CENTRALE
PARIS

ECOLE CENTRALE PARIS

2ème ANNÉE d'ÉTUDES

Enseignement de Sciences des Transferts :

MECANIQUE DES FLUIDES

Sébastien CANDEL

La majeure partie de ce document est issue d'un ouvrage publié par les éditions DUNOD sous le titre MECANIQUE DES FLUIDES par Sébastien Candel.

©BORDAS, Paris, 1989 - 1995.

Réalisé dans le cadre du cours qui y est actuellement enseigné, le présent polycopié est strictement réservé aux Elèves et aux Enseignants de l'Ecole Centrale de Paris ; en accord avec l'éditeur il est mis à leur disposition par la Caisse de Secours des Elèves.

2003 - 2004 **Tome 2**

CHAPITRE X

ECOULEMENT ISENTROPIQUE UNIDIMENSIONNEL AVEC CHANGEMENT DE SECTION

X.1. Introduction

Le présent chapitre et les trois suivants traitent de la dynamique des gaz. Il s'agit d'une introduction à un domaine très vaste. Nous étudierons seulement des écoulements unidimensionnels et nous supposerons l'absence d'échanges de chaleur, de frottement aux parois, d'injection de masse ou de réaction chimique au sein du gaz en écoulement. L'analyse sera effectuée pour des écoulements permanents. Ce premier chapitre concerne la dynamique des écoulements isentropiques unidimensionnels stationnaires. Ces écoulements jouent un rôle important dans de nombreux problèmes technologiques et en particulier lorsqu'on envisage (1) des écoulements dans des conduits, (2) des écoulements externes dans des tubes de courant élémentaires.

Les écoulements de gaz dans les conduits sont très souvent adiabatiques (c'est-à-dire qu'ils s'effectuent sans échange de chaleur). Si, de plus, le conduit est court comme dans les tuyères ou les diffuseurs (figure 1), les effets de frottement sont relativement faibles et l'écoulement peut être considéré comme réversible (les seules irréversibilités étant liées aux forces de frottement). Dans ces conditions, l'écoulement est **adiabatique réversible**, c'est-à-dire isentropique.

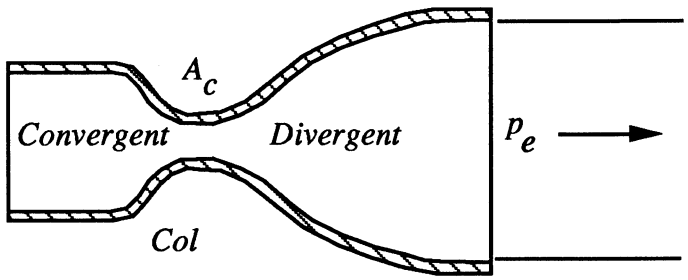


Figure 1. *Tuyère convergente-divergente. En l'absence de d'ondes de choc, de transferts de chaleur ou de frottement l'écoulement est adiabatique réversible.*

Dans les problèmes d'aérodynamique externe, on s'intéresse aux écoulements autour de corps, d'obstacles ou de profils. Les tubes de courant situés à l'extérieur de la couche limite qui se forme au voisinage immédiat du corps ne subissent pas l'influence des effets de viscosité ou de conduction de chaleur (figure 2). Dans ces tubes de courant, l'écoulement est adiabatique et il est réversible dans toutes les régions où il n'y a pas d'ondes de choc.

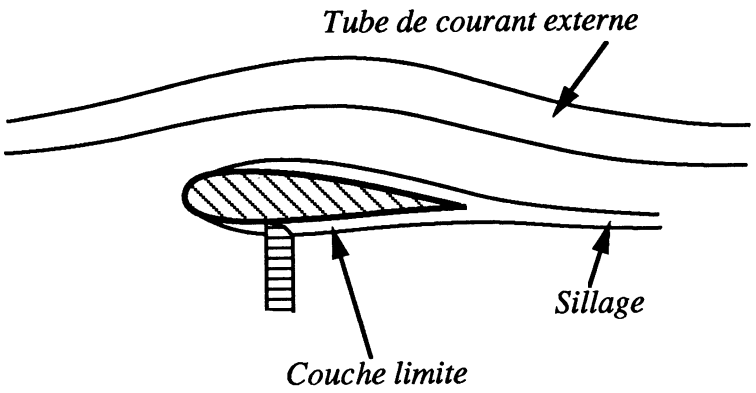


Figure 2. *Ecoulement externe autour d'un profil. Les contraintes visqueuses et les flux de chaleur sont importants dans la couche limite et dans le sillage. L'écoulement dans le tube de courant externe est adiabatique réversible s'il n'y a pas d'ondes de choc.*

Plusieurs exemples d'écoulements sont représentés à la figure 3 pour illustrer quelques situations typiques où le frottement, l'échange de chaleur ou la présence d'ondes de choc font que l'écoulement ne peut être considéré comme isentropique.

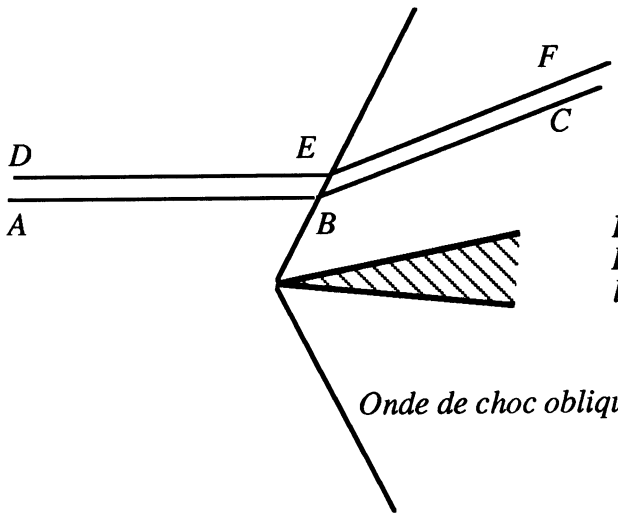


Figure 3a). *Ecoulement supersonique autour d'un dièdre. L' écoulement est adiabatique réversible en amont de l'onde de choc.*

L'analyse qui va suivre sera effectuée en deux étapes. Nous allons d'abord considérer les écoulements isentropiques de gaz réels, puis nous développerons l'étude dans le cas de gaz

parfaits. On peut en effet obtenir de nombreux résultats qualitatifs sans préciser les formes de l'équation d'état et de l'enthalpie. Dans ce cas général, on peut analyser l'effet d'un changement de section, mettre en évidence le rôle du nombre de Mach, définir les conditions critiques et établir des expressions différentielles donnant les variations des paramètres de l'écoulement. Pour un gaz réel dont l'équation d'état ou l'enthalpie ne prennent pas des formes simples, il faut procéder à une intégration numérique d'expressions différentielles pour déterminer l'écoulement dans chaque section du système étudié. Le cas du gaz parfait est nettement plus simple, car on peut obtenir un ensemble d'expressions algébriques qui permettent tous les calculs d'écoulement et évitent l'intégration numérique des relations d'évolution. Cette simplification considérable est obtenue en exprimant toutes les variables à l'aide du nombre de Mach local, des conditions d'arrêt et des conditions critiques. Les formules obtenues sont tabulées, ce qui facilite leur utilisation dans les calculs de l'ingénieur.

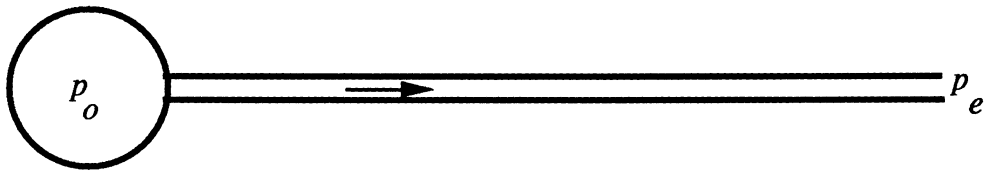


Figure 3b). *Ecoulement dans un conduit de grande longueur. Cet écoulement n'est plus réversible car le frottement pariétal n'est pas négligeable.*

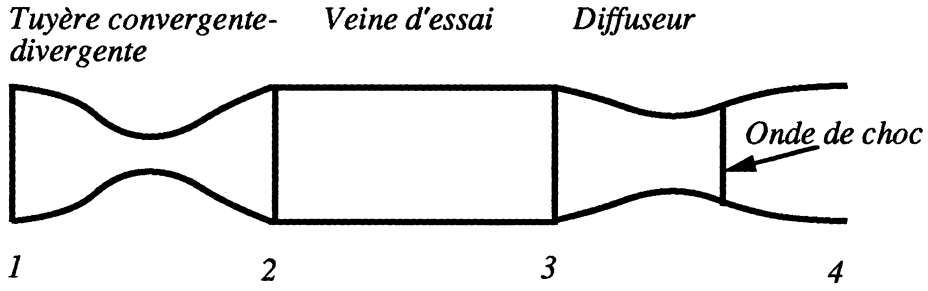


Figure 3c). *Soufflerie supersonique à deux cols. En première approximation l'écoulement en amont et en aval de l'onde de choc peut être considéré comme adiabatique réversible.*

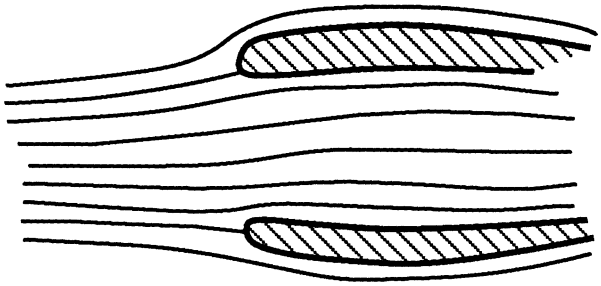


Figure 3d). *Ecoulement dans l'entrée d'air d'un réacteur subsonique. Le frottement pariétal et les transferts de chaleur peuvent être négligés en première analyse.*

Bibliographie

Les problèmes de dynamique des gaz sont traités dans un grand nombre de livres et d'articles. Les livres de Shapiro 1953, Liepmann et Roshko 1957, et un article de revue de Crocco 1958 constituent les références classiques. Des exposés modernes très complets sont dus à Zukrow et Hoffmann 1976 et à Emanuel 1986.

X.2. Ecoulement isentropique unidimensionnel de gaz réels dans des conduits de section variable

X.2.1. Equations fondamentales

L'analyse qui va suivre se situe dans le cadre général de l'approximation unidimensionnelle. Nous supposons que l'écoulement est stationnaire, qu'il n'y a pas d'apport de chaleur $\delta Q = 0$, pas de travail $\delta W = 0$, pas de forces de frottement pariétal, pas d'obstacles induisant une traînée au sein de l'écoulement. Nous supposons d'autre part que l'effet des forces de volume est négligeable, et que l'écoulement est isentropique $ds = 0$.

Dans ces conditions, la **conservation de la masse** s'exprime sous la forme (voir chapitre VII) :

$$\dot{m} = \rho A v = \text{constante} \qquad (X,1)$$

dans chaque section du conduit.

La **conservation de l'énergie** peut être exprimée en partant du premier principe de la thermodynamique écrit pour un système ouvert en régime permanent ou de l'expression équivalente du bilan macroscopique d'énergie établi au chapitre VII. Pour l'unité de masse de fluide, on peut écrire :

$$\delta(h + \frac{v^2}{2} + gz) = w' + q$$

Ici $w' = 0$, $q = 0$ et les forces volumiques peuvent être négligées. L'expression précédente devient :

$$\delta(h + \frac{v^2}{2}) = 0$$

et par conséquent :

$$h + \frac{v^2}{2} = h_i \qquad (X,2)$$

est constante dans l'ensemble du système. La constante désignée par h_i est **l'enthalpie d'arrêt**, c'est-à-dire l'enthalpie du fluide ramené aux conditions d'arrêt (au repos). Il est important de noter que l'enthalpie h ne peut jamais dépasser l'enthalpie d'arrêt h_i. D'après (X,2), la vitesse locale peut être déterminée à partir des enthalpie et enthalpie d'arrêt suivant $v = [2(h_i - h)]^{1/2}$.

Pour exprimer la **conservation de la quantité de mouvement**, nous partons du bilan macroscopique établi au chapitre IX. Considérons l'élément de conduit de la figure 4, et envisageons le volume de contrôle δV délimité par les surfaces $A, A + \delta A$ et par la surface latérale $\delta\Sigma$.

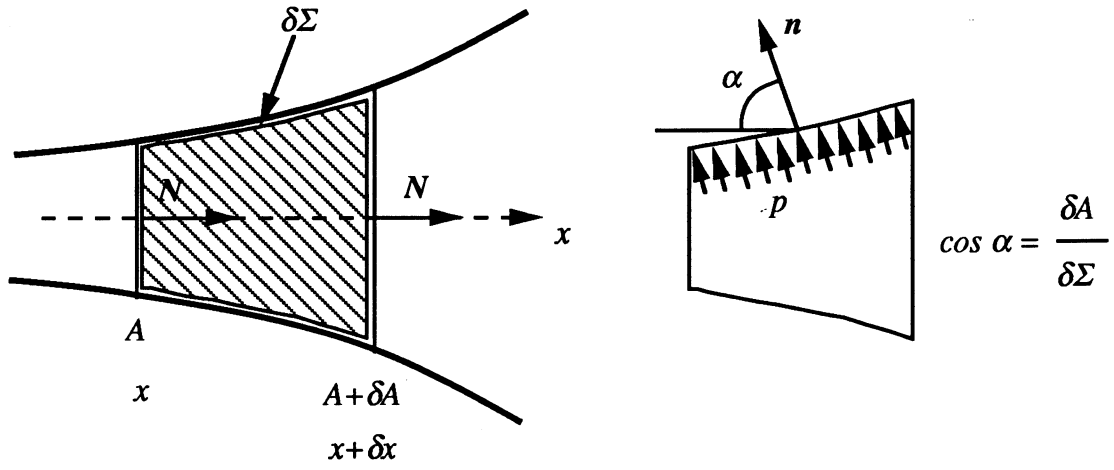


Figure 4. Un élément de conduit.

Pour cet élément, on peut exprimer la force pariétale qui s'exerce sur $\delta\Sigma$ sous la forme :

$$\delta \boldsymbol{F}_p = -\delta(\mathcal{F}\boldsymbol{N}) \quad \text{où} \quad \mathcal{F} = pA + \dot{m}v$$

En projection sur l'axe des x, cette expression devient :

$$\delta F_{px} = -\delta(pA + \dot{m}v) \qquad (X,3)$$

La force pariétale élémentaire peut aussi être évaluée en fonction de la pression moyenne qui s'exerce sur $\delta\Sigma$: $\delta F_{px} = -p\delta\Sigma\cos\alpha$.
Comme $\cos\alpha = \delta A/\delta\Sigma$, on obtient $\delta F_{px} = -p\delta A$. En substituant cette relation dans (X,3), on trouve :

$$-p\delta A = -p\delta A - A\delta p - \dot{m}\delta v \qquad (X,4)$$

Le terme $v\delta\dot{m}$ n'apparaît pas dans cette expression, car $\dot{m}$ est constant dans tout le conduit. On tire finalement de (X,4) : $\delta p + \rho v\delta v = 0$, ou encore sous forme différentielle :

$$dp + \rho v dv = 0 \qquad (X,5)$$

Les équations (X,1), (X,2) et (X,5) doivent être complétées par l'équation d'état du fluide. Pour les écoulements isentropiques (adiabatiques réversibles), on écrira de plus que l'entropie est constante. Les équations qui déterminent l'écoulement ont donc pour forme :

Conservation de la masse (continuité)

$$\dot{m} = \rho A v = \text{constante} \qquad (X,6)$$

Quantité de mouvement

$$dp + \rho v dv = 0 \qquad (X,7)$$

Energie

$$h + \frac{v^2}{2} = h_i = \text{constante} \qquad (X,8)$$

Entropie

$$s = \text{constante} \qquad (X,9)$$

Equations d'état

Les équations d'état du fluide considéré peuvent être spécifiées sous forme de tables, de diagrammes ou encore sous forme d'expressions algébriques. On peut les représenter par :

$$\begin{aligned} h &= h(s,p) \\ \rho &= \rho(s,p) \end{aligned} \qquad (X,10)$$

Lorsque les équations d'état sont données sous forme de tables ou de diagrammes, il faut utiliser des méthodes numériques ou graphiques pour résoudre les équations du mouvement. Il n'y a pas dans ce cas de solutions analytiques générales. Lorsque les équations d'état ont des formes algébriques simples, on peut obtenir des solutions complètes. Cette situation est celle des gaz parfaits, nous l'envisagerons en détail dans la section 3.

X.2.2. Processus isentropiques et processus adiabatiques réels

L'analyse de processus adiabatiques réels peut être effectuée en prenant comme évolution de référence un processus isentropique. Pour comparer ces deux types d'évolution, on introduit des rendements isentropiques. Pour comprendre cette notion importante, considérons tout d'abord l'évolution isentropique d'un fluide dont l'équation d'état est donnée sous forme d'un diagramme de Mollier. Dans cette situation, on définit l'état du fluide dans un plan entropie-enthalpie (s,h). Lorsque le fluide envisagé se comporte comme un gaz parfait, les lignes isobares forment dans ce plan un réseau de courbes exponentielles. Les lignes isentropiques sont des droites verticales et les lignes isenthalpiques sont des horizontales. Pour un gaz parfait, les lignes isothermes et les isenthalpiques sont confondues. Dans ce cas, les diagrammes (h,s) et (T,s) sont semblables. Très généralement, le débit masse et l'état thermodynamique du fluide sont connus en un point de l'écoulement, comme par exemple dans un réservoir de grande dimension. Tous les autres points de l'écoulement se trouvent alors sur l'isentropique passant par ce point (figure 5a).

Cette isentropique est une ligne verticale passant par le point 1 dont on connaît l'état. On peut placer sur cette droite le point correspondant aux **conditions d'arrêt**. Ce point, désigné par l'indice i, est celui pour lequel la vitesse de l'écoulement est nulle. L'enthalpie en ce point a pour valeur :

$$h_i = h_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

Ce point se trouve au-dessus du point 1 à une distance $h_i - h_1 = v_1^2/2$. Pour atteindre les conditions d'arrêt dans un écoulement donné, il faut décélérer le fluide jusqu'à la vitesse nulle. Pour un écoulement isentropique donné, les conditions d'arrêt isentropique sont uniques et elles sont représentées par h_i, p_i, ρ_i, T_i et s_i. En écoulement isentropique les changements de vitesse sont uniquement associés aux changements de section. La vitesse maximale que l'on peut théoriquement obtenir est alors celle pour laquelle l'enthalpie du fluide est nulle :

$$\frac{v_{max}^2}{2} = h_i \qquad \text{soit} \qquad v_{max} = (2h_i)^{1/2}$$

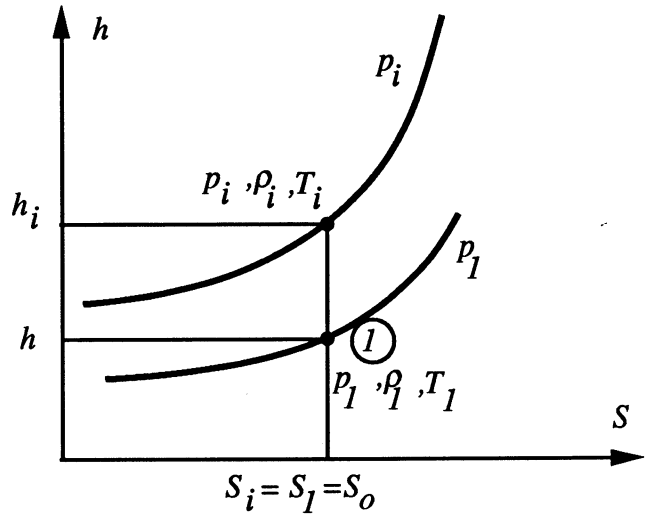


Figure 5a). Evolution isentropique sur le diagramme de Mollier. Les conditions ayant l'indice i sont les conditions d'arrêt isentropique.

Les processus isentropiques ne sont qu'une approximation des écoulements réels. Les forces de frottement sont toujours présentes et l'écoulement est donc irréversible. Il est intéressant d'étudier brièvement l'effet des irréversibilités sur des écoulements adiabatiques. Pour cela, considérons à nouveau un fluide dans l'état initial 1. L'état thermodynamique du fluide est caractérisé par p_1, ρ_1, T_1, h_1, s_1 et sa vitesse est v_1. L'enthalpie d'arrêt du fluide est $h_i = h_1 + v_1^2/2$. Nous savons que cette quantité est constante si l'écoulement est **adiabatique**. En effet, les forces de frottement et le caractère réversible ou irréversible de l'écoulement n'interviennent pas.

Considérons à présent une détente à partir de l'état 1. Si la détente est **isentropique**, elle s'effectue suivant la verticale passant par le point 1 et conduit au point 2 caractérisé par p_2, ρ_2, T_2, h_2, $s_2 = s_1$ (figure 5b). La vitesse du fluide dans l'état 2 est donnée par :

$$\frac{v_2^2}{2} = h_i - h_2$$

Si nous considérons maintenant une détente réelle, des effets d'irréversibilité se manifestent et l'évolution s'écarte de l'isentropique. L'entropie du fluide ne peut qu'augmenter et l'état final 2′ se place à la droite de l'état 2 sur le diagramme de Mollier. La vitesse en fin de détente est maintenant donnée par :

$$\frac{v_2'^2}{2} = h_i - h_2'$$

On peut facilement montrer que la vitesse v_2 obtenue après détente isentropique est supérieure à v_2' qui résulte de la détente réelle. Ecrivons d'abord :

$$v_2^2 - v_2'^2 = 2(h_2' - h_2)$$

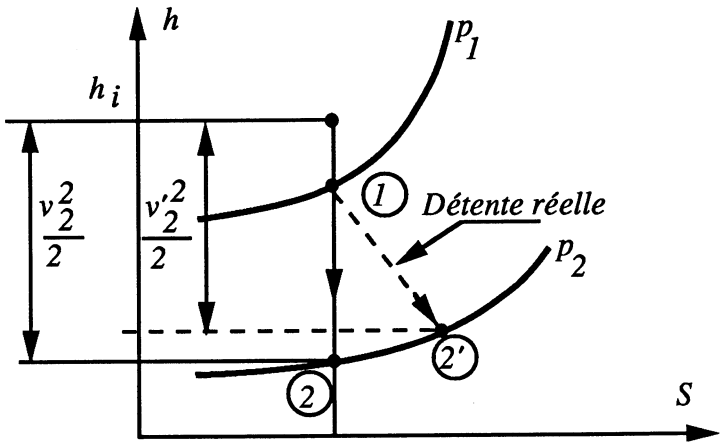


***Figure 5b).** Détente isentropique et détente réelle.*

Il reste à montrer que $h_2' > h_2$. Pour cela, il suffit d'utiliser la relation de Gibbs :

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp \qquad (X,11)$$

A pression constante, la variation de l'enthalpie h avec l'entropie s est positive car

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T \quad \text{et la température } T \text{ est positive} \qquad (X,12)$$

On a dans ces conditions, $h_2' > h_2$ et $v_2 > v_2'$. On peut effectuer un raisonnement semblable pour une compression à partir de l'état 1. Les évolutions isentropique et réelle sont représentées à la figure 6 et on montre facilement que la vitesse v_2' de l'écoulement après une compression réelle est inférieure à la vitesse v_2 du même écoulement après compression isentropique.

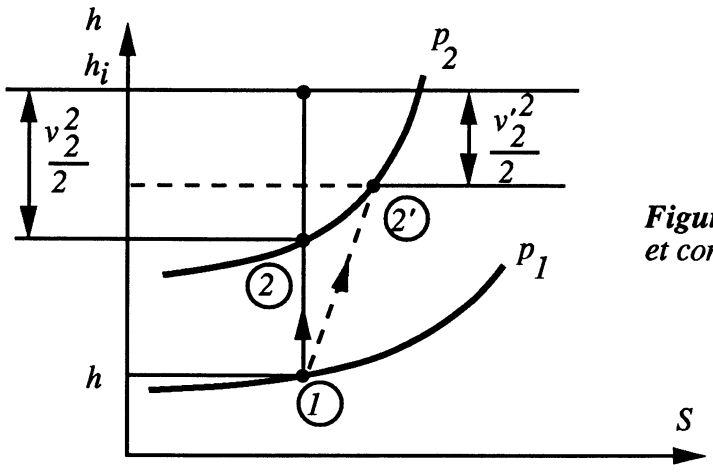


***Figure 6.** Compression isentropique et compression réelle.*

Enfin, il est facile de montrer que la différence des énergies cinétiques correspondant aux états 2 et 2′ est égale à la somme des **travaux non compensés de l'évolution irréversible**. Pour cela, partons de la formule de Jouguet :

$$\delta Q = Tds - \delta f \qquad \text{où} \qquad \delta f \geq 0 \tag{X,13}$$

Rappelons que dans cette expression, δf représente le "travail non compensé".
L'évolution est adiabatique $\delta Q = 0$ et dans ces conditions $Tds = \delta f$. D'autre part, la formule de Gibbs permet d'écrire :

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp = \delta f + \frac{1}{\rho}dp \tag{X,14}$$

et on peut calculer $h_2' - h_2$ en intégrant cette expression sur l'isobare :

$$h_2' - h_2 = \int_2^{2'} \delta f \tag{X,15}$$

En rapprochant (X,10) et (X,15), on voit que la différence des énergies cinétiques est égale à la somme des travaux non compensés de l'évolution adiabatique irréversible.

X.2.3. Effets des changements de section

Nous allons maintenant étudier les effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement. L'analyse peut être poursuivie sans préciser la forme de l'équation d'état du fluide. Nous partons de l'équation de continuité écrite sous forme différentielle :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0 \tag{X,16}$$

En écoulement incompressible, on a $d\rho = 0$ et la relation précédente indique que l'accroissement de vitesse est inversement proportionnel à la diminution de section. Lorsque l'écoulement est compressible, ce comportement est modifié. Nous faisons appel à l'équation de la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme différentielle pour déterminer $d\rho/\rho$ en fonction de dv/v. L'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{dp}{\rho} + v^2\frac{dv}{v} = 0 \tag{X,17}$$

Pour faire apparaître $d\rho/\rho$, notons que :

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} \tag{X,18}$$

Comme l'évolution est isentropique, on peut écrire $dp/d\rho = (\partial p/\partial\rho)_s$. Nous avons déjà indiqué plus haut que cette dérivée partielle était égale au carré de la célérité sonore locale :

$$c^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s \tag{X,19}$$

Dans ces conditions :

$$\frac{dp}{\rho} = c^2 \frac{d\rho}{\rho} \qquad (X,20)$$

et en substituant cette relation dans l'équation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} + v^2 \frac{dv}{v} = 0 \qquad (X,21)$$

On peut maintenant introduire le nombre de Mach local $M = v/c$ dans cette relation :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} \qquad (X,22)$$

Cette expression met en évidence le rôle du nombre de Mach dans l'étude des effets de compressibilité. Aux faibles nombres de Mach, les variations relatives de densité sont petites par rapport aux variations relatives de vitesse et elles peuvent être négligées dans le calcul de l'écoulement. Dans la plupart des applications, on peut considérer que ρ =constante lorsque le nombre de Mach ne dépasse pas 0.2. Lorsque le nombre de Mach prend des valeurs plus élevées, les variations de densité ne sont plus négligeables.

On peut maintenant substituer l'expression (X,22) dans l'équation de continuité pour obtenir une relation entre la vitesse et la section :

$$\boxed{\frac{dv}{v} = \frac{-1}{1-M^2} \frac{dA}{A}} \qquad (X,23)$$

Il est aussi utile d'écrire une relation entre les changements de pression et de section. Pour cela, on peut reprendre l'équation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\frac{dp}{p} + \frac{\rho v^2}{p} \frac{dv}{v} = 0 \qquad (X,24)$$

et déduire de (X,23) et (X,24) l'expression suivante :

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{1-M^2} \left(\frac{\rho v^2}{p}\right) \frac{dA}{A} \qquad (X,25)$$

Les effets d'un changement de section sur la vitesse et la pression peuvent être décrits en distinguant trois cas :

(1) Pour $M \simeq 0$, une diminution de la section produit une augmentation proportionnelle de la vitesse. Cette situation est celle des écoulements incompressibles.

(2) Pour $0 < M < 1$, c'est-à-dire aux vitesses d'écoulement **subsoniques**, le comportement est qualitativement le même, une diminution de section produit une augmentation de vitesse. La variation de vitesse est plus importante, car le dénominateur $1 - M^2$ est inférieur à 1. La pression diminue avec la section dans ce cas.

(3) Pour $M > 1$, c'est-à-dire aux **vitesses supersoniques**, le dénominateur $1 - M^2$ devient négatif et une **augmentation de vitesse** est produite par une augmentation de section.

Lorsque l'écoulement est supersonique, l'évolution de la vitesse diffère de façon remarquable de celle que l'on trouve en écoulements incompressibles. Aux vitesses supersoniques, la masse volumique diminue plus vite que la vitesse $d\rho/\rho = -M^2 dv/v$, de telle sorte que la section doit augmenter pour assurer la conservation de la masse.

La figure 7 illustre la discussion précédente. Lorsque l'écoulement décélère, on est en présence d'un **diffuseur**. Pour accélérer un gaz d'une vitesse subsonique à une vitesse supersonique, il faut disposer d'un conduit comportant une section convergente suivie d'une section divergente. Pour décélérer un gaz en écoulement supersonique, le conduit doit d'abord être convergent.

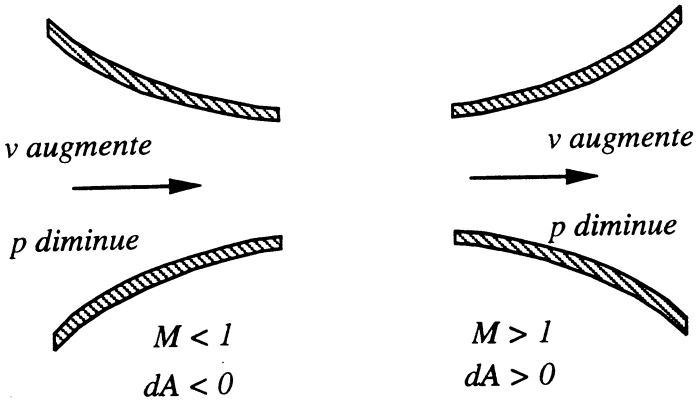


Figure 7a). *Ecoulement isentropique accéléré.*

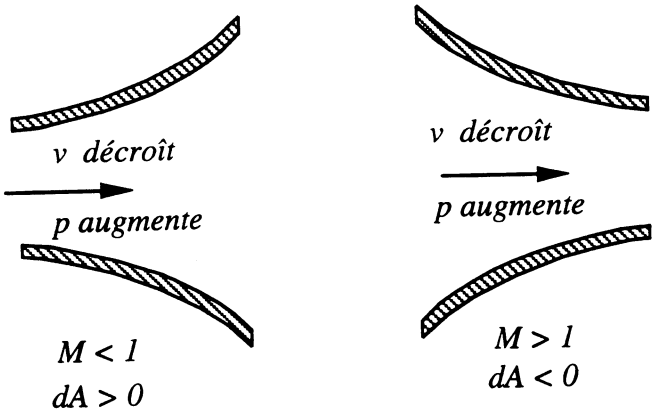


Figure 7b). *Ecoulement isentropique décéléré.*

X.2.4. Conditions critiques

Il nous reste à déterminer le comportement du fluide lorsque l'écoulement devient sonique, c'est-à-dire lorsque $M = 1$. Considérons un conduit dans lequel la vitesse v augmente continument à partir d'une valeur très faible pour devenir supersonique. Nous savons que ce conduit **doit converger** dans la région subsonique et qu'il **doit diverger** dans la région supersonique. Lorsque M atteint la valeur de 1, le conduit doit présenter un col. On peut

aussi aboutir à cette conclusion en partant de l'expression :

$$\frac{dv}{v} = \frac{-1}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,26)$$

démontrée plus haut. Lorsque $M = 1$, la variation relative de vitesse ne peut rester finie que si $dA/A = 0$. Il en est de même des autres paramètres de l'écoulement.

En définitive, le nombre de Mach $M = 1$ ne peut être atteint que dans un col. Notons que le nombre de Mach au col n'est pas nécessairement égal à 1. Si le nombre de Mach diffère de 1 au col, l'expression (X,23) montre que $dv/v = 0$ et la vitesse possède un extremum en ce point. La vitesse passe par un maximum si l'écoulement est subsonique ou par un minimum si l'écoulement est supersonique.

Lorsque le nombre de Mach devient égal à 1, on dit que l'écoulement atteint les conditions **critiques** ou encore que l'écoulement est critique. La discussion précédente montre qu'un écoulement subsonique qui **accélère** dans un conduit convergent et atteint les conditions critiques ne peut continuer à s'écouler dans un conduit qui converge. De même, un écoulement supersonique qui décélère dans un conduit divergent jusqu'aux conditions critiques ($M = 1$) ne peut continuer à s'écouler dans un conduit qui converge. On peut aussi conclure de ce qui précéde que le nombre de Mach d'un fluide compressible s'écoulant dans un conduit convergent tend asymptotiquement vers 1.

Lorsque le nombre de Mach atteint cette valeur, la section du conduit ne peut diminuer, sinon les équations décrivant l'écoulement unidimensionnel stationnaire et isentropique cesseraient d'être respectées. Le conduit possède alors un col qui opère dans les conditions critiques. La section du col A_c coïncide alors avec la section critique A_*, la vitesse au col v_c est égale à la célérité sonore locale qui constitue donc la célérité sonore critique c_*. Tous les paramètres de l'écoulement prennent des valeurs critiques. Nous montrerons plus loin que le débit masse atteint sa valeur maximum $\dot{m}_*$:

$$\dot{m} = \dot{m}_{max} = \dot{m}_* \qquad (X,27)$$

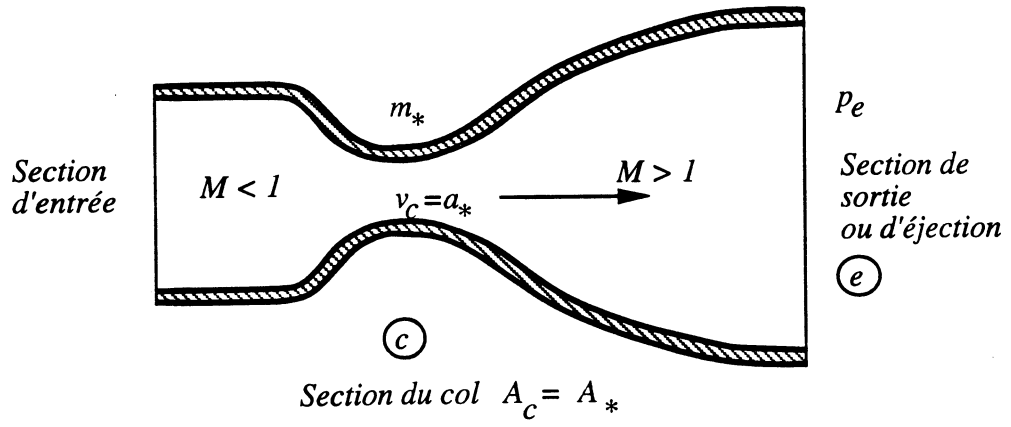


Figure 8. *Tuyère De Laval. L' écoulement subsonique dans le convergent passe par les conditions critiques au col et devient supersonique dans le divergent. La section du col est dans ce cas identique à la section critique.*

Dans la situation que nous venons de décrire. le conduit comporte un convergent divergent appelé tuyère de **Laval** (figure 8).

X.3. Ecoulement isentropique unidimensionnel de gaz parfaits dans des conduits de section variable

Nous allons maintenant envisager le cas des écoulements isentropiques de **gaz parfaits**. Le comportement qualitatif mis en évidence pour des gaz réels est évidemment inchangé, mais on peut en outre établir un système complet de relations algébriques pour la résolution de problèmes d'écoulements isentropiques unidimensionnels.

X.3.1. Equations fondamentales

Les équations d'état d'un gaz parfait ont pour forme (voir le premier chapitre) :

$$p = \rho r T \qquad (X,28)$$

et :

$$h = c_p T \qquad (X,29)$$

On peut aussi facilement déduire l'expression suivante pour l'entropie :

$$s = c_v \ln(\frac{p}{\rho^\gamma}) \quad \text{ou} \quad p = \rho^\gamma e^{s/c_v} \qquad (X,30)$$

Dans une évolution isentropique d'un gaz parfait, on a donc :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \qquad (X,31)$$

et en utilisant (X,28):

$$\frac{p}{T^{\gamma/(\gamma-1)}} = \text{constante} \qquad (X,32)$$

La célérité sonore est dans ce cas :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \gamma \rho^{\gamma-1} e^{s/c_v} \qquad (X,33)$$

soit :

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma r T \qquad (X,34)$$

Nous allons maintenant exprimer toutes les variables de l'écoulement en fonction du nombre de Mach local et des conditions d'arrêt isentropique. Considérons à présent l'équation de l'énergie pour les écoulements adiabatiques :

$$h_i = h + \frac{v^2}{2} \qquad (X,35)$$

On peut remplacer h_i et h par c_pT_i et c_pT :

$$c_pT_i = c_pT + \frac{v^2}{2} \qquad (X,36)$$

puis diviser les deux membres par c_pT. Cette opération donne :

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{v^2}{2c_pT} \qquad (X,37)$$

Le rapport $v^2/2c_pT$ peut être exprimé en fonction du nombre de Mach seul :

$$\frac{v^2}{2c_pT} = \frac{v^2}{2\frac{\gamma r}{\gamma-1}T} = \frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{\gamma-1}{2}M^2 \qquad (X,38)$$

Le rapport T_i/T prend alors la forme :

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \qquad (X,39)$$

On peut déduire des relations isentropiques (X,30) et (X,31) :

$$\frac{p_i}{p} = (\frac{T_i}{T})^{\gamma/(\gamma-1)} = (1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (X,40)$$

et :

$$\frac{\rho_i}{\rho} = (\frac{T_i}{T})^{1/(\gamma-1)} = (1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{1/(\gamma-1)} \qquad (X,41)$$

Les trois rapports $T_i/T, p_i/p$ et ρ_i/ρ sont ainsi déterminés en fonction du nombre de Mach local ($M = v/c$).

Les température et pression d'arrêt T_i et p_i sont constantes en écoulement isentropique, et pour cette raison, il est commode d'exprimer le débit masse en fonction de ces deux quantités, de la section A et du nombre de Mach local. Pour cela nous partons de la définition du débit masse :

$$\dot{m} = \rho A v \qquad (X,42)$$

En substituant $\rho = p/rT$ et $v = Mc = M(\gamma rT)^{1/2}$, cette expression devient :

$$\dot{m} = \frac{p}{rT}AM(\gamma rT)^{1/2} \qquad (X,43)$$

On peut encore écrire

$$\dot{m} = AMp(\frac{\gamma}{rT})^{1/2} \qquad (X,44)$$

puis faire apparaître les rapports p_i/p et T_i/T :

$$\dot{m} = A\,Mp_i(\frac{p}{p_i})(\frac{\gamma}{rT_i})^{1/2}(\frac{T_i}{T})^{1/2} \qquad (X,45)$$

En utilisant les expressions de p_i/p et T_i/T en fonction du nombre de Mach, on obtient :

$$\dot{m} = A\,M p_i (\frac{\gamma}{rT_i})^{1/2}(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (X,46)$$

Il est très utile d'exprimer le rapport de la section locale à la section critique A/A_* en fonction du nombre de Mach. A cet effet, on peut d'abord exprimer le débit dans la section critique ($M = 1$) :

$$\dot{m}_* = A_* p_i (\frac{\gamma}{rT_i})^{1/2}(\frac{\gamma+1}{2})^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (X,47)$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\dot{m}_* = \frac{\psi_* A_* p_i}{(\gamma r T_i)^{1/2}} = \frac{\psi_* A_* p_i}{c_i} \qquad (X,48)$$

avec :

$$\psi_* = \gamma(\frac{2}{\gamma+1})^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (X,49)$$

L'expression de A/A_* est alors obtenue en égalant les expressions de $\dot{m}$ et $\dot{m}_*$ (X,46) et (X,48) :

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M}[\frac{2}{\gamma+1}(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (X,50)$$

On peut facilement montrer que cette expression possède un minimum en $M = 1$. Pour un écoulement isentropique donné, la section critique est minimum. L'expression que nous venons d'établir intervient dans de nombreux calculs pratiques. Elle forme avec les expressions (X,39)-(X,41) un jeu complet de relations permettant la détermination des caractéristiques d'écoulements isentropiques de gaz parfaits dans des conduits de section variable.

Une autre notion est celle de vitesse réduite M_*. Cette vitesse est définie comme le rapport de la vitesse locale v à la célérité sonore au col :

$$M_* = \frac{v}{c_*}$$

Comme la célérité sonore c_* a une valeur fixe pour un écoulement donné, M_* est directement proportionnel à la vitesse locale. Les conditions critiques sont prises ici comme conditions de référence. Ces conditions peuvent être atteintes en un point de l'écoulement, mais elles peuvent aussi ne pas l'être. La section critique A_* peut coïncider avec une section du conduit si les conditions critiques sont atteintes, mais elle peut aussi être une simple valeur de référence.

