{I \in \mathcal{C}} \text{gen}(I) < +\infty$. Il existe donc un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{k=-\infty}^{k_0} \mathcal{D}_k$. Par conséquent $\mathcal{C}$ admet des éléments maximaux pour l'inclusion. Pour le voir, on peut observer, par exemple, que $\mathcal{C}$ muni de l'inclusion est un ensemble ordonné inductif (en montrant que si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ est totalement ordonné par l'inclusion, alors $\cup \mathcal{E}$ est un intervalle dyadique qui contient tous les éléments de $\mathcal{E}$) et appliquer le lemme de Zorn, ou raisonner par l'absurde comme suit. Supposons que $\mathcal{C}$ n'admette aucun élément maximal et fixons $I_0 \in \mathcal{C}$. Comme I_0 n'est pas maximal, il existe $I_1 \in \mathcal{C}$ vérifiant $I_1 \not\supseteq I_0$; mais alors on a $|I_1| \geq 2|I_0|$ en vertu de la Remarque 9.2. De proche en proche, on construit une suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ d'intervalles dyadiques vérifiant $I_k \subsetneq I_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $|I_k| \geq 2^k |I_0|$. C'est impossible puisqu'il viendrait alors $\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = +\infty$.

Notons à présent $\mathcal{C}_*$ la collection des éléments maximaux de $\mathcal{C}$ pour l'inclusion ; elle est au plus dénombrable puisque l'on a (évidemment) $\mathcal{C}_* \subseteq \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est dénombrable.

Pour commencer, montrons que $\mathcal{C}_*$ est constituée d'intervalles deux à deux disjoints. À cet effet, fixons $I, J \in \mathcal{C}$ avec $I \neq J$. On sait que l'on a soit $I \subseteq J$, soit $J \subseteq I$, soit $I \cap J = \emptyset$. Les deux premières possibilités conduisant à avoir $I = J$ par maximalité de I et J , il vient nécessairement $I \cap J = \emptyset$.

Pour montrer à présent que l'on a $\cup \mathcal{C}_* = \cup \mathcal{C}$, fixons $I \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_*$ et montrons que l'on a $I \subseteq \cup \mathcal{C}_*$. Puisque I n'est pas maximal dans $\mathcal{C}$ pour l'inclusion, il existe donc $I_0 \in \mathcal{C}$ vérifiant $I_0 \not\supseteq I$. Si on a $I_0 \in \mathcal{C}_*$, alors on a $I \subsetneq I_0 \subseteq \cup \mathcal{C}_*$ et l'inclusion souhaitée est démontrée. Sinon, on construit de proche en proche, tant que l'on a $I_k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_*$, un intervalle dyadique $I_{k+1} \in \mathcal{C}$ vérifiant $I_{k+1} \not\supseteq I_k$ pour tout k et $|I_{k+1}| \geq 2^{k+1} |I_0|$. Cette procédure ne peut continuer indéfiniment, sans quoi on aurait à nouveau $\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = +\infty$. Il existe donc un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $I_{k_0+1} \in \mathcal{C}_*$, d'où il résulte que l'on a $I \subseteq I_{k_0+1} \subseteq \cup \mathcal{C}_*$. La démonstration est complète. ■

La fonction maximale dyadique rappelle la fonction maximale de Hardy-Littlewood.

Définition 9.4. — Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable, on définit la fonction maximale dyadique $M_\Delta f$ de f en posant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$M_\Delta f(x) := \sup_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \ni x}} \int_I |f| = \sup_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \ni x}} \frac{1}{|I|} \int_I |f|.$$

Comme la fonction maximale de Hardy-Littlewood, la fonction maximale dyadique vérifie une inégalité faible ; il n'est toutefois pas nécessaire, avec la fonction maximale dyadique, d'introduire une constante 5 dans cette inégalité.

Proposition 9.5. — Étant donné $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$, on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta u(x) > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|_1.$$

Démonstration. — Fixons $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$ et posons $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : M_\Delta u(x) > \lambda\}$.

Commençons par observer que si $I \in \mathcal{D}$ est un intervalle dyadique, alors on a :

$$\int_I |u| = \frac{1}{|I|} \int_I |u| \leq \frac{1}{|I|} \int_{\mathbb{R}} |u| = \frac{\|u\|_1}{|I|}.$$

Si $I \in \mathcal{D}$ vérifie $|I| \geq \|u\|_1/\lambda$, il viendra dès lors $f_I |u| \leq \lambda$.