La vitesse réduite M_* peut être exprimée en fonction du nombre de Mach local. Pour cela, nous partons de :

$$M_*^2 = \frac{v^2}{c_*^2} = \frac{v^2}{c^2}\frac{c^2}{c_*^2} = M^2\frac{c^2}{c_*^2} \qquad (X,51)$$

Le rapport c^2/c_*^2 est égal au rapport T/T_* et on peut écrire :

$$\frac{c^2}{c_*^2} = \frac{T}{T_*} = \frac{T}{T_i}\frac{T_i}{T_*} \qquad (X,52)$$

Les deux rapports qui interviennent au second membre sont donnés par :

$$\frac{T}{T_i} = \frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \qquad (X,53)$$

et :

$$\frac{T_i}{T_*} = \left(\frac{T_i}{T}\right)_{M=1} = \frac{\gamma+1}{2} \qquad (X,54)$$

En portant ces deux expressions dans (X,52), on obtient :

$$\frac{c^2}{c_*^2} = \frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \qquad (X,55)$$

et on déduit de (X,51) :

$$M_*^2 = \frac{M^2(\gamma+1)}{2+(\gamma-1)M^2} \qquad (X,56)$$

Conditions critiques

Nous avons déjà déterminé le débit critique $\dot{m}_*$ en fonction des conditions d'arrêt p_i, T_i et de la section A_*. Nous allons maintenant donner les expressions des température, pression et masse volumique critiques :

$$T_* = \frac{2}{\gamma+1}T_i \qquad (X,57)$$

$$p_* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}p_i \qquad (X,58)$$

$$\rho_* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}\rho_i \qquad (X,59)$$

Pour un gaz parfait ayant un rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = 1.4$, on a :
$T_*/T_i = 0.8333$, $p_*/p_i = 0.5283$, $\rho_*/\rho_i = 0.6339$.
La température au col est de 17% plus faible que la température d'arrêt, alors que la pression est environ la moitié de la pression d'arrêt isentropique.

L'impulsion

Une autre quantité intervient couramment dans l'analyse de systèmes de propulsion, c'est l'impulsion :

$$\mathcal{F} = (p+\rho v^2)A \qquad (X,60)$$

Cette quantité apparaît naturellement lorsqu'on effectue un bilan macroscopique de quantité de mouvement pour évaluer la force exercée par un fluide sur la paroi latérale du conduit dans lequel il s'écoule (figure 9) :

$$\boldsymbol{F}_p = -\Delta(\mathcal{F}\boldsymbol{N}) = \mathcal{F}_1\boldsymbol{N}_1 - \mathcal{F}_2\boldsymbol{N}_2 \qquad (X,61)$$

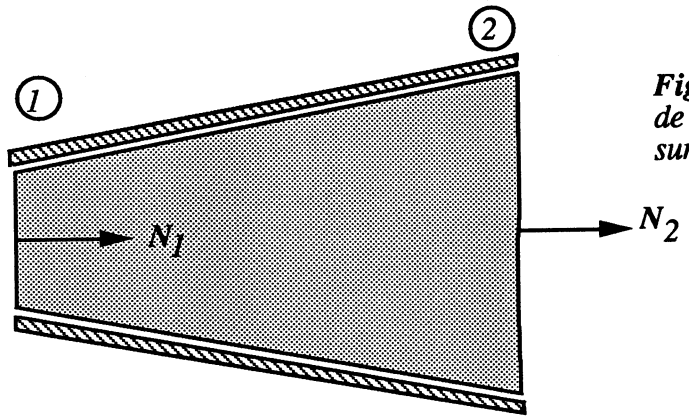


***Figure 9.** Volume de contrôle pour le calcul de la force exercée par le fluide en écoulement sur la paroi du conduit.*

Il est commode de calculer le rapport de l'impulsion locale à l'impulsion dans la section critique :

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_*} = \frac{(p + \rho v^2)A}{(p_* + \rho_* v_*^2)A_*} \qquad (X,62)$$

Ce rapport s'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_*} = \frac{p}{p_*}\frac{A}{A_*}\frac{1 + \rho v^2/p}{1 + \rho_* v_*^2/p_*} \qquad (X,63)$$

Le rapport A/A_* est donné par (X,50). Pour déterminer p/p_*, on peut écrire :

$$\frac{p}{p_*} = \frac{p}{p_i}\frac{p_i}{p_*} = \frac{p}{p_i}\left(\frac{p_i}{p}\right)_{M=1} \qquad (X,64)$$

soit :

$$\frac{p}{p_*} = \frac{1}{(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (X,65)$$

Enfin $\rho v^2/p = \gamma M^2$ et $\rho_* v_*^2/p_* = \gamma$. En portant ces diverses expressions dans (X,63), on obtient après quelques calculs :

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_*} = \frac{1 + \gamma M^2}{M[2(\gamma+1)(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)]^{1/2}} \qquad (X,66)$$

Les expressions que nous venons d'établir pour T_i/T, p_i/p, ρ_i/ρ, A/A_*, M_* et $\mathcal{F}/\mathcal{F}_*$ sont rassemblées au tableau 1.

Vitesse de décharge

La vitesse de décharge est la vitesse atteinte en détendant un écoulement de façon isentropique à partir des conditions d'arrêt. Les conditions d'arrêt sont alors les conditions génératrices de l'écoulement et la vitesse est déterminée à partir de l'équation de conservation de l'énergie, écrite sous la forme :

$$c_p T_i = \frac{v_D^2}{2} + c_p T \qquad (X,67)$$

Cette équation s'écrit encore :

$$v_D = [2c_pT_i(1 - T_i/T)]^{1/2} \qquad (X,68)$$

et, en utilisant la relation isentropique entre T/T_i et p/p_i :

$$v_D = \{2c_pT_i[1 - (\frac{p}{p_i})^{\gamma/(\gamma-1)}]\}^{1/2} \qquad (X,69)$$

X.3.2. Tables d'écoulements isentropiques de gaz parfaits

Nous avons présenté un certain nombre d'expressions caractéristiques des écoulements isentropiques de gaz parfaits. Ces expressions sont résumées au tableau 1. Les valeurs des rapports T_i/T, p_i/p, ρ_i/ρ, A/A_*, M_* et $\mathcal{F}/\mathcal{F}_*$ sont tabulées en fonction du nombre de Mach dans les tables pour diverses valeurs du rapport des chaleurs spécifiques γ. La plupart des problèmes pratiques peuvent être résolus à l'aide de ces tables.

L'exemple suivant va nous servir à illustrer cette méthode de calcul.

Exemple

Une soufflerie supersonique est conçue pour fonctionner à un nombre de Mach $M = 2$. La surface de la section du col est $A_c = 0.1\,m^2$ (figure10). La pression et la température génératrice dans le réservoir situé en amont de la tuyère sont respectivement $p_o = 3\,bar$ et $T_o = 300\,K$. L'analyse sera effectuée en supposant que l'écoulement entre le réservoir et la section d'essai reste isentropique. On prendra d'autre part $\gamma = 1.4$ et $r = 287\,J/kg - K$. Calculer les propriétés de l'écoulement au col et dans la section d'essai (on déterminera en particulier ρ, p, T, c, v et la section A). Déterminer le débit de gaz dans la soufflerie.

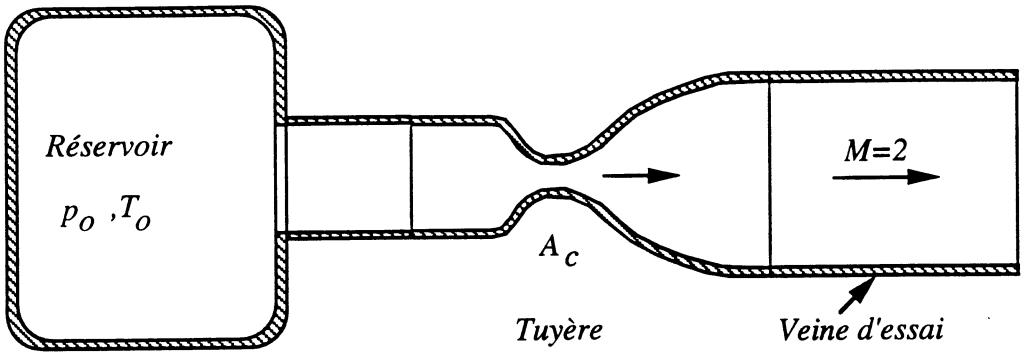


***Figure 10.** Soufflerie supersonique. L' écoulement est supposé isentropique dans l' ensemble de l'installation.*

Solution

Nous allons d'abord déterminer l'ensemble des propriétés du fluide dans le réservoir. Les pression et température sont respectivement $p_o = 3.10^5\,N/m^2, T_o = 300\,K$. La masse

volumique dans le réservoir se déduit de l'équation d'état :

$$\rho_o = \frac{p_o}{rT_o} = \frac{3.10^5}{(287)(300)} = 3.484\, kg/m^3$$

La célérité sonore est donnée par :

$$c_o = (\gamma r T_o)^{1/2} = [(1.4)(287)300)]^{1/2} = 347.18\, m/s$$

La vitesse dans le réservoir est nulle (conditions génératrices).

Pour obtenir les propriétés du fluide au col de la tuyère, nous utilisons les tables d'écoulement isentropique. Au col $M = 1, (T/T_i)_* = 0.833, (p/p_i)_* = 0.528, (\rho/\rho_i)_* = 0.634$.

Ici les conditions génératrices sont aussi les conditions d'arrêt isentropique, car l'écoulement est supposé isentropique dans toute la soufflerie.

Dans ces conditions :
$T_* = 0.833\, T_i = 249.9\, K$, $p_* = 0.528 p_i = (1.584)(10^5)\, Pa$, $\rho_* = 2.209\, kg/m^3$,
$c_* = (T_*/T_o)^{1/2} c_o = 0.913 c_o = 316.86\, m/s$
Comme $M = 1$, $c_* = v_* = 316.86\, m/s$.

Considérons à présent la section d'essai. Dans cette section, $M = 2$ et les tables donnent :
$(T/T_i) = 0.555$, $(p/p_i) = 0.128$, $(\rho/\rho_i) = 0.230$, $A/A_* = 1.687$.
On a donc : $T = 0.555 T_o = 166.5\, K$, $p = 0.128 p_o = (0.384)(10^5)\, Pa$,
$\rho = 0.230 \rho_o = 0.801\, kg/m^3$, $c = (T/T_o)^{1/2} c_o = 0.745 c_o = 258.6\, m/s$,
$v = Mc = 517.28\, m/s$, $A/A_* = 1.687$, d'où $A = 0.1687\, m^2$.

Le débit masse peut être calculé par exemple au col :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho_* A_* v_* = (2.209)(0.1)(316.86) \\ &= 69.99\, kg/s \end{aligned}$$

On peut aussi calculer ce débit dans la section d'essai :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho A v = (0.801)(0.1687)(517.28) \\ &= 69.9\, kg/s \end{aligned}$$

et vérifier que les deux valeurs obtenues sont égales, aux erreurs d'arrondi près.

X.3.3. Effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz parfait

On va maintenant déterminer l'influence d'un changement de section élémentaire dA/A sur les variables caractérisant l'écoulement. Les relations différentielles établies dans cette section ne sont pas nécessaires aux calculs d'écoulements isentropiques de gaz parfaits dans des conduits de section variable, car on peut utiliser les expressions intégrées données

plus haut. Lorsque les changements de section sont accompagnés d'autres processus (échange de chaleur, frottement pariétal, injection de masse au sein de l'écoulement), ces relations deviennent indispensables. Pour ces situations plus complexes, il faut d'abord écrire des relations différentielles qui rendent compte des autres mécanismes physiques. Ces relations sont obtenues en effectuant des calculs très semblables à ceux qui vont être développés ici. On pourra consulter Shapiro 1953, Crocco 1958, Zukrow et Hoffman 1976 pour une généralisation de ces expressions. Nous allons d'abord chercher les relations qui existent entre dA/A et les rapports dv/v, dc/c, dM/M, dp/p, dT/T, $d\rho/\rho$, dF/F.

Comme point de départ, considérons l'équation de conservation de la masse écrite sous forme différentielle :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0 \qquad (X,70)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement écrite sous la forme :

$$\frac{dp}{p} + \frac{\rho v^2}{p}\frac{dv}{v} = 0 \qquad (X,71)$$

Pour un gaz parfait, $\rho v^2/p = \gamma M^2$ et l'équation précédente devient :

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dv}{v} = 0 \qquad (X,72)$$

Dans une évolution isentropique :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \qquad (X,73)$$

Les expressions (X,70) (X,72) et (X,73) permettent d'éliminer le rapport $d\rho/\rho$ et d'obtenir :

$$\frac{dv}{v} = \frac{-1}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,74)$$

On retrouve ici l'expression (X,23) de l'analyse des écoulements isentropiques de gaz réels.

De (X,72) et (X,74), on peut déduire :

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,75)$$

puis, en utilisant (X,73) :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,76)$$

Le rapport dT/T peut s'obtenir à partir de :

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{dp}{p} = \frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,77)$$

Pour un gaz parfait $c = (\gamma r T)^{1/2}$ et dans ces conditions :

$$\frac{dc}{c} = \frac{1}{2}\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,78)$$

On peut maintenant obtenir une expression pour dM/M :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{dc}{c} = -\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1-M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,79)$$

Pour évaluer $d\mathcal{F}/\mathcal{F}$, on peut différentier $\mathcal{F} = pA(1+\gamma M^2)$ sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{2\gamma M^2}{1+\gamma M^2}\frac{dM}{M} \qquad (X,80)$$

puis porter les expressions de dp/p et dM/M dans cette relation pour aboutir à :

$$\frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}} = \frac{1}{1+\gamma M^2}\frac{dA}{A} \qquad (X,81)$$

Coefficients d'influence

Les coefficients d'influence qui viennent d'être obtenus sont rassemblés au tableau 4. Ces coefficients donnent l'évolution des propriétés de l'écoulement pour un changement de section dA/A.

X.4. Première application : la poussée d'un moteur fusée

Considérons un moteur fusée à propergol solide, représenté schématiquement à la figure 11. La combustion du bloc de poudre produit des gaz à la pression p_o et à la température T_o. La vitesse des gaz dans la chambre est très faible et on peut considérer que les pression et température d'arrêt sont $p_i \simeq p_o$ et $T_i \simeq T_o$. De nombreux essais montrent que les équations des écoulements isentropiques permettent de prévoir (à quelques pour cent près) la poussée produite par le moteur fusée.

Les moteurs fusée travaillent en général à des pressions de chambre égales ou supérieures à $30\,bars$ et ils opèrent dans des atmosphères où la pression ambiante ne dépasse pas $1\,bar$. Dans ces conditions, la tuyère du moteur doit être convergente-divergente pour assurer l'accélération des gaz de propulsion. Au cours du fonctionnement stationnaire, l'écoulement au col est critique et il n'y a pas d'onde de choc à l'intérieur du divergent. Nous supposerons que ces deux conditions sont bien réalisées dans la suite de l'analyse. Nous verrons plus loin que dans certaines situations où le rapport p_a/p_o est trop important, l'écoulement ne reste pas isentropique dans le divergent et des ondes de choc apparaissent dans cette partie de la tuyère. Ce type de situation ne sera pas analysé ici.

Si p_e représente la pression d'éjection, le rapport p_e/p_o est déterminé par le rapport des sections et en général la pression p_e diffère de la pression ambiante p_a. Le théorème des

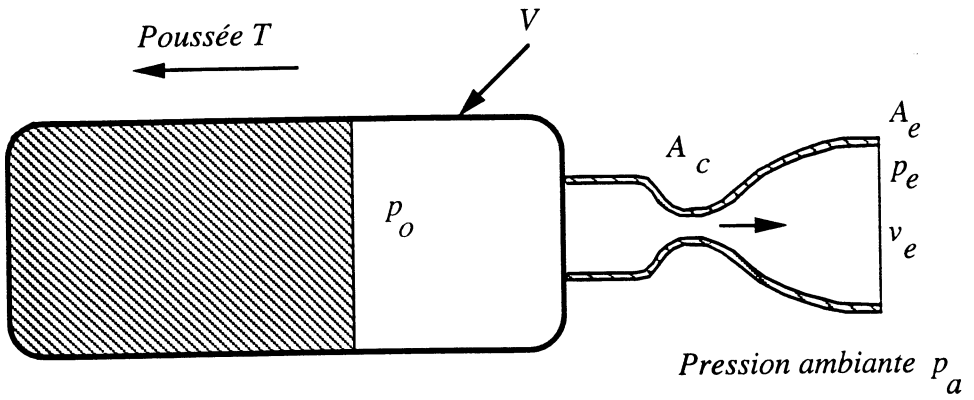


Figure 11. *Ecoulement isentropique dans une tuyère de moteur fusée. Pour une pression de chambre donnée et une section au col fixée, la poussée est optimale lorsque la pression d'éjection est égale à la pression ambiante.*

quantités de mouvement appliqué au volume de contrôle de la figure 11 donne la poussée du moteur $T = -F_T$ où :

$$T = \dot{m}v_e + A_e(p_e - p_a) \qquad (X,82)$$

Il est commode de diviser cette expression par p_oA_c. On obtient ainsi un rapport T/p_oA_c sans dimensions :

$$\frac{T}{p_oA_c} = \frac{\dot{m}}{p_oA_c}v_e + \frac{A_e}{A_c}\left(\frac{p_e}{p_o} - \frac{p_a}{p_o}\right) \qquad (X,83)$$

L'écoulement au col est critique et par conséquent :

$$\dot{m} = \frac{\psi_* A_c p_o}{(\gamma r T_o)^{1/2}} \qquad (X,84)$$

où

$$\psi_* = \gamma\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (X,85)$$

d'autre part :

$$v_e = 2c_p(T_o - T_e)^{1/2} = \{2c_pT_o[1 - (\frac{p_e}{p_o})^{(\gamma-1)/\gamma}]\}^{1/2} \qquad (X,86)$$

Le premier terme de l'expression (X,83) peut alors s'écrire :

$$\frac{\dot{m}}{p_oA_c}v_e = \psi_*\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}[1 - (\frac{p_e}{p_o})^{(\gamma-1)/\gamma}]^{1/2} \qquad (X,87)$$

et (X,83) devient :

$$\frac{T}{p_oA_c} = \psi_*\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}[1 - (\frac{p_e}{p_o})^{(\gamma-1)/\gamma}]^{1/2} + \frac{A_e}{A_c}\left(\frac{p_e}{p_o} - \frac{p_a}{p_o}\right) \qquad (X,88)$$

Comme le rapport de détente p_e/p_o ne dépend que du rapport des sections, la relation précédente indique que pour une géométrie donnée, la poussée ne dépend que de p_o et du rapport p_a/p_o.

On peut maintenant étudier l'effet du rapport des sections A_e/A_c, et, en particulier, chercher s'il existe une valeur de ce rapport pour laquelle la poussée est maximum. On peut montrer, par des calculs assez longs, que la poussée donnée par l'expression (X,88) est maximale lorsque la pression d'éjection est exactement égale à la pression ambiante $p_e = p_a$.

Ce résultat peut être interprété physiquement de la manière suivante. Supposons que la géométrie de la tuyère soit telle que les gaz se détendent au-delà de la pression ambiante p_a. Dans cette situation, la section du divergent dans laquelle la pression est inférieure à p_a ajoute une poussée négative, car les pressions internes sont inférieures aux pressions externes. Un raisonnement analogue montre que la poussée n'est pas maximale si les gaz ne sont pas détendus jusqu'à la pression $p_e = p_a$.

La poussée maximale a donc pour expression :

$$\frac{T_{max}}{p_o A_c} = \psi_*(\frac{2}{\gamma-1})^{1/2}[1-(\frac{p_a}{p_o})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]^{1/2} \qquad (X,89)$$

Si la tuyère est seulement convergente, la section d'éjection A_e est aussi la section du col, et le rapport p_e/p_o est le rapport critique et dans cette situation :

$$\frac{T_c}{p_o A_c} = 2(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{p_a}{p_o} \qquad (X,90)$$

On peut mettre en évidence l'effet du divergent en formant le rapport de la poussée obtenue à l'aide d'un convergent-divergent (X,88) à la poussée obtenue à l'aide d'un convergent seul :

$$\frac{T_{CD}}{T_c} = \frac{\psi_*(\frac{2}{\gamma-1})^{1/2}[1-(\frac{p_e}{p_o})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]^{1/2} + \frac{A_e}{A_c}(\frac{p_e}{p_o} - \frac{p_a}{p_o})}{2(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{p_a}{p_o}}$$

Ce rapport est représenté à la figure 12 en fonction de A_e/A_c pour plusieurs valeurs de p_a/p_o et pour $\gamma = 1.2$. Les courbes ont un maximum peu prononcé.

Pour obtenir une poussée quasi-optimale, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser un rapport de section A_e/A_c qui correspond exactement à une détente jusqu'à la pression p_a . En général, les tuyères de moteurs fusée sont détendues jusqu'à une valeur p_e supérieure à p_a. On réduit ainsi la taille et la masse de la tuyère sans s'écarter de façon notable du point correspondant à l'optimum de poussée.

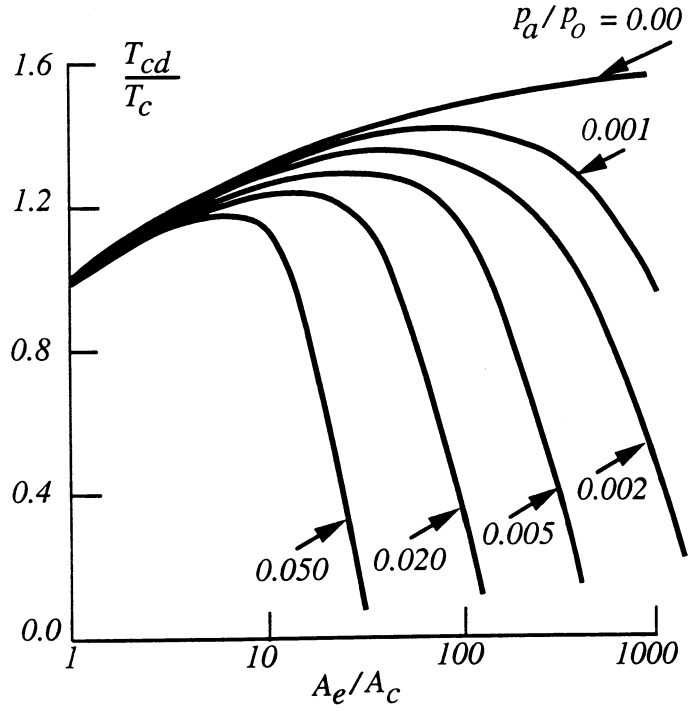


Figure 12. *Rapport entre la poussée obtenue à l'aide d'un convergent-divergent et la poussée obtenue à l'aide d'un convergent seul.*

Tableau 1. Rapports caractéristiques pour les écoulements stationnaires unidimensionnels et isentropiques de gaz parfaits

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{p_i}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_i}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right) M^2\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$$

$$M_* = \frac{v}{c_*} = \left[\frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2}\right]^{1/2}$$

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_*} = \frac{1 + \gamma M^2}{M\left[2(\gamma + 1)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)\right]^{1/2}}$$

Tableau 2. Conditions d'arrêt pour un gaz parfait

Enthalpie d'arrêt :

$$h_i = h + \frac{v^2}{2}$$

Température d'arrêt :

$$T_i = \frac{h_i}{c_p} = T + \frac{v^2}{2c_p} = T(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)$$

Pression d'arrêt isentropique :

$$p_i = p\left(\frac{T_i}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = p(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Masse volumique d'arrêt isentropique :

$$\rho_i = \frac{p_i}{rT_i} = \rho(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)^{1/(\gamma-1)}$$

Tableau 4. Coefficients d'influence pour les écoulements stationnaires unidimensionnels et isentropiques de gaz parfaits

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{M} &= -\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \\
\frac{dp}{p} &= \frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \\
\frac{d\rho}{\rho} &= \frac{M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \\
\frac{dT}{T} &= \frac{(\gamma - 1) M^2}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \\
\frac{dc}{c} &= \frac{(\gamma - 1) M^2}{2(1 - M^2)} \frac{dA}{A} \\
\frac{dv}{v} &= \frac{-1}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \\
\frac{d\mathcal{F}}{\mathcal{F}} &= \frac{1}{1 + \gamma M^2} \frac{dA}{A}
\end{aligned}$$

Tableau 3. Propriétés critiques pour un gaz parfait

(1) Température critique :

$$T_* = \frac{2}{\gamma+1} T_i$$

(2) Pression critique :

$$p_* = (\frac{2}{\gamma+1})^{\gamma/(\gamma-1)} p_i$$

(3) Masse volumique critique :

$$\rho_* = (\frac{2}{\gamma+1})^{1/(\gamma-1)} \rho_i$$

Tableau 5. Vitesses caractéristiques pour l'écoulement stationnaire unidimensionnel d'un gaz parfait

Vitesses isentropiques

(1) Vitesse isentropique de décharge :

$$v = \{\frac{2\gamma r T_i}{\gamma-1}[1 - (\frac{p}{p_i})^{(\gamma-1)/\gamma}]\}^{1/2}$$

(2) Vitesse isentropique maximum :

$$v_{max} = \left(\frac{2\gamma r T_i}{\gamma-1}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2} c_i$$

Vitesses acoustiques

(1) Célérité sonore dans les conditions d'arrêt :

$$c_i = \left(\gamma r T_i\right)^{1/2} = c\left(\frac{T_i}{T}\right)^{1/2} = c\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{1/2}$$

(2) Célérité sonore critique (au col) :

$$c_* = \left(\gamma r T_*\right)^{1/2} = \left(\frac{2\gamma r T_i}{\gamma+1}\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} c_i$$

(3) Relations entre les vitesses caractéristiques :

$$v_{max}^2 = \frac{2}{\gamma-1} c_i^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} c_*^2$$

CHAPITRE XI

ONDES DE CHOC DROITES

XI.1. Introduction

De nombreuses expériences montrent que les écoulements compressibles à grande vitesse peuvent subir des variations très rapides de leurs caractéristiques sur des distances très faibles. Les exemples connus de ce type de comportement sont les ondes de détonation accompagnant les explosions et le "bang"produit par un avion en vol supersonique. L'observation par strioscopie ou par la méthode des ombres de l'écoulement dans une tuyère ou autour de projectiles à grande vitesse met en évidence des variations rapides de l'indice de réfraction du milieu au travers de fronts d'épaisseur très faible. Les changements de densité, de vitesse, de pression et de température correspondants s'effectuent sur une distance extrêmement courte, de telle sorte que l'onde de choc apparaît comme une discontinuité séparant des écoulements amont et aval continus. La figure 1 montre par exemple une **onde de choc droite** dans le divergent d'une tuyère.

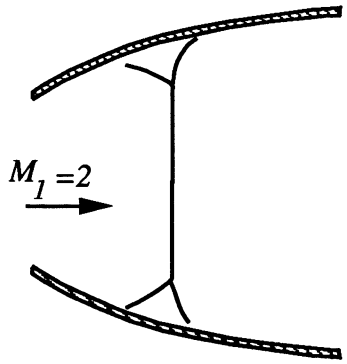


***Figure 1.** Dessin d'après une strioscopie d'une onde de choc droite dans un canal divergent. Le choc n'est pas parfaitement droit. On observe deux bifurcations associées à l'interaction entre le choc et les couches limites pariétales.*

Pour ce choc, le rapport de la pression aval à la pression amont est de l'ordre de cinq et la vitesse aval est environ trois fois plus faible que la vitesse amont. Ces variations de pression et de vitesse s'effectuent sur une distance de l'ordre de $2.10^{-4}\, mm\, (200\, nm)$ et cette valeur est de l'ordre de celle du libre parcours moyen des molécules dans les conditions de l'expérience. Comme la variation de vitesse qui accompagne un choc peut être de l'ordre

de plusieurs centaines de mètres par seconde, la décélération des particules fluides est de l'ordre de $10^9\ m/s^2$, une valeur tout-à-fait considérable. A la traversée de ce type d'onde, les particules fluides subissent un véritable "choc", ce qui explique le terme utilisé pour désigner ce type de front.

Dans beaucoup de situations pratiques, on s'intéresse principalement aux changements des propriétés de l'écoulement. La structure détaillée de l'onde de choc peut alors être ignorée. Le choc est considéré comme une discontinuité et il suffit d'analyser les relations qui existent entre les propriétés de l'écoulement en amont et en aval de la discontinuité. Comme l'épaisseur du choc est de l'ordre de quelques libres parcours moyens, l'étude de sa structure fine ne peut être effectuée en utilisant le concept de milieu continu. Il faut alors utiliser une approche statistique (voir par exemple Vincenti et Kruger 1965).

Il existe de nombreuses variétés d'ondes de choc. Les figures 2 à 9 présentent des cas d'écoulements typiques. Les ondes de choc peuvent être perpendiculaires à l'écoulement, on dit alors qu'il s'agit d'**ondes de choc droites ou normales.** Elles peuvent être inclinées par rapport à l'écoulement et il s'agit alors **d'ondes de choc obliques.**

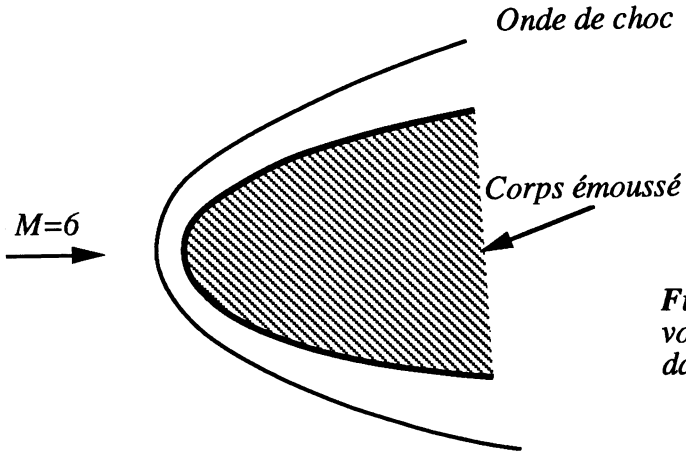


Figure 2. *Onde de choc détachée au voisinage d'un corps émoussé placé dans un écoulement à grande vitesse.*

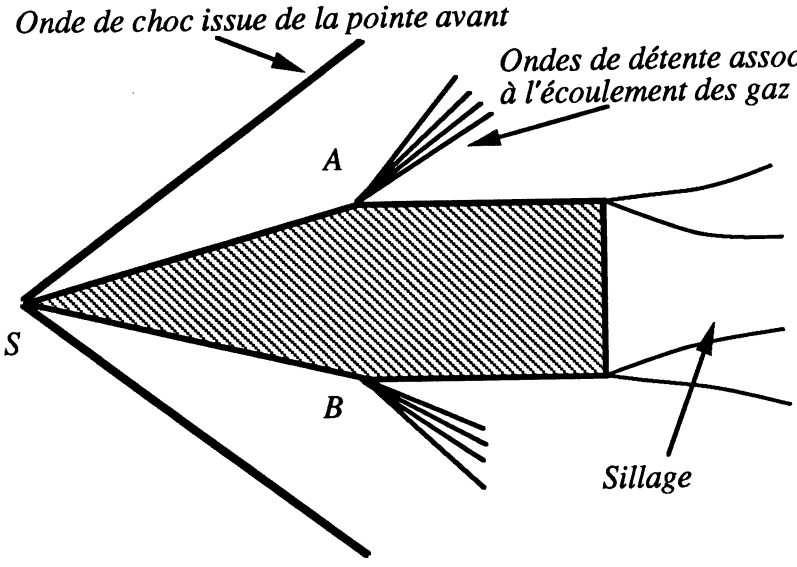


Figure 3. *Structure de l' écoulement au voisinage d'un projectile lancé à grande vitesse. La visualisation par strioscopie met en évidence l' onde de choc issue de la pointe, des ondes de détente et le sillage turbulent.*

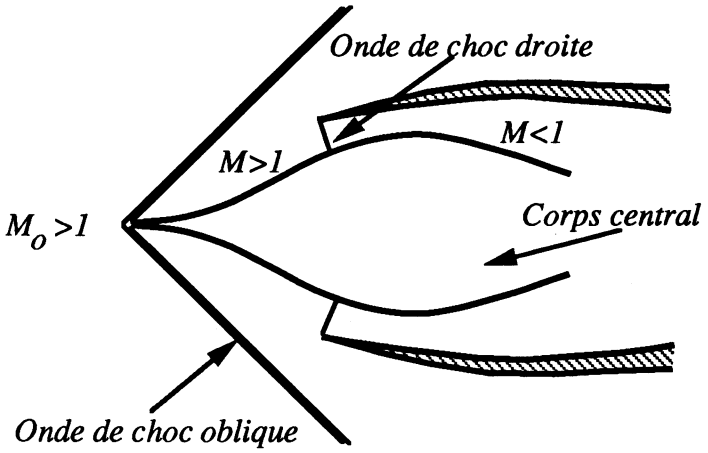
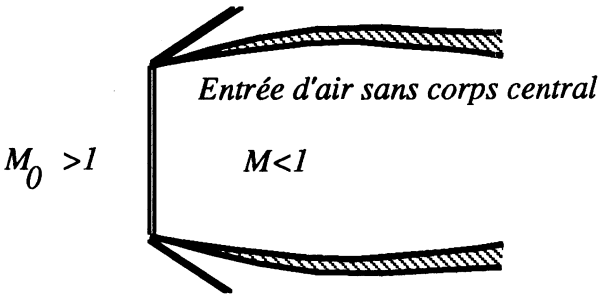


Figure 4. *Entrée d'air de turboréacteur supersonique. L'onde de choc conique issue du corps central effectue une compression externe. Une onde de choc droite apparaît au niveau de la prise d'air. L'intensité de cette onde est plus faible que celle du choc correspondant à une entrée d'air qui ne serait pas dotée d'un corps central.*



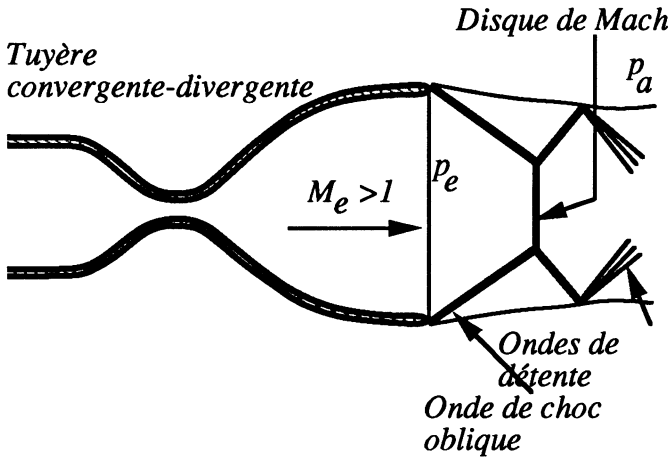


Figure 5. *Système d'ondes de choc en sortie d'une tuyère convergente-divergente. La pression d'éjection est inférieure à la pression ambiante. Les gaz sont recomprimés par l'intermédiaire de chocs obliques. L'interaction de ces chocs produit un disque de Mach et une succession d'ondes de compression et de détente.*

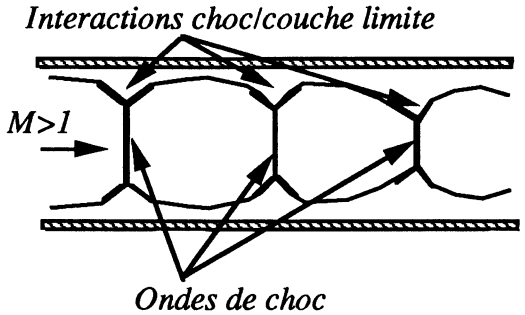


Figure 6. *Ondes de choc dans un conduit. La couche limite qui se développe au voisinage des parois s'épaissit à chaque interaction et finit par occuper une bonne partie de l'écoulement. L'interaction avec la couche limite produit des chocs à plusieurs branches et des écoulements décollés au voisinage du pied du choc.*

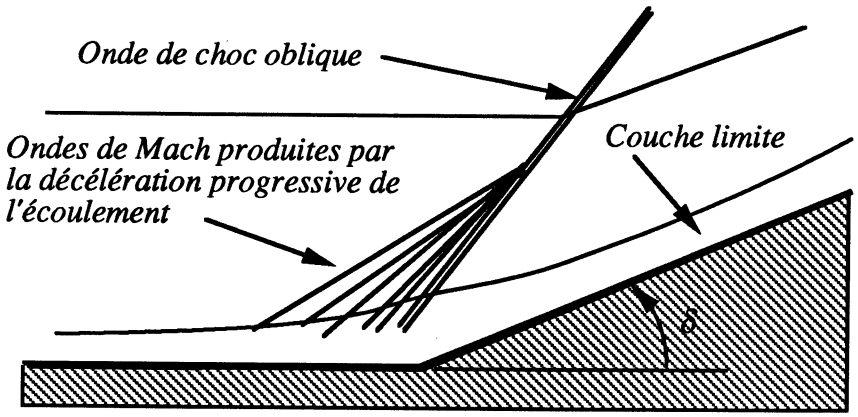


Figure 7. *Formation d'une onde de choc dans un coin en présence de la couche limite.*

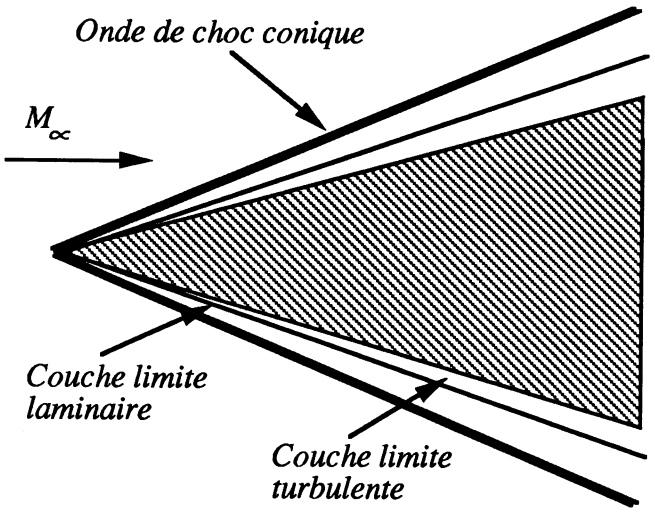


Figure 8. *Onde de choc conique formée au voisinage d'un cône placé dans un écoulement hypersonique M =11. L'onde de choc est très proche de la paroi du corps et elle interagit avec la couche limite pour former une couche de choc.*

Dans certains cas le choc peut présenter une courbure variable comme dans le cas de la figure 2. Les configurations d'écoulement peuvent être très diverses avec des combinaisons d'ondes de choc et d'ondes de détente (figure 3), des interactions de plusieurs chocs (figure 5), des interactions avec les couches limites (figures 6,7 et 8) et des sillages turbulents (figure 3 et 9).

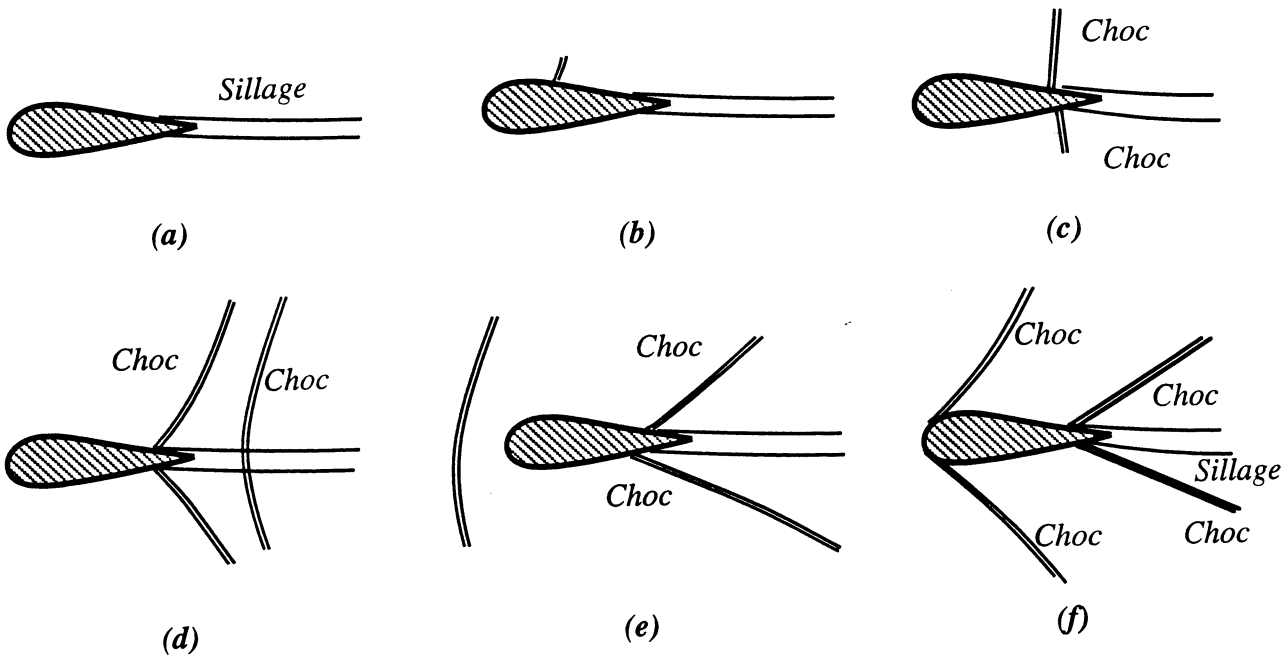


Figure 9. *Ecoulement autour d'un profil en écoulement subsonique,transsonique et supersonique. (a) M=0.70, l' écoulement reste subsonique et il n'y a pas d'ondes de choc. (b) M=0.80, l'écoulement à l'infini amont est subsonique mais il devient légèrement supersonique à l'extrados et une onde de choc apparaît. (c) M=0.90, l'écoulement à l'infini amont est encore subsonique mais il devient supersonique à l'extrados et à l'intrados, donnant naissance à deux ondes de choc. (d) M=0.98, l'écoulement est transsonique, deux ondes de choc apparaissent au voisinage du bord de fuite et forment une "queue de poisson" caractéristique de ce régime d'écoulement. (e) M=1.6, l' écoulement amont est supersonique, une onde de choc détachée se forme en amont du profil . (f) M=2.4 , l'écoulement est maintenant fortement supersonique, les ondes de choc sont attachées au bord d'attaque et au bord de fuite du profil.*

Nous allons d'abord étudier les ondes de choc droites. Le traitement des ondes de choc obliques sera effectué au chapitre suivant sur la base des résultats que nous allons maintenant établir.