Posons à présent :

$$\mathcal{C} := \left\{ I \in \mathcal{D} : \int_I |u| > \lambda \right\}.$$

Par ce que nous venons d'observer, il est clair que l'on a :

$$\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| \leq \frac{\|u\|_1}{\lambda} < +\infty.$$

Le Lemme 9.3 fournit dès lors une famille au plus dénombrable $\mathcal{C}_* \subseteq \mathcal{C}$ vérifiant $\cup \mathcal{C}_* = \cup \mathcal{C}$, constituée d'intervalles deux à deux disjoints et maximaux pour l'inclusion dans $\mathcal{C}$.

Observons que l'on a $E_\lambda = \cup \mathcal{C}$. Si, en effet, $x \in E_\lambda$ est donné, alors on a $M_\Delta u(x) > \lambda$ et il existe donc par définition un intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ tel que l'on ait $f_I |u| > \lambda$, d'où l'on tire $I \in \mathcal{C}$ et donc aussi $x \in I \subseteq \cup \mathcal{C}$. Réciproquement, si $I \in \mathcal{C}$ est donné, alors on a $f_I |u| > \lambda$ et donc il vient $M_\Delta u(x) \geq f_I |u| > \lambda$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire $I \subseteq E_\lambda$. Il vient donc, puisque l'on a $\cup \mathcal{C}_* = \cup \mathcal{C}$ et que les intervalles de $\mathcal{C}$ sont deux à deux disjoints :

$$|E_\lambda| = |\cup \mathcal{C}| = |\cup \mathcal{C}_*| = \sum_{I \in \mathcal{C}_*} |I| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{C}_*} \int_I |u| < \frac{1}{\lambda} \|u\|_1,$$

où l'on a utilisé que les éléments de $\mathcal{C}_* \subseteq \mathcal{C}$ vérifient $\frac{1}{|I|} \int_I |u| = f_I |u| > \lambda$. C'est l'inégalité annoncée. ■

L'inégalité maximale précédente a une conséquence qui rappelle le théorème de dérivation de Lebesgue.

Proposition 9.6. — *Étant donné $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$(16) \quad u(x) = \lim_{\substack{x \in I \in \mathcal{D} \\ |I| \rightarrow 0}} \int_I u.$$

Remarque 9.7. — Dans l'énoncé de la proposition précédente, (16) signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $I \in \mathcal{D}$ vérifie $I \ni x$ et $|I| \leq \delta$, alors on a $|u(x) - \int_I u| \leq \varepsilon$.

Démonstration. — Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\delta > 0$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\omega_f(x, \delta) := \sup \left\{ \left| f(x) - \int_I f \right| : I \in \mathcal{D}, I \ni x, |I| \leq \delta \right\}.$$

Il est clair que l'on a, pour tous $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\delta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\omega_f(x, \delta) \leq |f(x)| + \sup \left\{ \int_I |f| : I \in \mathcal{D}, I \ni x, |I| \leq \delta \right\} \leq |f(x)| + M_\Delta f(x).$$

On pose finalement, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\omega_f(x) := \inf_{\delta > 0} \omega_f(x, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(x, \delta).$$

Il suit de ce qui précède que l'on a $\omega_f \leq |f| + M_\Delta f$ partout sur $\mathbb{R}$.

Il est par ailleurs facile de voir que l'on a $\omega_g = 0$ partout sur $\mathbb{R}$ pour tout $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et que, pour tous $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $\omega_{f+g} \leq \omega_f + \omega_g$ sur $\mathbb{R}$.

Il vient donc, sur $\mathbb{R}$, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$:

$$\omega_f = \omega_{f-g+g} \leq \omega_{f-g} + \omega_g = \omega_{f-g} \quad \text{et} \quad \omega_{f-g} \leq \omega_f + \omega_{-g} = \omega_f,$$

puisque l'on a $\omega_g = 0$ partout sur $\mathbb{R}$; on a donc, sur $\mathbb{R}$, $\omega_f = \omega_{f-g}$.

Fixons à présent $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On va montrer que l'on a $\omega_u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$, ce qui suffira à conclure. À cette fin, commençons par fixer $\lambda > 0$ et montrons que l'on a $|\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > \lambda\}| = 0$.