Bibliographie

On trouvera des exposés très complets sur les ondes de choc droites et obliques dans les livres de Shapiro (1953), Zukrow et Hoffman (1976) et Emanuel (1986). Des présentations plus concises sont données par Liepmann et Roshko (1957), Kuethe et Chow (1986), Bertin et Smith (1979). Les aspects physiques sont traités par Landau et Lifshitz (1971) et de façon plus complète par Zeldovich et Raizer (1966). On trouvera aussi une présentation exhaustive dans Emmons (1958).

XI.2. Equations fondamentales pour les chocs droits

Le modèle d'écoulement que nous nous proposons d'analyser est représenté à la figure 10. L'onde de choc est une surface de discontinuité plane perpendiculaire à l'écoulement séparant une région amont désignée par l'indice 1 d'une région aval d'indice 2. Nous sup-

posons que la discontinuité est stationnaire. Nous verrons plus loin comment les résultats obtenus dans ce cas peuvent être utilisés pour traiter les problèmes de choc droits en translation uniforme.

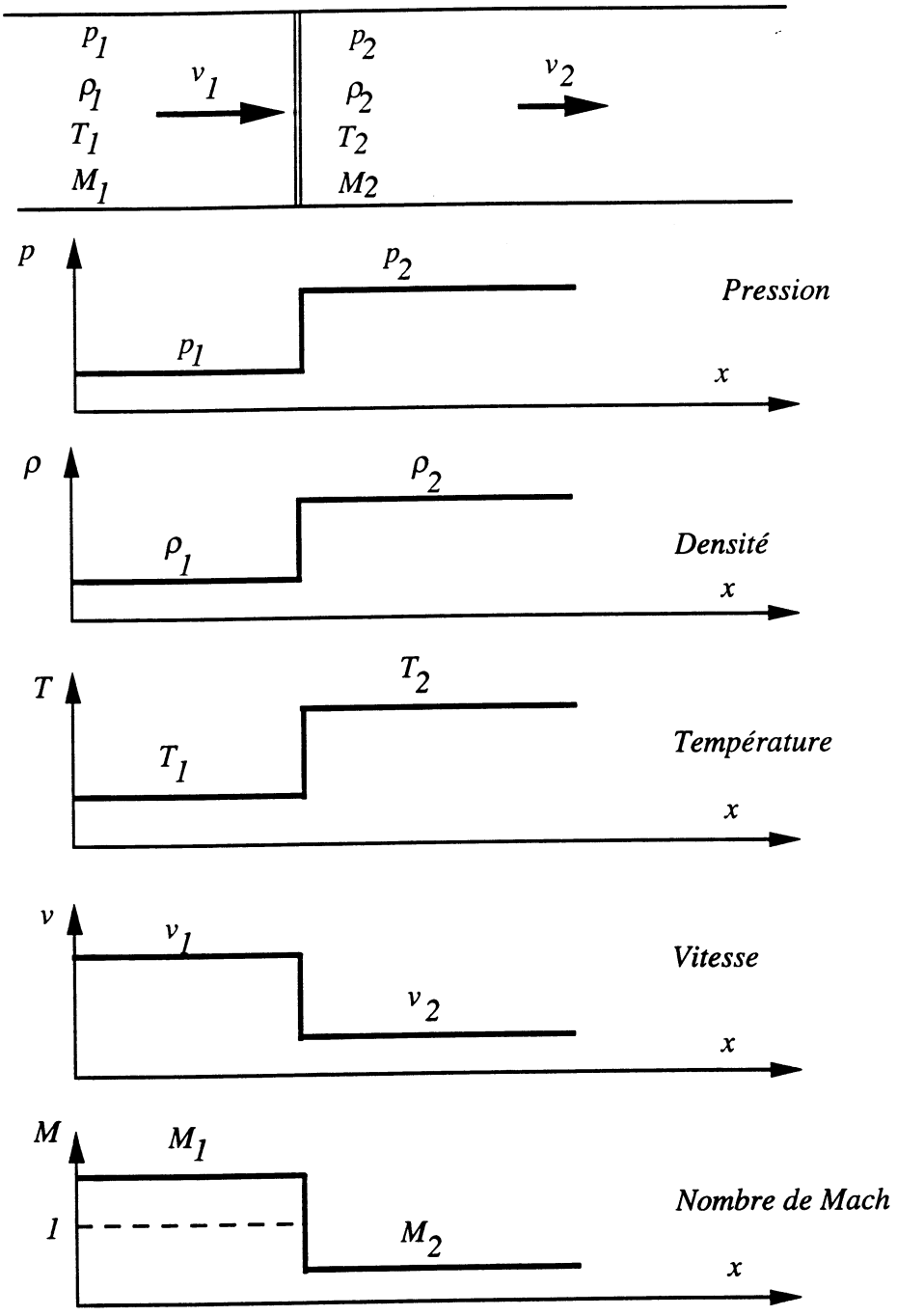


Figure 10. *Effet d'une onde de choc droite stationnaire sur les pression, densité, température, vitesse et nombre de Mach. L'indice 1 repère les paramètres de l'écoulement en amont du choc. L'indice 2 désigne les paramètres de l'écoulement en aval du choc.*

Les hypothèses utilisées dans cette analyse sont les suivantes :
(1) Les forces de frottement dans le volume de contrôle entourant l'onde de choc sont négligeables.
(2) Le processus de choc est effectué à section constante, les lignes de courant restant parallèles entre elles et perpendiculaires à la surface de choc.
(3) L'écoulement est adiabatique et il n'y a pas de travail extérieur sur le volume de contrôle considéré.
(4) Les forces de volume sont négligeables.
(5) L'écoulement s'effectue en l'absence de réactions chimiques et le fluide reste en équilibre thermodynamique.

Désignons par p_1, ρ_1, h_1, v_1, les pression, densité, enthalpie, vitesse en amont du choc, et par p_2, ρ_2, h_2, v_2, les quantités correspondantes en aval. Dans certains cas, on connaît l'état de l'écoulement en amont du choc et on souhaite déterminer l'état du fluide en aval. Dans d'autres situations, les conditions aval sont connues et il s'agit d'obtenir les caractéristiques de l'écoulement en amont du choc. On rencontre aussi, très souvent, des problèmes mixtes dans lesquels certains paramètres sont connus en amont et d'autres sont disponibles en aval. Pour résoudre ces problèmes, on dispose des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et des équations d'état du fluide.

Equation de conservation de la masse

L'écoulement est unidimensionnel, permanent et la conservation de la masse s'exprime sous la forme :

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A = \rho_2 v_2 A_2 = \text{constante}$$

ici : $A_1 = A_2 = A$ et on peut écrire :

$$\frac{\dot{m}}{A} = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \qquad (XI,1)$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

Le fluide est en écoulement stationnaire, les forces de volume et de frottement sont négligées. La variation de quantité de mouvement entre les sections 1 et 2 est associée aux forces de pression agissant sur le fluide situé dans le volume de contrôle :

$$\dot{m}v_2 - \dot{m}v_1 = p_1 A_1 - p_2 A_2 \qquad (XI,2)$$

que l'on peut encore écrire en tenant compte de (XI,1) :

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \qquad (XI,3)$$

Cette équation peut être déduite de la relation générale :

$$\boldsymbol{F}_p = \mathcal{F}_1 \boldsymbol{N}_1 - \mathcal{F}_2 \boldsymbol{N}_2 + m_v \boldsymbol{g}$$

avec : $\mathcal{F} = (p + \rho v^2)A$.

Ici : $\boldsymbol{F_p} = 0$, les forces de volume sont négligeables, $\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{N}_2 = \hat{\boldsymbol{x}}, A_1 = A_2 = A$ et on obtient facilement en projetant sur l'axe des x : $0 = (p_1 + \rho_1 v_1^2)A - (p_2 + \rho_2 v_2^2)A$

Equation de conservation de l'énergie

L'écoulement est permanent, il n'y a pas de travail extérieur $w' = 0$, l'écoulement est adiabatique $q = 0$ et les forces de volume sont négligeables :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_i = \text{constante} \qquad (XI,4)$$

L'énergie interne et l'enthalpie h sont reliées par : $h = e + p/\rho$ et on peut encore écrire l'équation (XI,4) sous la forme :

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \text{constante} \qquad (XI,5)$$

Equations d'état

Les équations d'état peuvent être écrites sous les formes génériques :

$$s = s(p,\rho), \qquad h = h(p,\rho) \qquad (XI,6)$$

Nous avons ainsi obtenu un ensemble de quatre équations pour les quatre inconnues p_2, ρ_2, v_2 et h_2. Ces équations permettent l'étude des ondes de choc dans des fluides réels. On peut obtenir de nombreux résultats sans spécifier l'équation d'état (voir par exemple Zeldovich et Raizer 1966). Il est cependant plus simple de poursuivre l'analyse dans le cas de gaz parfaits. Cette hypothèse permet l'écriture de relations explicites entre les caractéristiques amont et aval.

XI.3. Ondes de choc droites dans les gaz parfaits

XI.3.1. Equations fondamentales

Pour un gaz parfait, les équations d'état peuvent s'écrire sous la forme :

$$p = \rho r T \qquad \text{et} \quad h = c_p T \qquad (XI,7)$$

Les équations des chocs droits stationnaires deviennent dans ce cas :

Conservation de la masse :

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \qquad (XI,8)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \qquad (XI,9)$$

Conservation de l'énergie :

$$c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} \qquad (XI,10)$$

Il est commode de faire apparaître dans ces trois relations les nombres de Mach M_1, M_2 des écoulements amont et aval. Une fois ces expressions obtenues, nous pourrons établir une relation entre le Mach amont M_1 et le Mach aval M_2. Il sera ensuite possible de représenter tous les rapports des paramètres amont et aval comme p_2/p_1, T_2/T_1, ρ_2/ρ_1, p_{i2}/p_{i1} en fonction de l'un ou l'autre des nombres de Mach. Les expressions déduites suivant cette procédure sont très utiles en pratique et permettent la résolution de nombreux problèmes d'ingénieur.

Considérons d'abord l'équation de l'énergie. Le premier membre de cette équation s'écrit sous la forme :

$$c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_1 (1 + \frac{v^2}{2 c_p T_1})$$

soit :

$$c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_1 (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2) \qquad (XI, 11)$$

Une opération analogue peut être effectuée sur le second membre et l'équation (XI,10) devient :

$$T_1 (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2) = T_2 (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2) \qquad (XI, 12)$$

soit encore :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \qquad (XI, 13)$$

Considérons maintenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Le premier membre de cette équation peut être mis sous la forme :

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_1 (1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1}) \qquad (XI, 14)$$

En notant que $c_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$, on peut aussi écrire :

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_1 (1 + \gamma M_1^2) \qquad (XI, 15)$$

Le second membre de (XI,9) peut être transformé de la même manière et l'équation (XI,9) devient :

$$p_1 (1 + \gamma M_1^2) = p_2 (1 + \gamma M_2^2) \qquad (XI, 16)$$

ou encore :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \qquad (XI, 17)$$

On peut maintenant passer à l'équation de conservation de la masse. Une première opération consiste à remplacer les vitesses v_1 et v_2 par $M_1 c_1$ et $M_2 c_2$:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} \qquad (XI, 18)$$

Pour un gaz parfait, $\rho = p/rT$ et $c = (\gamma r T)^{1/2}$. En substituant ces deux expressions dans (XI,18), on obtient :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} \qquad (XI,19)$$

Nous avons déjà exprimé p_2/p_1 et T_2/T_1 en fonction de M_1 et M_2. En substituant les relations (XI,13) et (XI,17) dans (XI,10), on obtient une relation pour les nombres de Mach :

$$\frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}\right)^{1/2} \qquad (XI,20)$$

Pour résoudre cette équation, on peut élever les deux membres au carré, ramener au même dénominateur, observer que la relation obtenue est symétrique en fonction de M_1 et M_2 et que l'une de ces racines est :

$$M_1^2 = M_2^2 \qquad (XI,21)$$

L'autre racine est alors facilement obtenue sous la forme :

$$\boxed{M_2^2 = \frac{M_1^2 + 2/(\gamma-1)}{2\gamma M_1^2/(\gamma-1) - 1}} \qquad (XI,22)$$

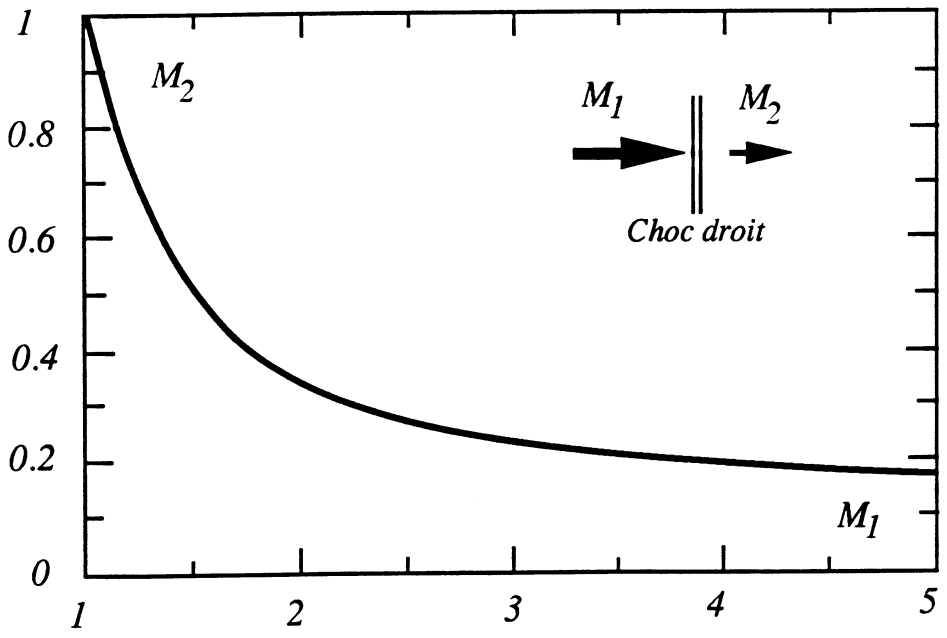


Figure 11. *Relation entre les nombres de Mach amont et aval d'une onde de choc droite.*

La première racine (XI,21) exprime qu'il n'y a pas de changement entre l'état 1 en amont et l'état 2. Cette racine est triviale. La seconde racine (XI,22) est celle qui est associée à une onde de choc droite. Le nombre de Mach M_2 après le choc est représenté en fonction du nombre de Mach M_1 avant le choc à la figure 11, pour un rapport γ de 1.4. Nous verrons plus loin que le **nombre de Mach de l'écoulement en amont du choc doit être obligatoirement supérieur à 1.** Les ondes de choc ne peuvent se former en écoulement subsonique.

Dans ces conditions, la relation (XI,22) montre que M_2 (le nombre de Mach en aval du choc) est toujours inférieur à 1. On note d'autre part que M_2 diminue de façon monotone et qu'il tend asymptotiquement vers $[(\gamma-1)/2\gamma]^{1/2}$ lorsque M_1 tend vers l'infini.

XI.3.2. Détermination des propriétés de l'écoulement

La relation que nous venons d'obtenir entre M_1 et M_2 conduit aux expressions des rapports T_2/T_1, p_2/p_1, ρ_2/ρ_1, p_{i2}/p_1, p_{i2}/p_{i1}, en fonction du nombre de Mach amont seul.

Ainsi le rapport des températures donné par :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2} \qquad (XI,23)$$

devient, en substituant (XI,22) :

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1})[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}] \qquad (XI,24)$$

En substituant (XI,22) dans (XI,27), on obtient facilement :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad (XI,25)$$

Le rapport des masses volumiques est alors déduit de :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \qquad (XI,26)$$

Ce rapport est aussi celui de la vitesse amont à la vitesse aval, une conséquence directe de l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \qquad (XI,27)$$

Exemple 1. Tube de Pitot en écoulement supersonique

Le rapport de la pression d'arrêt isentropique p_{i2} à la pression statique p_1 intervient lorsque l'on effectue des mesures de pression en écoulement supersonique à l'aide d'un tube de Pitot (figure 12). Lorsque le tube est placé dans cette situation, il mesure la pression d'arrêt isentropique **après le choc droit** qui apparaît en amont de la sonde. Le tube de Pitot

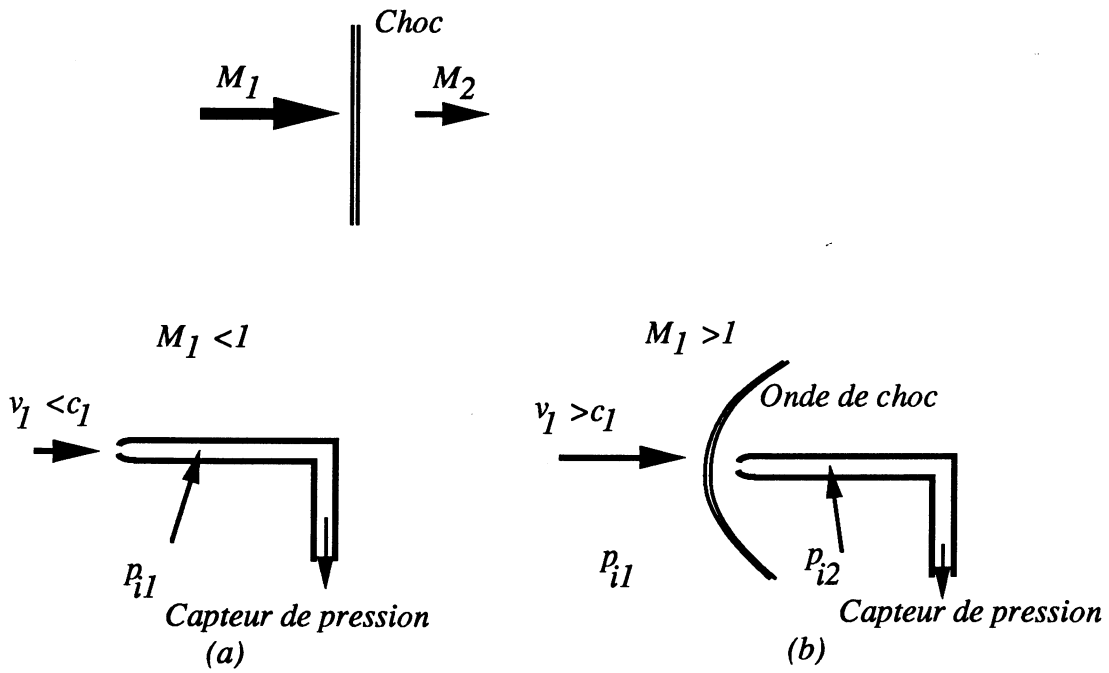


***Figure 12.** Mesure de la pression d'arrêt isentropique. (a) Ecoulement subsonique, (b) Ecoulement supersonique. Lorsque l' écoulement est subsonique, le tube de Pitot mesure la pression d'arrêt isentropique p_{i1} de l'écoulement. En écoulement supersonique, une onde de choc se forme en amont de la sonde. On peut considérer que ce choc est droit au voisinage du tube. Dans ces conditions, la sonde mesure la pression d'arrêt isentropique p_{i2} en aval du choc.*

mesure p_{i2} et non p_{i1}. Dans ces conditions, il est intéressant de déterminer p_{i2}/p_1. Pour cela, on peut écrire :

$$\frac{p_{i2}}{p_1} = \frac{p_{i2}}{p_2}\frac{p_2}{p_1} \qquad (XI,28)$$

Le rapport p_{i2}/p_2 est donné par la relation isentropique :

$$\frac{p_{i2}}{p_2} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \qquad (XI,29)$$

et p_2/p_1 est déterminé en fonction de M_1 par (XI,25). Il reste à remplacer M_2 dans la relation (XI,29) par son expression en fonction de M_1. On obtient alors :

$$\frac{p_{i2}}{p_1} = (\frac{\gamma + 1}{2}) M_1^2 [\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}]^{1/(\gamma-1)} \qquad (XI,30)$$

Un autre rapport utile est celui des pressions d'arrêt isentropique en aval et en amont du choc. Ce rapport peut être évalué par factorisation :

$$\frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \frac{p_{i2}}{p_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_1}{p_{i1}} \qquad (XI,31)$$

On obtient facilement :

$$\frac{p_{i2}}{p_{i1}} = \{[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}]^{\gamma}(\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1})\}^{-1/(\gamma-1)} \qquad (XI,32)$$

Les relations que nous venons d'établir sont rassemblées au tableau 2. Ces relations donnent l'évolution des variables principales au travers d'une onde de choc droite.

XI.3.3. Tables de choc

Les relations établies au paragraphe précédent sont d'un emploi courant, et il est souvent commode d'utiliser les tables de choc correspondantes. Ces tables donnent le nombre de Mach M_2, les rapports $\rho_2/\rho_1, T_2/T_1, p_2/p_1, p_{i2}/p_{i1}, p_{i2}/p_1$ en fonction du nombre de Mach amont M_1.

Première application

Un écoulement d'air présente un nombre de Mach $M_1 = 2$, une pression de $1\,bar$ et une température de $300\,K$. Cet écoulement passe à travers un choc droit stationnaire. Calculer les caractéristiques de l'écoulement en aval du choc (nombre de Mach, pression, pression d'arrêt, température, masse spécifique, vitesse). On utilisera les tables pour l'ensemble des calculs.

Solution

Nous allons d'abord déterminer les caractéristiques de l'écoulement en amont du choc. La masse spécifique de l'air est donnée par :

$$\rho_1 = \frac{p_1}{rT_1} = \frac{10^5}{(287)(300)} = 1.161\,kg/m^3$$

La pression d'arrêt isentropique en amont du choc est obtenue en utilisant les tables **d'écoulement isentropique**. Pour $M_1 = 2$, on trouve :

$$\frac{p_1}{p_{i1}} = 0.1278 \qquad \text{d'où :} \qquad p_{i1} = 7.82\,10^5\,Pa$$

La célérité sonore en amont du choc est donnée par :

$$c_1 = (\gamma r T_1)^{1/2} = (1.4)(287)(300)^{1/2} = 347.2\,m/s$$

et la vitesse de l'écoulement a pour valeur :

$$v_1 = M_1 c_1 = (347.2)2 = 694.4\,m/s$$

Les caractéristiques en aval du choc sont obtenues en utilisant les tables de choc.

Pour $M_1 = 2$, les tables donnent :

M_2 =0.577
v_1/v_2 $=\rho_2/\rho_1 = 2.666$
T_2/T_1 =1.687
p_2/p_1 =4.5
p_{i2}/p_{i1}=0.720

et on obtient facilement :

$\rho_2 = (2.666)(1.161)$ $=3.095\, kg/m^3$
$v_2 = (694.4)/2.666$ $=260.5\, m/s$
$T_2 = (1.687)(300)$ $=506\, K$
$p_2 = (4.5)10^5$ $=4.5\, 10^5\, Pa$
$p_{i2} = (0.720)(7.82\, 10^5)$=$5.63\, 10^5\, Pa$

XI.3.4. La relation d'Hugoniot pour les ondes de choc droites

L'équation d'Hugoniot (ou Rankine-Hugoniot) relie les rapports de pression et densité au travers d'une onde de choc. Cette relation peut être obtenue à partir des équations fondamentales, mais il est plus commode de partir des expressions de p_2/p_1 et ρ_2/ρ_1 du paragraphe précédent :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad (XI,33)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \qquad (XI,34)$$

On peut tirer M_1^2 de la première relation :

$$M_1^2 = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{2\gamma p_1} \qquad (XI,35)$$

puis porter cette expression dans la relation (XI,34) pour aboutir à :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2} \qquad (XI,36)$$

On peut aussi tirer l'expression du rapport p_2/p_1 :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} \qquad (XI,37)$$

que l'on peut encore réécrire sous la forme :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \qquad (XI,38)$$

Cette dernière expression due à Hugoniot relie les rapports de pression et de densité au travers d'une onde de choc droite. Si (p_1, ρ_1) représente l'état thermodynamique en amont

du choc, l'état aval est caractérisé par (p_2, ρ_2). La relation d'Hugoniot ne permet pas de savoir si le changement d'état est une compression ou une détente. Pour montrer que l'onde de choc est une compression, il faut considérer la variation d'entropie associée au passage de l'état 1 à l'état 2. Comme le processus étudié est adiabatique, cette variation d'entropie est obligatoirement positive. Nous calculerons plus loin la variation d'entropie Δs au travers du choc et nous verrons que Δs est positif lorsque $p_2/p_1 > 1$, c'est-à-dire pour une compression.

La relation d'Hugoniot est représentée sur la figure 13. Lorsque $p_2/p_1 \to \infty$, le rapport des masses volumiques tend vers une limite finie (la limite des grands nombres de Mach amont) :

$$\lim_{p_2/p_1 \to \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

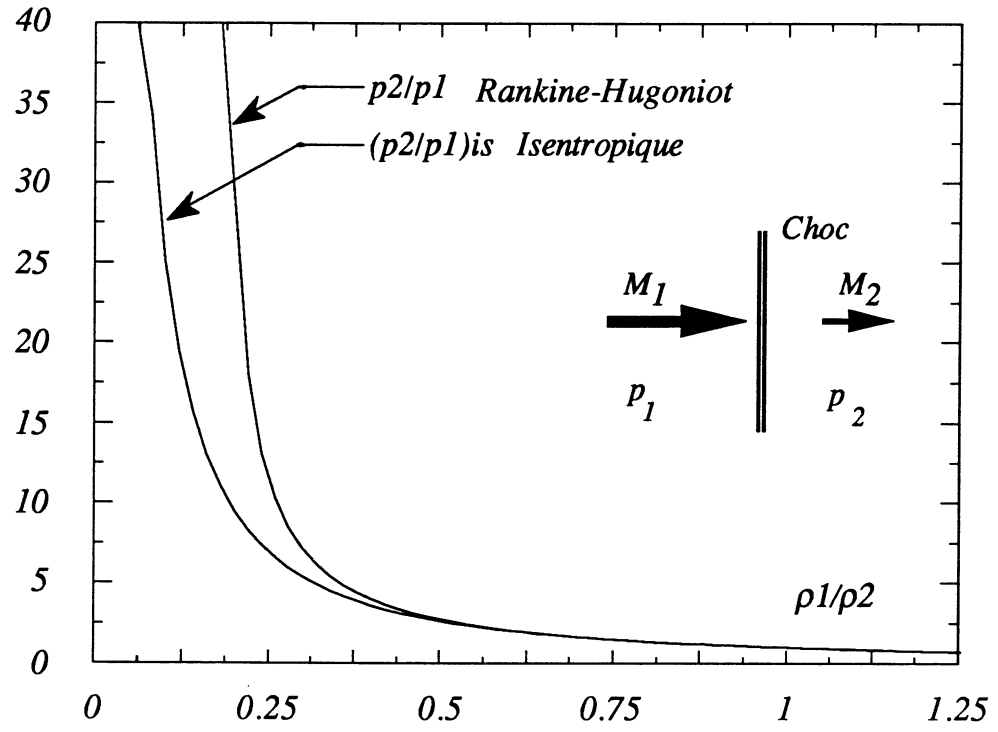


***Figure 13.** Représentation de l'équation d'Hugoniot. La ligne d'Hugoniot et l'isentropique sont tangentes au point (1,1). Seuls les points pour lesquels $p_2/p_1 > 1$, correspondent à des ondes de choc.*

Pour un gaz caractérisé par $\gamma = 1.4$, ce rapport ne peut dépasser une valeur de 6. On a représenté sur la même figure la relation isentropique $p_2/p_1 = (p_2/\rho_1)^\gamma$. La ligne

d'Hugoniot et l'isentropique sont tangentes au point $p_2/p_1 = 1, \rho_2/\rho_1 = 1$. Ainsi, les ondes de choc faibles (pour lesquelles $p_2/p_1 - 1 << 1$ et $M_1 \sim 1$) sont assimilables à des évolutions isentropiques.

XI.3.5. La ligne de Rayleigh

On vient de voir que l'équation d'Hugoniot donne l'ensemble des conditions de pression et de densité correspondant à des chocs droits. Pour un nombre de Mach amont donné, les conditions de choc peuvent être déterminées à l'aide d'une deuxième relation, la ligne de Rayleigh que nous allons maintenant établir.

Considérons à nouveau l'équation de conservation de la quantité de mouvement écrite sous la forme :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2$$

On a successivement :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1^2 (1 - \frac{\rho_2 v_2}{\rho_1 v_1} \frac{v_2}{v_1})$$

Comme $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ on a encore :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1^2 (1 - \frac{\rho_1}{\rho_2})$$

et en divisant les deux membres par p_1, on obtient la ligne de Rayleigh :

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = -\gamma M_1^2 (\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1)$$

Dans le plan $(\rho_1/\rho_2, p_2/p_1)$ de la figure 13, cette expression représente une droite passant par le point (1,1), dont la pente est $-\gamma M_1^2$. Le point d'intersection de cette droite et de la ligne d'Hugoniot donne les conditions de choc correspondant au nombre de Mach M_1.

XI.3.6. La relation de Prandtl-Meyer

On peut obtenir une relation particulièrement simple entre les vitesses amont et aval d'une onde de choc droite :

$$v_1 v_2 = c_*^2 \qquad (XI, 39)$$

Dans cette relation, c_* représente la célérité sonore critique pour l'écoulement amont ou pour l'écoulement aval. (Comme les températures d'arrêt T_{i1} et T_{i2} sont égales, les températures critiques T_{1*} et T_{2*} des écoulements amont et aval sont aussi égales. Les célérités sonores critiques sont identiques $c_{1*} = c_{2*} = c_*$).

Pour démontrer la relation (XI,39), on peut partir de l'expression obtenue pour M_2 en fonction de M_1 :

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + 2/(\gamma - 1)}{2\gamma M_1^2/(\gamma - 1) - 1} \qquad (XI, 40)$$

On peut maintenant exprimer les nombres de Mach M_1 et M_2 en fonction des vitesses réduites $M_{1*} = v_1/c_*$ et $M_{2*} = v_2/c_*$. Nous utiliserons pour cela une relation établie dans l'étude des écoulements isentropiques :

$$M_1^2 = \frac{2M_{1*}^2}{(\gamma+1)M_{1*}^2 - (\gamma-1)} \qquad (XI,41)$$

$$M_2^2 = \frac{2M_{2*}^2}{(\gamma+1)M_{2*}^2 - (\gamma-1)} \qquad (XI,42)$$

En portant ces deux expressions dans (XI,40), on obtient après quelques calculs :

$$M_{1*}M_{2*} = 1 \qquad (XI,43)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\frac{v_1}{c_*}\frac{v_2}{c_*} = 1 \qquad (XI,44)$$

soit :

$$v_1 v_2 = c_*^2 \qquad (XI,45)$$

La relation de Prandtl-Meyer est ainsi démontrée.

XI.3.7. Variation d'entropie au travers d'une onde de choc droite

La variation d'entropie au travers d'une onde de choc droite peut être exprimée par exemple en fonction de l'amplitude du choc : $\beta = p_2/p_1 - 1$.
Pour un gaz parfait, la variation d'entropie entre l'état 1 et l'état 2, a pour forme :

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \ln[\frac{p_2}{p_1}(\frac{\rho_1}{\rho_2})^\gamma] \qquad (XI,46)$$

Le rapport ρ_1/ρ_2 est donné par la relation d'Hugoniot (XI,36) :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma+1)+(\gamma-1)p_2/p_1}{(\gamma-1)+(\gamma+1)p_2/p_1} \qquad (XI,47)$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta}{1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\beta} \qquad (XI,48)$$

En substituant cette expression dans (XI,46), on obtient :

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \ln(1+\beta) + \gamma\ln(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta) - \gamma\ln(1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\beta) \qquad (XI,49)$$

La variation d'entropie est nulle lorsque $\beta = 0$, c'est-à-dire lorsque l'onde de choc est d'amplitude nulle ($p_2/p_1 = 1$). Pour $\beta > 0$, Δs est positif et la variation d'entropie augmente de façon monotone avec β.

Pour les ondes de choc faibles, $\beta << 1$, on peut développer l'expression (XI,49) en série. On utilise pour cela le développement en série de Taylor :

$$\ln(1+\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} \dots$$

Les termes d'ordre un et deux disparaissent et le développement de l'expression (XI,49) prend comme forme :

$$\frac{\Delta s}{c_v} = \frac{\gamma^2-1}{12\gamma^2}\beta^3 - \frac{\gamma^2-1}{8\gamma^2}\beta^4 + \dots \qquad (XI,50)$$

ou encore, en remplaçant c_v par $r/(\gamma-1)$:

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\beta^3 - \frac{\gamma+}{8\gamma^2}\beta^4 + \dots \qquad (XI,51)$$

On peut déduire de cette expression un développement en fonction de $M_1^2 - 1$. Il suffit pour cela d'utiliser :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad (XI,52)$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\beta = \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1) \qquad (XI,53)$$

En portant cette dernière relation dans (XI,51), on obtient :

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{2}{3}\frac{\gamma}{(\gamma+1)^2}(M_1^2-1)^3 - \frac{2\gamma^2}{(\gamma+1)^2}(M_1^2-1)^4 + \dots \qquad (XI,54)$$

Ainsi, pour les ondes de choc faibles, l'entropie croît comme le cube de l'amplitude du choc ou encore comme le cube de la différence $M_1^2 - 1$. On peut donc en **première approximation** négliger la variation d'entropie pour les ondes de choc faibles ($M_1 < 1.3$) et utiliser la relation isentropique pour relier les pressions et densités de part et d'autre du choc.

XI.4. Equation d'Hugoniot pour les ondes de choc droites dans les gaz réels

La relation d'Hugoniot pour les ondes de choc droites peut être établie sans faire l'hypothèse des gaz parfaits. Cette propriété est particulièrement utile lorsque l'on doit prendre

en compte les effets de gaz réel. Considérons à nouveau les équations générales de l'onde de choc droite :

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \\ h_1 + \frac{v_1^2}{2} &= h_2 + \frac{v_2^2}{2} \\ h &= h(p, \rho) \end{aligned} \qquad (XI, 55)$$

Il s'agit d'éliminer les vitesses v_1 et v_2 pour établir une relation entre h, p et ρ. On peut d'abord mettre l'équation de l'énergie sous la forme :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) \qquad (XI, 56)$$

A l'aide de l'équation de conservation de la masse, on peut encore écrire :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(\frac{\rho_2}{\rho_1} v_1 v_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} v_1 v_2) \qquad (XI, 57)$$

soit :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} v_1 v_2 (\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}) \qquad (XI, 58)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement peut aussi s'écrire :

$$p_2 - p_1 = \rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2 \qquad (XI, 59)$$

soit, en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$p_2 - p_1 = v_1 v_2 (\rho_2 - \rho_1) \qquad (XI, 60)$$

Il reste à éliminer le produit $v_1 v_2$ entre les expressions (XI,58) et (XI,60) pour obtenir :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1})(\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{\rho_2}) \qquad (XI, 61)$$

soit encore :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\frac{\rho_2 + \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \qquad (XI, 62)$$

Finalement :

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}) \qquad (XI, 63)$$

Cette équation, en conjonction avec l'équation d'état $h = h(p, \rho)$, spécifie pour un état 1 donné, l'ensemble des états du fluide en aval du choc droit.

La relation (XI,63) peut encore s'écrire en fonction de l'énergie interne $e = h - p/\rho$. On obtient facilement :

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}) \qquad (XI, 64)$$

XI.5. Ondes de choc droites en translation uniforme

Nous avons jusqu'ici uniquement envisagé des chocs droits **stationnaires**. Dans certaines situations, on observe des ondes de choc droites en translation uniforme dans un milieu initialement au repos. Ce type d'onde est produit par exemple dans des tubes à choc pour générer des écoulements supersoniques à grande enthalpie d'arrêt (voir chapitre XIII).

On peut traiter cette nouvelle configuration en se plaçant dans un référentiel en translation uniforme à la vitesse v_s de l'onde de choc. Dans ce référentiel, l'onde de choc est stationnaire et les relations obtenues plus haut sont applicables. Pour illustrer cette méthode d'analyse, considérons une onde de choc en translation uniforme à la vitesse v_s par rapport à un milieu gazeux de densité ρ'_1 et de pression p'_1 (figure 14a)).

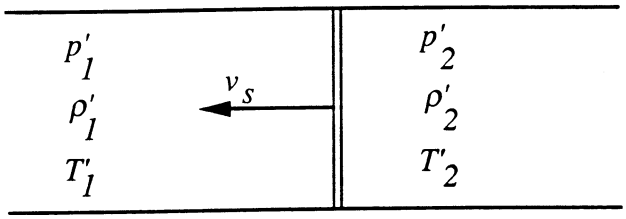


Figure 14 a) *Onde de choc en translation uniforme à la vitesse* v_s .

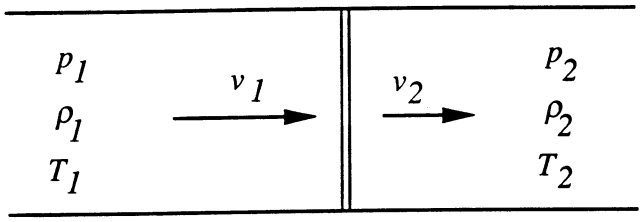


Figure 14b). *Dans un référentiel en translation à la vitesse* v_s , *l' onde de choc est stationnaire et les gaz de la région 1 approchent à la vitesse* $v_1 = v_s$.

Si l'on se place maintenant dans le référentiel en translation avec l'onde de choc, les gaz de la région 1 (figure 14b)) approchent l'onde de choc stationnaire avec la vitesse $v_1 = v_s$. La pression des gaz est p_1 et le nombre de Mach M_1 des gaz doit être supersonique. Après le choc, les gaz ont une pression p_2 supérieure à p_1 et leur nombre de Mach M_2 est subsonique $M_2 < 1$. La vitesse des gaz après le choc est $v_2 < v_1$.

Ainsi, dans le référentiel fixe de la figure 14a), les gaz qui sont à l'arrière du choc se déplacent à la vitesse $v_2 - v_1$ et cette vitesse est plus faible que v_1.

XI.5.1. Formules pour les ondes de choc droites en translation uniforme

Nous désignons par p_1, T_1, ρ_1, M_1, v_1, p_2, T_2, ρ_2, M_2, v_2, les caractéristiques de l'écoulement dans le référentiel en translation uniforme et par p'_1, T'_1, ρ'_1, M'_1, v'_1, p'_2, T'_2, ρ'_2, M'_2, v'_2 les caractéristiques de l'écoulement dans le référentiel fixe.

Ces quantité sont reliées par les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} p_1' = p_1 & & p_2' = p_2 \\ T_1' = T_1 & & T_2' = T_2 \\ M_1 = v_1/c_1 & & M_1' = 0 \\ M_2 = v_2/c_2 & & M_2' = (v_1 - v_2)/c_2 = (c_1/c_2)M_1 - M_2 \\ v_1' = 0 & & v_2' = v_1 - v_2 \end{array}$$

Application

Une onde de choc droite se déplace à une vitesse de $v_s = 2600\,m/s$ dans un milieu au repos de pression $p_1 = 1\,bar$ et $T_1 = 300\,K$. Calculer la pression après passage du choc et la vitesse des gaz derrière le choc.

Solution

Dans un référentiel en translation avec le choc, les gaz s'approchent à la vitesse $v_1 = 2600\,m/s$. Le nombre de Mach correspondant est :

$$M_1 = \frac{v_1}{c_1} = \frac{2600}{[(1.4)(287)(300)]^{1/2}} = 7.50$$

Pour ce nombre de Mach, les tables de choc donnent :

$$\frac{p_2}{p_1} = 65.4, \qquad \frac{v_1}{v_2} = 5.51$$

Dans le référentiel en translation :

$$p_2 = 65.4\,bar, \qquad v_2 = 472.6\,m/s$$

Ainsi dans le référentiel fixe :

$$p_2' = p_2 = 65.4\,bar \quad \text{et} \quad v_2' = v_1 - v_2 = 2128\,m/s$$

Pour cette onde de choc rapide, la variation de pression au travers de l'onde de choc est très importante.

Tableau 1. Equations fondamentales pour les ondes de choc droites

Conservation de la masse :

$$\dot{m}/A = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\mathcal{F}/A = p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2$$

Conservation de l'énergie :

$$h_i = h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Equations d'état :

$$h = h(s, \rho)$$

$$s = s(p\rho)$$

Tableau 2. Equations pour les propriétés de l'écoulement à travers une onde de choc droite pour un gaz parfait

$$M_2 = \left[\frac{M_1^2 + 2/(\gamma-1)}{2\gamma M_1^2/(\gamma-1) - 1}\right]^{1/2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}\right]$$

$$\frac{p_{2i}}{p_{i1}} = \left\{\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}\right]^{\gamma}\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\right\}^{-1/(\gamma-1)}$$

$$\frac{p_{2i}}{p_1} = \frac{\gamma+1}{2} M_1^2 \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

Tableau 3.