À cet effet, posons $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > \lambda\}$, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons, par densité de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (voir l'Exercice 3), une fonction $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u - v\|_1 \leq \varepsilon$. On vient de voir que l'on a $\omega_u = \omega_{u-v}$ sur $\mathbb{R}$. Si $x \in E_\lambda$ est donné, alors on a, puisque l'on a $\omega_{u-v} \leq |u - v| + M_\Delta(u - v)$ sur $\mathbb{R}$:

$$M_\Delta(u - v)(x) + |(u - v)(x)| \geq \omega_{u-v}f(x) = \omega_f(x) > \lambda.$$

Il vient donc nécessairement soit $M_\Delta(u - v)(x) > \lambda/2$, soit $|(u - v)(x)| > \lambda/2$ (sans quoi on aurait $|(u - v)(x)| + M_\Delta(u - v)(x) \leq \lambda/2 + \lambda/2 = \lambda$). Autrement dit, on a :

$$E_\lambda \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta(u - v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : |(u - v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Il vient donc en particulier :

$$|E_\lambda| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta(u - v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R} : |(u - v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Or la Proposition 9.5 assure que l'on a d'une part :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta(u - v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|u - v\|_1 \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda},$$

tandis qu'il résulte de l'inégalité de Markov (voir l'équation (7) dans la Remarque 8.3 ci-dessus) que l'on a :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |(u - v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|u - v\|_1 \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda}.$$

Il vient donc finalement :

$$|E_\lambda| \leq \varepsilon \cdot \frac{4}{\lambda}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité précédente, on trouve par conséquent $|E_\lambda| = 0$.

Il vient finalement :

$$\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 2^{-k}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2^{-k}}.$$

La sous-additivité de la mesure extérieure de Lebesgue assure dès lors que l'on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 0\}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |E_{2^{-k}}| = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a $\omega_u = 0$ hors d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$. C'est ce qu'il nous fallait démontrer. ■

10. Décompositions de Calderón-Zygmund

Les décompositions de Calderón-Zygmund sont un outil fondamental en analyse harmonique ; nous les utiliserons, dans la section suivante, pour démontrer un théorème de convergence presque partout de sous-suites universelles d'une approximation de l'identité positive dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Théorème 10.1 (Décomposition de Calderón-Zygmund). — Soient $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. Il existe $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, une famille au plus dénombrable $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ d'intervalles dyadiques deux à deux disjoints et, pour chaque $I \in \mathcal{B}$, une fonction $b_I \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tels que l'on ait :

$$u = v + \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$$

presque partout sur $\mathbb{R}$, ainsi que les propriétés suivantes :

- (i) $\|v\|_\infty \leq \lambda$;
- (ii) pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a $b_I = 0$ hors de I ;

- (iii) pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a $\|b_I\|_1 \leq \lambda|I|$;
- (iv) pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a $\int_{\mathbb{R}} b_I = 0$;
- (v) $\sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq \frac{4}{\lambda} \|u\|_1$.

Démonstration. — Remarquons pour commencer, comme dans la preuve de la Proposition 9.5, que l'on aura $f_I |u| \leq \lambda/4$ dès que $I \in \mathcal{D}$ vérifie $|I| \geq 4\|u\|_1/\lambda$.

Posons à présent :

$$\mathcal{C} := \left\{ I \in \mathcal{D} : \int_I |u| > \frac{\lambda}{4} \right\}.$$

Nous venons d'observer que l'on doit avoir :

$$\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| < \frac{4\|u\|_1}{\lambda} < +\infty.$$

Il existe donc, en vertu du Lemme 9.3, une famille au plus dénombrable $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ vérifiant $\cup \mathcal{B} = \cup \mathcal{C}$, constituée d'intervalles deux à deux disjoints et maximaux pour l'inclusion dans $\mathcal{C}$.

On définit alors des fonctions Lebesgue-mesurables $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour tout $I \in \mathcal{B}$, $b_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour $x \in \mathbb{R}$:

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \notin \cup \mathcal{B}, \\ f_I u & \text{si } x \in I \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

et, pour $I \in \mathcal{B}$:

$$b_I(x) := \begin{cases} u(x) - v(x) = u(x) - f_I u & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que l'on a $u = v + \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$ sur $\mathbb{R}$.

Pour prouver (i), commençons par noter $N \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble Lebesgue-négligeable tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$, on ait :

$$|u(x)| = \lim_{\substack{x \in I \in \mathcal{D} \\ |I| \rightarrow 0}} \int_I |u|.$$

Si $x \in \cup \mathcal{B}$ est donné, alors il ne peut exister *aucun* intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ contenant x qui vérifie $\int_I |u| > \frac{\lambda}{4}$: si un tel intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ existait, il viendrait $I \in \mathcal{C}$ et on aurait dès lors $x \in I \subseteq \cup \mathcal{C} = \cup \mathcal{B}$, ce qui est absurde. Par conséquent, il vient $\int_I |u| \leq \frac{\lambda}{4}$ pour *tout* intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ contenant x . Si, en outre, on a $x \notin N$, alors on trouvera par conséquent :

$$|v(x)| = |u(x)| = \lim_{\substack{x \in I \in \mathcal{D} \\ |I| \rightarrow 0}} \int_I |u| \leq \frac{\lambda}{4}.$$

Il vient donc $|v| \leq \lambda/4$ presque partout sur $\mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{B}$.

Si $x \in I \in \mathcal{B}$ est donné, alors on calcule :

$$|v(x)| = \left| \int_I u \right| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |u| \leq \frac{1}{|\hat{I}|} \int_{\hat{I}} |u| = \frac{|\hat{I}|}{|I|} \int_{\hat{I}} |u| = 2 \int_{\hat{I}} |u|,$$

où $\hat{I} \in \mathcal{D}_{\text{gen}(I)+1}$ est le parent de I (voir la Définition 9.1 ci-dessus). Or comme I est maximal pour l'inclusion dans $\mathcal{C}$ et que l'on a $I \subsetneq \hat{I}$, il vient nécessairement $\hat{I} \notin \mathcal{C}$, c'est-à-dire $\int_{\hat{I}} |u| \leq \frac{\lambda}{4}$. L'inégalité ci-dessus donne alors :

$$|v(x)| \leq 2 \int_{\hat{I}} |u| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Il vient donc $|v| \leq \lambda/2$ partout sur $\cup \mathcal{B}$.

La propriété (i) s'ensuit aussitôt puisque l'on a montré l'inégalité $|v| \leq \lambda$ (et même $|v| \leq \lambda/2$) presque partout sur $\mathbb{R}$. Il vient en particulier $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Fixons $I \in \mathcal{B}$. Il est clair, par définition, que l'on a $b_I = 0$ hors de I (ce qui établit (ii)). Il vient dès lors :

$$\int_{\mathbb{R}} b_I = \int_I (u - \mathcal{F}_I u) = \int_I u - |I| \int_I u = \int_I u - \int_I u = 0,$$

ce qui démontre (iv). Mais on calcule aussi :

$$\begin{aligned} \|b_I\|_1 &= \int_I |u - \mathcal{F}_I u| \leq \int_I |u| + |I| \int_I |u| \leq \int_I |u| + \int_I |u| \\ &= 2 \int_I |u| \leq 2 \int_{\hat{I}} |u| = 2|\hat{I}| \int_{\hat{I}} |u| \leq 4|I| \cdot \frac{\lambda}{4} = \lambda|I|, \end{aligned}$$

puisque l'on a à nouveau $\hat{I} \notin \mathcal{C}$ et donc $\mathcal{F}_{\hat{I}}|u| \leq \lambda/4$. Le point (iii) est ainsi vérifié.

Finalement, puisque l'on a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ et qu'il vient donc $\mathcal{F}_I|u| > \lambda/4$, c'est-à-dire $|I| \leq \frac{4}{\lambda} \int_I |u|$ pour tout $I \in \mathcal{B}$, on écrit :

$$\sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq \frac{4}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{B}} \int_I |u| \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |u| = \frac{4}{\lambda} \|u\|_1,$$

puisque les intervalles de $\mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints. La propriété (v) est ainsi vérifiée à son tour.

Comme il résulte par ailleurs de (iv) et (v) que l'on a :

$$\sum_{I \in \mathcal{B}} \|b_I\|_1 \leq \lambda \sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq 4\|u\|_1,$$

on voit que la fonction b définie sur $\mathbb{R}$ par $b := \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$, vérifie $b \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et on a donc aussi $v = u - b \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La démonstration est complète. ■

11. Sous-suites « universelles » pour la convergence presque partout dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Commençons par deux résultats d'approximation. Le premier affirme la possibilité d'approcher en moyenne une approximation de l'identité positive par une approximation de l'identité (positive) normalisée et localisée autour de 0.

Lemme 11.1. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité positive. Il existe une approximation de l'identité positive et normalisée $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\|\varphi_k - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et pour laquelle il existe une suite $(\delta_k) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ de réels (strictement) positifs vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\psi_k = 0$ hors de $[-\delta_k, \delta_k]$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$.