Relation d'Hugoniot (ou Rankine-Hugoniot)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

Relation de Prandtl-Meyer :

$$v_1 v_2 = c_*^2$$

ou :

$$M_1^* M_2^* = 1$$

(Note : la célérité sonore critique est la même en amont et en aval du choc).

Tableau 4.

Variation d'entropie au travers d'une onde de choc droite :

$$\frac{\Delta s}{r} = \ln(1+\beta) + \gamma \ln(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\beta) - \gamma \ln(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}\beta)$$

où $\beta = p_2/p_1 - 1$ est l'amplitude de l'onde de choc.
Développement pour $\beta << 1$:

$$\frac{\Delta s}{r} \sim \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\beta^3 + 0(\beta^4)$$

$$\frac{\Delta s}{r} \sim \frac{2}{3}\frac{\gamma}{(\gamma+1)^2}(M_1^2-1)^3 + 0\{(M_1^2-1)^4\}$$

ANNEXE A

UNE ESTIMATION DE L'EPAISSEUR DES ONDES DE CHOC

Nous avons indiqué dans l'introduction de ce chapitre que l'épaisseur d'une onde de choc était de l'ordre de quelque libre parcours moyen. Dans ces conditions, une analyse de la structure interne de l'onde de choc nécessite une approche fondée sur la théorie cinétique. On peut cependant obtenir une **estimation** de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du choc à l'aide des équations de Navier-Stokes.

Considérons une onde de choc droite stationnaire séparant des écoulements amont et aval dont les vitesses sont respectivement v_1 et v_2. Le profil de vitesse à l'intérieur du choc va raccorder de façon monotone ces deux valeurs, et la variation de vitesse va s'effectuer sur l'épaisseur δ (figure 1).

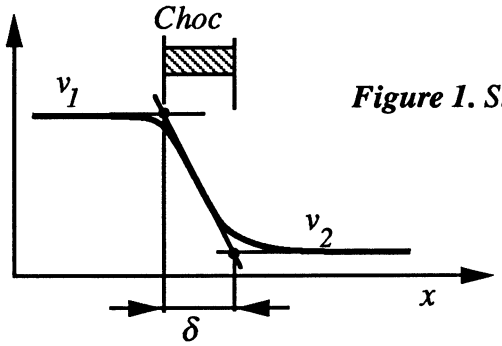


***Figure 1.** Structure interne d'une onde de choc.*

On peut définir cette épaisseur δ par l'expression :

$$\delta = (v_1 - v_2)/|\frac{dv}{dx}|_{\max} \qquad (A,1)$$

De part et d'autre de l'onde de choc, les variations de vitesse sont faibles et on peut négliger les forces de viscosité et la conductivité thermique. Il n'en est plus de même à l'intérieur du choc, car dans cette région les gradients sont très grands et leurs dérivées prennent des valeurs importantes. L'écoulement à l'intérieur du choc doit être considéré comme visqueux et non adiabatique et la structure du choc est déterminée par les effets visqueux

et par la conduction de chaleur. Un équilibre s'établit alors entre les forces visqueuses qui tendent à arrondir et épaissir le profil de vitesse et les forces d'inertie et de pression qui au contraire entraînent le raidissement du profil.

On peut exprimer cet équilibre en estimant l'ordre de grandeur des forces d'inertie et de viscosité à l'intérieur de l'onde de choc (la procédure d'estimation utilisée ici est décrite plus complètement au chapitre XV).

L'ordre de grandeur des forces d'inertie est donné par :

$$\rho v \frac{dv}{dx} \sim \rho_o v_o \frac{v_1 - v_2}{\delta} \tag{A,2}$$

où l'indice o désigne une valeur typique à l'intérieur de l'onde de choc.

L'ordre de grandeur des forces visqueuses est obtenu à partir de :

$$\frac{d}{dx}\tau_{xx} = \frac{4}{3}\frac{d}{dx}(\mu \frac{dv}{dx}) \sim \frac{4}{3}\mu_o \frac{v_1 - v_2}{\delta^2} \tag{A,3}$$

L'équilibre des forces d'inertie et de viscosité à l'intérieur du choc est donc décrit par :

$$\rho_o v_o \frac{v_1 - v_2}{\delta} \sim \frac{4}{3}\mu_o \frac{v_1 - v_2}{\delta^2} \tag{A,4}$$

On tire de cette expression :

$$Re_\delta = \frac{\rho_o v_o \delta}{\mu_o} \sim \frac{4}{3} \tag{A,5}$$

Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur du choc est donc de l'ordre de l'unité.

Pour estimer le rapport de l'épaisseur du choc au libre parcours moyen λ, il suffit d'exprimer la viscosité du gaz en fonction de λ et de la vitesse moyenne $\overline{u}$ des molécules dans le gaz. La théorie cinétique donne :

$$\mu \sim \frac{1}{3}\rho \overline{u} \lambda \tag{A,6}$$

et

$$\overline{u} = \left(\frac{8}{\pi} rT\right)^{1/2}$$

En portant (A,6) dans l'expression (A,5), on obtient :

$$\frac{\delta}{\lambda} \sim \frac{1}{3}\frac{\overline{u}}{v_o} Re_\delta$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\frac{\delta}{\lambda} \sim \frac{1}{3}\left(\frac{8}{\gamma\pi}\right)^{1/2} \frac{Re_\delta}{M_o}$$

Dans cette expression, $Re_\delta \sim 4/3$ et le nombre de Mach M_o est de l'ordre de 1 à l'intérieur du choc et par conséquent $\delta/\lambda \sim 1$. L'épaisseur du choc est de l'ordre du libre parcours moyen.

CHAPITRE XII

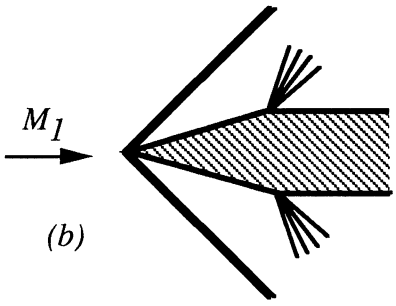
ONDES DE CHOC OBLIQUES

XII.1. Introduction

Les ondes de choc se développent lorsqu'un écoulement supersonique décélère rapidement en réponse à une augmentation de la pression ou encore lorsque l'écoulement change de direction et que ce changement de direction s'accompagne d'une compression. La figure 1 présente quelques cas où l'on observe des ondes de choc obliques.

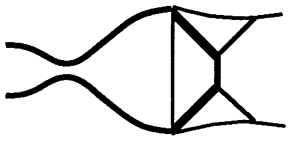
(a)

Ondes de choc obliques produites au niveau de la prise d'air d'un turboréacteur.



(b)

Ondes de choc obliques issues du bord d'attaque d'un dièdre.



(c) *Recompression d'un jet supersonique lorsque la pression d'éjection est inférieure à la pression ambiante.*

Figure 1. *Exemples d'ondes de choc obliques.*

Les chocs obliques sont facilement analysés à l'aide des résultats développés dans le cas des ondes de choc droites. En fait, nous verrons que les relations établies précédemment (chapitre XI) peuvent être directement utilisées si l'on remplace le nombre de Mach M_1, qui intervient dans ces relations par la composante normale M_{1n} du nombre de Mach en amont du choc.

XII.2. Equations fondamentales pour les ondes de choc obliques

Le modèle d'onde de choc oblique qui va être analysé est représenté à la figure 2. Le choc oblique est produit par le changement de direction d'un écoulement supersonique résultant par exemple d'une variation d'inclinaison de la paroi. L'indice 1 désigne la région située en amont du choc et l'indice 2 la région située en aval. Les vitesses en amont et en aval sont respectivement v_1 et v_2, ϵ est l'angle entre la direction v_1 et le choc, β désigne l'angle entre la direction v_2 et le choc, et $\delta = \epsilon - \beta$ représente le changement de direction de l'écoulement, c'est-à-dire la **déflexion.**

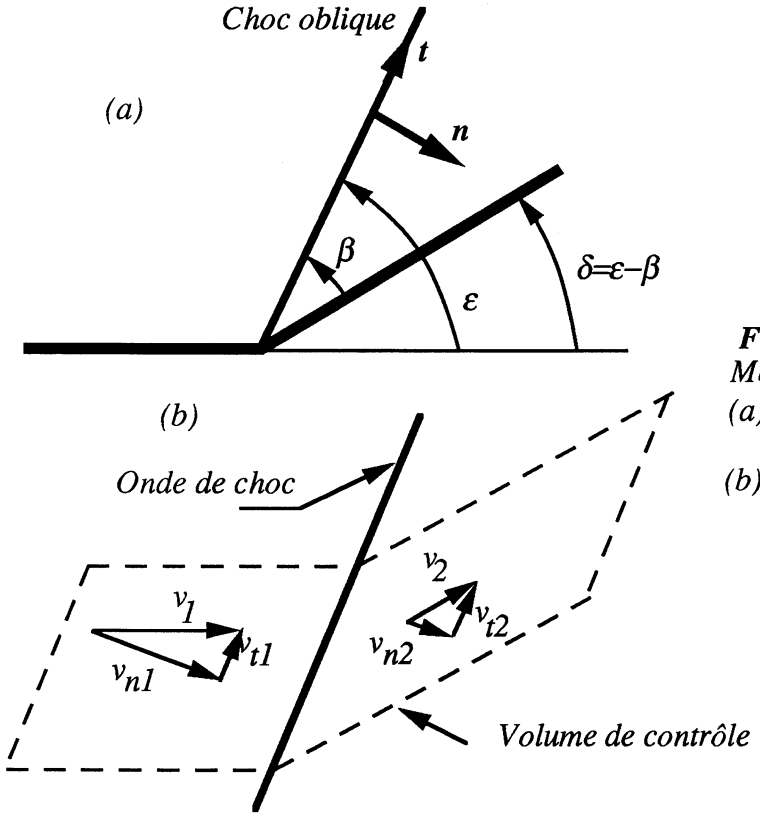


Figure 2.
Modèle d'onde de choc oblique.
(a) Définition des paramètres angulaires.
(b) Décomposition des vitesses amont et aval.

Nous désignons par n et t les directions normale et tangentielle au choc. Ainsi v_{n1} et v_{t1} représentent les composantes normale et tangentielle de la vitesse amont et v_{n2} et v_{t2} les mêmes composantes en aval. On peut écrire les relations géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_{n1}^2 + v_{t1}^2, & v_2^2 &= v_{n2}^2 + v_{t2}^2 \\ v_{t1} &= v_1 \cos\epsilon, & v_{n1} &= v_1 \sin\epsilon \\ v_{t2} &= v_2 \cos\beta, & v_{n2} &= v_2 \sin\beta \end{aligned} \qquad (XII, 1)$$

On peut maintenant écrire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement projetées suivant les directions normale et tangente au choc ainsi que de l'énergie

pour le volume de contrôle représenté sur la figure 2. On obtient les expressions suivantes :

Conservation de la masse :

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \qquad (XII,2)$$

Conservation de la quantité de mouvement suivant la direction normale :

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2 \qquad (XII,3)$$

Conservation de la quantité de mouvement suivant la direction tangentielle :

$$\rho_1 v_{n1} v_{t1} = \rho_2 v_{n2} v_{t2} \qquad (XII,4)$$

Conservation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2}(v_{n1}^2 + v_{t1}^2) = h_2 + \frac{1}{2}(v_{n2}^2 + v_{t2}^2) \qquad (XII,5)$$

En comparant les équations (XII,2) et (XII,3), on obtient facilement :

$$v_{t1} = v_{t2} \qquad (XII,6)$$

Les vitesses tangentielles de part et d'autre du choc sont égales, ce qui permet de simplifier l'équation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2}v_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_{n2}^2 \qquad (XII,7)$$

Ainsi les équations de conservation de la masse (XII,2), de la quantité de mouvement (XII,3) et de l'énergie (XII,7) ont des formes identiques à celles déjà obtenues pour l'onde de choc droite. De ce fait, toutes les relations déjà démontrées dans ce dernier cas sont applicables en remplaçant les vitesses v_1 et v_2 par les composantes normales de ces vitesses. Il faut, pour que cela soit possible, que la composante normale en amont du choc v_{n1} soit supersonique.

Comme $v_{n2} < v_{n1}$, (d'après la théorie du choc droit, v_{n2} est subsonique), et que d'autre part $v_{t1} = v_{t2}$, on voit immédiatement que l'écoulement aval doit **être défléchi vers la direction de l'onde de choc oblique.**

Equation d'état

Pour compléter le système d'équations (XII,2) à (XII,7), il faut ajouter des équations d'état que l'on peut spécifier sous les formes génériques :

$$\rho = \rho(p,T), \qquad h = h(p,\rho) \qquad (XII,8)$$

Les équations fondamentales de l'onde de choc oblique sont regroupées au tableau 1. Nous avons à notre disposition 10 équations pour les dix inconnues : p_2, ρ_2, T_2, h_2, v_2, v_{n2}, v_{t2}, v_{n1}, v_{t1} et ϵ en fonction des propriétés de l'écoulement amont p_1, ρ_1, T_1, h_1, v_1 et de la déflexion δ. Comme au chapitre XI, nous allons poursuivre l'analyse dans le cas des gaz parfaits.

XII.3. Ondes de choc obliques dans les gaz parfaits

Les équations d'état pour les gaz parfaits peuvent s'écrire sous les formes :

$$\begin{aligned} p &= \rho r T \\ h &= c_p T \end{aligned} \qquad (XII,9)$$

L'équation de conservation de l'énergie devient :

$$c_p T_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} = c_p T_2 + \frac{v_{n2}^2}{2} \qquad (XII,10)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ne changent pas de forme.

Nous pouvons maintenant établir des relations donnant les rapports des propriétés de l'écoulement au travers du choc. Pour cela, il suffit de remplacer le nombre de Mach M_1 par M_{1n} dans les expressions établies pour l'onde de choc droite. La composante normale du nombre de Mach est donnée par :

$$M_{n1} = M_1 \sin\epsilon \qquad (XII,11)$$

et on obtient :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2\epsilon - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \qquad (XII,12)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\epsilon}{2+(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\epsilon} \qquad (XII,13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2\epsilon - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}][\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\epsilon}] \qquad (XII,14)$$

Pour utiliser ces expressions, il faut d'abord déterminer l'angle d'inclinaison ϵ du choc par rapport à la direction initiale de l'écoulement. Pour cela, on peut partir de l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{n1}}{v_{n2}} \qquad (XII,15)$$

Les composantes normales v_{n1} et v_{n2} peuvent être exprimées en fonction des angles ϵ et $\beta = \epsilon - \delta$:

$$\begin{aligned} v_{n1} &= v_{t1} \tan\epsilon \\ v_{n2} &= v_{t2} \tan(\epsilon - \delta) \end{aligned} \qquad (XII,16)$$

Nous savons d'autre part que $v_{t1} = v_{t2}$. En portant les relations précédentes dans l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\tan\epsilon}{\tan(\epsilon-\delta)} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad (XII,17)$$

On peut rapprocher cette expression de celle déjà écrite pour le rapport des densités (XII,13). On obtient :

$$\frac{\tan\epsilon}{\tan(\epsilon-\delta)} = \frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\epsilon}{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\epsilon} \qquad (XII,18)$$

Cette relation détermine l'angle ϵ en fonction du nombre de Mach M_1 et de la déflexion δ.

On peut faire apparaître la déflexion δ sous une forme plus explicite en effectuant les calculs suivants. On commence par développer $\tan(\epsilon-\delta)$:

$$\frac{\tan\epsilon(1+\tan\epsilon\tan\delta)}{\tan\epsilon-\tan\delta} = \frac{(\gamma+1)M_1^2\sin^2\epsilon}{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\epsilon} \qquad (XII,19)$$

On ramène ensuite cette expression au même dénominateur et on regroupe les termes en $\tan\delta$ au premier membre :

$$\tan\delta[(\gamma+1)M_1^2\sin^2\epsilon+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\epsilon\tan^2\epsilon+2\tan^2\epsilon] = 2\tan\epsilon(M_1^2\sin^2\epsilon-1) \quad (XII,20)$$

Quelques calculs permettent ensuite d'écrire cette relation sous la forme finale :

$$\frac{1}{\tan\delta} = (\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2}{M_1^2\sin^2\epsilon-1}-1)\tan\epsilon \qquad (XII,21)$$

Cette équation détermine l'angle ϵ sous forme implicite, mais elle permet aussi une tabulation directe de la déflexion δ en fonction de l'angle ϵ pour divers nombres de Mach amont.

Nous avons vu plus haut que l'intensité du choc dépendait à la fois du nombre de Mach M_1 et de l'angle ϵ. Le choc oblique n'existe que si $M_1\sin\epsilon \geq 1$. Lorsque $M_1\sin\epsilon = 1$, la relation (XII,21) montre que $\tan\delta = 0$, c'est-à-dire que la déflexion de l'écoulement est infiniment faible. L'onde de choc oblique est alors appelée **onde de Mach**. Sa direction est donnée par $\sin\epsilon = 1/M_1$ et les pression, densité, vitesse, température subissent des variations d'amplitude infiniment faibles au travers de cette ligne :

$p_2/p_1 = 1$, $\rho_2/\rho_1 = 1$, $v_1/v_2 = 1$, $T_2/T_1 = 1$.

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés des ondes de Mach et sur les **ondes de choc obliques faibles** qui apparaissent lorsque l'angle de déflexion est très petit.

Pour obtenir le nombre de Mach en aval du choc oblique, on peut utiliser la relation établie pour les ondes de choc droites avec comme argument les composantes normales des nombres de Mach :

$$M_{n2}^2 = \frac{M_{n1}^2+2/(\gamma-1)}{2\gamma M_{n1}^2/(\gamma-1)-1} \qquad (XII,22)$$

soit, sous une forme plus explicite :

$$M_2^2\sin^2(\epsilon-\delta) = \frac{M_1^2\sin^2\epsilon+2/(\gamma-1)}{2\gamma M_1^2\sin^2\epsilon/(\gamma-1)-1} \qquad (XII,23)$$

L'angle de choc ϵ et le nombre de Mach M_2 déterminés par les formules (XII,21) et (XII,23) sont représentés sur les figures 3 et 4 en fonction du nombre de Mach amont et pour un ensemble de valeurs de la déflexion δ.

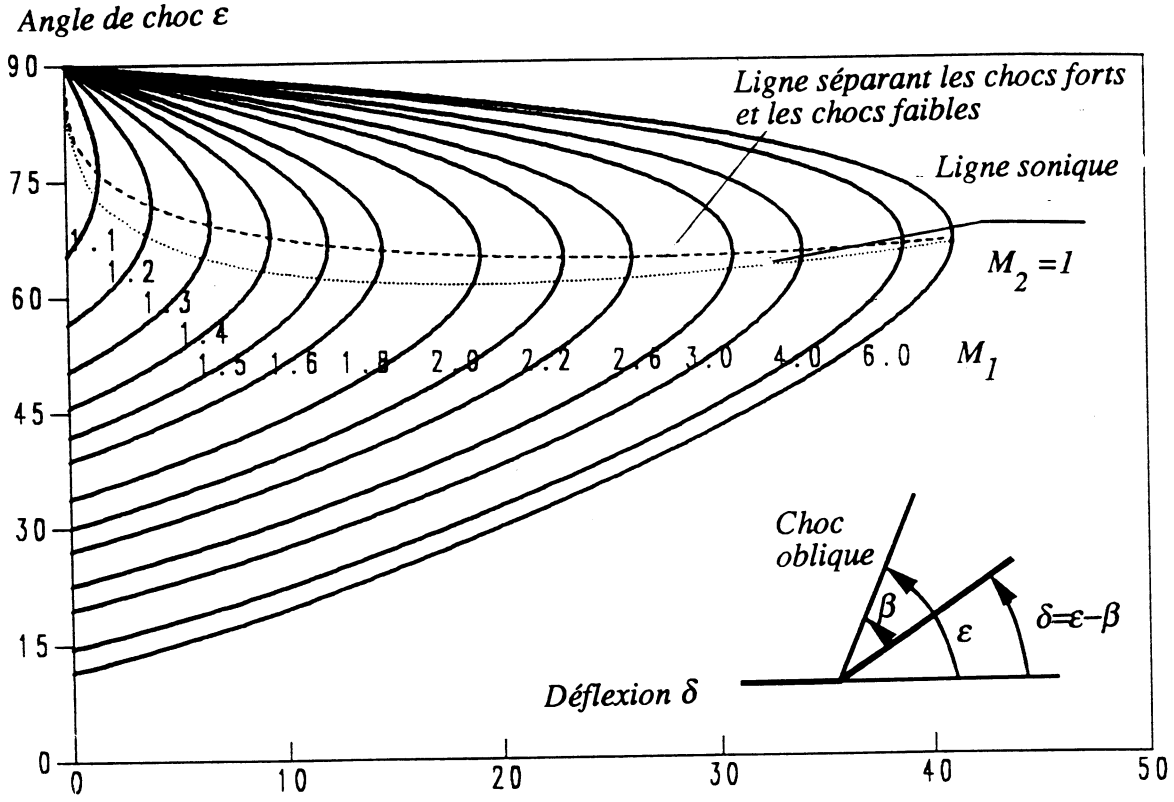


Figure 3. *Angle de choc ε en fonction du nombre de Mach amont M_1 et de la déflexion δ.*

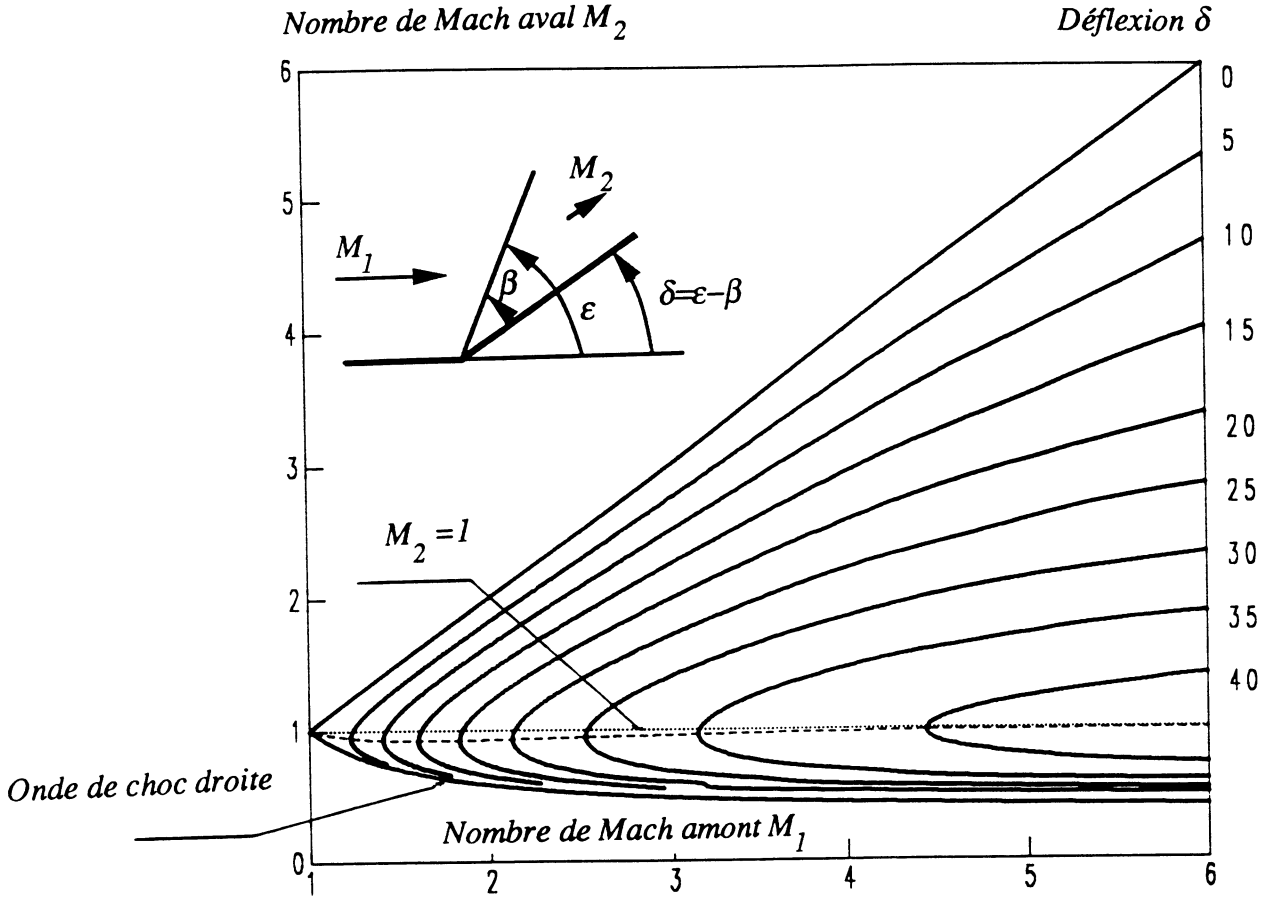
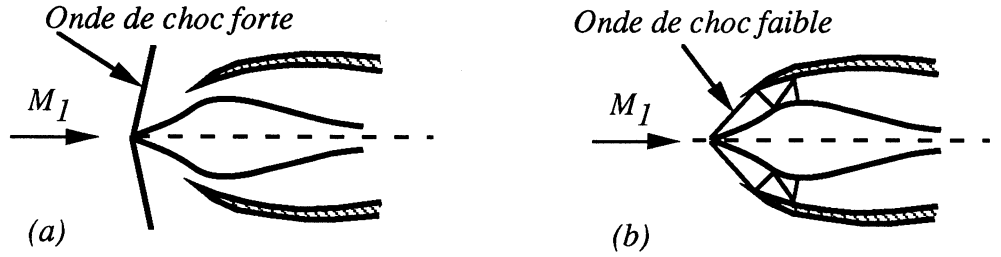


Figure 4. *Nombre de Mach aval M_2 en fonction du nombre de Mach amont M_1 et de la déflexion δ.*

Pour le même nombre de Mach M_1 et la même déflexion, deux angles de choc ϵ et deux nombres de Mach M_2 sont possibles. La valeur la plus large de ϵ correspond aux **chocs forts**; dans cette situation, l'écoulement devient subsonique en aval du choc. A la valeur la plus petite est associée une onde de choc plus faible et l'écoulement en aval du choc reste supersonique, à l'exception d'un intervalle très réduit de valeurs de δ et M_1 pour lequel M_2 est très légèrement inférieur à 1.

L'onde de choc oblique faible apparaît dans la plupart des cas. L'onde de choc forte est beaucoup plus rare, et elle se forme par exemple à la pointe avant du corps central d'une entrée d'air lorsque l'entrée d'air est complétement bloquée (figure 5).



L'entrée d'air est bloquée. Une onde de choc oblique forte apparaît dans ce cas.

Entrée d'air en fonctionnement normal. L'onde de choc oblique est du type faible.

***Figure 5.** Chocs obliques forts et faibles.*

La figure 6 donne les valeurs du rapport p_2/p_1 en fonction du nombre de Mach amont M_1 et de la déflexion δ. Si le rapport de compression est fixé au départ, on peut lire sur cette figure la déflexion δ nécessaire pour assurer cette compression.

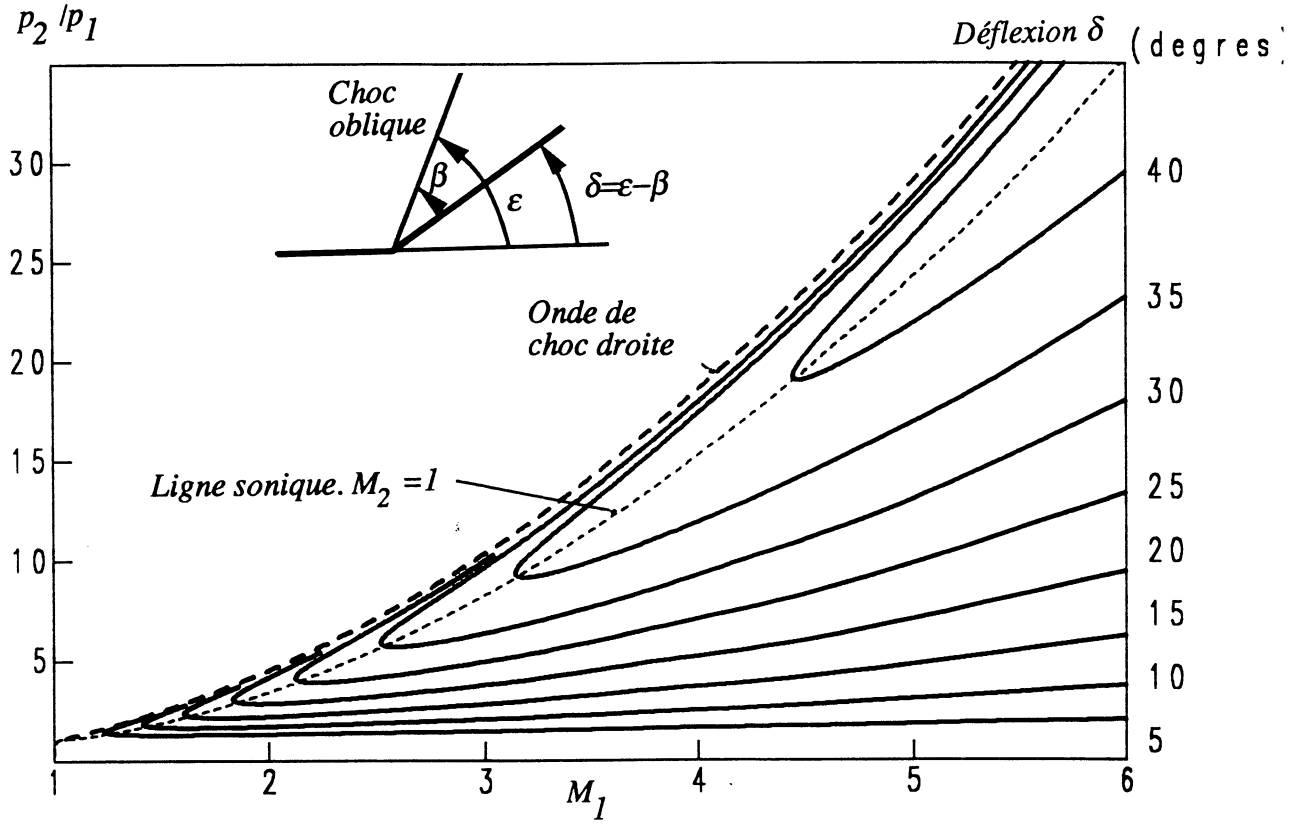


***Figure 6.** Valeurs du rapport de pression p_2 / p_1 en fonction du nombre de Mach M_1 et de la déflexion δ.*

XII.4. Utilisation des tables de chocs droits pour le calcul de chocs obliques

Les tables de choc droits peuvent être utilisées pour déterminer les chocs obliques. Si la déflexion δ et le nombre de Mach sont donnés, il faut d'abord déterminer l'angle de choc ϵ, puis calculer la composante normale du Mach amont : $M_{n1} = M_1 \sin\epsilon$.

On peut alors lire dans les tables de choc droits les valeurs des rapports de propriétés correspondant à M_{n1}. On obtient ainsi la valeur de M_{n2} et il faut pour passer à M_2 utiliser la relation : $M_2 = M_{n2}/\sin(\epsilon - \delta)$.

La détermination de l'angle de choc ϵ doit être effectuée par d'autres moyens. On peut par exemple utiliser l'expression (XII,21) ou encore lire ϵ en fonction de δ et M_1 dans les tables ou sur la figure 3.

XII.5. Lignes de Mach ou ondes de Mach

Nous avons vu plus haut que lorsque l'angle de déflexion δ décroît vers zéro, l'angle de choc tend vers l'angle de Mach :

$$\lim_{\delta \to 0} \epsilon = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_1}\right) \qquad (XII,24)$$

Nous désignerons cet angle par μ : $\mu = \sin^{-1}(1/M_1)$.

Les lignes de Mach sont les lignes inclinées d'un angle $\pm\mu$ par rapport à la direction locale de l'écoulement (figure 7).

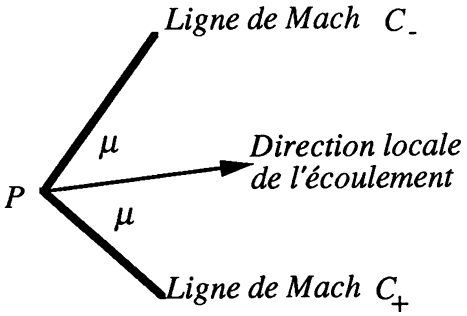


***Figure 7.** Lignes de Mach issues du point P.*

En écoulement bidimensionnel, il y a deux lignes de Mach issues de chaque point. Les lignes situées à droite de la direction locale de l'écoulement peuvent être désignées par le signe + et celles qui se trouvent à gauche par le signe -. Les lignes de Mach sont aussi les **lignes caractéristiques** de l'écoulement et elles jouent un rôle très important dans l'analyse des écoulements supersoniques bidimensionnels stationnaires (voir par exemple Shapiro 1953, Liepmann et Roskho 1957, Zukrow et Hoffman 1976).

XII.6. Ondes de choc faibles

Pour compléter cette analyse, considérons maintenant les ondes de choc obliques produites par des déflexions δ de très faible amplitude. L'angle du choc ϵ est alors très proche de $\pi/2$ ou de l'angle de Mach μ selon que $M_2 < 1$ ou $M_2 > 1$. Nous considérons ici le deuxième cas seulement, celui des ondes de choc faibles.

Lorsque δ est petit, $\tan\delta \simeq \delta$ et la relation (XII,21) qui détermine ϵ en fonction de δ s'écrit :

$$\frac{1}{\delta} \simeq \left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2}{M_1^2\sin^2\epsilon - 1} - 1\right)\tan\epsilon \qquad (XII,25)$$

On peut encore écrire cette relation sous la forme :

$$M_1^2\sin^2\epsilon - 1 \simeq \left(\frac{\gamma+1}{2}M_1^2\tan\epsilon\right)\delta - (M_1^2\sin^2\epsilon - 1)\delta\tan\epsilon \qquad (XII,26)$$

On peut tirer de cette équation, une expression pour $M_1^2\sin^2\epsilon - 1$. Pour cela, il suffit de noter que $M_1^2\sin^2\epsilon - 1$ est de l'ordre de δ lorsque δ est proche de zéro. Dans ces conditions, le deuxième terme du second membre de l'expression précédente est de l'ordre δ^2 et on peut donc écrire à l'ordre un en δ :

$$M_1^2\sin^2\epsilon - 1 \simeq \left(\frac{\gamma+1}{2}M_1^2\tan\epsilon\right)\delta \qquad (XII,27)$$

D'autre part, pour $\delta \sim 0$, l'angle ϵ est proche de l'angle de Mach et :

$$\tan\epsilon \simeq \frac{1}{(M_1^2-1)^{1/2}} \qquad (XII,28)$$

Finalement :

$$M_1^2\sin^2\epsilon - 1 \simeq \frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2}{(M_1^2-1)^{1/2}}\delta \qquad (XII,29)$$

La variation de pression relative au travers du choc est facilement déduite de cette expression. En effet :

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2\sin^2\epsilon - 1) \qquad (XII,30)$$

et on a donc encore :

$$\frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{\gamma M_1^2}{(M_1^2-1)^{1/2}}\delta \qquad (XII,31)$$

La variation relative de pression est proportionnelle à l'angle de déflexion δ.

On peut aussi déterminer la variation relative de vitesse associée au choc :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} - 1 \qquad (XII,32)$$

Le rapport v_2/v_1 s'exprime en fonction des angles ϵ et $\epsilon - \delta$.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos\epsilon}{\cos(\epsilon-\delta)} \qquad (XII,33)$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\cos\epsilon - \cos(\epsilon - \delta)}{\cos(\epsilon - \delta)} \qquad (XII, 34)$$

Lorsque δ est voisin de zéro, on peut écrire :

$$\frac{\Delta v}{v_1} \simeq -\frac{\sin\epsilon}{\cos\epsilon}\delta \qquad (XII, 35)$$

soit :

$$\frac{\Delta v}{v_1} \simeq -\frac{1}{(M^2-1)^{1/2}}\delta \qquad (XII, 36)$$

La variation relative de vitesse est aussi proportionnelle à la déflexion δ.

Tableau 1. Equations fondamentales pour les ondes de choc obliques

Conservation de la masse :

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}$$

Conservation de la quantité de mouvement normale :

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2$$

Conservation de la quantité de mouvement tangentielle :

$$v_{t1} = v_{t2}$$

Conservation de l'énergie :

$$h_1 + \frac{1}{2}v_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_{n2}^2$$

Equations d'état :

$$\rho = \rho(p, T), \qquad h = h(p, T)$$

Relations géométriques :

$$v_{t1} = v_1 \cos\epsilon, \qquad v_{n1} = v_1 \sin\epsilon$$

$$v_{t2} = v_2 \cos\beta, \qquad v_{n2} = v_2 \sin\beta$$

Tableau 2. Relations principales pour les ondes de choc obliques

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2\epsilon - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{n1}}{v_{n2}} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\epsilon}{2+(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\epsilon}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = [\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \sin^2\epsilon - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}][\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2\epsilon}]$$

$$\frac{1}{\tan\delta} = (\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2\epsilon - 1} - 1)\tan\epsilon$$

$$M_2^2 \sin^2(\epsilon-\delta) = \frac{M_1^2 \sin^2\epsilon + 2/(\gamma-1)}{2\gamma M_1^2 \sin^2\epsilon/(\gamma-1) - 1}$$

Tableau 3. Relations principales pour les ondes de choc obliques faibles

$$\tan\epsilon = \frac{1}{(M_1^2-1)^{1/2}}$$

$$M_1^2 \sin^2\epsilon - 1 \simeq \frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2}{(M_1^2-1)^{1/2}}\delta$$

$$\frac{p_2-p_1}{p_1} = \frac{\Delta p}{p_1} \simeq \frac{\gamma M_1^2}{(M_1^2-1)^{1/2}}\delta$$

$$\frac{v_2-v_1}{v_1} = \frac{\Delta v}{v} \simeq -\frac{1}{(M_1^2-1)^{1/2}}\delta$$

CHAPITRE XIII

ECOULEMENTS DANS LES TUYERES ET LES SOUFFLERIES

XIII.1. Introduction

Les notions présentées dans les chapitres précédents (chapitres X, XI et XII) permettent l'analyse de nombreux systèmes pratiques, comme les tuyères, les diffuseurs et les souffleries. Tous ces problèmes ne sauraient être envisagés dans le cadre unidimensionnel, mais on peut obtenir une première estimation des paramètres de fonctionnement en adoptant cette approximation. Ce type d'analyse est utilisé, par exemple, dans les études d'avant-projet pour déterminer les performances de systèmes complexes. Pour se rapprocher de la réalité, chaque élément du système est caractérisé par un rendement qui représente les pertes associées aux irreversibilités (on pourra par exemple consulter Hill et Peterson 1965, Kerrebrock 1977 ou Oates 1984 pour l'application de cette méthode à l'analyse de systèmes de propulsion).

Les problèmes que l'on peut aborder avec les résultats des chapitres précédents sont nombreux. Il reste que d'autres questions nécessitent des analyses complémentaires. En effet, nous n'avons pas considéré les écoulements avec injection de masse, dégagement de chaleur ou transfert de quantité de mouvement par frottement, des situations typiques des installations de production d'énérgie, des chambres de combustion ou des systèmes de pompage des gaz. Nous n'avons pas non plus considéré les ondes de détente ou les intéractions d'ondes de choc. Toutes ces questions dépassent le cadre de ce livre. On trouvera des présentations détaillées dans Shapiro 1953, Crocco 1958, Zukrow et Hoffman 1976 ou Emanuel 1986. Les quelques exemples traités dans ce chapitre sont des applications directes de l'analyse des écoulements isentropiques et des ondes de choc. Le premier problème (sections 2 et 3) est celui des régimes de fonctionnement des tuyères convergentes-divergentes. Cette étude est effectuée en faisant varier le rapport de détente. On montre ainsi comment, une combinaison d'écoulements isentropiques et d'ondes de choc permet l'adaptation aux conditions de détente.

La recompression d'un écoulement supersonique à travers une onde de choc est examinée dans la section 4. Cette analyse complète celle de la section 3 et sert d'introduction à l'étude des souffleries supersoniques.

Les configurations de souffleries utilisées en pratique sont passées en revue dans la section 5. Le fonctionnement des installations comportant deux cols est décrit de façon qualitative. Les systèmes à deux cols sont souvent rencontrés en pratique et posent de nombreux

problèmes que nous ne ferons qu'effleurer.

XIII.2. Relation entre la section et le rapport de détente pour un écoulement isentropique

Avant d'aborder l'étude du fonctionnement des tuyères convergentes-divergentes, il est intéressant de réexaminer les relations qui existent entre la section, le nombre de Mach et le rapport de détente pour un écoulement isentropique.
Pour cela, considérons le débit qui passe dans un conduit de section A :

$$\dot{m} = \rho A v$$

Nous avons déjà montré que ce débit pouvait être exprimé en fonction du nombre de Mach local M et des pression et température d'arrêt isentropique p_i et T_i (voir chapitre X) :

$$\dot{m} = \frac{p_i}{(\gamma r T_i)^{1/2}} A \gamma M (1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (XIII,1)$$

On peut aussi faire apparaître la fonction $\psi(M) = \gamma M(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$ et mettre le débit sous la forme :

$$\boxed{\dot{m} = \frac{p_i}{(\gamma r T_i)^{1/2}} A \psi(M)} \qquad (XIII,2)$$

La section critique A_*, dans laquelle le nombre de Mach est égal à un, constitue une référence commode. Si l'écoulement reste subsonique ou supersonique dans tout le conduit, cette section est fictive. Si l'écoulement passe par les conditions soniques, il s'agit obligatoirement d'un col, et la section critique s'identifie alors à la section du col : $A_* = A_c$.
Le débit correspondant à la section critique a pour expression :

$$\dot{m}_* = \frac{p_i A_*}{(\gamma r T_i)^{1/2}} \psi_* \qquad (XIII,3)$$

où :

$$\psi_* = \gamma \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (XIII,4)$$

On utilise aussi des expressions légèrement modifiées :

$$\dot{m}_* = \frac{p_i A_*}{(r T_i)^{1/2}} \Gamma \qquad (XIII,5)$$

où :

$$\Gamma = \gamma^{1/2} (\frac{\gamma + 1}{2})^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (XIII,6)$$

Les valeurs de ψ_* et Γ sont données au tableau 1 pour quelques valeurs du rapport γ.