Démonstration. — Par la Proposition 5.1, on sait déjà que (φ_k) est asymptotiquement normalisée, i.e. que l'on a $\|\varphi_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$, et asymptotiquement locale, i.e. que, pour tout $\delta > 0$, on a $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]} \varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Il existe donc un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq k_0$, on ait $\int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \varphi_k \leq 1$. De proche en proche, si $k_0 < \dots < k_j$ sont construits pour $j \in \mathbb{N}$, on choisit $k_{j+1} \in \mathbb{N}$ un entier vérifiant $k_{j+1} > k_j$ et tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq k_{j+1}$, on ait $\int_{\mathbb{R} \setminus [-2^{-j-1}, 2^{-j-1}]} \varphi_k \leq 2^{-j-1}$. On définit alors une suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ de réels (strictement) positifs décroissant vers 0 en posant, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\delta_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k < k_1, \\ 2^{-j} & \text{si } k_j \leq k < k_{j+1} \text{ pour un } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Par construction, il vient évidemment $\int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et donc aussi, puisque (φ_k) est normalisée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_k - \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k \right) = 1 - 1 = 0.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons alors $\alpha_k := \int_{[-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k$, choisissons un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\alpha_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq l$ et définissons une fonction $\psi_k \in \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$\psi_k := \begin{cases} \chi_{[0,1]} & \text{si } k < l, \\ \alpha_k^{-1} \varphi_k \chi_{[-\delta_k, \delta_k]} & \text{si } k \geq l. \end{cases}$$

Il est clair que $(\psi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ est normalisée et asymptotiquement locale (c'est donc une approximation de l'identité par la Proposition 4.3) et que l'on a, pour $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq l$:

$$\|\varphi_k - \psi_k\|_1 = \alpha_k^{-1} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k + |1 - \alpha_k^{-1}| \int_{[-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k.$$

Comme on a $\alpha_k \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$ et $\int_{[-\delta_k, \delta_k]} \varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, il vient bien $\|\varphi_k - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. ■

Le lemme suivant est encore plus spécifique puisque l'approximation de l'identité par laquelle on approche l'approximation de l'identité initiale y est constituée de fonctions en escalier.

Lemme 11.2. — Soit $(\varphi_k) \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ une approximation de l'identité positive. Il existe une approximation de l'identité positive et normalisée $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\|\varphi_k - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et telle que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, ψ_k soit de la forme :

$$(17) \quad \psi_k = r_k^{-1} \sum_{i=-R_k}^{R_k} c_{i,k} \chi_{[ir_k, (i+1)r_k]},$$

avec $r_k > 0$, $R_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ainsi que :

- (a) $c_{i,k} \geq 0$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $-R_k \leq i \leq R_k - 1$;
- (b) $\sum_{i=-R_k}^{R_k-1} c_{i,k} = 1$;
- (c) $R_k r_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Démonstration. — Le Lemme 11.1 permet de supposer, sans perte de généralité, que (φ_k) est normalisée et qu'il existe une suite $(\delta_k) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ de réels (strictement) positifs vérifiant $\delta_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et telle que l'on ait $\varphi_k = 0$ hors de $[-\delta_k, \delta_k]$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe par densité (voir l'Exercice 3) une fonction $\tilde{\theta}_k \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|\varphi_k - \tilde{\theta}_k\|_1 \leq 2^{-k-1}$. Comme on a $\varphi_k(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que l'on a $|\varphi_k(x) - \tilde{\theta}_k(x)| \geq |\varphi_k(x) - \tilde{\theta}_k^+(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (où l'on a posé $\tilde{\theta}_k^+ := \max(\tilde{\theta}_k, 0)$) et donc aussi $\|\varphi_k - \tilde{\theta}_k^+\|_1 \leq \|\varphi_k - \tilde{\theta}_k\|_1 \leq 2^{-k-1}$. Quitte à remplacer $\tilde{\theta}_k$ par $\tilde{\theta}_k^+$ si nécessaire, on peut donc supposer que l'on a $\tilde{\theta}_k \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons alors $\theta_k := \tilde{\theta}_k \chi_k \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R})$, où $\chi_k \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R})$ est définie par :

$$\chi_k := \min \left\{ 0, \max \left[1, \frac{1}{\delta_k} (2\delta_k - |x|) \right] \right\},$$

de sorte que l'on ait $0 \leq \chi_k \leq \chi_{[-2\delta_k, 2\delta_k]} \leq 1$ sur $\mathbb{R}$ et $\chi_k = 1$ sur $[-\delta_k, \delta_k]$; il vient par conséquent $\theta_k = 0$ hors de $[-2\delta_k, 2\delta_k]$ et on a :

$$\|\varphi_k - \theta_k\|_1 = \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta_k, \delta_k]} \tilde{\theta}_k \chi_k + \int_{[-\delta_k, \delta_k]} |\varphi_k - \tilde{\theta}_k| \leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-\delta_k, \delta_k]} \tilde{\theta}_k + \int_{[-\delta_k, \delta_k]} |\varphi_k - \tilde{\theta}_k| = \|\varphi_k - \tilde{\theta}_k\|_1 \leq 2^{-k-1}.$$

Comme on a $\|\varphi_k - \theta_k\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et que l'on a $\|\varphi_k\|_1 = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient en particulier $\|\theta_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$.

Fixons à présent $k \in \mathbb{N}$. Puisque θ_k est uniformément continue sur $[-2\delta_k, 2\delta_k]$, il existe $\eta_k > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [-2\delta_k, 2\delta_k]$ vérifiant $|x - y| \leq \eta_k$, on ait $|\theta_k(x) - \theta_k(y)| \leq 2^{-k-3}/\delta_k$. Choisissons à présent un entier $R_k \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $r_k := 2\delta_k/R_k \leq \eta_k$, observons qu'il vient $R_k r_k = 2\delta_k$ et posons :

$$\tilde{\psi}_k := \sum_{i=-R_k}^{R_k-1} \theta_k(ir_k) \chi_{[ir_k, (i+1)r_k[},$$

de sorte que l'on ait $\sup_{[-2\delta_k, 2\delta_k]} |\tilde{\psi}_k - \theta_k| \leq 2^{-k-3}/\delta_k$. Il vient dès lors :

$$\|\tilde{\psi}_k - \theta_k\|_1 = \int_{[-2\delta_k, 2\delta_k]} |\tilde{\psi}_k - \theta_k| \leq 4\delta_k \cdot \frac{2^{-k-3}}{\delta_k} = 2^{-k-1}.$$

Comme on sait que l'on a $\|\theta_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$ et qu'il vient $\|\theta_k - \tilde{\psi}_k\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, on trouve aussi $\|\tilde{\psi}_k\|_1 \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$. Comme θ_k est positive sur $\mathbb{R}$, on calcule par ailleurs :

$$(18) \quad \|\tilde{\psi}_k\|_1 = r_k \sum_{i=-R_k}^{R_k-1} \theta_k(ir_k).$$

Choisissons désormais un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\|\tilde{\psi}_k\|_1 > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq l$, et définissons pour chaque $k \in \mathbb{N}$, une fonction $\psi_k \in \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ par la formule :

$$\psi_k := \begin{cases} \chi_{[-1/2, 1/2[} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \chi_{[-1/2, 0[} + \frac{1}{2} \chi_{[0, 1/2[} \right) & \text{si } k < l, \\ \|\tilde{\psi}_k\|_1^{-1} \tilde{\psi}_k & \text{si } k \geq l. \end{cases}$$

Il est clair que, pour $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k < l$, ψ_k est de la forme (17) à condition de poser $R_k := 1$, $c_{k,-1} = c_{k,0} = \frac{1}{2}$ et $r_k = \frac{1}{2}$. Si au contraire $k \in \mathbb{N}$ vérifie $k \geq l$, alors ψ_k est de la forme (17) avec $R_k \in \mathbb{N}^*$ et $r_k > 0$ précédemment définis, et pour $-R_k \leq i \leq R_k - 1$:

$$c_{i,k} = \frac{r_k \theta_k(ir_k)}{\|\tilde{\psi}_k\|_1}.$$

Il est clair que l'on a $c_{i,k} \geq 0$ pour tout $-R_k \leq i \leq R_k - 1$ et il vient :

$$\sum_{i=-R_k}^{R_k} c_{i,k} = \|\tilde{\psi}_k\|_1^{-1} r_k \sum_{i=-R_k}^{R_k-1} \theta_k(ir_k) = 1,$$

en utilisant l'égalité (18) ci-dessus. Finalement, puisqu'il vient $R_k r_k = \delta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq l$, il est clair que l'on a également $R_k r_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, ce qui conclut la démonstration. ■

Le résultat suivant, dû indépendamment à S. Kostyukovsky et A. Olevskii et à P. LaVictoire, est un résultat d'existence d'une sous-suite universelle pour la convergence presque partout dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ des approximations de l'identité positives. La preuve que nous en présentons ci-dessous est due à P. LaVictoire.

Théorème 11.3 (LaVictoire). — Si $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'identité positive, alors il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on ait $\varphi_{k_l} * u \rightarrow u$, $l \rightarrow \infty$ presque partout sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Commençons par remarquer qu'il existe, en vertu du Lemme 11.2, une approximation de l'identité positive $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}_+^1(\mathbb{R})$ vérifiant $\|\varphi_k - \psi_k\|_1 \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ et telle que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, ψ_k soit de la forme :

$$\psi_k = r_k^{-1} \sum_{i=-R_k}^{R_k-1} c_{i,k} \chi_{[ir_k, (i+1)r_k[},$$

avec $r_k > 0$, $R_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ainsi que :

- (a) $c_{i,k} \geq 0$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $-R_k \leq i \leq R_k - 1$;
- (b) $\sum_{i=-R_k}^{R_k-1} c_{i,k} = 1$;
- (c) $R_k r_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Quitte à extraire une sous-suite de (φ_k) et (ψ_k) , on peut supposer que l'on a en outre :

- (d) $R_{k+1} r_{k+1} \leq \frac{1}{2} R_k^{-1} r_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$;
- (e) $\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|_1 < +\infty$.