Tableau 1. Valeurs de ψ_* et Γ

γ	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
Γ	0.649	0.667	0.685	0.701	0.716
ψ_*	0.710	0.761	0.810	0.859	0.906

La relation entre la section et le nombre de Mach s'obtient, pour un écoulement isentropique, en exprimant la conservation du débit masse entre la section courante et la section critique. En rapprochant (XIII,1) et (XIII,3), on trouve facilement :

$$\frac{A}{A_*} = \frac{\psi_*}{\psi} = \frac{1}{M}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \qquad (XIII,7)$$

Le rapport A/A_* peut aussi être exprimé en fonction du rapport p/p_i. La relation $\frac{p_i}{p} = (1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$ permet d'éliminer M de (XIII,7), et on trouve :

$$\frac{A}{A_*} = \frac{(\frac{2}{\gamma+1})^{1/(\gamma-1)}(\frac{\gamma-1}{\gamma+1})^{1/2}}{(\frac{p}{p_i})^{1/\gamma}[1-(\frac{p}{p_i})^{(\gamma-1)/\gamma)}]^{1/2}} \qquad (XIII,8)$$

Cette relation peut être discutée à l'aide de la figure 1. Pour un même rapport A_*/A, on note que p/p_i peut prendre deux valeurs différentes suivant que l'écoulement local est subsonique ou supersonique.

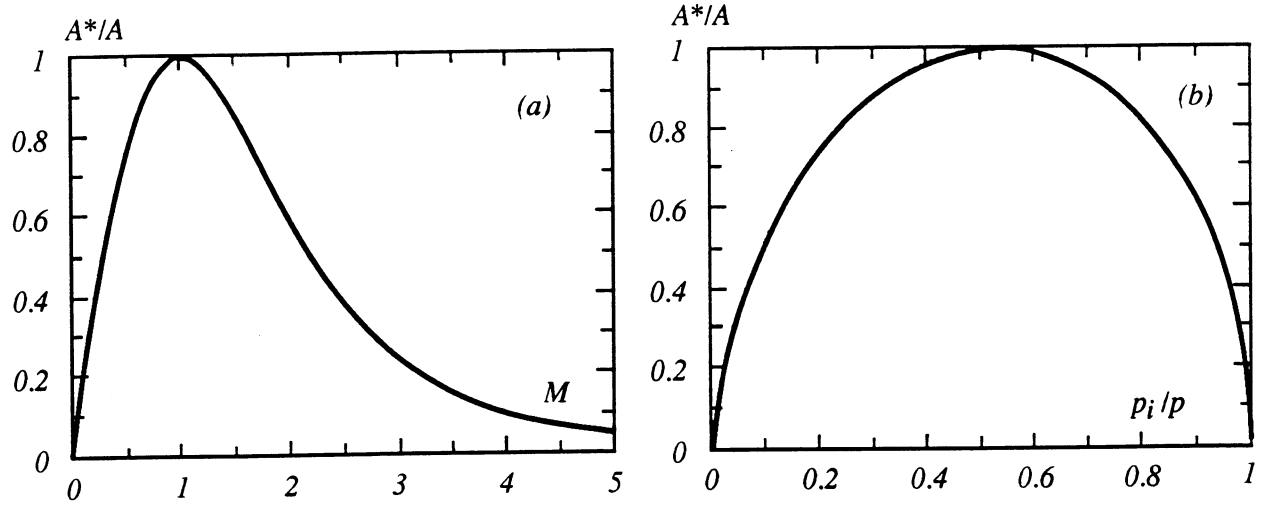


Figure 1. *Relations entre la section, le nombre de Mach et le rapport de détente pour un écoulement isentropique. (a) A*/A en fonction de M, (b) A*/A en fonction de p_i /p.*

Lorsque la pression p est voisine de p_i, le rapport A_*/A est très faible, car la vitesse des gaz est très réduite et la section A doit être beaucoup plus grande que A_* pour permettre le passage du débit masse. Aux valeurs de p très inférieures à p_i, la vitesse des gaz est très grande, l'écoulement est supersonique et la masse volumique prend des valeurs très petites. La section A doit être encore très grande par rapport à A_* pour assurer le passage du débit masse. La valeur critique de la pression $p_* = p_i[2/(\gamma+1)]^{\gamma/(\gamma-1)}$ correspond aux conditions soniques, la section du col coïncide avec la section critique et le rapport A_*/A atteint une valeur maximum égale à 1.

XIII.3. Régimes d'écoulement dans les tuyères

Considérons maintenant une tuyère convergente-divergente de géométrie fixée. Dans l'analyse qui va suivre, nous admettons que l'écoulement est adiabatique et que les forces de frottement sont négligeables. Des ondes de choc peuvent cependant apparaître dans l'écoulement. Les chocs observés en pratique ne sont jamais parfaitement droits, car l'écoulement n'est pas strictement unidimensionnel. L'intéraction entre le choc et la couche limite pariétale conduit à des structures de choc en λ. En première approximation, on peut cependant considérer que les chocs internes à la tuyère sont droits. Cette représentation est convenable si la variation de section du conduit n'est pas trop rapide et si l'épaisseur des couches limites est faible par rapport au diamètre.

Dans cette situation, on peut distinguer quatre grands régimes de fonctionnement (figures 2 et 3).

Dans le **premier régime**, l'écoulement reste subsonique et la tuyère fonctionne comme un Venturi. Dans ce cas, la section au col de la tuyère A_c est supérieure à la section critique A_*, le rapport A_*/A est partout inférieur à un, et tous les points de l'écoulement appartiennent à la branche de gauche de la figure 1. Le rapport p/p_i passe par un minimum au col. Les gaz sont accélérés dans le convergent, puis leur vitesse diminue dans le divergent. Les courbes (a) et (b) des figures 2 et 3 correspondent à cette situation.

La limite de ce régime de fonctionnement est atteinte lorsque, pour une pression de sortie $p_E = p_{A1}$ suffisamment faible, la pression au col devient égale à la pression critique. Cette situation limite est représentée par la courbe (c). L'écoulement est subsonique de part et d'autre du col, mais il atteint les conditions soniques au col.

Dans le **second régime** de fonctionnement représenté par la courbe (d), les conditions critiques sont atteintes au col. Dans cette situation, l'écoulement devient supersonique dans une partie du divergent. Un choc droit apparaît en aval du col et produit une recompression accompagnée d'une décélération de l'écoulement. En aval du choc, l'écoulement est à nouveau subsonique, le nombre de Mach diminue jusqu'à la section d'éjection et le rapport p/p_i augmente. Le choc se place de telle façon que la recompression qui s'effectue en aval ramène la pression d'éjection p_E à la valeur de la pression ambiante p_A. Le choc se déplace vers l'aval lorsque p_A diminue. Les variations de p_A n'ont aucun effet sur l'écoulement supersonique qui se développe en amont du choc. Le col est amorcé, ce qui fixe le débit à une valeur constante $\dot{m}_*$ et les paramètres de l'écoulement suivent une évolution isentropique. Les valeurs de M et p se placent, en amont du choc, sur une courbe

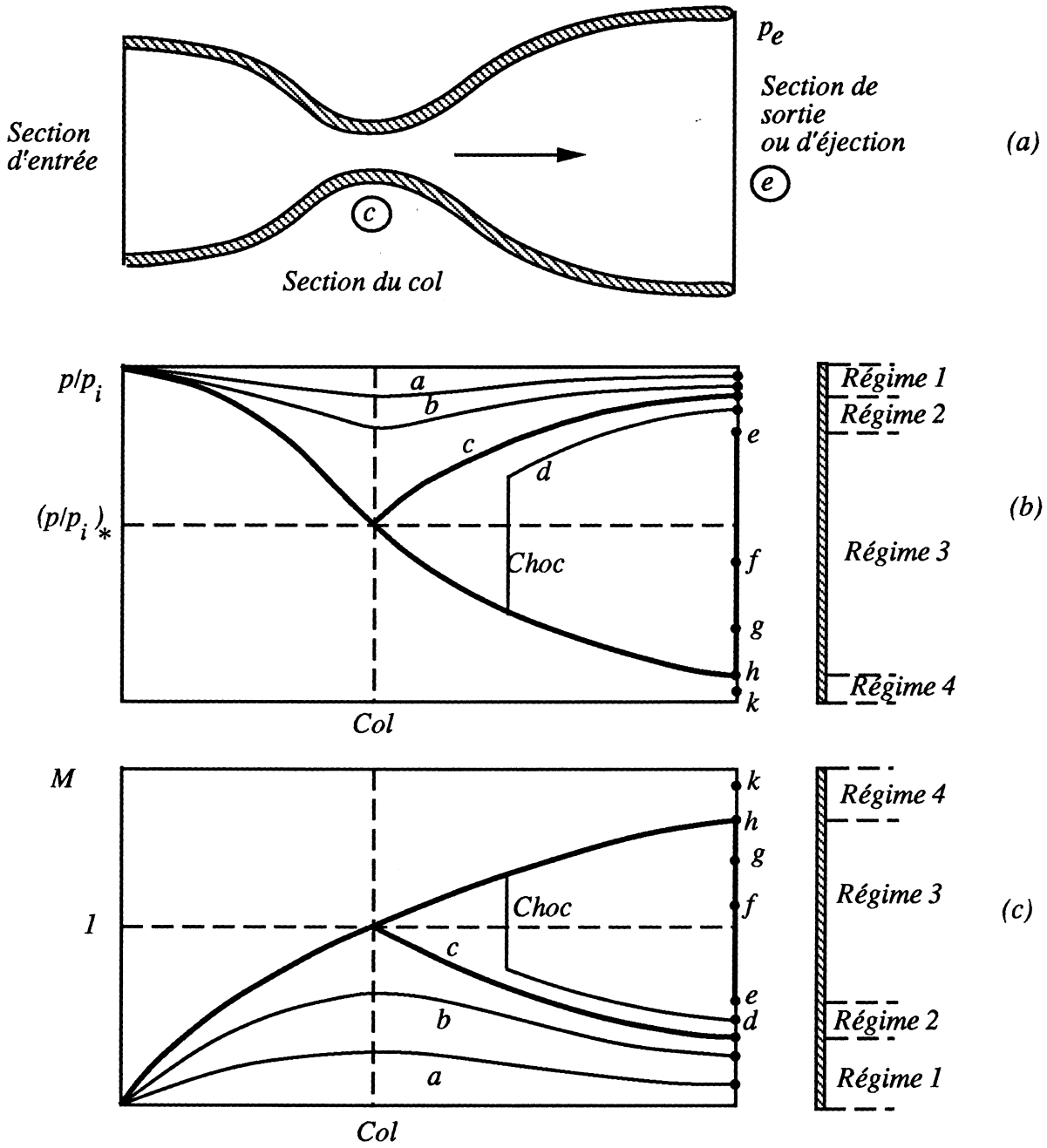


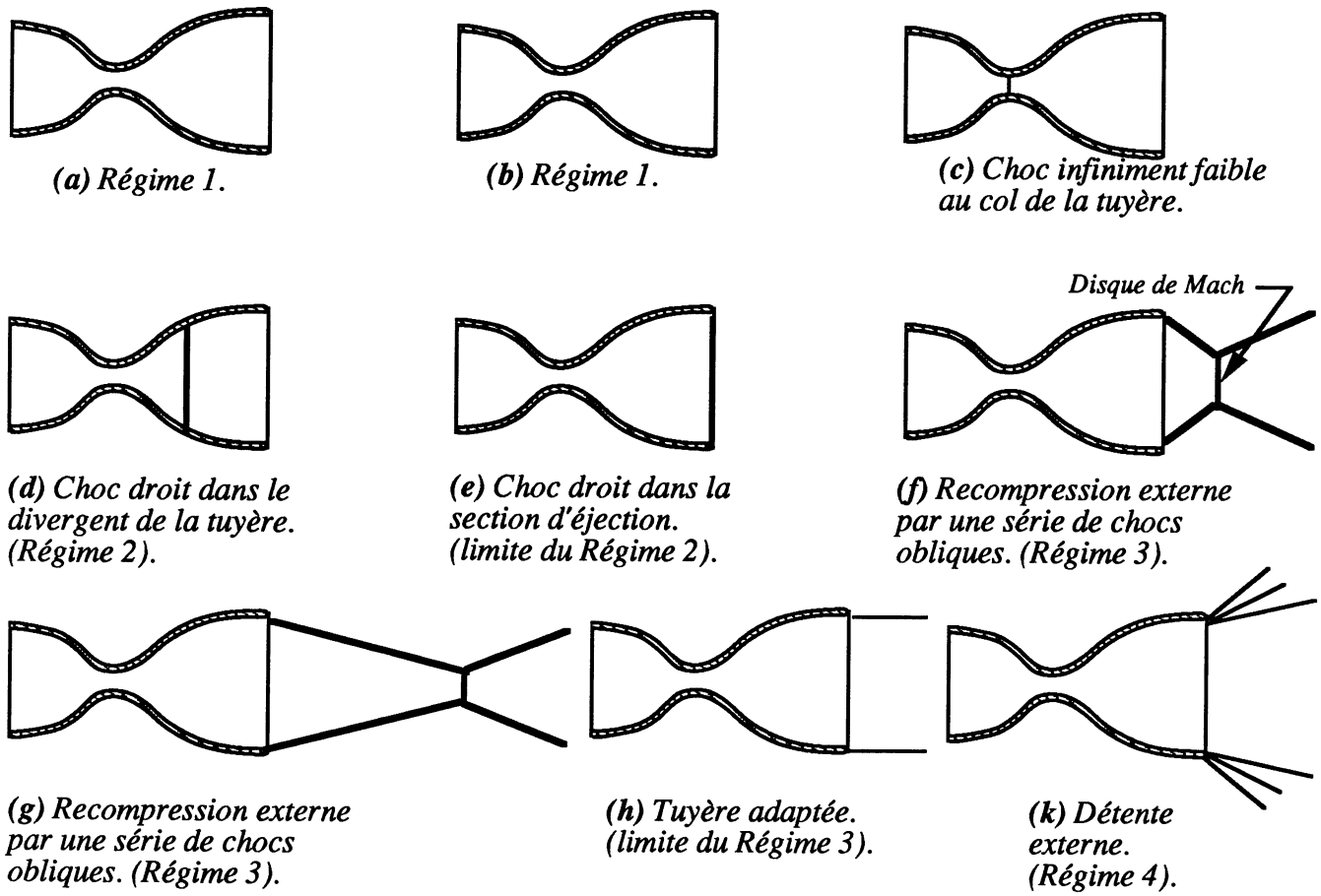
Figure 2. *Types d'écoulements dans une tuyère convergente-divergente. (a) Géométrie de la tuyère. (b) Répartitions de pression dans la tuyère. (c) Evolutions du nombre de Mach dans la tuyère.*

unique (figure 2, courbe d).

La limite du deuxième régime de fonctionnement est atteinte lorsque le choc droit se place dans la section d'éjection de la tuyère. Cette situation particulière est représentée par la courbe (e). La pression d'éjection immédiatement en aval du choc est p_{A2}.

Pour des valeurs de p_A plus faibles que p_{A2} on passe dans le **troisième régime** de fonctionnement. L'écoulement dans le divergent est maintenant entièrement supersonique et la pression d'éjection correspond à une évolution isentropique : $p_E = p_{J,isen}$. Les variations de p_A ne modifient plus l'écoulement à l'intérieur de la tuyère. Comme $p_E = p_{J,isen}$ est inférieur à p_A, l'adaptation de pression entre le jet issu de la tuyère et l'atmosphère ambiante doit se faire à l'extérieur du divergent, par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques (configurations (f) et (g) de la figure 3).

Les ondes de choc qui apparaissent dans cette situation forment une série de cellules périodiques en forme de diamant.



(a) Régime 1.

(b) Régime 1.

(c) Choc infiniment faible au col de la tuyère.

(d) Choc droit dans le divergent de la tuyère. (Régime 2).

(e) Choc droit dans la section d'éjection. (limite du Régime 2).

(f) Recompression externe par une série de chocs obliques. (Régime 3).

(g) Recompression externe par une série de chocs obliques. (Régime 3).

(h) Tuyère adaptée. (limite du Régime 3).

(k) Détente externe. (Régime 4).

***Figure 3.** Configurations d'écoulements dans une tuyère convergente-divergente.*

La taille des cellules augmente lorsque la pression ambiante p_A diminue. La limite du troisième régime est atteinte lorsque la pression ambiante devient égale à $p_{A3} = p_{J,isen}$. La tuyère est alors parfaitement **adaptée**, les cellules de choc disparaissent et il n'y a plus de recompression externe.

Pour des pressions p_A inférieures à $p_{J,isen}$, on trouve un **quatrième régime** de fonctionnement. Les gaz éjectés par la tuyère se détendent à l'extérieur par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques. Ce type d'écoulement est représenté par la configuration (k) de la figure 3. Le quatrième régime d'écoulement apparaît lorsque la tuyère n'est plus à même d'assurer une détente complète jusqu'à la pression ambiante. Cette situation prévaut pendant la phase propulsive d'une fusée aux très hautes altitudes. Les gaz éjectés par les moteurs forment alors un panache évasé caractéristique de la détente externe.

En résumé, on distingue quatre régimes d'écoulement. Dans le premier régime, l'écoulement est entièrement subsonique, la pression dans la tuyère dépend des conditions génératrices et de la pression ambiante p_A et le débit masse varie avec p_A. Le col est amorcé dans le régime 2 et l'écoulement dans le convergent n'est plus influencé par les variations de la pression p_A. Le débit masse correspondant aux régimes 2, 3 et 4, pour lesquels le col est amorcé, garde une valeur constante égale à $\dot{m}_*$. Dans le deuxième régime, l'adaptation des conditions d'éjection aux conditions ambiantes s'effectue dans le divergent par l'intermédiaire d'un choc droit. Dans les régimes 3 et 4, cette adaptation est réalisée à l'extérieur de la tuyère par des ondes de choc obliques (régime 3) ou des ondes de détente obliques (régime 4).

XIII.4. Recompression au travers d'un choc droit

Pour illustrer la discussion précédente, nous envisageons deux exemples d'écoulement appartenant au second régime de fonctionnement. Dans le premier cas, le choc droit se trouve dans la section d'éjection, alors que dans le second cas une recompression subsonique s'effectue en aval du choc dans un diffuseur.

Exemple 1

Une tuyère convergente-divergente est alimentée par un réservoir de grande dimension dans lequel règne la pression génératrice p_o (figure 4). La pression à l'extérieur du système est $p_A = 1\,bar$. La tuyère débouche sur un canal de section constante dans lequel on souhaite maintenir un écoulement supersonique de Mach $M = 1.8$. Ce dispositif peut servir de soufflerie supersonique, le canal de section constante jouant le rôle de veine d'essai. Déterminer le rapport p_o/p_A minimum qui permet d'obtenir l'écoulement souhaité.

Solution

L'écoulement dans le divergent de la tuyère doit rester supersonique. La détente dans la tuyère est isentropique et la pression d'arrêt dans la section d'essai p_{i1} est égale à la pression génératrice. Le rapport p_o/p_A minimum est obtenu lorsque le choc de recompression se place dans la section d'éjection en aval de la veine d'essai (configuration (e) de la figu-

re 3). Dans cette situation :

$$\left(\frac{p_o}{p_A}\right)_{\min} = \frac{p_{i1}}{p_1}\frac{p_1}{p_A}$$

et p_A est la pression statique immédiatement en aval du choc (désignée p_2 par convention). On a donc :

$$\left(\frac{p_o}{p_A}\right)_{\min} = \frac{p_{i1}}{p_1}\frac{p_1}{p_2}$$

Les tables d'écoulement isentropique donnent : $p_{i1}/p_1 = 5.746$ pour $M_1 = 1.8$ et on trouve dans les tables de choc $p_1/p_2 = 0.277$ pour $M_1 = 1.8$. En définitive $\left(\frac{p_o}{p_A}\right)_{\min} = 1.59$ et la pression génératrice doit être $p_o = 1.590\ bar$.

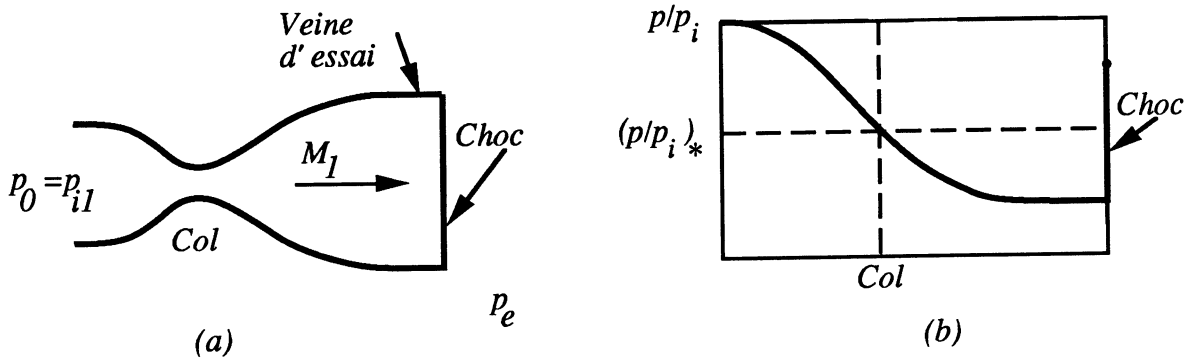


***Figure 4.** Soufflerie supersonique à un col. Une onde de choc droite localisée dans la section d'éjection réalise la recompression de l' écoulement. (a) Géométrie de l' installation. (b) Evolution de la pression.*

Exemple 2

On ajoute au système de la figure 4 une section divergente supplémentaire. Le nouveau montage, représenté à la figure 5, doit encore assurer un nombre de Mach $M_1 = 1.8$ dans la section d'essai. Déterminer le rapport p_o/p_A pour cette nouvelle configuration. Pour simplifier l'analyse on admettra que la section d'éjection du divergent est très grande.

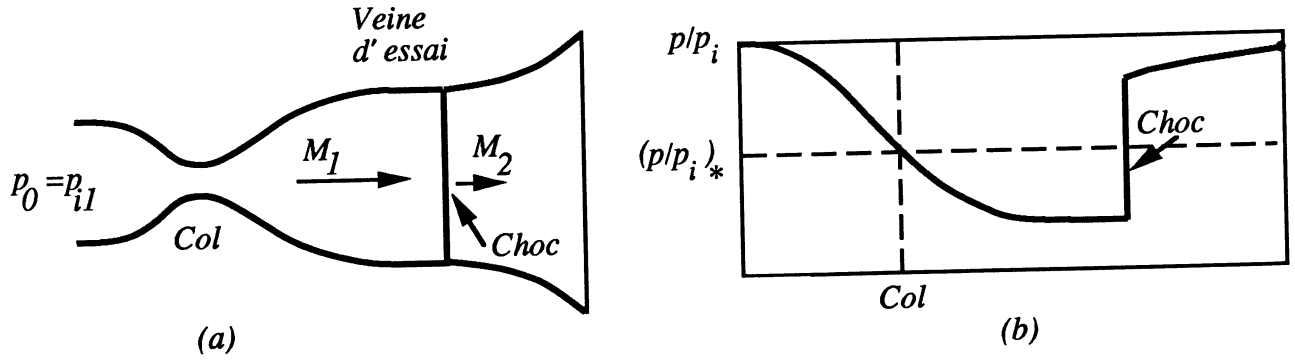


***Figure 5.** Soufflerie supersonique à un col. Une onde de choc droite se trouve dans la section de sortie de la veine d' essai. Un diffuseur subsonique assure la recompression de l'écoulement en aval de l'onde de choc. (a) Géométrie de l'installation. (b) Répartition de pression.*

Solution

Le rapport p_o/p_A minimum est obtenu lorsque le choc de recompression se trouve immédiatement en aval de la section d'essai. En aval du choc, l'écoulement est subsonique et le divergent joue le rôle de diffuseur, c'est-à-dire qu'il assure la recompression des gaz. Comme la section d'éjection du diffuseur est très grande, la pression qui règne dans cette section est très voisine de la pression d'arrêt isentropique de l'écoulement en aval du choc $p_A \sim p_{i2}$. On a d'autre part $p_o = p_{i1}$ et par conséquent :

$$\left(\frac{p_o}{p_A}\right)_{\min} = \left(\frac{p_{i1}}{p_{i2}}\right)_{M_1=1.8}$$

Ce rapport est donné par les tables de choc. On trouve :

$$\left(\frac{p_o}{p_A}\right)_{\min} = 1.230$$

et la pression génératrice doit être dans ce cas $p_o = 1.230\,bar$.

La configuration de la figure 4 nécessite une pression génératrice plus faible que celle de la figure 3, car le divergent assure une recompression de l'écoulement en aval du choc et récupère ainsi l'énergie cinétique des gaz qui passent au travers du choc.

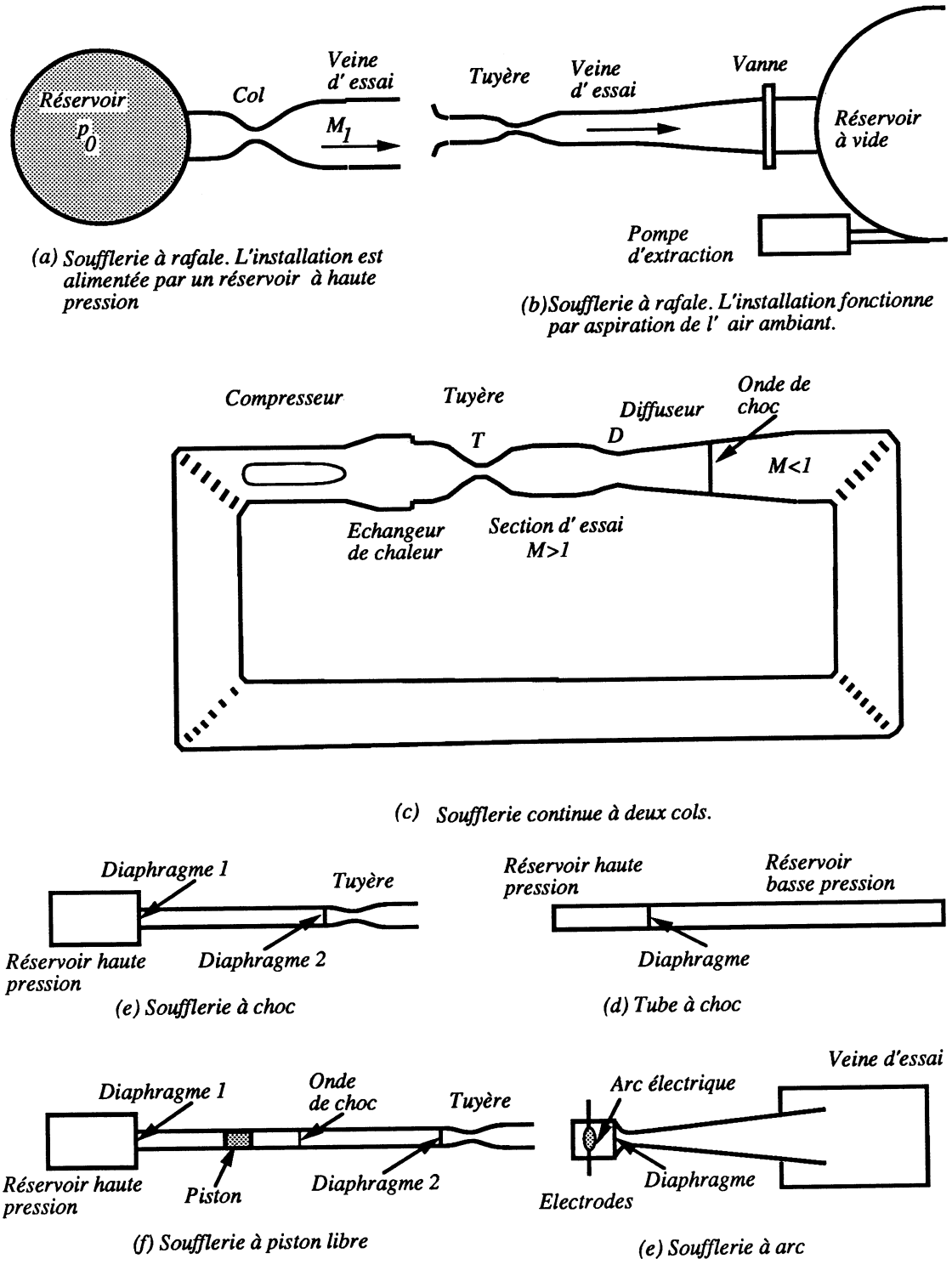
XIII.5. Souffleries subsoniques et supersoniques

Pour simuler les conditions de fonctionnement de systèmes aérodynamiques réels, on utilise des souffleries. Ces installations comprennent en général un système d'alimentation et de mise en vitesse des gaz, une veine d'essai et un système d'évacuation des gaz ou une boucle de récupération permettant la recirculation des gaz. L'accélération des gaz est obtenue à l'aide d'une tuyère et la récupération d'une partie de l'énergie cédée au fluide est réalisée par un diffuseur.

Les souffleries subsoniques sont dotées d'une tuyère convergente et la veine d'essai peut être ouverte ou fermée. Les installations du premier type, encore appelées souffleries "Eiffel", sont surtout utilisées dans le domaine des faibles vitesses, par exemple pour étudier des problèmes d'aéroacoustique. Aux Machs plus élevés, on utilise des configurations du deuxième type.

L'accélération des gaz à vitesse supersonique est généralement réalisée à l'aide d'une tuyère convergente-divergente. Dans les souffleries à rafales (figure 6a), on utilise un réservoir à haute pression pour alimenter la veine d'essai au travers de la tuyère. La mise en vitesse est parfois obtenue par aspiration. Dans ce cas (figure 6b), on fait le vide dans un réservoir d'échappement à grande capacité. Le temps d'expérience dépend des dimensions du réservoir, de la géométrie de la soufflerie et du régime de fonctionnement souhaité. Les rafales sont généralement brèves et on doit utiliser un système de mesure à cadence d'échantillonnage élevée.

Les souffleries continues permettent des essais plus longs. Ces installations comportent généralement deux cols et une boucle de retour des gaz (figure 6c). Le premier col, celui de la tuyère, permet l'accélération des gaz. Le second col appartient au diffuseur.



(a) *Soufflerie à rafale. L'installation est alimentée par un réservoir à haute pression*

(b) *Soufflerie à rafale. L'installation fonctionne par aspiration de l' air ambiant.*

(c) *Soufflerie continue à deux cols.*

(e) *Soufflerie à choc*

(d) *Tube à choc*

(f) *Soufflerie à piston libre*

(e) *Soufflerie à arc*

Figure 6. *Quelques types de souffleries supersoniques.*

Un échangeur de chaleur est généralement placé sur la boucle de retour des gaz pour éviter l'échauffement continu de l'écoulement.

Les souffleries continues en boucle fermée peuvent être pressurisées. Comme la densité des gaz est plus grande, on obtient ainsi des nombres de Reynolds plus élevés et donc plus proches de ceux de la configuration réelle. Le même objectif peut être atteint en

abaissant la température. La viscosité diminue et le nombre de Reynolds augmente. Le refroidissement des gaz est réalisé, en pratique, dans les **souffleries cryogéniques** par injection d'azote liquide.

Pour atteindre des nombres de Mach et des températures génératrices élevées caractéristiques du domaine hypersonique, on utilise des souffleries à arc et des tubes à choc. Les tubes à choc (figure 6d) fonctionnent par rafales. Un réservoir à haute pression est séparé du reste de l'installation par une membrane mince.

A l'instant initial, on brise la membrane. Une onde de choc est rapidement formée et progresse à grande vitesse dans les gaz à basse pression. Derrière l'onde de choc, les gaz ont une pression et une température élevée, et on peut produire un écoulement à grand nombre de Mach par détente dans une tuyère convergente-divergente placée au bout du tube à choc. Le temps d'expérience est très court, de l'ordre de la milliseconde, mais on peut ainsi atteindre des régimes d'écoulement qui sont hors de portée des souffleries classiques.

Configurations à deux cols

Pour conclure cette section, considérons les systèmes à deux cols, utilisés dans les souffleries supersoniques (figure 7). En régime permanent, l'écoulement initialement subsonique est accéléré par la tuyère T et devient supersonique dans le divergent. L'écoulement reste supersonique dans la veine d'essai. Comme $M > 1$, le convergent du diffuseur produit une décélération des gaz. En théorie, l'écoulement pourrait devenir subsonique au passage du col du diffuseur, mais cette configuration est instable. Pour cette raison, on garde un nombre de Mach supérieur à 1 au col et l'écoulement est accélèré sur une portion du divergent du diffuseur. Un choc droit réalise la recompression de l'écoulement. En aval du choc, l'écoulement redevient subsonique. La configuration d'écoulement qui vient d'être décrite n'est pas la seule possible et elle ne peut être réalisée dans tous les cas.

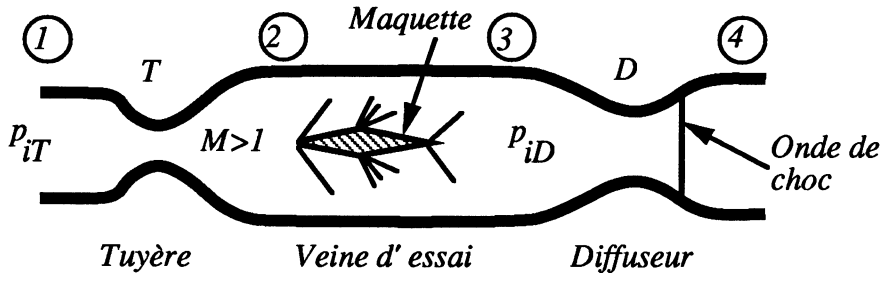


***Figure 7.** Configuration à deux cols.*

Pour maintenir un écoulement supersonique dans la section d'essai, il faut nécessairement que la section du col du diffuseur soit plus grande que celle de la tuyère : $A_{CD} > A_{CT}$. En effet, désignons par p_{iT}, T_{iT} et p_{iD}, T_{iD} les conditions d'arrêt isentropique en amont de la tuyère et du diffuseur, et par A_T^* et A_D^* les sections critiques des écoulements dans la tuyère et dans le diffuseur en amont de l'onde de choc.

Comme l'écoulement dans toute la veine est adiabatique, les températures d'arrêt T_{iT} et T_{iD} sont identiques. Par contre, la dissipation associée au frottement pariétal et les irréversibilités induites par la maquette (par exemple les ondes de choc) font diminuer la pression d'arrêt isentropique. De ce fait, $p_{iT} > p_{iD}$. Considérons à présent les débits masse dans les deux éléments du système :

$$\dot{m}_T = \frac{\psi_* p_{iT} A_T^*}{(\gamma r T_{iT})^{1/2}}$$

$$\dot{m}_D = \frac{\psi_* p_{iD} A_D^*}{(\gamma r T_{iD})^{1/2}}$$

En l'absence de fuites, on doit avoir $\dot{m}_T = \dot{m}_D$. Comme $T_{iT} = T_{iD}$, on déduit facilement que $p_{iT} A_T^* = p_{iD} A_D^*$, soit :

$$\frac{A_D^*}{A_T^*} = \frac{p_{iT}}{p_{iD}} > 1$$

La section du col de la tuyère coïncide avec la section critique $A_{CT} = A_T^*$. Comme $M > 1$ au col du diffuseur, $A_{CD} > A_D^*$. On a par conséquent :

$$\frac{A_{CD}}{A_{CT}} > \frac{A_D^*}{A_T^*} > 1 \qquad \text{soit} \qquad A_{CD} > A_{CT}$$

Supposons maintenant que cette condition soit vérifiée et considérons les régimes de fonctionnement du système lorsqu'on fait diminuer la pression à l'échappement du diffuseur. Pour cette étude, les indices 1, 2, 3 et 4 désignent respectivement l'entrée de la tuyère, la sortie de la tuyère, l'entrée du diffuseur et l'échappement du diffuseur. Lorsqu'un choc droit apparaît dans le canal, les sections situées immédiatement en amont et en aval sont repérées par les indices u et d. Comme pour l'étude de la tuyère à un col, nous admettrons que la pression d'arrêt $p_{iT} = p_{i1}$ garde une valeur constante. Les régimes de fonctionnement correspondant à des valeurs de p_4 de plus en plus faibles sont représentés à la figure 8. Pour des valeurs de p_4 voisines de p_{i1}, l'écoulement reste subsonique partout. La tuyère et le diffuseur fonctionnent, dans ce **premier régime**, comme des Venturi en série (figure 8a).

La limite de ce régime est atteinte lorsque, pour une valeur suffisamment faible de p_4, la pression au col devient égale à la pression critique $p_{T*} = p_{i1}(\frac{2}{\gamma+1})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Une onde de choc apparaît alors au col de la tuyère (figure 8b).

Pour des valeurs de p_4 plus faibles, le choc se déplace vers l'aval tout en restant dans le divergent de la tuyère (figure 8c). Dans ce **deuxième régime**, l'écoulement dans la veine d'essai reste subsonique. Le changement de régime intervient lorsque le choc se place au

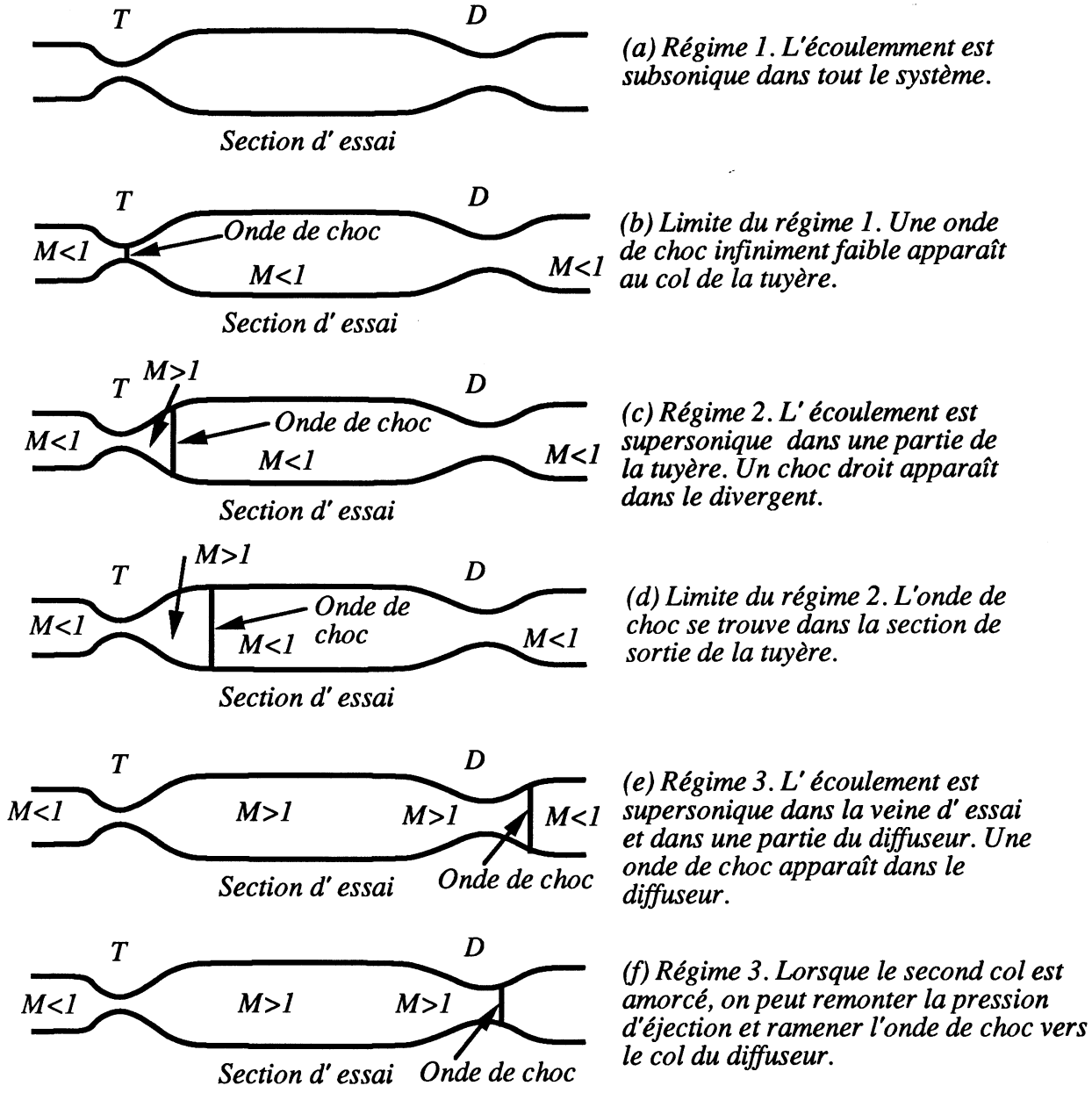


***Figure 8.** Configurations d'écoulements dans un système à deux cols.*

voisinage de la section de sortie de la tuyère (figure 8d). Une légère diminution de la pression p_4 entraîne le déplacement rapide du choc vers l'aval.