On va prouver que, sous les conditions précédentes, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et tout $\lambda > 0$, on ait :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_{\psi} u(x) > 2\lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|u\|_1.$$

Il résultera dès lors du Lemme 8.11 que, pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, la suite $(\varphi_k * u)$ convergera presque partout sur $\mathbb{R}$ vers u .

Pour ce faire, fixons $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$ et soit $v + \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$ une décomposition de Calderón-Zygmund de u associée à λ par le Théorème 10.1. On pose également $b := \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I = u - v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette démonstration, étant donné $I \in \mathcal{B}$, I^* désignera l'intervalle fermé de même milieu que I mais ayant trois fois sa longueur, *i.e.* l'intervalle $I^* := [\min I - |I|, \sup I + |I|]$, et on pose $\mathcal{B}^* := \{I^* : I \in \mathcal{B}\}$.

Commençons par observer que l'on a $\|v\|_{\infty} \leq \lambda$, et donc $|v| \leq \lambda$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|\psi_k * v| \leq \lambda$ presque partout sur $\mathbb{R}$ et donc aussi $M_{\psi} v \leq \lambda$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Il vient donc, presque partout sur $\mathbb{R}$:

$$M_{\psi} u \leq M_{\psi} v + M_{\psi} b \leq \lambda + M_{\psi} b.$$

Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $M_{\psi} u(x) > 2\lambda$, on a donc $M_{\psi} b(x) > \lambda$ et, en particulier :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k * b(x)| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\psi_k * b(x)| = M_{\psi} b(x) > \lambda.$$

En d'autres termes, on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_{\psi} u(x) > 2\lambda\}| \leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k * b(x)| > \lambda \right\} \right|.$$

Or il vient évidemment :

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k * b(x)| > \lambda \right\} \right| \leq |\cup \mathcal{B}^*| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{B}^* : \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k * b(x)| > \lambda \right\} \right|.$$

Mais on a d'une part, en utilisant la propriété (v) du Théorème 10.1 :

$$|\cup \mathcal{B}^*| \leq \sum_{I \in \mathcal{B}} |I^*| = 3 \sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq \frac{12}{\lambda} \|u\|_1,$$

et d'autre part, en vertu de l'inégalité de Markov (voir la Remarque 8.3 ci-dessus) :

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{B}^* : \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k * b(x)| > \lambda \right\} \right| &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{B}^*} \sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k * b| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{B}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{B}^*} |\psi_k * b_I| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{B}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus I^*} |\psi_k * b_I|, \end{aligned}$$

où les intégrales sont interprétées (à ce stade) au sens large. Si l'on peut montrer que, pour chaque $I \in \mathcal{B}$, on a :

$$(19) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus I^*} |\psi_k * b_I| \leq C \|b_I\|_1,$$

où $C > 0$ est une constante positive indépendante de I et de k , alors le résultat s'ensuivra puisque l'on pourra écrire, en vertu des propriétés (iii) et (v) dans le Théorème 10.1 :

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{B}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus I^*} |\psi_k * b_I| \leq \frac{C}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{B}} \|b_I\|_1 \leq C \sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq \frac{4C}{\lambda} \|u\|_1.$$

C'est donc à la preuve de (19) que nous allons consacrer le reste de la démonstration.

Fixons donc $I \in \mathcal{B}$; s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $|I| \leq R_k r_k$, alors on pose :

$$k(I) := \max\{k \in \mathbb{N} : R_k r_k \geq |I|\} ;$$

sinon, on pose $k(I) := -1$.

Affirmation 7. — Pour tout $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k > k(I)$, on a $\psi_k * b_I = 0$ hors de I^* .

Écrivons en effet, pour $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k > k(I)$ et $x \in \mathbb{R} \setminus I^*$:

$$\psi_k * b_I(x) = \int_I \psi_k(x - y) b_I(y) dy = 0,$$

puisque l'on a $|x - y| \geq |I| > R_k r_k$ et donc aussi $\psi_k(x - y) = 0$ pour tout $y \in I$ (rappelons que l'on a $x \notin I^*$!).

Affirmation 8. — Si $k \in \mathbb{N}$ vérifie $k \leq k(I)$ et que $x \in \mathbb{R}$ et $-R_k \leq i \leq R_k - 1$ sont donnés, alors on a $\psi_k * b_I(x) = 0$ dès que l'on a $x - I \subseteq [ir_k, (i + 1)r_k]$.

Dans les conditions de l'affirmation, on écrit en effet :

$$\begin{aligned} \psi_k * b_I(x) &= \int_{\mathbb{R}} b_I(x - y) \psi_k(y) dy = \int_{x-I} b_I(x - y) \psi_k(y) dy \\ &= r_k^{-1} c_{i,k} \int_{x-I} b_I(x - y) dy = r_k^{-1} c_{i,k} \int_I b_I = 0, \end{aligned}$$

en utilisant la forme de ψ_k et la propriété (iv) du Théorème 10.1.

Si $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \leq k(I)$ et $x \in \mathbb{R}$ sont donnés, et que l'on a :

$$0 \neq \psi_k * b_I(x) = \int_{x-I} b_I(x - y) \psi_k(y) dy,$$

alors il est clair que $x - I$ doit rencontrer au moins l'un des intervalles $[ir_k, (i + 1)r_k]$ pour $-R_k \leq i \leq R_k - 1$; comme il n'est pas possible, en vertu de l'affirmation précédente, que $x - I$ soit inclus dans l'un d'eux, il doit exister un entier $-R_k \leq i \leq R_k$ tel que l'on ait $x - I \subseteq [ir_k - |I|, ir_k + |I|]$, et on doit donc avoir :

$$x \in I + \bigcup_{i=-R_k}^{R_k} [ir_k - |I|, ir_k + |I|] \subseteq \min I + \bigcup_{i=-R_k}^{R_k} [ir_k - |I|, ir_k + 2|I|].$$

Il vient donc :

$$(20) \quad |\{x \in \mathbb{R} : \psi_k * b_I(x) \neq 0\}| \leq \sum_{i=-R_k}^{R_k} |[ir_k - |I|, ir_k + 2|I|]| = 3(2R_k + 1)|I| \leq 9R_k |I|.$$

D'un autre côté, on peut calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$|\psi_k * b_I(x)| \leq r_k^{-1} \sum_{i=-R_k}^{R_k-1} c_{i,k} \int_{[ir_k, (i+1)r_k]} |b_I(x-y)| dy \leq r_k^{-1} \sum_{i=-R_k}^{R_k-1} c_{i,k} \|b_I\|_1 = r_k^{-1} \|b_I\|_1,$$

en utilisant la propriété (b) ci-dessus. Autrement dit, on a $\|\psi_k * b_I\|_\infty \leq r_k^{-1} \|b_I\|_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si $k(I) = -1$, il suit clairement de l'Affirmation 7 que l'on a $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus I^*} |\psi_k * b_I| = 0$, et la démonstration est complète puisque cela établit (19). Sinon, on écrit, en utilisant l'Affirmation 7 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus I^*} |\psi_k * b_I| &\leq \|\psi_{k(I)} * b_I\|_1 + \sum_{k < k(I)} \|\psi_k * b_I\|_1 \leq \|\psi_{k(I)}\|_1 \|b_I\|_1 \\ &+ \sum_{k < k(I)} \|\psi_k * b_I\|_\infty |\{x \in \mathbb{R} : \psi_k * b_I(x) \neq 0\}| \leq \left(1 + 9|I| \sum_{k < k(I)} R_k r_k^{-1}\right) \cdot \|b_I\|_1. \end{aligned}$$

Or on a, en utilisant (d) :

$$\sum_{k < k(I)} R_k r_k^{-1} \leq \frac{1}{2} \sum_{k < k(I)} \frac{1}{R_{k+1} r_{k+1}}.$$

Mais il vient aussi, pour $k < k(I)$:

$$R_{k+1} r_{k+1} \leq \frac{1}{2} R_k^{-1} r_k \leq \frac{1}{2} R_k r_k,$$

puisque $R_k \in \mathbb{N}^*$ est un entier ; on a donc, pour tout $k < k(I)$:

$$\frac{1}{R_k r_k} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{R_{k+1} r_{k+1}}.$$

On calcule par suite :

$$\sum_{k < k(I)} \frac{1}{R_{k+1} r_{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{k(I)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k(I)-k} \frac{1}{R_{k(I)} r_{k(I)}} \leq \frac{2}{R_{k(I)} r_{k(I)}}.$$

Il vient alors, pour finir :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus I^*} |\psi_k * b_I| \leq \left(1 + \frac{9|I|}{R_{k(I)} r_{k(I)}}\right) \|b_I\|_1 \leq 10 \|b_I\|_1,$$

puisque l'on a $R_{k(I)} r_{k(I)} \geq |I|$. La démonstration est complète. ■

Laurent Moonens, le 23 octobre 2024

- E-mail : Laurent.Moonens@centralesupelec.fr