L'écoulement devient supersonique dans la veine d'essai, le diffuseur est amorcé et le choc vient se placer dans le divergent du diffuseur (figure 8e). On dit que le choc a été **avalé** par le diffuseur produisant l'amorçage du deuxième col. Lorsque ce régime est établi, on peut relever la pression p_4 pour positionner le choc dans une section plus proche du col du

diffuseur (figure 8f). Il faut cependant garder une certaine marge pour éviter le retour du choc vers la tuyère et le désamorçage du diffuseur.

Les trois régimes d'écoulements qui viennent d'être décrits apparaissent successivement au cours de la mise en route de la soufflerie. En partant du repos, le compresseur tend à augmenter la pression d'arrêt p_{iT} en amont de la tuyère et à faire baisser la pression statique p_4 en aval du diffuseur. Ces variations de pression sont progressives et s'effectuent de façon quasi-stationnaire (c'est-à-dire par une succession d'états stationnaires). Le rapport de pression p/p_{iT} est représenté à la figure 9 pour l'ensemble du système à deux cols et pour les régimes d'écoulement rencontrés au cours de ce processus. Les distributions de pression sont repérées par les mêmes symboles que les configurations de la figure 8.

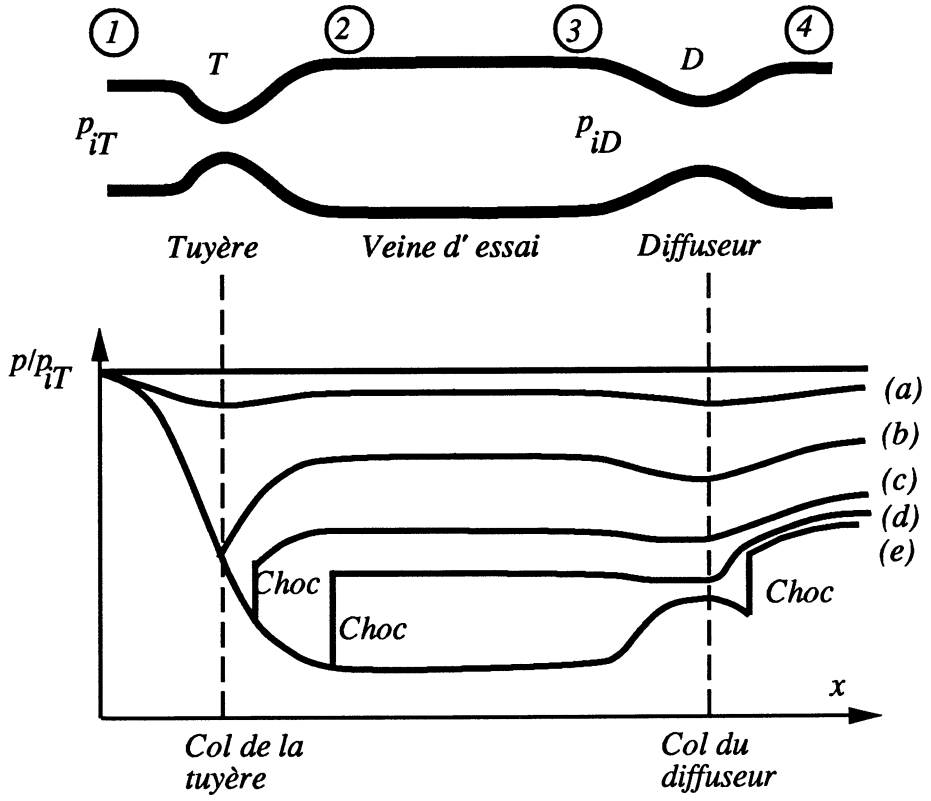


***Figure 9.** Distributions de pression dans une installation à deux cols au cours de l' amorçage du système.*

CHAPITRE XIV

QUELQUES SOLUTIONS EXACTES DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES. ECOULEMENTS PARALLELES VISQUEUX

XIV.1. Introduction

Dans les analyses effectuées jusqu'ici, nous avons négligé les contraintes visqueuses. Cette approximation dans laquelle le fluide est "idéal"est très utile, car elle permet une simplification importante de nombreux problèmes d'écoulement. En l'absence de contraintes visqueuses, les équations de **Navier-Stokes** se réduisent aux équations d'**Euler**. La résolution de ces équations est en général beaucoup plus simple que celle des équations de Navier-Stokes. Ainsi, par exemple, quelques hypothèses supplémentaires permettent l'écriture d'une intégrale première des équations dynamiques (le théorème de Bernoulli), et la relation entre la pression et la vitesse prend alors une forme algébrique. Si l'écoulement envisagé peut être considéré comme irrotationnel, le champ de vitesse dérive d'un potentiel et ce potentiel satisfait l'équation de Laplace ($\nabla^2\Phi = 0$) pour les fluides incompressibles et une équation elliptique proche de l'équation de Laplace pour les écoulements isentropiques et stationnaires de fluides compressibles.

En pratique, les contraintes visqueuses ne sont pas toujours négligeables et il faut alors résoudre les équations de Navier-Stokes. C'est le cas, par exemple, de l'écoulement au voisinage d'une paroi. Une couche limite très mince s'établit au contact de la surface. Dans cette région, le gradient de vitesse transversal est important et les contraintes visqueuses qui lui sont associées équilibrent les forces d'inertie et le gradient de pression imposé par l'écoulement externe. L'étude de la couche limite est abordée aux chapitres XVI, XVII et XVIII. Une autre situation dans laquelle les forces visqueuses jouent un rôle important est celle des écoulements rampants (en anglais "creeping flows"). Dans ces écoulements à basse vitesse, l'équilibre s'établit entre les contraintes visqueuses et une combinaison des forces de pression, des forces volumiques et des forces d'inertie. Nous allons examiner dans ce chapitre quelques écoulements de ce type. Les configurations envisagées correspondent à des solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Il s'agit en fait de situations très spéciales qui permettent une résolution analytique complète. Dans la plupart des cas, la résolution directe des équations dynamiques est impossible et il faut utiliser des **méthodes numériques** ou des **approximations** spécifiques. Les méthodes numériques applicables aux équations de Navier-Stokes ont fait l'objet de développements intensifs au cours des 20

dernières années (voir par exemple Roache 1972, Richtmeyer et Morton 1957, Mitchell et Griffith 1980, Peyret et Taylor 1983, Cebeci et Bradshaw 1977, 1984, Anderson, Tannehill et Pletcher 1984, Oran et Boris 1987, Bradshaw, Cebeci et Whitelaw 1981, Fletcher 1988). Les méthodes d'approximations sont plus anciennes mais leur utilité subsiste car elles apportent souvent des informations théoriques qui complètent et explicitent les résultats obtenus par la simulation numérique.

Les approximations courantes sont basées sur des développements en série. On étudie par exemple les écoulements à faible nombre de Reynolds ($Re \to 0$) dans l'approximation des écoulements "rampants". Le nombre de Reynolds est alors le petit paramètre d'un développement asymptotique de la solution (voir par exemple Cole 1968, Van Dyke 1975).

L'approximation de la lubrification est celle des écoulements visqueux faiblement divergents. Le petit paramètre du développement en série est dans ce cas l'angle de divergence des filets fluides (voir par exemple Denn 1980). Dans l'approximation de couche limite, c'est le rapport de l'épaisseur de couche limite à la distance longitudinale qui joue le rôle de petit paramètre (voir les chapitres XVI à XVIII pour une présentation physique de la théorie de la couche limite). On pourra aussi consulter Van Dyke 1975 pour une analyse plus formelle basée sur la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Ce panorama rapide des méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes permet de mieux comprendre le caractère très spécial et l'intérêt des solutions exactes que nous allons maintenant présenter. Nous envisageons ici des écoulements parallèles, c'est-à-dire des écoulements dont le vecteur vitesse présente une seule composante non nulle. Les équations des écoulements parallèles sont déduites des équations de Navier-Stokes dans la section 2. Plusieurs exemples d'écoulements parallèles sont ensuite traités (section 3). On considère successivement l'écoulement parallèle dans un canal bidimensionnel (écoulement de Poiseuille plan), l'écoulement de Couette dans un canal bidimensionnel, l'écoulement de Poiseuille dans un conduit cylindrique.

Deux problèmes instationnaires sont ensuite formulés et résolus. Le premier conduit au tourbillon auto-semblable ("self-similaire") ou tourbillon de Rankine. Le premier problème de Stokes est ensuite envisagé. Il s'agit de l'écoulement laminaire induit par une plaque infinie à laquelle on communique une accélération impulsionnelle.

XIV.2. Equations générales des écoulements parallèles

Dans un écoulement **parallèle**, une seule composante du vecteur vitesse est non nulle et toutes les particules fluides suivent des trajectoires parallèles. Considérons comme premier exemple un écoulement parallèle à l'axe des x (figure 1).

$$u = u(x, y, z, t),\ v = 0,\ w = 0 \qquad (XIV, 1)$$

L'équation de continuité (voir tableau 1) se réduit dans cette situation à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (XIV, 2)$$

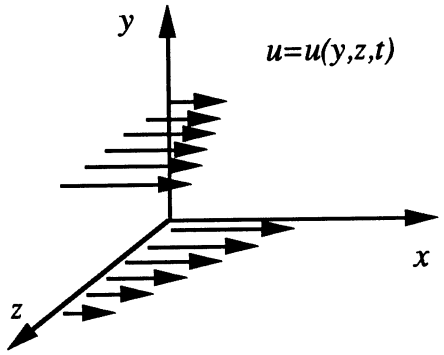


***Figure1.** Ecoulement parallèle à l'axe des x.*

La composante de vitesse u ne dépend donc pas de x : $u = u(y, z, t)$, $v = 0$, $w = 0$. Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée sur les axes y et z. Ces équations s'écrivent, en l'absence de forces de volume :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \qquad (XIV,3)$$

Ainsi la pression ne dépend ni de y ni de z, et $p = p(x, t)$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x prend alors la forme particulièrement simple (tableau 2) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (XIV,4)$$

Nous utiliserons cette équation plus loin.

Envisageons à présent un écoulement parallèle dans un conduit cylindrique (figure 2). Dans cette situation, il est plus commode d'utiliser les équations de Navier-Stokes écrites en coordonnées cylindriques. Nous supposons les vitesses radiale u et tangentielle v nulles. L'écoulement est défini par :

$$u = 0,\ v = 0,\ w = w(r, \theta, z, t) \qquad (XIV,5)$$

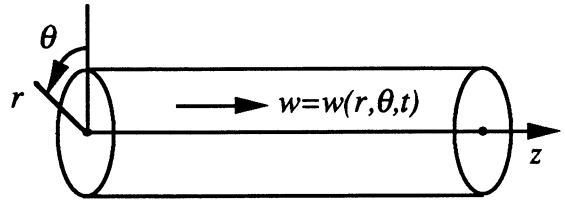


***Figure 2.** Ecoulement parallèle à l'axe des z en géométrie cylindrique.*

L'équation de continuité (tableau 1) se réduit dans cette situation à :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (XIV,6)$$

Ainsi :

$$w = w(r, \theta, t)$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement dans les directions radiale et tangentielle (tableau 3) deviennent :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad (XIV,7)$$

et dans ces conditions : $p = p(z,t)$.

L'équation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x s'écrit dans cette situation :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}] \qquad (XIV,8)$$

Envisageons comme troisième configuration celle d'un écoulement en rotation autour de l'axe des x (figure 3). Nous supposons maintenant que les composantes de vitesse radiale et axiale sont nulles :

$$u = 0,\ v = (r, \theta, z, t),\ w = 0 \qquad (XIV,9)$$

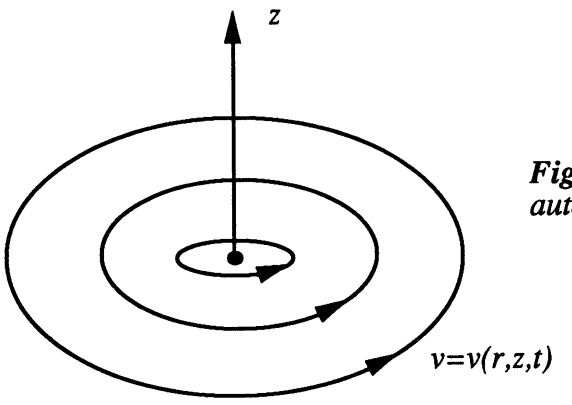


***Figure 3.** Ecoulement en rotation autour de l' axe z.*

L'équation de continuité donne dans ce cas :

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \qquad (XIV,10)$$

et par conséquent $v = v(r,z,t)$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement dans les directions radiale et axiale deviennent :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad 0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (XIV,11)$$

La pression ne dépend pas de z et par conséquent $p = p(r, \theta, t)$. Dans la direction tangentielle, on obtient facilement :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\{\frac{\partial}{\partial r}[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)] + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\} \qquad (XIV,12)$$

XIV.3. Exemples d'écoulements parallèles

XIV.3.1. Ecoulement parallèle dans un canal bidimensionnel (écoulement de Poiseuille plan)

Nous considérons ici l'écoulement stationnaire dans un conduit bidimensionnel infini. L'épaisseur du conduit est $2b$ et l'axe des x se trouve dans le plan de symétrie du conduit (figure 4). Dans la situation étudiée, les propriétés de l'écoulement ne dépendent ni de z (la coordonnée latérale) ni du temps t et l'équation (XIV,4) devient :

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \qquad (XIV,13)$$

où $u = u(y), p = p(x)$.

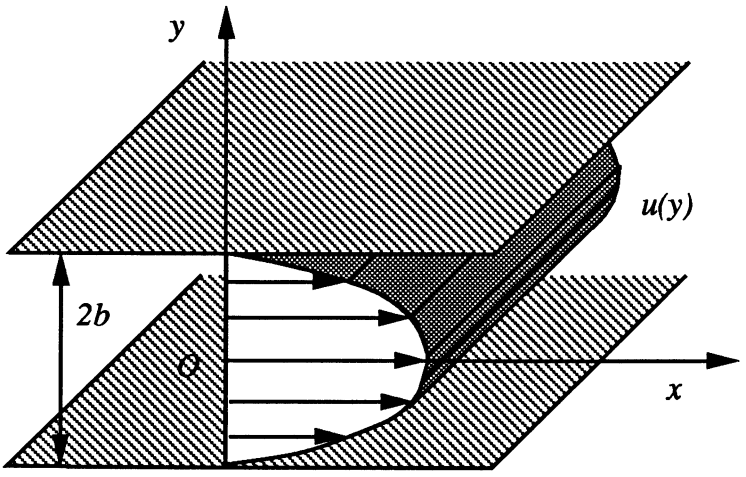


***Figure 4.** Ecoulement de Poiseuille dans un canal bidimensionnel infini. Le profil de vitesse dans chaque section est parabolique.*

Les particules fluides en contact avec les parois solides fixes ont une vitesse nulle. Cette condition d'adhérence donne les conditions aux limites du problème : $u(b) = u(-b) = 0$.

L'équation (XIV,13) possède un premier membre qui ne dépend que de y et un second membre qui ne dépend que de x, ces deux membres **doivent être constants** et par conséquent le gradient de pression dp/dx = constante.

L'équation (XIV,13) est facilement intégrée dans cette situation :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + c_1 y + c_2 \qquad (XIV,14)$$

et les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes $c_1 = 0$ et $c_2 = -(1/2\mu)(dp/dx)b^2$
Le profil de vitesse prend alors la forme :

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(b^2 - y^2) \qquad (XIV,15)$$

Ce profil est parabolique et la vitesse est maximum sur l'axe du conduit :

$$u_M = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2 \qquad (XIV,16)$$

La vitesse moyenne est facilement déterminée à partir de :

$$\bar{u} = \frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b} u(y)dy \qquad (XIV,17)$$

et on obtient :

$$\bar{u} = -\frac{1}{3\mu}\frac{dp}{dx}b^2 = \frac{2}{3}u_M \qquad (XIV,18)$$

Dans la solution précédente, le gradient de pression $-dp/dx = (p_1 - p_2)/l$ est supposé donné a priori et sa valeur détermine complètement le profil de vitesse et le débit masse par unité de section du conduit :

$$\dot{m}/A = \rho\bar{u} = \frac{\rho}{3\mu}\frac{p_1 - p_2}{l}b^2 \qquad (XIV,19)$$

XIV.3.2. Ecoulement de Couette

Une autre situation particulièrement simple est celle de l'écoulement de Couette. Dans ce cas, la paroi supérieure du conduit bidimensionnel est en mouvement de translation dans la direction x et la vitesse de la plaque est U. Cette configuration est assez proche de celle que l'on trouve par exemple dans les paliers lubrifiés. L'équation différentielle régissant l'écoulement ne change pas :

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \qquad (XIV,20)$$

mais la condition à la limite supérieure est modifiée :

$$u(b) = U \qquad (XIV,21)$$

A la paroi inférieure, la condition d'adhérence donne $u(-b) = 0$.
La solution générale de (XIV,20) est encore :

$$u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}y^2 + c_1 y + c_2 \qquad (XIV,22)$$

Les conditions aux limites fixent les deux constantes :

$$c_1 = \frac{U}{2b}, \quad c_2 = \frac{U}{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}b^2$$

et le profil de vitesse prend la forme :

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(b^2 - y^2) + \frac{U}{2b}(y + b) \qquad (XIV, 23)$$

Parois fixes — Couette en l'absence d'un gradient de pression

Le profil de vitesse apparaît comme la superposition du profil correspondant à un écoulement de Couette en l'absence d'un gradient de pression et du profil de vitesse pour un écoulement visqueux entre deux parois fixes.

L'expression (XIV,21) peut encore s'écrire :

$$u(y) = \frac{U}{2}[(\frac{y}{b} + 1) + K(1 - \frac{y^2}{b^2})] \qquad (XIV, 22, 24)$$

avec :

$$K = -\frac{b^2}{\mu U}\frac{dp}{dx} \qquad (XIV, 23, 25)$$

K est un gradient de pression adimensionnel. Lorsque $K > 0$, c'est-à-dire pour un gradient de pression décroissant dans le sens du mouvement, la vitesse $u(y)$ est toujours positive. Lorsque K devient négatif et inférieur à $-1/2$, la vitesse devient négative dans une région située au voisinage de la paroi inférieure et le sens de l'écoulement est inversé. Dans ce cas, les contraintes visqueuses exercées sur le fluide par la paroi supérieure n'ont pas une amplitude suffisante pour compenser les effets du gradient de pression adverse.

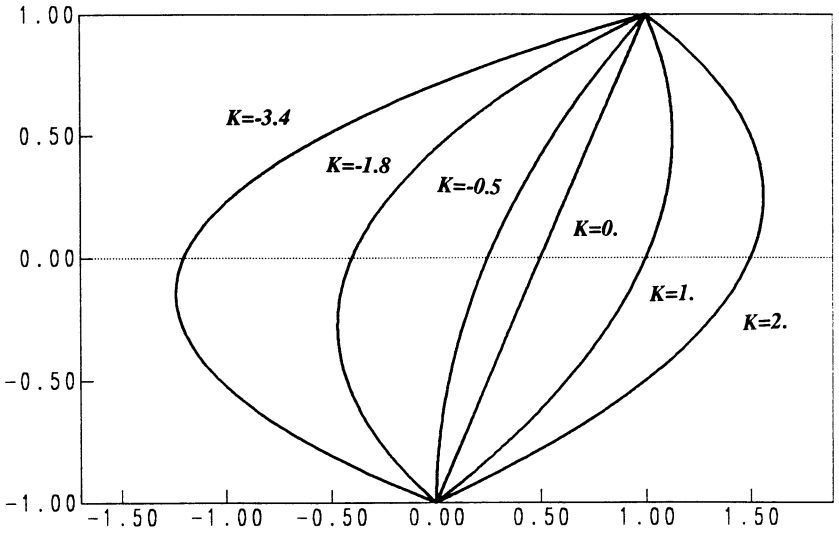


Figure 5. Profils de vitesse pour l' écoulement de Couette. Lorsque K>-1/2 la vitesse est positive dans toute la section. Pour K<-1/2 la direction de l'écoulement s'inverse dans une partie du canal.

XIV.3.3. L'écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique

Considérons maintenant l'écoulement parallèle d'un fluide visqueux dans un tube cylindrique de rayon R (figure 6) et supposons que l'écoulement soit axisymétrique et stationnaire.

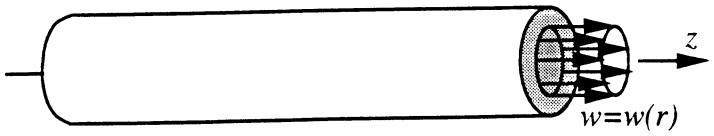


Figure 6a). *Ecoulement de Poiseuille dans un conduit cylindrique de section circulaire.*

Dans ces conditions, la pression ne dépend plus que de la coordonnée axiale $p = p(z)$ et la composante de vitesse w ne dépend plus que de la coordonnée radiale $w = w(r)$. L'équation (XIV,8) devient ici :

$$\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = \frac{dp}{dz} \qquad (XIV,26)$$

Les conditions aux limites pour ce problème sont $w(R) = 0$, qui traduit le non-glissement sur la paroi du conduit, et $w(0) < \infty$ qui exprime que la vitesse reste finie sur l'axe. La solution générale de l'équation (XIV,26) a pour forme :

$$w(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}r^2 + c_1 \ln r + c_2 \qquad (XIV,27)$$

La constante c_1 est nulle, car $w(0) < \infty$ et c_2 est donnée par la condition sur la paroi du conduit :

$$0 = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2 + c_2$$

Le profil de vitesse a donc pour forme :

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}(R^2 - r^2) \qquad (XIV,28)$$

Il s'agit encore d'un profil parabolique. Dans l'expression précédente, le gradient de pression axial $-dp/dz = (p_1 - p_2)/l$ est imposé, de l'extérieur, au fluide qui s'écoule dans le conduit. Ce gradient est obtenu par exemple à l'aide d'un système de pompage comme celui schématisé sur la figure 6b.

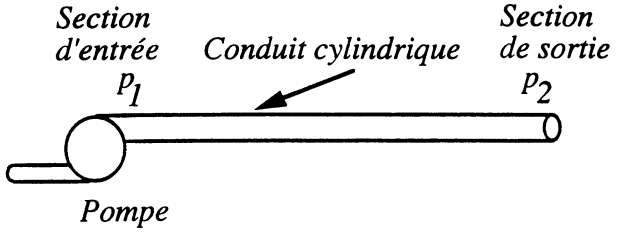


Figure 6b. *Système de pompage.*

La vitesse maximum sur l'axe a pour valeur :

$$w_M = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2 \qquad (XIV,29)$$

et la vitesse moyenne est donnée par :

$$\bar{w} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R w(r)dr$$

soit :

$$\bar{w} = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2 = \frac{w_M}{2}$$

Cette vitesse est égale à la moitié de la vitesse sur l'axe.
Le débit volume est immédiatement obtenu sous la forme :

$$Q = \pi R^2 \bar{w} = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{dp}{dz}$$

soit encore :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l} \qquad (XIV,30)$$

Ce débit est proportionnel au gradient de pression et au rayon à la puissance quatre.
L'analyse qui vient d'être effectuée est uniquement applicable à des écoulements laminaires. Cette situation prévaut tant que le nombre de Reynolds ne dépasse pas une certaine valeur critique. Ce nombre a pour expression :

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D}{\mu} \qquad (XIV,31)$$

où la vitesse typique utilisée est la vitesse moyenne $\bar{w}$. De nombreuses expériences montrent que le nombre de Reynolds critique pour un conduit cylindrique est :

$$Re_c = (\frac{\rho \bar{w} D}{\mu})_c \sim 2300 \qquad (XIV,32)$$

Lorsque le nombre de Reynolds dépasse cette valeur, l'écoulement devient turbulent et la théorie que nous venons de présenter cesse d'être valable. Notons cependant que l'on peut maintenir un écoulement laminaire à des nombres de Reynolds plus élevés (jusqu'à $Re \sim 10^5$) en améliorant les conditions d'entrée du conduit et l'état de surface des parois.
L'expression que nous avons établie plus haut pour la vitesse moyenne peut être réécrite sous une forme plus utile. Nous définissons d'abord un coefficient de frottement f pour l'écoulement dans le conduit par :

$$f = \frac{(-dp/dz)D}{\frac{1}{2}\rho \bar{w}^2}$$

où D est le diamètre du conduit et $\bar{w}$ la vitesse moyenne.

D'après ce qui précède,

$$f = \frac{8\mu D\bar{w}}{\frac{1}{2}\rho\bar{w}^2 R^2}$$

soit :

$$f = \frac{64}{Re} \qquad (XIV,33)$$

Le nombre de Reynolds qui apparaît dans cette expression est encore basé sur la vitesse moyenne et le diamètre du conduit. Ainsi, pour l'écoulement de Poiseuille, le gradient de pression longitudinal est donné par :

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{f}{D}\frac{1}{2}\rho\bar{w}^2 \qquad (XIV,34)$$

avec : $f = 64/Re$

Cette valeur du coefficient f est en très bon accord avec les expériences effectuées sur des **écoulements laminaires en conduits cylindriques** (figure 7). L'expression obtenue ici coïncide avec celle présentée au chapitre VIII dans l'analyse des pertes de charge dans les conduits.

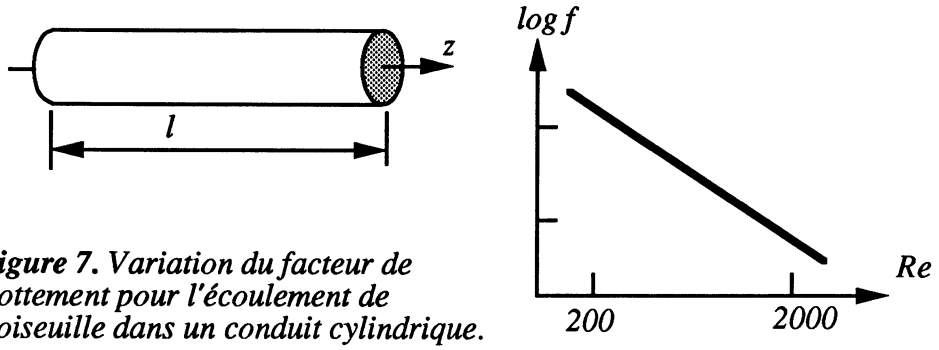


***Figure 7.** Variation du facteur de frottement pour l'écoulement de Poiseuille dans un conduit cylindrique.*

XIV.4. Deux écoulements instationnaires

XIV.4.1. Le tourbillon à noyau visqueux ou tourbillon self-similaire

Considérons maintenant un écoulement en rotation autour de l'axe z. Les équations correspondant à cette situation sont celles établies plus haut (XIV,11 et XIV,12). Nous supposons en outre que la composante axiale du vecteur vitesse est nulle. L'écoulement est purement tangentiel et l'on a :

$$u = 0, \quad v = v(r,t), \quad w = 0, \quad p = p(r,t)$$

L'équation (XIV,12) devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu[\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)] \qquad (XIV,35)$$

et le champ de pression est déterminé à l'aide de :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r} \qquad (XIV,36)$$

Nous allons d'abord déterminer les solutions stationnaires de l'équation (XIV,35). Ces solutions sont telles que :

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_s)\Big) = 0 \qquad (XIV,37)$$

Une première intégration donne :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_s) = c_1 \qquad (XIV,38)$$

et l'intégration de cette expression conduit à :

$$v_s(r) = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \qquad (XIV,39)$$

La vitesse apparaît comme la superposition d'un mouvement de rotation solide $c_1 r/2$ et d'un mouvement tourbillonnaire bidimensionnel. Considérons maintenant le deuxième terme seul :

$$v_s(r) = \frac{c_2}{r} \qquad (XIV,40)$$

La circulation des vitesses autour de l'axe z est facilement calculée sur le cercle de rayon r :

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_s(r) r d\theta = 2\pi c_2 \qquad (XIV,41)$$

et la constante c_2 est donc égale à $\Gamma/2\pi$. Ainsi l'une des solutions stationnaires de l'équation (XIV,35) a pour forme :

$$v_s(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad (XIV,42)$$

Nous allons maintenant chercher une solution instationnaire de l'équation (XIV,35) telle que : $v(r,0) = \Gamma/(2\pi r)$ sauf en $r = 0$ et $\lim_{t\to\infty} v(r,t) = 0$.

On peut d'abord essayer d'obtenir une solution sous la forme :

$$v(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(r,t) \qquad (XIV,43)$$

En substituant cette expression dans (XIV,35), on trouve facilement l'équation qui régit f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\Big) \qquad (XIV,44)$$

La fonction f doit être telle que :

$$f(r,0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} f(r,t) = 0 \qquad (XIV,45)$$

Il reste à déterminer la solution de l'équation (XIV,44) qui vérifie les deux conditions précédentes. Nous allons rechercher une solution self-similaire de la forme :

$$f = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{r^2}{4\nu t}$$

Notons que les solutions auto-semblables de ce type n'existent que dans des cas spéciaux. L'intérêt de ces solutions est qu'elles réduisent le nombre de variables et transforment le problème aux **dérivées partielles** en un problème **différentiel ordinaire**. Ici r et t sont remplacées par une seule variable η et l'équation (XIV,44) est, comme on va le voir, remplacée par une équation différentielle ordinaire. La forme de la solution self-similaire est suggérée par les deux remarques suivantes :

1) L'équation (XIV,44) fait intervenir t, r et la viscosité ν dont les dimensions sont L^2T^{-1}. Le seul nombre sans dimension que l'on puisse former avec ces trois quantités est : $r^2/\nu t$.

2) L'équation de la chaleur $\partial T/\partial t = \alpha \partial^2 T/\partial x^2$ est très proche de l'équation (XIV,44) et possède des solutions de la forme : $T = T(x^2/\alpha t)$.

Notons, avant de passer à la détermination de f, que la recherche des solutions de similitude, encore appelées solutions auto-semblables, joue un grand rôle en mécanique des fluides et plus particulièrement dans l'analyse des couches limites et des zones de cisaillement minces (voir par exemple Schlichting 1968, Cebecci et Bradshaw 1984).

Si $f = f(\eta)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -f'(\eta)\frac{r^2}{4\nu t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = f'(\eta)\frac{r}{2\nu t}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= f''(\eta)(\frac{r}{2\nu t})^2 + f'(\eta)\frac{1}{2\nu t} \end{aligned} \qquad (XIV,46)$$

et, en portant ces expressions dans (XIV,44), on obtient facilement :

$$f''(\eta) + f'(\eta) = 0 \qquad (XIV,47)$$

Une première intégration donne :

$$f'(\eta) + f(\eta) = c_1 \qquad (XIV,48)$$

et la solution générale de cette équation différentielle est :

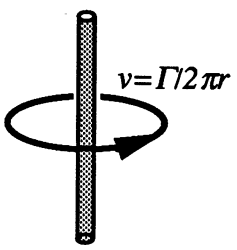
$$f(\eta) = c_1 + c_2 e^{-\eta} \qquad (XIV,49)$$

Les conditions (XIV,45) sur f donnent deux relations qui déterminent c_1 et c_2 :

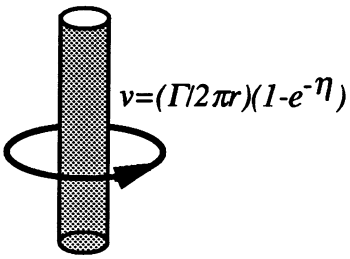
$$1 = c_1, \qquad 0 = c_1 + c_2$$

Ainsi :

$$f(\eta) = 1 - e^{-\eta} \qquad (XIV,50)$$



Filament tourbillonnaire initial. t=0.



Noyau visqueux. t>0.

***Figure 8.** Tourbillon à noyau visqueux.*

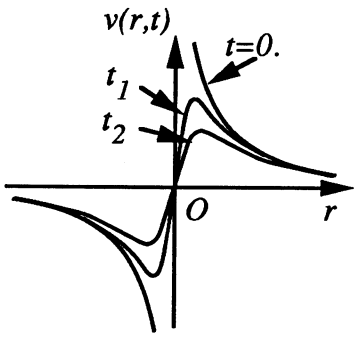


***Figure 9.** Distribution des vitesses dans un tourbillon à noyau visqueux.*

et le champ de vitesse a finalement pour expression :

$$v(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{-r^2/4\nu t}) \qquad (XIV,51)$$

Cette solution est due à Oseen et Hamel. Elle représente l'évolution sous l'effet de la viscosité d'un tourbillon dont la circulation initiale est Γ (figure 8). La distribution de vitesse correspondant à l'expression (XIV,51) est représentée à la figure 9.

A l'instant initial, cette distribution est celle d'un filament tourbillonnaire de circulation Γ. Aux instants suivants, les effets visqueux sont ressentis dans un noyau dont le rayon augmente comme $(4\nu t)^{1/2}$.

Nous retrouverons un résultat du même type dans l'analyse qui va suivre du premier problème de Stokes.

XIV.4.2. Le premier problème de Stokes

Ce problème est souvent appelé dans la littérature "problème de Rayleigh". Il semble en fait que la solution soit due à Stokes.

Il s'agit encore d'un problème instationnaire dans lequel les forces de frottement équilibrent l'accélération instationnaire locale. La géométrie du problème est représentée à la figure 10. Une plaque plane infinie limite un demi-espace occupé par un fluide initialement au repos. A l'instant initial, la plaque est mise en translation uniforme à la vitesse U_o.

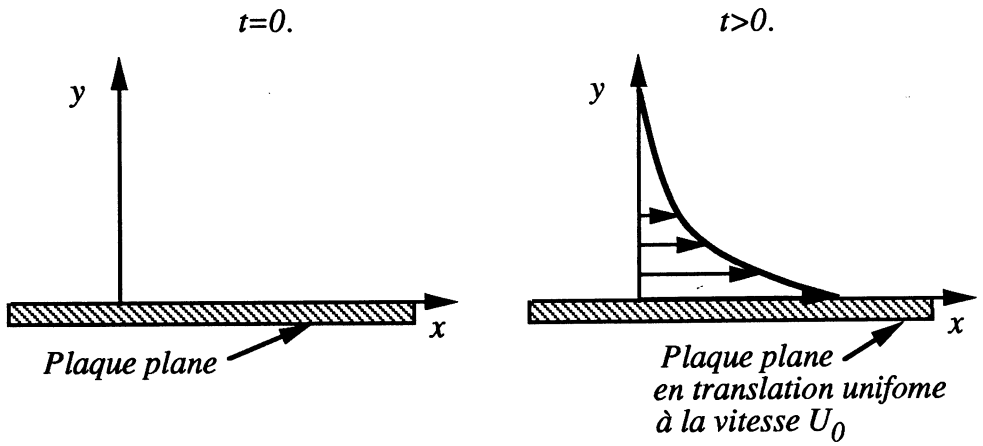


Figure 10. *Géométrie du premier problème de Stokes. A l'instant initial, la plaque plane est mise en translation uniforme.*

Le fluide est mis en mouvement parallèle. Dans cette situation, nous savons déjà que $\partial p/\partial y = 0$. En outre, il ne peut y avoir de gradient de pression parallèlement à la plaque, car le fluide s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ suivant cette direction.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x (XIV,4) devient dans ces conditions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (XIV,52)$$

où :

$$u = u(y,t)$$

Les conditions aux limites sont pour ce problème :

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= 0 \quad \text{pour} \quad t \leq 0, \\ u(x,0,t) &= U_o \quad \text{pour} \quad t > 0. \end{aligned} \qquad (XIV,53)$$

Nous avons à résoudre une équation identique à l'équation de la chaleur. La solution peut être obtenue à l'aide de la méthode utilisée dans la section précédente. Nous cherchons u sous une forme auto-semblable :

$$u = U_o f(\eta) \qquad (XIV,54)$$

où :

$$\eta = \frac{y}{2(\nu t)^{1/2}}$$

Les dérivées partielles de u sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -U_o f'(\eta) \frac{y}{4\nu^{1/2} t^{3/2}} = -U_o f'(\eta) \frac{\eta}{2t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U_o f'(\eta) \frac{1}{2(\nu t)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_o f''(\eta) \frac{1}{4\nu t}$$

On peut écrire (XIV,52) sous la forme :

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{U_o}{4t}[f''(\eta) + 2\eta f'(\eta)] = 0 \qquad (XIV,55)$$

La fonction f est solution de l'équation :

$$f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) = 0 \qquad (XIV,56)$$

avec comme conditions aux limites :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(+\infty) = 0 \qquad (XIV,57)$$

L'équation (XIV,56) peut être intégrée une première fois :

$$f'(\eta) = c_1 e^{-\eta^2} \qquad (XIV,58)$$

et une seconde intégration donne :

$$f(\eta) = c_1 \int_O^\eta e^{-\eta^2} d\eta + c_2 \qquad (XIV,59)$$

Les conditions aux limites déterminent les deux constantes :

$$f(0) = 1 = c_2, \quad f(+\infty) = 0 = c_1 \int_O^\infty e^{-\eta^2} d\eta + c_2$$

L'intégrale qui apparaît dans cette dernière expression a pour valeur $(\pi)^{1/2}/2$ et on obtient $c_2 = 1, c_1 = -2/(\pi)^{1/2}$. La fonction $f(\eta)$ a pour forme :

$$f(\eta) = 1 - \frac{2}{(\pi)^{1/2}} \int_O^\eta e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \text{erf}(\eta) \qquad (XIV,60)$$

Dans cette espression erf désigne la fonction d'erreur et $f(\eta)$ est donc la fonction d'erreur complémentaire.
Le champ de vitesse est donné par la forme simple :

$$u = U_o \text{erfc}(\eta), \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{y}{2(\nu t)^{1/2}} \qquad (XIV,61)$$

Le profil de vitesse est représenté à la figure 11 en fonction de la variable de similitude η. La vitesse tombe à 1% de sa valeur initiale pour $\eta = 2$. Ainsi, l'épaisseur δ de fluide dans laquelle il y a une variation importante du profil de vitesse est donnée par :

$$\delta \sim 2\eta_{0.01}(\nu t)^{1/2}$$

où : $\eta_{0.01} = 2$, et par conséquent $\delta \sim 4(\nu t)^{1/2}$.

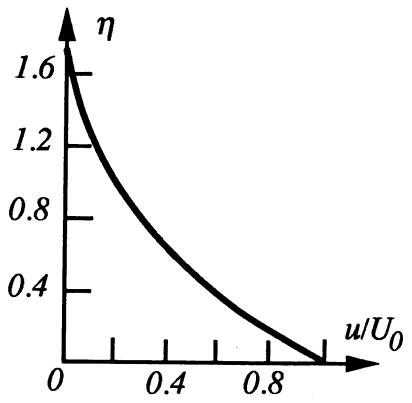


***Figure 11.** Distribution de vitesse pour le premier problème de Stokes.* $\eta = y/2(\nu t)^{1/2}$

Cette épaisseur augmente comme la racine carrée du produit de la viscosité cinématique par le temps. La mise en translation uniforme de la plaque influence une couche de fluide dont l'épaisseur varie comme la racine carrée du temps. Cette région forme une "couche limite"au voisinage de la paroi. Le comportement que nous venons de mettre en évidence dans un exemple particulier sera retrouvé plus loin dans l'étude des écoulements visqueux stationnaires au voisinage d'une paroi. Le concept de couche limite est généralisable à beaucoup d'autres situations et occupe une place très importante en mécanique des fluides.

Tableau 1. L'équation de continuité dans trois systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Coordonnées cylindriques : $u = v_r, v = v_\theta, w = v_r$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Coordonnées sphériques : $u = v_r, v = v_\theta, w = v_\phi$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho w) = 0$$

Tableau 2. Equations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles

Coordonnées rectangulaires x, y, z, vitesse (u, v, w)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + g_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Tableau 3. Equations de Navier-Stokes pour les écoulements incompressibles

Coordonnées cylindriques r, θ, z, vitesse (u, v, w)

Direction radiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + g_r$$

Direction tangentielle :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] + g_\theta$$

Direction axiale :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + g_z$$

CHAPITRE XV

ANALYSE DIMENSIONNELLE

XV.1. Introduction

L'analyse dimensionnelle fournit des informations sur des phénomènes physiques à partir des seules considérations d'**homogénéité**. Ce type d'analyse conduit à une solution partielle de la plupart des problèmes, mais elle ne permet pas la détermination de solutions complètes et ne donne pas une explication des mécanismes physiques mis en jeu. On peut cependant obtenir des estimations a priori des termes qui composent les équations de bilan, dégager les termes dominants et déduire des équations simplifiées représentatives des mécanismes physiques prépondérants. Très généralement, l'analyse dimensionnelle d'un problème permet la réduction du nombre des variables de ce problème. Cette possibilité est particulièrement intéressante lorsqu'il s'agit de mener une série d'expériences portant sur un phénomène dépendant de nombreux paramètres. Après avoir déterminé les variables indépendantes du problème, on peut former un système complet de produits sans dimensions dont le nombre est inférieur à celui des variables initiales. Les résultats expérimentaux peuvent alors être présentés en fonction de ces produits sans dimensions, ce qui conduit à une diminution notable des essais et à une simplification de la forme des résultats.

Un autre champ d'application de l'analyse dimensionnelle est celui des problèmes de similitude entre un modèle (une maquette à échelle réduite) et un prototype.

Des modèles à échelle réduite sont couramment utilisés pour résoudre des problèmes complexes. On cherche ainsi à obtenir des informations utiles à la conception du prototype en effectuant des essais peu coûteux sur maquette. L'analyse dimensionnelle définit dans ce cas les conditions de similitude dans lesquelles les mesures effectuées à échelle réduite sont représentatives du système en vraie grandeur. En général, toutes les conditions de similitude ne peuvent être réalisées et on se contente d'une similitude partielle. Il faut alors justifier les critères retenus et compenser les écarts à la similitude par des corrections théoriques ou empiriques.

Sur un plan théorique, les méthodes d'analyse dimensionnelle peuvent être utilisées pour rechercher des solutions particulières de certains problèmes d'écoulement. On obtient, par cette voie, des solutions auto-semblables, telles que celles présentées au chapitre XIV, section 4 ou au chapitre XVII dans le cadre de la théorie de la couche limite.

Les principes et des applications de l'analyse dimensionnelle sont développés de façon

systématique dans quelques livres (par exemple Langhaar 1956, Le Méhauté 1976, Schuring 1977, Newmann 1977). Dans ce chapitre, nous allons uniquement décrire les utilisations les plus typiques, en particulier celles qui ont trait à l'estimation a priori d'ordres de grandeur (section 2) et celles relatives aux problèmes de similitude (section 6). La base formelle de l'analyse dimensionnelle est constituée par la théorie π. Pour un problème donné, ce théorème donne le nombre de produits sans dimensions indépendants et propose une méthode de détermination de ces produits. Ce théorème est introduit à la section 3 et illustré dans la section 4. On peut aussi faire apparaître les produits sans dimensions classiques en écrivant les équations de bilan sous forme adimensionnelle (section 5). On dégage ainsi l'ordre de grandeur de chaque terme, ce qui permet d'introduire la plupart des approximations classiques de la mécanique des fluides. Cette analyse conduit aussi directement aux conditions de similitude entre une maquette et un prototype. Cet aspect est illustré, à la section 8, par plusieurs exemples. L'annexe A donne une liste non exhaustive des produits sans dimensions les plus courants.

Les applications de l'analyse dimensionnelle à la vérification de l'homogénéité d'équations ou de formules littérales ou à la détermination des unités d'une grandeur particulière sont bien connues et ne seront donc pas traitées ici.

XV.2. Quelques estimations a priori

L'estimation a priori de l'ordre de grandeur des termes des équations de bilan donne souvent des renseignements utiles. Ce type d'estimation permet (1) de négliger les termes peu importants et donc de simplifier le problème à étudier, (2) d'obtenir des informations sur la solution avant d'avoir résolu le problème.

La théorie de la couche limite que nous présenterons plus loin constitue un exemple remarquable de ce type d'approche. Pour le moment, nous allons introduire les techniques d'estimation, puis nous déduirons des termes estimés quelques nombres sans dimensions importants. Nous considérons (figure 1) un écoulement autour d'un corps solide. Désignons par l une dimension typique de l'écoulement, l pouvant être, par exemple, une dimension du corps considéré. On suppose ici qu'une seule échelle de longueur caractérise l'écoulement. Cette hypothèse n'est pas toujours suffisante et il faut introduire, dans certains cas, plusieurs échelles de longueur (le cas type est celui des écoulements cisaillés que l'on décrit à l'aide d'une échelle transverse δ et d'une échelle longitudinale l; on trouvera une analyse dimensionnelle de cette situation dans l'introduction à la théorie de la couche limite des chapitres XVI et XVII).

Soit U une vitesse typique, ρ une masse volumique, μ la viscosité typique. Si l'écoulement est instationnaire, les variations dans le temps peuvent être caractérisées par une période typique t_o ou encore par une fréquence typique $f_o = 1/t_o$. Certains écoulements sont caractérisés par plusieurs échelles de temps, mais cette situation plus complexe n'est pas envisagée ici. Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\underset{(1)}{\rho}\left(\underset{(2)}{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}} + \underset{(3)}{\boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}}\right) = \underset{(4)}{-\nabla p} + \underset{(5)}{\rho \boldsymbol{g}} + \nabla.\boldsymbol{\tau} \qquad (XV,1)$$

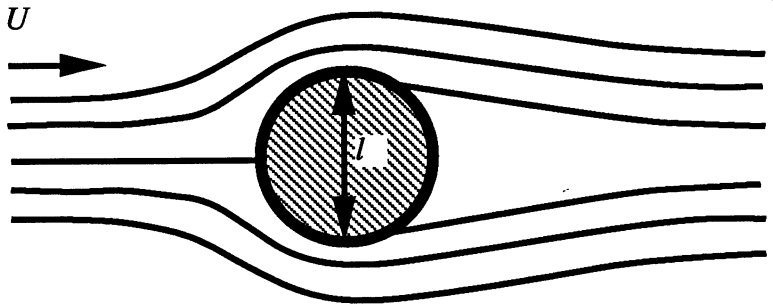


Figure 1. Un écoulement typique.

L'estimation des termes qui interviennent dans cette équation peut être effectuée de la manière suivante. Le premier terme représente la quantité d'accélération instationnaire par unité de volume :

$$|\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}| \sim \rho\frac{U}{t_o} = \rho f_o U \qquad (XV,2)$$

Le second terme représente la quantité d'accélération convective par unité de volume (les forces d'inertie) :

$$|\rho \boldsymbol{v}.\nabla \boldsymbol{v}| \sim \rho\frac{U^2}{l} \qquad (XV,3)$$

Le troisième terme représente les forces de pression par unité de volume. Deux estimations sont possibles dans ce cas. Si les variations de p sont de l'ordre de p, on peut écrire :

$$|\nabla p| \sim \frac{p}{l} \qquad (XV,4a)$$

S'il existe une pression p_o autour de laquelle les variations de pression s'effectuent, il faut plutôt adopter :

$$|\nabla p| \sim \frac{p - p_o}{l} \qquad (XV,4b)$$

L'expression(XV,4a) est bien adaptée aux écoulements compressibles, alors que (XV,4b) convient plutôt aux écoulements incompressibles.

Le quatrième terme représente les forces de pesanteur par unité de volume :

$$|\rho \boldsymbol{g}| \sim \rho g \qquad (XV,5)$$

Enfin le cinquième terme correspond aux forces visqueuses par unité de volume. Pour un fluide newtonien de viscosité constante ce terme s'écrit :

$$|\nabla.\tau| = |\mu\nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla.\boldsymbol{v})| \qquad (XV,6)$$

et il peut être estimé par :

$$|\nabla.\tau| \sim \mu\frac{U}{l^2} \qquad (XV,7)$$

On peut maintenant comparer ces estimations entre elles. Considérons d'abord le rapport des termes (2) et (4) :

$$\frac{|\rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v}|}{|\rho \boldsymbol{g}|} \sim \frac{\rho U^2/l}{\rho g} = \frac{U^2}{gl} \qquad (XV,8)$$

Le produit sans dimensions obtenu est appelé **nombre de Froude** : $Fr = U^2/gl$.
D'après ce calcul, le nombre de Froude compare les forces d'inertie aux forces de pesanteur :

$$Fr \sim \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de pesanteur}}$$

Considérons maintenant le rapport des termes (2) et (5) :

$$\frac{|\rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\tau}|} \sim \frac{\rho U^2/l}{\mu U/l^2} = \frac{\rho U l}{\mu} \qquad (XV,9)$$

Ce groupe sans dimensions est appelé **nombre de Reynolds**. Ce nombre compare donc les forces d'inertie aux forces visqueuses :

$$Re \sim \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces visqueuses}}$$

Lorsque Re est petit ($Re << 1$), l'écoulement est dominé par les effets visqueux. Lorsque Re est grand ($Re >> 1$), les forces d'inertie sont prépondérantes.
Le rapport de (2) à (3) peut prendre plusieurs formes. Avec l'expression (XV,4a) pour le gradient de pression, on obtient :

$$\frac{|\rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\nabla}p|} \sim \frac{\rho U^2/l}{p/l} = \frac{U^2}{p/\rho} \qquad (XV,10a)$$

En écoulement compressible, cette quantité est proportionnelle au carré du **nombre de Mach** :

$$\frac{|\rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\nabla}p|} \sim M^2 \qquad (XV,10b)$$

Si l'on adopte (XV,4b) comme estimation du gradient de pression, le rapport s'écrit :

$$\frac{|\rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\nabla}p|} \sim \frac{\rho U^2}{p - p_o} \qquad (XV,11)$$

Le groupe $(p - p_o)/\frac{1}{2}\rho U^2$ a reçu le nom de **nombre d'Euler**. En écoulement incompressible, ce nombre mesure les variations de pression par rapport à l'énergie cinétique disponible par unité de volume. Suivant les besoins, le nombre d'Euler peut aussi être défini comme $Eu = p_o/\frac{1}{2}\rho U_o^2$.

Le rapport des premier et deuxième termes prend la forme :

$$\frac{|\rho \partial \boldsymbol{v}/\partial t|}{|\rho \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}|} \sim \frac{\rho f_o U}{\rho U^2/l} = \frac{f_o l}{U} \qquad (XV,12)$$

Ce groupe définit le **nombre de Strouhal** $St = f_o l/U$. Ce rapport compare les accélérations instationnaire et convective.

$$St \sim \frac{\text{Quantité d'accélération instationnaire}}{\text{Quantité d'accélération convective}}$$

D'autres nombres sans dimensions existent. Les principaux sont répertoriés dans l'annexe A. Leur signification physique peut être obtenue par des raisonnements semblables à ceux effectués plus haut.

XV.3. Le théorème π ou Théorème de Vaschy-Buckingham

XV.3.1. Le théorème Π

Considérons un phénomène physique (un écoulement par exemple) décrit par une relation de la forme :

$$f(q_1, q_2 \dots q_n) = 0 \qquad (XV, 13)$$

où $q_1, q_2 \dots q_n$ sont n paramètres indépendants. Si k désigne le nombre minimal d'unités fondamentales nécessaires pour définir les dimensions des paramètres $q_1, q_2 \dots q_n$, alors le théorème π établi par Vaschy et Buckingham indique qu'il est possible de grouper les n paramètres en $n-k$ produits sans dimensions. On peut alors écrire la relation fonctionnelle initiale sous la forme :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{n-k}) = 0 \qquad (XV, 14)$$

où les π_i sont les produits sans dimensions définis à partir des $q_1 \dots q_n$. En mécanique des fluides $k = 3$ si la température n'intervient pas, $k = 4$ si elle doit être prise en compte.

XV.3.2. Détermination systématique des nombres sans dimension

La détermination des nombres sans dimensions π peut se faire dans tous les cas à l'aide de la méthode suivante.

On commence par choisir parmi les $q_1, q_2 \dots q_n$ paramètres, k variables par exemple les k premières variables : $q_1, q_2 \dots q_k$.

On forme ensuite les $n - k$ groupes :

$$\begin{array}{rccccc} \pi_1 = & q_1^{\alpha_1} & q_2^{\alpha_2} & \dots & q_k^{\alpha_k} & q_{k+1} \\ \pi_2 = & q_1^{\beta_1} & q_2^{\beta_2} & \dots & q_k^{\beta_k} & q_{k+2} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \pi_{n-k} = & q_1^{\eta_1} & q_2^{\eta_2} & \dots & q_k^{\eta_k} & q_n \end{array} \qquad (XV, 15)$$

Il reste alors à déterminer les combinaisons d'exposants qui transforment ces produits en groupes sans dimensions. Pour cela, on exprime chaque quantité en fonction des unités fondamentales et on résoud un système linéaire à k équations pour chaque ensemble d'exposants $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k\} \dots \{\eta_1, \eta_2 \dots \eta_k\}$.

Exemple

Déterminer l'expression de la célérité sonore dans un gaz en utilisant le théorème π.

Solution

On peut admettre a priori que la célérité sonore dans un gaz c dépend de la masse volumique ρ, de la pression p et de la viscosité du gaz. On peut donc écrire : $f(c, \rho, p, \mu) = 0$.

Toutes ces grandeurs s'expriment en fonction des unités M, L et T. Nous avons donc 4 variables et 3 unités fondamentales. Le théorème π indique qu'il existe 1 seul nombre sans dimensions. Choisissons parmi les 4 variables ρ, p et μ. On peut alors former un groupe :

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \mu^{\alpha_3} c$$

Ce groupe peut s'exprimer en fonction des unités fondamentales :

$$\pi_1 = (ML^{-3})^{\alpha_1} (ML^{-1}T^{-2})^{\alpha_2} (ML^{-1}T^{-1})^{\alpha_3} LT^{-1}$$

et il faut que ce groupe soit sans dimensions. Il faut pour cela que les exposants de M, L et T soient tous nuls. On obtient :

$$\begin{array}{rrrrl} \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & & = 0 \\ -3\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & +1 & = 0 \\ & -2\alpha_2 & -\alpha_3 & -1 & = 0 \end{array}$$

On obtient facilement $\alpha_1 = +1/2, \alpha_2 = -1/2$ et $\alpha_3 = 0$ et le groupe π_1 s'écrit : $\pi_1 = c\,\rho^{1/2}/p^{1/2}$.

On peut donc écrire : $\varphi(\pi_1) = 0$ et cette relation conduit à π_1= constante, soit : $c = \text{constante}(p/\rho)^{1/2}$.

La célérité sonore est indépendante de la viscosité. La valeur de la constante ne peut être obtenue par analyse dimensionnelle. Rappelons que la théorie donne pour des gaz parfaits $c = (\gamma p/\rho)^{1/2}$.

Remarque

Dans la plupart des cas, il n'est pas nécessaire d'appliquer la technique générale qui vient d'être décrite. On commence par déterminer la valeur de $n - k$, puis on recherche tous les groupes sans dimensions classiques qui font intervenir les grandeurs initiales. Il faut parfois recourir à une liste de nombres sans dimensions (une liste partielle est fournie dans l'annexe A).

XV.4. Quelques applications du théorème Π

Les applications du théorème π sont très nombreuses. Nous donnerons seulement quelques exemples à titre d'illustration. D'autres applications sont développées dans les livres de Langhaar 1956, Schuring 1977, Le Méhauté 1976.

XV.4.1. Traînée d'une sphère

L'analyse dimensionnelle donne souvent des résultats utiles dans des situations compliquées. Considérons comme premier exemple la détermination de la force de traînée qui s'exerce sur une sphère de diamètre d plongée dans un écoulement à vitesse uniforme U (figure 2). Si la sphère présente une surface lisse, son diamètre est la seule échelle caractéristique. Une vitesse typique de l'écoulement est U, la densité ρ et la viscosité μ doivent aussi intervenir dans la détermination de la traînée. En définitive, la traînée doit être une fonction des quatre paramètres précédents :

$$D = f(d, U, \rho, \mu) \qquad (XV, 16)$$

Cette relation fait intervenir cinq variables, dont chacune s'exprime en fonction des trois dimensions fondamentales M, L et T : $[D] = MLT^{-2}$, $[d] = L$, $[U] = LT^{-1}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$.

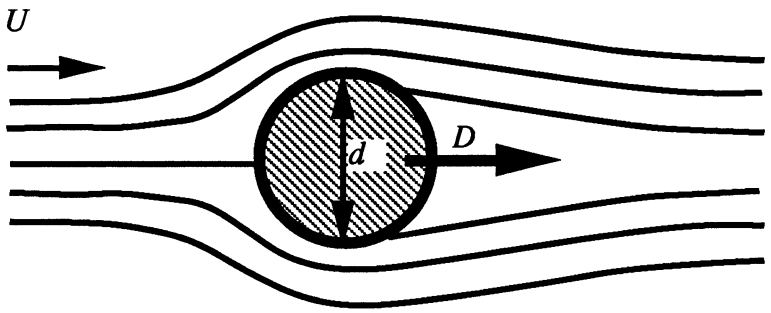


***Figure 2.** Une sphère placée dans un écoulement uniforme.*

Le théorème π indique qu'il existe 5-3=2 nombres sans dimensions indépendants et que l'expression (XV,16) peut être remplacée par une relation entre ces deux nombres. On peut écrire :

$$\frac{D}{\rho U^2 d^2} = f(\frac{\rho U d}{\mu}) \qquad (XV, 17)$$

On retrouve ici le nombre de Reynolds $Re = \rho U d/\mu$. Le groupe sans dimensions $D/\rho U^2 d^2$ est proportionnel au coefficient de traînée défini conventionnellement par :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \qquad (XV, 18)$$

où $A = \pi d^2/4$ représente la surface frontale que l'on appelle encore maître-couple.
En définitive, on peut écrire (XV,17) sous la forme :

$$\frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_D(Re) \qquad (XV, 19)$$

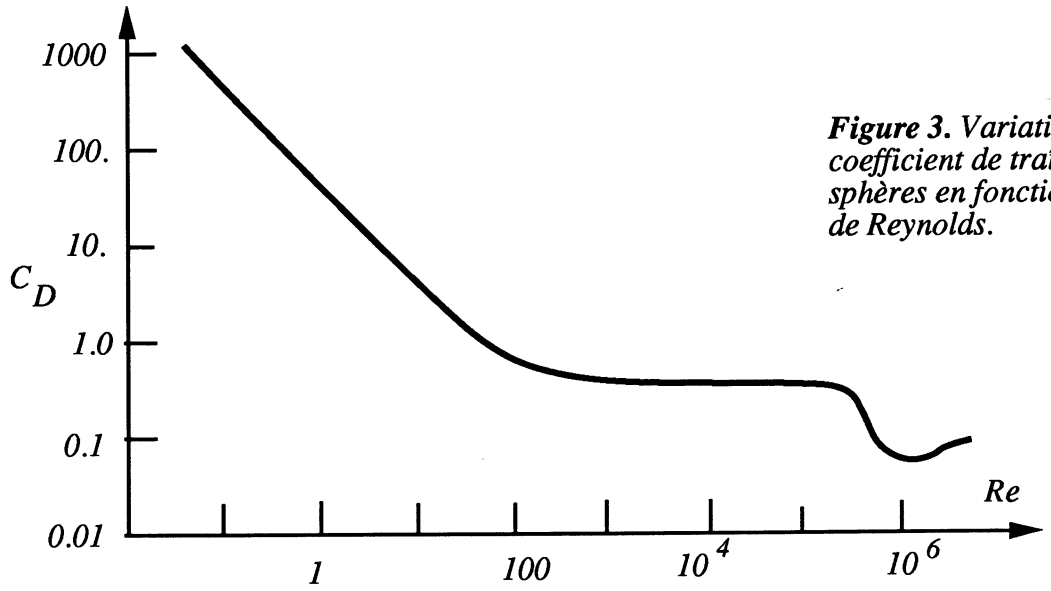


Figure 3. *Variation du coefficient de traînée pour des sphères en fonction du nombre de Reynolds.*

Cette relation indique que le coefficient de traînée de la sphère ne dépend que du nombre de Reynolds. Cette conclusion est effectivement confirmée par des expériences sur des sphères de divers diamètres plongées dans des fluides variés. Le coefficient de traînée apparaît comme une fonction unique du nombre de Reynolds (figure 3).

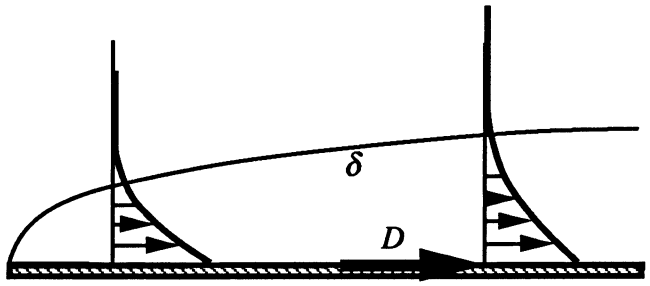


Figure 4. *Une plaque plane avançant à vitesse uniforme dans un fluide au repos.*

XV.4.2. Traînée d'une plaque plane

Considérons maintenant une plaque rectangulaire de longueur l et de largeur b avançant dans un fluide au repos à la vitesse uniforme U. Le vecteur vitesse est parallèle à la plaque et il est dirigé dans le sens de la longueur (figure 4). En s'appuyant sur une analyse semblable à celle effectuée pour la sphère, on peut écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$D = f(l, b, U, \rho, \mu) \qquad (XV, 20)$$

Les deux dimensions de la plaque doivent maintenant intervenir dans la détermination de la traînée.

Les six paramètres en présence peuvent être exprimés en fonction des trois dimensions fondamentales M L et T. Le théorème π indique que dans cette situation il y a 6-3=3 nombres sans dimensions indépendants. On peut par exemple écrire :

$$C_F = \frac{D}{(1/2)\rho U^2 A} = f(Re, \frac{b}{l}) \qquad (XV,21)$$

où Re est basé sur la dimension longitudinale l de la plaque.

Au premier membre, nous avons utilisé la surface de la plaque $A = bl$ de préférence à b^2 ou l^2. On peut, en effet, prévoir que la traînée sera proportionnelle à cette surface.

Le résultat (XV,21) est confirmé par des expériences. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 10^5, le coefficient de frottement dépend du rapport b/l. Si $b/l >> 1$, le coefficient de frottement prend des valeurs proches de celles que l'on trouve dans l'analyse des couches limites laminaires sur une plaque plane (voir chapitre XVII). On trouve dans ce cas :

$$C_F = 1.33/(Re)^{1/2} \qquad (XV,22)$$

Lorsque Re dépasse 10^5, on trouve d'abord une zone de transition dans laquelle C_F prend des valeurs dans une gamme assez large. Au delà de 10^6, le coefficient de frottement ne dépend plus du rapport b/l et suit une loi empirique proposée par Schoenherr :

$$\log_{10}(ReC_F) = 0.242/(C_F)^{1/2} \qquad (XV,23)$$

ce comportement est décrit à la figure 5.

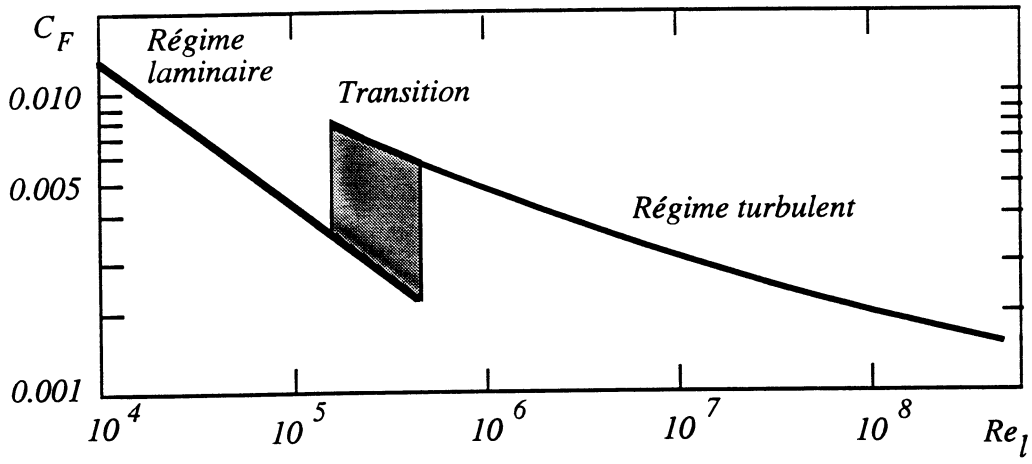


***Figure 5.** Variation du coefficient de frottement pour une plaque plane. Lorsque le nombre de Reynolds dépasse 10^5, le coefficient de frottement ne dépend plus du rapport de l'envergure à la longueur (b/l).*

Application numérique

Un petit dériveur possède une surface mouillée de $7\,m^2$. La longueur du dériveur est $l = 4\,m$. Calculer le coefficient de traînée de frottement et la traînée de frottement pour une vitesse $U = 4\,m/s$. (Pour ce calcul, le dériveur sera assimilé à une plaque plane. On prendra $\mu = 10^{-3}\,kg/m - s$).

Solution

Le nombre de Reynolds est dans la situation envisagée :

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} = \frac{(10^3)(4)(4)}{10^{-3}} = 16.10^6$$

Pour estimer le coefficient de frottement, on peut appliquer la formule de Schoenherr. Pour démarrer l'itération, on peut prendre comme première estimation $C_F = 0.004$. En introduisant cette valeur au premier membre de l'expression (XV,23), on obtient : $(C_F)^{1/2} = 0.242/\log_{10}[(16.10^6)(0.004)]$. On obtient $C_F = 0.0025$. Une deuxième itération conduit à 0.0027. L'itération suivante donne 0.00271, et on peut considérer que c'est la valeur recherchée.

La traînée de frottement correspondante est : $D = \frac{1}{2} C_F \rho U^2 A$, soit :

$$D = (\frac{1}{2})(0.00271)(10^3)(4)^2(7) = 152\,N$$

XV.4.3. Portance et traînée d'une voiture

Les ailes d'un avion, la dérive, les stabilisateurs, la voile d'un navire et sa dérive sont des exemples de surfaces portantes. En général, ses surfaces sont minces et profilées. Lorsqu'on place une surface de ce type dans un écoulement uniforme de vitesse U, sous une incidence α (figure 6), l'écoulement exerce sur la surface une portance L, perpendiculaire à la direction de l'écoulement, et une traînée D dans la direction de l'écoulement. Les dimensions caractéristiques de la surface portante sont sa corde l et son envergure s. Pour simplifier cette analyse, considérons une situation d'écoulement bidimensionnelle et une surface portante d'envergure infinie. Les portance et traînée qui s'exercent dans ce cas sur une portion de surface A sont proportionnelles à A. En général, on peut écrire les relations fonctionnelles suivantes :

$$L = f(l, s, U, \rho, \mu, \alpha), \quad D = g(l, s, U, \rho, \mu, \alpha) \qquad (XV, 24)$$

où α désigne l'incidence.

Dans chacune de ces relations, nous avons 7 variables qui peuvent s'exprimer en fonction des 3 dimensions fondamentales M, L et T. Il y a donc 7-3=4 nombres sans dimensions pour chaque relation :

$$\frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_L(Re, \alpha, \frac{s^2}{A}), \quad \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_D(Re, \alpha, \frac{s^2}{A}) \qquad (XV, 25)$$

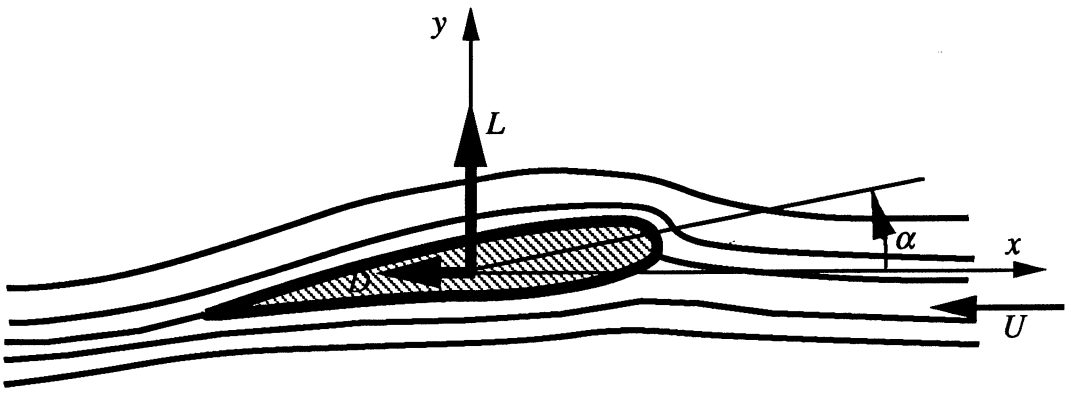


***Figure 6.** Un profil bidimensionnel placé dans un écoulement uniforme.*

Dans ces deux expressions, on a fait apparaître l'allongement s^2/A de la surface portante. Pour un profil bidimensionnel, l'allongement n'intervient pas et on a dans ce cas :

$$\frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_L(Re, \alpha), \quad \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = C_D(Re, \alpha) \qquad (XV, 26)$$

De nombreuses expériences effectuées à basse vitesse montrent la validité des deux relations précédentes.

Les figures 7 et 8 donnent les coefficients de portance et de traînée pour un profil de voilure typique. Pour des valeurs de l'incidence faibles (de l'ordre de quelques degrés), on constate que C_L est indépendant du nombre de Reynolds, $C_L = C_L(\alpha)$. Aux fortes incidences et près du décrochage, la valeur du nombre de Reynolds influence de façon notable le comportement du profil.

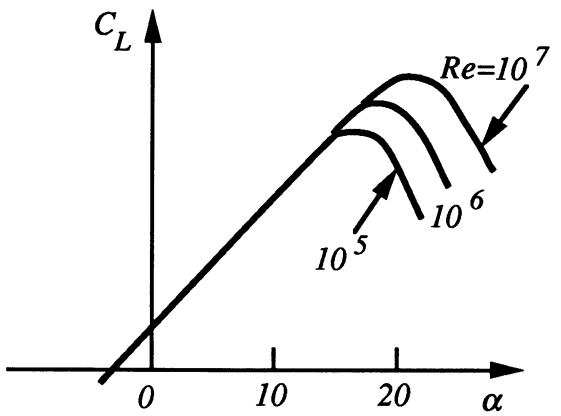


***Figure 7.** Coefficient de portance d'un profil bidimensionnel.*

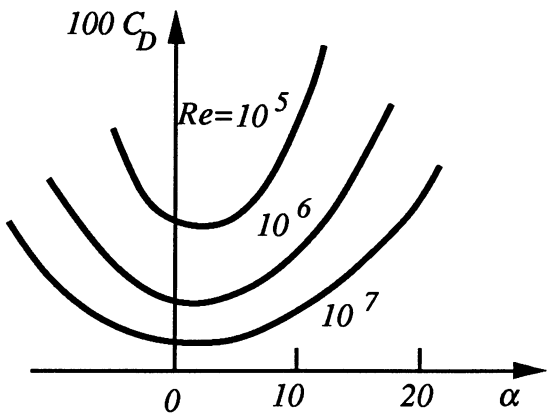


***Figure 8.** Coefficient de traînée d'un profil bidimensionnel.*

Le coefficient de traînée peut être généralement représenté sous la forme :

$$C_D(Re, \alpha) \simeq C_F(Re) + C_I(\alpha) \qquad (XV,27)$$

Le terme $C_I(\alpha)$ représente la traînée associée aux forces de pression et $C_F(Re)$ est la traînée de frottement du profil qui dépend principalement du nombre de Reynolds. Aux grandes vitesses et dans les gaz, les effets de compressibilité deviennent importants et C_L, C_D dépendent aussi du nombre de Mach. (Pour des renseignements plus complets sur les caractéristiques aérodynamiques des profils, on pourra consulter Rebuffet 1966 ou Bertin et Smith 1979).

XV.5. Analyse dimensionnelle des équations de bilan

Il est souvent utile de faire apparaître les produits sans dimensions dans les équations de bilan. Comme les équations de départ sont dimensionnellement homogènes, elles peuvent être réduites sous forme d'équations adimensionnelles faisant intervenir une série complète de produits sans dimensions. Nous allons montrer comment on peut effectuer cette transformation dans le cas d'un fluide incompressible et newtonien. On commence par choisir des paramètres de référence, qui seront désignés par l'indice o. Ainsi $t_o, l_o, v_o, p_o, \mu_o, g_o$ sont respectivement des temps, longueur, vitesse, masse volumique, pression, viscosité et pesanteur de référence. Ces quantités permettent de former les **variables réduites** suivantes :

$$t_* = t/t_o,\ x_* = x/l_o,\ y_* = y/l_o,\ z_* = z/l_o,$$

et :

$$\boldsymbol{v}_* = \boldsymbol{v}/v_o,\ p_* = p/p_o,\ \mu_* = \mu/\mu_o,\ \boldsymbol{g}_* = \boldsymbol{g}/g_o \qquad (XV,28)$$

Il est souvent commode d'utiliser une fréquence de référence inversement proportionnelle au temps t_o : $f_o = 1/t_o$.

Les équations que l'on souhaite écrire sous forme adimensionnelle sont :

$$\nabla.\boldsymbol{v} = 0 \qquad (XV,29)$$

$$\rho(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} + \rho\boldsymbol{g} \qquad (XV,30)$$

Pour introduire les variables réduites dans ces expressions, on note d'abord que les opérateurs ∇ et ∇^2 prennent respectivement pour forme :

$$\nabla = \frac{1}{l_o}(e_1\frac{\partial}{\partial x_*} + e_2\frac{\partial}{\partial y_*} + e_3\frac{\partial}{\partial z_*}) = \frac{1}{l_o}\nabla_* \qquad (XV,31)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{l_o^2}(\frac{\partial^2}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2}) = \frac{1}{l_o^2}\nabla_*^2 \qquad (XV,32)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t_o}\frac{\partial}{\partial t_*}, \qquad \boldsymbol{v}.\nabla\boldsymbol{v} = \frac{v_o^2}{l_o}\boldsymbol{v}_*.\nabla_*\boldsymbol{v}_* \qquad (XV,33)$$

L'équation de continuité (XV,29) s'écrit :

$$(\frac{v_o}{l_o})\nabla_*.\boldsymbol{v}_* = 0 \qquad (XV,34)$$

et, en simplifiant par v_o/l_o, on trouve :

$$\nabla_*.\boldsymbol{v}_* = 0 \qquad (XV,35)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{\rho_o v_o}{t_o}\frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t_*} + \frac{\rho_o v_o^2}{l_o}\boldsymbol{v}_*.\nabla\boldsymbol{v}_* = -\frac{p_o}{l_o}\nabla_* p_* + \frac{\mu_o v_o}{l_o^2}\mu_*\nabla_*^2\boldsymbol{v}_* + \rho_o g_o \boldsymbol{g}_* \qquad (XV,36)$$

En multipliant par $l_o/\rho_o v_o^2$, cette équation s'écrit :

$$(\frac{f_o l_o}{v_o})\frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t_*} + \boldsymbol{v}_*.\nabla_*\boldsymbol{v}_* = -(\frac{p_o}{\rho_o v_o^2})\nabla_* p_* + (\frac{\mu_o}{\rho_o v_o l_o})\mu_*\nabla_*^2\boldsymbol{v}_* + (\frac{g_o l_o}{v_o^2})\boldsymbol{g}_* \qquad (XV,37)$$

Cette expression fait apparaître une série de produits sans dimensions $St = f_o l_o/v_o$, $Eu = p_o/\rho_o v_o^2$, $Re = \rho_o v_o l_o/\mu_o$, $Fr = v_o^2/g_o l_o$ et l'équation (XV,37) s'écrit :

$$St\frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t_*} + \boldsymbol{v}_*.\nabla_*\boldsymbol{v}_* = -Eu\nabla_* p_* + \frac{1}{Re}\mu_*\nabla_*^2\boldsymbol{v}_* + \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}_* \qquad (XV,38)$$

Une légère simplification peut être obtenue en choisissant comme pression de référence $p_o = \rho_o v_o^2$. On a, dans ce cas :

$$St\frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t_*} + \boldsymbol{v}_*.\nabla_*\boldsymbol{v}_* = -\nabla_* p_* + \frac{1}{Re}\mu_*\nabla_*^2\boldsymbol{v}_* + \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}_* \qquad (XV,39)$$

Pour des écoulements stationnaires, le premier terme disparaît et les équations dynamiques écrites en variables réduites ont pour forme :

$$\boldsymbol{v}_*.\nabla_*\boldsymbol{v}_* = -\nabla_* p_* + \frac{1}{Re}\mu_*\nabla_*^2\boldsymbol{v}_* + \frac{1}{Fr}\boldsymbol{g}_* \qquad (XV,40)$$

$$\nabla_*.\boldsymbol{v}_* = 0 \qquad (XV,41)$$

La transformation effectuée ci-dessus fait clairement apparaître l'importance relative des divers termes des équations de bilan.

Des calculs semblables menés dans le cas d'écoulements compressibles conduisent à des équations réduites un peu plus complexes. Il faut, dans ce cas, transformer l'équation de continuité, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et une des équations exprimant le bilan d'énergie.

Si l'on suppose, pour simplifier, que le fluide se comporte comme un gaz parfait et que la viscosité est constante, on obtient après quelques calculs les équations réduites suivantes :

Masse

$$St\frac{\partial \rho_*}{\partial t_*} + \nabla_*.\rho_* v_* = 0 \qquad (XV,42)$$

Quantité de mouvement

$$St\rho_*\frac{\partial \boldsymbol{v}_*}{\partial t_*} + \rho_* \boldsymbol{v}_*.\nabla_* \boldsymbol{v}_* = -\frac{1}{\gamma M^2}\nabla_* p_* + \frac{1}{Re}[\mu_* \nabla_*^2 \boldsymbol{v}_* + \frac{\mu_*}{3}\nabla_*(\nabla_*.\boldsymbol{v}_*)] + \frac{1}{Fr}\rho_* \boldsymbol{g}_* \qquad (XV,43)$$

Energie

$$\rho_* c_{p*}[St\frac{\partial T_*}{\partial t_*} + \boldsymbol{v}_*.\nabla_* T_*] = \frac{1}{RePr}\nabla_*.(k_*\nabla_* T_*) - \frac{\gamma - 1}{\gamma} p_* \nabla_*.\boldsymbol{v}_* + (\gamma - 1)\frac{M^2}{Re}\phi_{v*} \qquad (XV,44)$$

Dans la dernière équation, ϕ_v désigne la fonction de dissipation visqueuse ($\phi_v = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{v}$).

Les équations réduites font maintenant intervenir les nombre de Reynolds, Froude, Strouhal, Mach et Prandtl.

XV.6. Similitude

La question de la similitude entre un modèle à échelle réduite et un prototype (un système en vraie grandeur) peut être examinée à l'aide des méthodes de l'analyse dimensionnelle.

Au préalable, il est utile de se livrer à quelques considérations générales sur les essais sur maquette et leurs applications pratiques.

Un essai sur modèle réduit est souvent envisagé lorsqu'on doit étudier un problème compliqué et que l'on souhaite éviter des études coûteuses en vraie grandeur. La mise au point et l'optimisation d'un système par une étude sur modèle réduit est plus commode et moins chère. Le recours à une maquette n'est d'ailleurs pas toujours la meilleure solution et il faut d'abord se demander si des études théoriques et numériques ne peuvent pas donner à un moindre coût les réponses recherchées.

Dans l'interprétation des résultats d'essais à échelle réduite, on doit se garder de faire une transposition directe à l'échelle 1. Les maquettes ne reproduisent pas exactement les phénomènes que l'on pourra observer sur le prototype en vraie grandeur. Les différences sont liées à des défauts de similitude qui sont inhérents à la réduction d'échelle. On dit qu'il y a "**effet d'échelle**".

Malgré ces difficultés, les essais sur modèles sont nécessaires dans un grand nombre d'applications technologiques. Ce type d'essai est couramment pratiqué dans le domaine de

l'hydraulique pour l'étude de barrages, de canaux, d'aménagements côtiers. Des modèles permettent aussi d'envisager l'interaction entre la houle et des structures marines comme les plate-formes de forage pétroliers, les jetées, les ports ou les navires.

Dans le domaine aérospatial, les essais en soufflerie restent un élément indispensable de la conception des avions, des hélicoptères, des missiles ou des fusées. On étudie sur maquette les coefficients aérodynamiques, le comportement aux grandes incidences, le flottement aéroélastique, etc.

Dans le domaine du génie des procédés, l'essai sur modèle des réacteurs chimiques fait partie de la pratique courante. Les effets d'échelle sont particulièrement sensibles dans ce contexte; on est ainsi souvent amené à construire des modèles à plusieurs échelles pour s'assurer que le prototype aura le comportement souhaité. Après ce bref panorama, nous pouvons maintenant examiner les conditions de similitude.

XV.6.1. Géométrie des maquettes

Si les formes de la maquette et du prototype sont homothétiques, on dit que les deux systèmes sont géométriquement semblables. Cette similitude est généralement adoptée dans la plupart des modèles. On trouve cependant des situations dans lequelles la similitude géométrique ne peut être totalement respectée. C'est le cas, par exemple, des maquettes utilisées pour étudier les aménagements côtiers ou les systèmes hydrauliques de grande dimension, une similitude géométrique complète conduirait à des hauteurs d'eau de l'ordre du *cm*. Dans cette situation, l'écoulement serait fortement perturbé par les forces de tension superficielle. Pour éviter cette difficulté, les modèles hydrauliques sont généralement distordus avec des rapports d'échelle différents dans les directions horizontale et verticale. L'interprétation des essais doit être effectuée dans ce cas en tenant compte des distorsions introduites sur maquette.

Lorsque la similitude géométrique est respectée, la mesure en un point de la maquette peut être directement transposée au point correspondant sur le prototype à l'échelle 1. Il faut cependant que les conditions de similitude entre la maquette et le prototype soient respectées.

XV.6.2. Conditions de similitude

Les conditions qui assurent la similitude entre un modèle et le système à l'échelle 1, peuvent être directement déduites du théorème π. Ce théorème indique en effet qu'un phénomène physique dépendant d'un ensemble de variables indépendantes $q_1 \dots q_n$ peut être caractérisé par une relation entre une série de produits sans dimensions $\pi_1 \dots \pi_r$:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2 \dots \pi_r) = 0 \qquad (XV,45)$$

La similitude entre la maquette et le prototype sera donc assurée si tous les nombres sans dimensions $\pi_1 \dots \pi_r$ ont les mêmes valeurs à échelle réduite et à l'échelle 1.

On peut aboutir à la même conclusion en examinant les équations de bilan écrites sous forme adimensionnelle. Considérons, pour fixer les idées, des écoulements permanents de

fluides incompressibles dans deux systèmes géométriquement semblables et admettons que les conditions aux limites soient les mêmes dans les deux configurations (figure 9).

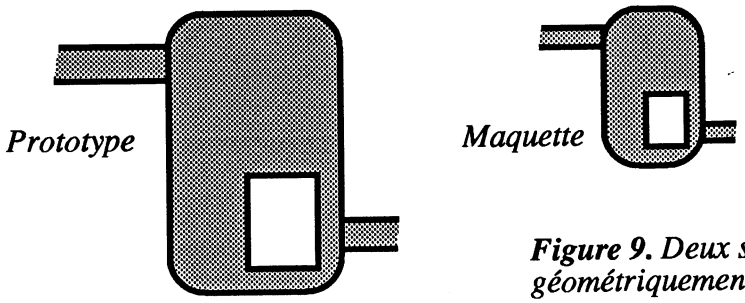


***Figure 9.** Deux systèmes géométriquement semblables.*

Les équations qui décrivent le mouvement ont pour forme :

$$\nabla_* . \boldsymbol{v}_* = 0$$

$$\rho_* \boldsymbol{v}_* . \nabla_* \boldsymbol{v}_* = -\nabla_* p_* + \frac{1}{Re} \nabla_*^2 \boldsymbol{v}_* + \frac{1}{Fr} \boldsymbol{g}_*$$

Si les groupes sans dimensions gardent la même valeur sur la maquette et sur le prototype, c'est-à-dire si $(Re)_1 = (Re)_2$ et $(Fr)_1 = (Fr)_2$, les équations du mouvement seront parfaitement identiques dans les deux cas.

Les distributions de pression et de vitesse réduites seront par conséquent les mêmes sur la maquette et sur le prototype :

$$[p_*(\boldsymbol{x}_*)]_1 = [p_*(\boldsymbol{x}_*)]_2,$$

$$[\boldsymbol{v}_*(\boldsymbol{x}_*)]_1 = [\boldsymbol{v}_*(\boldsymbol{x}_*)]_2,$$

XV.6.3. Conditions de similitude pour les écoulements de fluides incompressibles

Les écoulements de fluides incompressibles font généralement intervenir les nombres de Reynolds et de Froude. La similitude dynamique est assurée si ces deux nombres gardent les mêmes valeurs sur la maquette et sur le prototype.

Il est cependant utile de distinguer deux cas :

• Lorsque l'écoulement ne présente pas de surface libre (écoulements internes dans des réseaux de tuyauteries), les forces de pesanteur peuvent être regroupées dans les équations du mouvement avec les forces de pression. La "charge hydraulique" $p_o = p + \rho g z$ peut alors être utilisée comme nouvelle variable à la place de la pression, la pesanteur n'intervient plus de façon explicite et il n'est plus nécessaire de considérer le nombre de Froude pour assurer la similitude.

• Si l'écoulement présente une surface libre dont la position est variable, on ne peut plus considérer que la somme $p + \rho g z$ forme un seul groupe; il faut alors conserver les nombres

de Reynolds et de Froude pour réaliser la similitude dynamique entre la maquette et le prototype. Si les phénomènes étudiés sont influencés par les forces de tension superficielle, il faut aussi conserver le nombre de Weber.

Les deux exemples suivants illustrent cette discussion.

Exemple 1 : Perte de charge dans un diffuseur.

On souhaite étudier, à l'aide d'une maquette à l'échelle 1/10, la perte de charge associée au diffuseur de la figure 10. Le diamètre d'entrée et la longueur du diffuseur sont respectivement $d_1 = 0.5\,m$, $l_1 = 3\,m$. La vitesse nominale en entrée du diffuseur est $v_1 = 2\,m/s$. Préciser les conditions de similitude et déterminer la perte de charge attendue sur le prototype si la perte de charge mesurée sur la maquette est $\Delta p_2 = 0.2\,bar$.

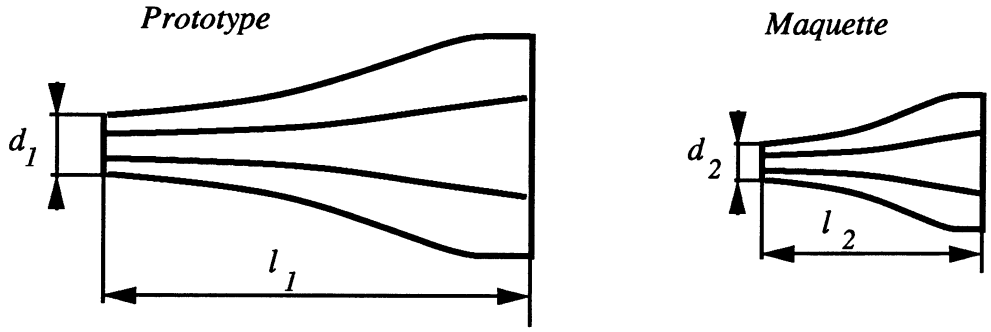


Figure 10. Prototype et maquette d'un diffuseur.

Solution

Pour cette étude, on adopte une maquette géométriquement semblable au prototype. Les dimensions de la maquette sont $d_2 = 0.05\,m$ et $l_2 = 0.30\,m$. La perte de charge produite par le diffuseur est fonction d'une longueur et d'une vitesse typiques, de la masse volumique et de la viscosité de fluide. On peut écrire la relation générale $f(\Delta p, d, \rho, \mu, v) = 0$.

Les cinq paramètres dépendent de trois dimensions fondamentales, il y a donc deux nombres sans dimensions indépendants et on peut écrire :

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \varphi(\frac{\rho v d}{\mu})$$

La similitude entre la maquette et le prototype peut donc être assurée en gardant la même valeur pour le nombre de Reynolds : $Re_1 = Re_2$ soit $\frac{\rho_1 v_1 d_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 d_2}{\mu_2}$. Si le même liquide est utilisé à échelle réduite et à l'échelle 1, on devra faire fonctionner la maquette à une vitesse $v_2 = v_1 \frac{d_1}{d_2}$

Pour une vitesse nominale $v_1 = 2\,m/s$, on aura $v_2 = 20\,m/s$.

Les coefficients de pression sur la maquette et sur le prototype sont identiques et par conséquent :

$$\frac{\Delta p_1}{\rho_1 v_1^2} = \frac{\Delta p_2}{\rho_2 v_2^2}$$

Cette relation permet la détermination de la perte de charge Δp_1 à partir de la mesure de Δp_2 :

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 (\frac{v_1}{v_2})^2 = \Delta p_2 (\frac{d_2}{d_1})^2$$

Ici :

$$\Delta p_1 = (0.2)(0.1)^2 = 0.002\, bar$$

Exemple 2: Poussée d'une hélice marine.

On souhaite étudier sur maquette à l'échelle 1/10 la poussée d'une hélice de navire de surface. Le prototype présente un diamètre $d_1 = 4\,m$ et doit tourner à une vitesse $N_1 = 3$ tours par seconde. La vitesse nominale du navire est $v_1 = 6\,m/s$. Déterminer les conditions de similitude et calculer les caractéristiques de l'essai sur maquette.

Solution

Les paramètres à prendre en compte sont la poussée de l'hélice F, le diamètre typique d, la vitesse de rotation N, la vitesse d'avancement v, la masse volumique ρ, la viscosité μ et la pesanteur g. On peut écrire une relation générale $f(F, v, N, d, \rho, \mu, g) = 0$. Les sept paramètres qui viennent d'être cités dépendent de trois dimensions fondamentales; on peut donc former quatre produits sans dimensions indépendants :

$Fr = \frac{v^2}{gd}$, $Re = \frac{\rho v d}{\mu}$, $\frac{v}{Nd}$, $\frac{F}{\rho v^2 d^2}$.

La poussée de l'hélice est ainsi déterminée par :

$$\frac{F}{\rho v^2 d^2} = \varphi(Fr, Re, \frac{v}{Nd})$$

Pour obtenir une similitude complète, il faudrait conserver les valeurs des nombres de Froude, de Reynolds et du groupe v/Nd.

On s'aperçoit rapidement qu'il est, en fait, très difficile de garder des valeurs constantes pour les nombres de Froude et de Reynolds. Il faut alors adopter une similitude partielle. dans le cas envisagé ici. On sait que le nombre de Reynolds joue un rôle secondaire.

Ce nombre pourra donc prendre une valeur différente sur la maquette et sur le prototype. Il faudra cependant vérifier que la variation du nombre de Reynolds n'affecte pas la représentativité des essais.

La conservation du nombre de Froude et du paramètre v/Nd conduit aux relations suivantes :

$$\frac{v_1^2}{gd_1} = \frac{v_2^2}{gd_2}, \quad \frac{v_1^2}{N_1 d_1} = \frac{v_2^2}{N_2 d_2}$$

On déduit de ces deux relations la vitesse d'avancement de la maquette : $v_2 = v_1 (\frac{d_2}{d_1})^{1/2}$ et la vitesse de rotation du modèle d'hélice : $N_2 = N_1 (\frac{d_1}{d_2})(\frac{v_2}{v_1}) = N_1 (\frac{d_1}{d_2})^{1/2}$.

Pour une maquette à l'échelle 1/10, on prendra : $v_2 = (6)(0.1)^{1/2} = 1.89\,m/s$, $N_2 = (3)(10)^{1/2} = 9.48\,\text{tours}/s$

Les nombres de Reynolds sur la maquette et à l'échelle 1 seront alors dans un rapport :

$$\frac{(Re)_2}{(Re)_1} = \frac{v_2 d_2}{v_1 d_1} = (\frac{d_2}{d_1})^{3/2}$$

Ici $(Re)_2 = 0.03(Re)_1$. La réduction du nombre de Reynolds est assez importante.

La poussée du prototype pourra être déduite de celle mesurée sur la maquette en écrivant l'égalité des coefficients de poussée : $\frac{F_2}{\rho v_2^2 d_2^2} = \frac{F_1}{\rho v_1^2 d_1^2}$, soit :

$$\frac{F_1}{F_2} = (\frac{v_1}{v_2})^2 (\frac{d_1}{d_2})^2 = (\frac{d_1}{d_2})^3$$

On aura donc : $F_1 = 10^3\, F_2$.

XV.6.4. Conditions de similitude pour les écoulements de fluides compressibles

Pour les écoulements de fluides compressibles, on peut souvent négliger les forces de pesanteur, et il n'est plus nécessaire de conserver la valeur du nombre de Froude. (Notons cependant que les forces de pesanteur doivent être prises en compte si l'on s'intéresse à des écoulements atmosphériques à grande échelle).

Pour maintenir la similitude dynamique, il faut maintenant tenir compte des effets de compressibilité. On doit alors faire intervenir le nombre de Mach. La similitude complète sera obtenue en conservant les valeurs des nombres de Mach et de Reynolds.

En pratique, il est rarement possible de construire des maquettes de taille raisonnable tout en gardant des valeurs correctes pour ces deux nombres. Lorsque le nombre de Mach est faible, son influence est faible et elle peut être prévue théoriquement. On peut alors chercher à conserver la valeur du nombre de Reynolds.

Aux vitesses élevées, les effets de compressibilité sont prépondérants et il faut conserver le nombre de Mach tout en gardant une valeur convenable pour le nombre de Reynolds. Comme la diminution en taille de la maquette par rapport au prototype conduit à une réduction du nombre de Reynolds, on est conduit à opérer à pression plus élevée ou à plus basse température pour retrouver une valeur convenable de Re. Ces considérations expliquent l'utilisation de souffleries pressurisées ou cryogéniques pour les études d'aérodynamique transsonique.

ANNEXE A

PRINCIPAUX NOMBRES SANS DIMENSIONS

Nombre de Froude $Fr = v^2/gl$

Le nombre de Froude caractérise le rapport entre les forces d'inertie et les forces volumiques associées au champ de pesanteur. Ce nombre intervient par exemple dans l'étude d'écoulements à surface libre.

Nombre de Reynolds $Re = \rho vl/\mu$

Le nombre de Reynolds compare les forces d'inertie aux forces de viscosité. Aux faibles nombres de Reynolds, les forces visqueuses jouent un rôle important. Aux grands nombres de Reynolds, les forces d'inertie sont dominantes.

Nombre de Mach $M = v/c$

Le carré du nombre de Mach est proportionnel au rapport de l'énergie cinétique par unité de masse à l'énergie interne par unité de masse. Le nombre de Mach joue un rôle central dans l'analyse des écoulements compressibles.

Nombre de Strouhal $St = fl/v$

Le nombre de Strouhal compare les quantité d'accélération instationnaire et convective. Ce produit sans dimensions apparaît dans l'étude d'écoulements instationnaires.

Nombre de Prandtl $Pr = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\mu c_p}{k}$

Dans ce produit sans dimensions, ν est la viscosité cinématique, α désigne la diffusivité thermique $\alpha = k/\rho c_p$ où c_p est la chaleur massique, et k représente la conductivité thermique.

Le nombre de Prandtl compare les transferts de quantité de mouvement associés aux forces visqueuses aux transferts de chaleur par conduction.

Nombre de Nusselt $Nu = hl/k$

Dans cette expression, h représente le coefficient de transfert de chaleur par convection, défini par une relation de la forme $q = h\Delta T$.

Le nombre de Nusselt compare les transferts de chaleur convectif et conductif vers une paroi.

Nombre de Schmidt $Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D}$

Dans l'expression du nombre de Schmidt, D représente la diffusivité moléculaire d'une espèce. Le nombre de Schmidt compare les transferts de quantité de mouvement, associés aux forces visqueuses, aux transferts de masse par diffusion moléculaire. Ce nombre intervient dans les études de mélange et de transferts de masse.

Nombre de Lewis $Le = \frac{\alpha}{D} = \frac{k}{\rho c_p D}$

Le nombre de Lewis compare les transferts de chaleur par conduction aux transferts de masse par diffusion. Ce nombre joue un rôle fondamental en théorie de la combustion.

Nombre de Peclet $Pe = \frac{lv}{\alpha} = \frac{\rho c_p l v}{k}$

Le nombre de Peclet compare les transferts de chaleur convectif et conductif au sein d'un écoulement. Ce nombre peut être exprimé en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl : $Pe = RePr$.

Nombre de Stanton $St = h/\rho c_p v$

Dans l'expression du nombre de Stanton, h désigne le coefficient de transfert de chaleur convectif vers une paroi. Ce nombre compare les transferts de chaleur convectifs vers une paroi aux transferts de chaleur au sein de l'écoulement. Le nombre de Stanton peut être exprimé en fonction des nombres sans dimensions définis précédemment : $St = Nu/(RePr)$.

Nombre de Grashof $Gr = \frac{gl^3 \beta \Delta T}{\nu^2}$

Dans cette expression, ΔT représente une différence de température (par exemple entre le fluide et une paroi) et β désigne le coefficient de dilatation $\beta = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})$. Le nombre de Grashof compare les forces d'Archimède (ou forces de flottabilité) aux forces visqueuses qui s'exercent sur un élément de fluide dont la température diffère de celle du milieu environnant.

Nombre de cavitation $Nc = \frac{p - p_s}{\frac{1}{2}\rho v^2}$

Ce nombre compare la différence entre la pression statique et la pression de vapeur saturante à l'énergie cinétique du fluide. Lorsque ce nombre prend des valeurs faibles, le fluide se rapproche des conditions qui induisent la cavitation (la formation de poches de vapeur au sein du liquide en écoulement).

Nombre de Weber $We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$

Dans cette expression, σ représente la tension superficielle et correspond à une énergie par unité de surface. Le nombre de Weber compare l'énergie cinétique par unité de volume aux forces de pression associées à la tension superficielle.

Nombre d'Euler $Eu = \frac{p - p_o}{\rho v^2}$

Ce nombre compare les forces de pression à l'énergie cinétique du fluide par unité de volume.

Coefficient de pression $C_p = \dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v^2}$

Ce coefficient compare une différence de pression à l'énergie cinétique par unité de volume.

Coefficient de frottement local $C_f = \dfrac{\tau_w}{1/2\rho v^2}$

Ce coefficient compare la contrainte pariétale τ_w à l'énergie cinétique par unité de volume.

Coefficient de traînée $C_D(ouC_x) = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}$

Dans cette expression, D représente une force de traînée et A désigne une surface de référence.

Le coefficient de traînée compare la traînée à une force hydrodynamique de référence $((1/2)\rho v^2 A)$.

Coefficient de portance $C_L(ouC_z) = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}$

Le coefficient de portance compare la force de portance L (encore appelée force de sustentation) à une force hydrodynamique de référence.

Coefficient de moment $C_M = \dfrac{M}{\frac{1}{2}\rho v^2 Al}$

Le coefficient de moment compare le moment qui s'exerce sur un corps à un moment hydrodynamique de référence.

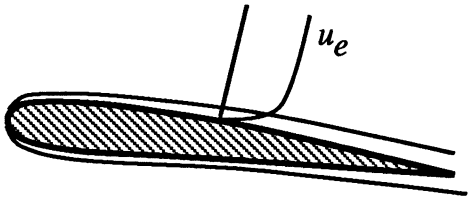
CHAPITRE XVI

INTRODUCTION A LA THEORIE DE LA COUCHE LIMITE

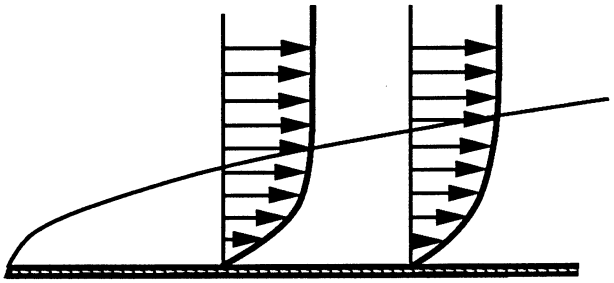
XVI.1. Les couches de cisaillement dans les fluides en écoulement

Les transferts de quantité de mouvement s'effectuent dans les fluides en écoulement laminaire par l'intermédiaire des forces de pression et des contraintes visqueuses. Nous avons jusqu'ici principalement étudié le mouvement de fluides en l'absence de contraintes visqueuses. Cette idéalisation nous a permis d'établir un grand nombre de résultats d'intérêt pratique. Cependant, dans beaucoup de problèmes, il n'est plus possible de négliger les effets de la viscosité et c'est ce type de situation que nous allons maintenant envisager. Notre analyse va porter d'abord sur des zones dans lesquelles le cisaillement des particules fluides est important. Nous verrons que ces régions sont souvent d'épaisseur faible. Cette propriété sert de base à la théorie de la couche limite, mais elle est aussi utile à l'analyse de nombreux types d'écoulements et elle permet en particulier l'étude d'écoulements cisaillés.

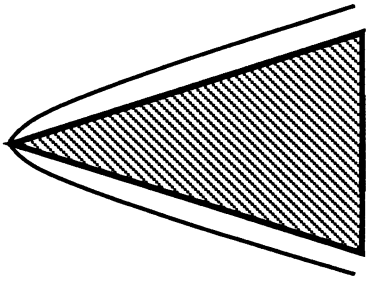
L'exemple le plus simple de couche de cisaillement est celui de la couche limite qui se développe à proximité d'une surface solide plongée dans un écoulement (figure 1). A la surface du profil, la vitesse du fluide est ramenée à zéro, car il n'y a pas de glissement à la paroi et les particules fluides adhèrent à celle-ci. A la limite externe de la couche limite, la vitesse tend vers une valeur finie qui est approximativement celle d'un écoulement dénué de viscosité autour du même profil. L'épaisseur de la couche limite est généralement faible et par conséquent le gradient de vitesse est important dans cette région et les particules fluides subissent un taux de cisaillement élevé. La structure de la couche limite est déterminée dans ce cas par la compétition entre les forces d'inertie, les forces de pression et les contraintes visqueuses.



Couche limite au voisinage d'un profil plongé dans un écoulement. Pour plus de clarté, l'épaisseur de la couche limite est exagérée. Dans la plupart des cas pratiques, l'épaisseur de la couche limite est de quelques mm.

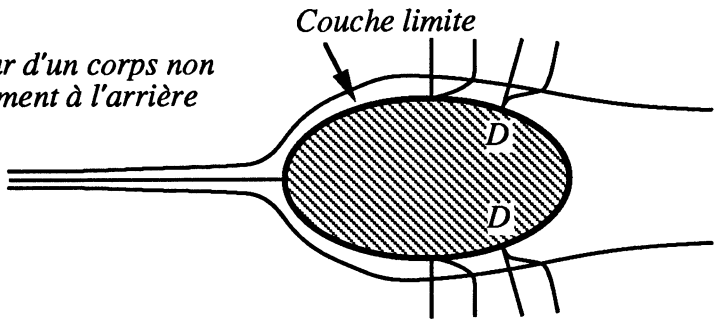


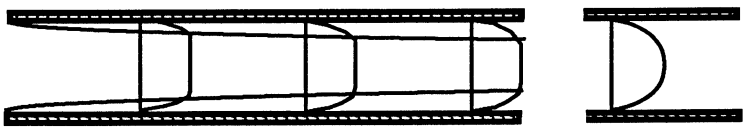
Couche limite sur une plaque plane.



Couche limite autour d'un corps de forme conique.

Couche limite autour d'un corps non profilé avec décollement à l'arrière de l'obstacle.





Couches limites formées par l'écoulement initial dans un conduit. Après une certaine distance, les deux couches limites se rejoignent et l'écoulement dans le conduit est pleinement développé.

Figure 1. *Quelques types de couches limites.*

Un autre exemple de couche de cisaillement est constitué par la zone de mélange formée par deux courants de fluide de vitesse différente (figure 2). L'épaisseur de la zone de mélange est faible et le gradient transversal de vitesse dans cette région est important. Il y a une accélération progressive du fluide le plus lent et une décélération simultanée du fluide le plus rapide tandis que l'épaisseur de la zone de mélange augmente dans la direction de l'écoulement. Lorsque la zone de mélange est turbulente, les expériences montrent que son épaisseur évolue proportionnellement à la distance ($\delta \sim ax$ où a est de l'ordre de 0.12 à 0.17 pour des écoulements incompressibles ou faiblement compressibles).

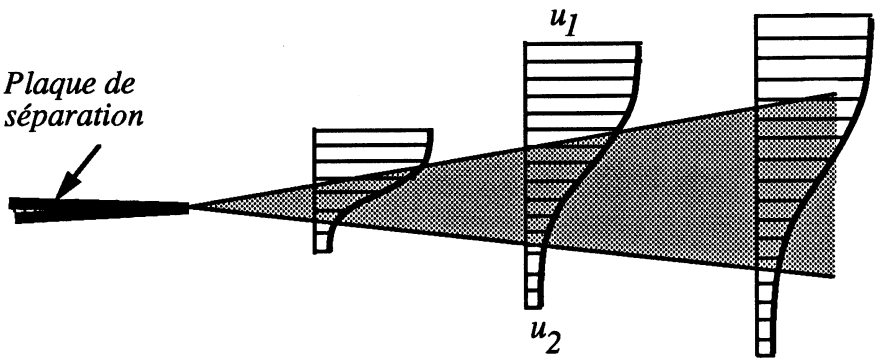


***Figure 2.** Zone de mélange formée à la confluence de deux écoulements parallèles de vitesse différente.*

Une troisième classe d'écoulements cisaillés est celle des jets libres (figure 3). Le jet est généralement issu d'une tuyère et pénètre dans un milieu ambiant qui peut être au repos ou en mouvement. Une zone de mélange se forme à la frontière du jet. L'épaisseur de cette zone augmente dans la direction axiale. Plus en aval, les zones de mélange se rejoignent et un profil **établi** résulte de cette rencontre. La dimension transversale de ce profil augmente en même temps que le jet se mélange avec le fluide externe.

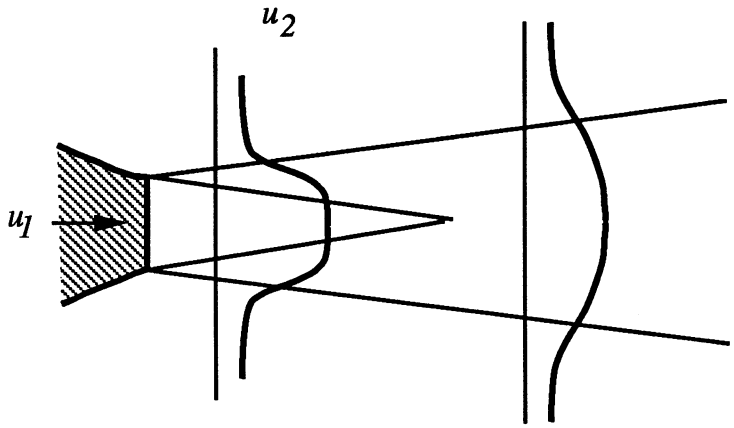


***Figure 3a).** Jet libre formé en sortie d'une tuyère.*

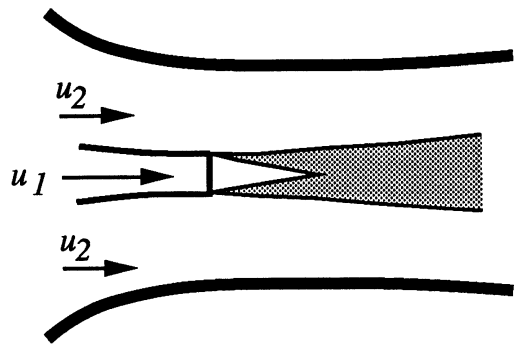


***Figure 3b).** Jet confiné à l'intérieur d'un éjecteur.*

Les sillages formés derrière un obstacle ou un profil plongé dans un écoulement constituent un quatrième type d'écoulement cisaillé (figure 4). Aux frontières du sillage, la vitesse est celle de l'écoulement libre. Sur l'axe du sillage, la vitesse est réduite par la présence de l'obstacle solide. Il y a un "défaut"de vitesse dans cette région. Le sillage est souvent caractérisé par une faible épaisseur transversale et le défaut de vitesse peut être important. Dans cette situation, le taux de cisaillement à l'intérieur du sillage atteint des valeurs élevées.

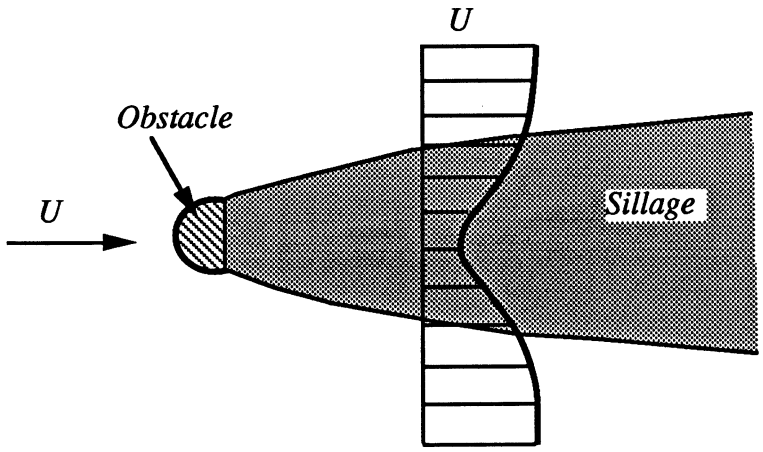


***Figure 4.** Sillage formé derrière un corps non profilé. A l'intérieur du sillage la vitesse passe par un minimum.*

Les couches limites pariétales, les zones de mélange, les jets libres et les sillages appartiennent à la même famille d'écoulements et leur analyse peut être effectuée avec les mêmes approximations. Les équations qui régissent ces écoulements sont déduites des équations générales en supposant que l'épaisseur transversale δ est faible par rapport à une dimension longitudinale typique l. Dans cette situation, les vitesses transverses sont d'un ordre de grandeur inférieur à celui des vitesses longitudinales et les gradients transverses sont d'un ordre de grandeur plus important que les gradients longitudinaux. Les simplifications que l'on obtient dans ces conditions sont notables. Nous verrons plus loin que l'équation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe longitudinal devient parabolique, c'est-à-dire qu'elle ne fait plus intervenir que des dérivées premières suivant cette direction. L'équation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe transverse prend une forme simple directement intégrable. Comme la résolution de problèmes paraboliques est beaucoup plus facile que celle des problèmes aux limites elliptiques posés par les équations de Navier-Stokes complètes, l'approximation de couche limite offre une grande utilité pratique.

L'analyse des écoulements cisaillés que nous avons mentionnés peut être effectuée dans ce cadre général. Cependant, pour cette première introduction, nous considérerons uniquement les couches limites pariétales. Pour être plus simple encore, l'analyse sera effectuée en supposant l'écoulement laminaire, stationnaire, incompressible bidimensionnel et la paroi sera une plaque plane. Toutes ces hypothèses peuvent être levées et l'étude de couches limites compressibles, instationnaires, turbulentes dans des configurations très variées a fait l'objet de nombreux travaux théoriques, numériques et expérimentaux. L'état de l'art jusqu'à la fin des années 1960 est bien représenté par un livre classique du à Schlichting 1968. Des exposés plus modernes mettant l'accent sur les méthodes numériques sont proposés dans deux livres remarquables écrits par Cebeci et Bradshaw 1977, 1984.

Avant d'aborder les aspects plus théoriques, nous allons maintenant poursuivre cette introduction par un exposé qualitatif du concept de couche limite (section 2) et par des estimations a priori basées sur l'analyse dimensionnelle (section 3). Les échelles caractéristiques de la couche limite sont définies dans la section 4. Les problèmes de décollement de couche limite et de transition vers la turbulence sont ensuite rapidement évoqués (sections 5 et 6). L'étude théorique de la couche limite est effectuée aux chapitres XVII et XVIII.

XVI.2. Le concept de couche limite

La plupart des écoulements autour d'obstacles ou de corps profilés s'effectuent à des nombres de Reynolds relativement élevés. Dans cette situation, l'observation expérimentale montre que le champ d'écoulement peut être divisé en deux régions : (1) une couche limite adjacente aux surfaces solides et dans laquelle les forces de viscosité jouent un rôle important, (2) un domaine extérieur à la couche limite dans lequel le fluide en écoulement peut être considéré comme dénué de viscosité.

Une situation typique est représentée à la figure 5. La couche limite s'établit au voisinage immédiat du profil. Dans cette région, la vitesse varie rapidement, d'une valeur nulle à la paroi, elle retrouve sa valeur dans l'écoulement externe. Cette variation s'effectue sur une distance faible égale à l'épaisseur de la couche limite qui est typiquement de l'ordre de quelques mm, et de ce fait le gradient de vitesse prend des valeurs élevées à l'intérieur de cette région. Il en résulte que les contraintes visqueuses sont aussi importantes dans cette zone.

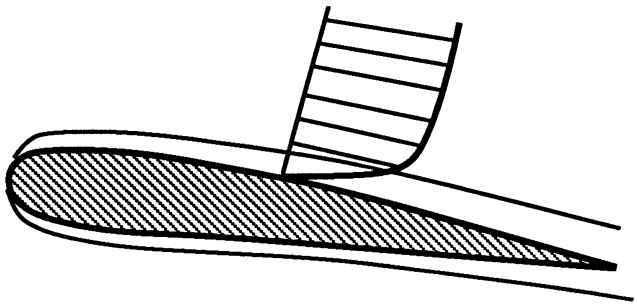
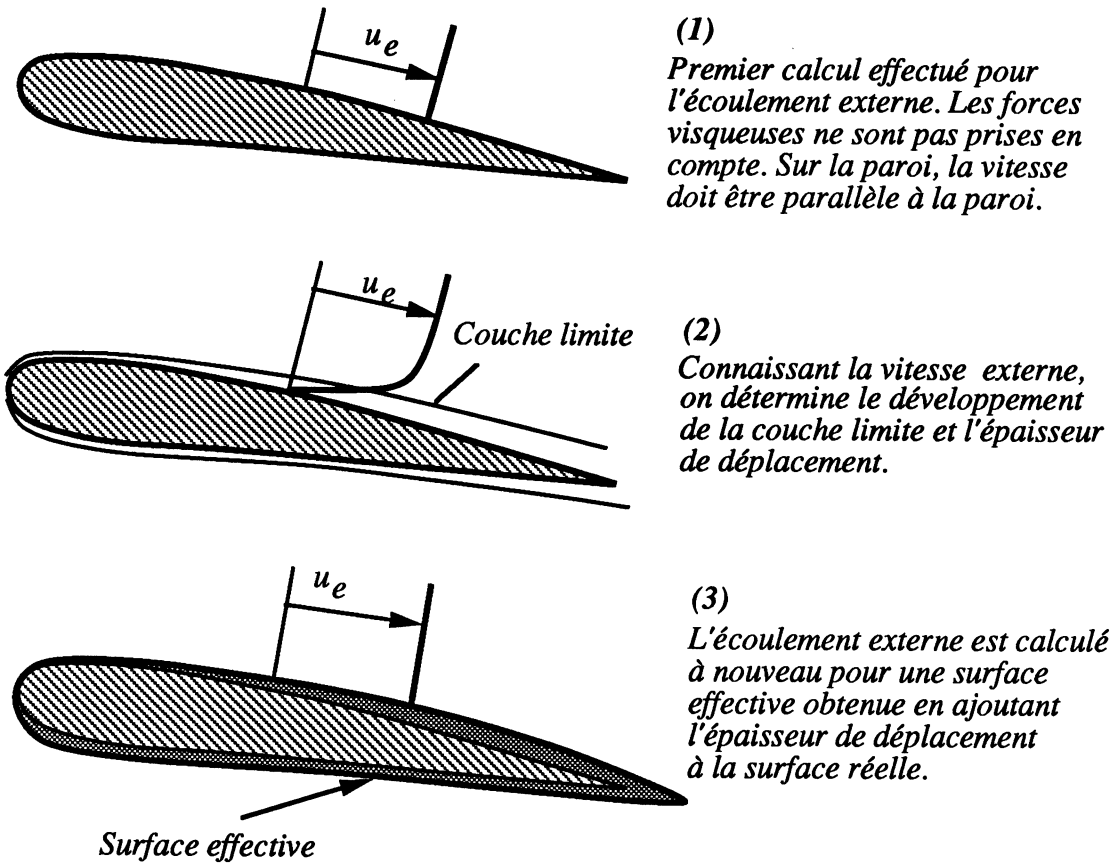


***Figure 5.** La couche limite se développe au voisinage immédiat du profil.*

Dans le domaine extérieur, le gradient transversal de vitesse devient faible et les contraintes visqueuses sont négligeables. Dans cette région, on peut ignorer ces forces et calculer l'écoulement externe comme celui d'un fluide dénué de viscosité.

La décomposition de l'écoulement en deux régions permet d'utiliser une procédure de calcul particulièrement commode. On commence par déterminer l'écoulement externe en supposant que celui-ci s'étend jusqu'à la paroi solide. Sur la paroi, il faut que la composante de vitesse normale s'annule, la composante de vitesse tangentielle pouvant prendre des valeurs arbitraires. (Cette condition exprime que le débit masse au travers de la paroi solide est nul. La condition d'adhérence imposerait une vitesse identiquement nulle à la

paroi et serait incompatible avec l'utilisation du modèle de fluide parfait pour le calcul de l'écoulement externe). Après avoir déterminé l'écoulement externe, on peut calculer le développement de la couche limite. Ce calcul permet la détermination de l'épaisseur de déplacement (une définition précise de cette quantité sera donnée plus loin). On peut alors recommencer un autre calcul de l'écoulement externe en utilisant comme nouvelle surface solide la surface obtenue en ajoutant à la surface réelle l'épaisseur de déplacement. La procédure que nous venons de décrire est schématisée à la figure 6.



***Figures 6.** Principe du calcul couplé Euler-couche limite.*

Le concept de couche limite introduit par Ludwig Prandtl en 1904 joue, depuis cette date, un rôle majeur en mécanique des fluides. Il permet une simplification considérable de l'analyse des problèmes d'écoulement. Une formalisation du concept de couche limite a été développée plus récemment dans le cadre théorique de la méthode des développements asymptotiques raccordés (voir par exemple les livres de Cole 1968 et Van Dyke 1975).

XVI.3. Estimations de quelques grandeurs caractéristiques

Nous allons d'abord donner une estimation de l'épaisseur de la couche limite laminaire.

Cette première évaluation est fondée sur une analyse dimensionnelle des forces qui interviennent dans le bilan de quantité de mouvement. La configuration étudiée est schématisée à la figure 7. La couche limite occupe la région adjacente à la plaque plane. Il s'agit d'une couche très mince dont l'épaisseur δ varie avec la position longitudinale x. L'écoulement est caractérisé par deux échelles : δ dans la direction transversale et l dans la direction axiale. La vitesse typique U est la vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite.

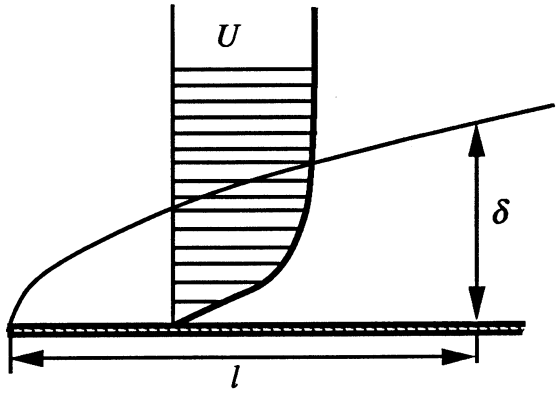


***Figure 7.** Couche limite sur une plaque plane. La frontière de la couche limite est à une distance δ de la plaque.*

Considérons d'abord les forces d'inertie. Par unité de volume, ces forces sont de la forme : $\rho u \partial u/\partial x$. Pour une plaque plane de longueur l, le gradient de vitesse $\partial u/\partial x$ peut être estimé par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{l} \qquad (XVI,1)$$

Dans ces conditions, les forces d'inertie par unité de volume ont pour ordre de grandeur :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{U^2}{l} \qquad (XVI,2)$$

Considérons maintenant les forces associées aux contraintes visqueuses. Par unité de volume, ces forces ont pour forme typique $\partial \tau_{xy}/\partial y$. En écoulement laminaire et pour un fluide newtonien et incompressible, ce terme s'exprime sous la forme $\mu \partial^2 u/\partial y^2$. Si δ désigne l'épaisseur de la couche limite, une estimation des forces visqueuses par unité de volume est : $\partial \tau_{xy}/\partial y \sim \mu U/\delta^2$.

Dans la couche limite, les forces d'inertie et de viscosité s'équilibrent. On peut donc écrire :

$$\rho \frac{U^2}{l} \sim \mu \frac{U}{\delta^2} \qquad (XVI,3)$$

On tire facilement de cette expression :

$$\delta \sim \left(\frac{\mu l}{\rho U}\right)^{1/2} = l\left(\frac{\mu}{\rho U l}\right)^{1/2}$$

Le rapport δ/l est inversement proportionnel à la racine carrée du nombre de Reynolds basé sur la longueur de la plaque :

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{l}{(Re_l)^{1/2}} \qquad (XVI,4)$$

L'épaisseur δ varie comme la racine carrée de l et la frontière de la couche limite prend une forme parabolique.

La résolution exacte des équations de la couche limite fournit le coefficient de proportionnalité. Dans le cas d'une couche limite sur une plaque plane et pour un écoulement laminaire incompressible, ce rapport est égal à 5 :

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{5}{(Re_l)^{1/2}} \qquad (XVI,5)$$

On peut estimer, en utilisant les mêmes méthodes d'analyse dimensionnelle, la contrainte sur la plaque elle-même. Cette contrainte a pour forme exacte :

$$\tau_w = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0}$$

Le gradient de vitesse est convenablement estimé par :

$$(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} \sim \frac{U}{\delta}$$

et dans ces conditions :

$$\tau_w \sim \mu\frac{U}{\delta} = \mu U(\frac{\rho U}{\mu l})^{1/2} = \rho U^2(\frac{\mu}{\rho U l})^{1/2}$$

On peut encore écrire sous forme réduite :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} \sim \frac{1}{(Re_l)^{1/2}} \qquad (XVI,6)$$

Nous verrons plus loin que le coefficient de proportionnalité obtenu par intégration numérique des équations de la couche limite a pour valeur 0.332, de telle sorte que :

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{0.332}{(Re_l)^{1/2}} \qquad (XVI,7)$$

Il est aussi facile de déduire une expression pour la traînée totale associée aux forces de frottement pariétal. Si b désigne la largeur de la plaque, et l sa longueur, la traînée totale est :

$$D \sim \tau_w bl \sim b(\rho\mu U^3 l)^{1/2} \qquad (XVI,8)$$

Le coefficient de traînée est défini comme le rapport de la traînée à $(1/2)\rho U^2 A$ où A désigne la surface de la plaque ($A = bl$).

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$$

On obtient facilement à partir de (XVI,8) :

$$C_D \sim \frac{1}{(Re_l)^{1/2}}$$

Le coefficient de proportionnalité obtenu par intégration des équations de la couche limite a pour valeur 1.328 et par conséquent :

$$C_D = \frac{1.328}{(Re_l)^{1/2}} \qquad (XVI,9)$$

Exemple

Une plaque plane de longueur $1\,m$ se trouve placée dans un écoulement d'air à vitesse $U = 5\,m/s$. La viscosité dynamique de l'air est de $1.76.10^{-5}\,kg/m-s$ à la température de $20°C$ et sa densité $\rho = 1.205\,kg/m^3$. Déterminer l'épaisseur de la couche limite en bout de plaque et calculer le coefficient de traînée.

Solution

Le nombre de Reynolds en bout de plaque a pour valeur :

$$Re_l = \frac{\rho U l}{\mu} = \frac{(1.205)(5)(1)}{1.76.10^{-5}} = 3.42.\,10^5$$

Ce nombre est inférieur au nombre de Reynolds critique pour lequel l'écoulement devient turbulent : pour une plaque plane, l'écoulement reste laminaire jusqu'à : $Re_c \simeq 5.\,10^5$.

L'épaisseur de la couche limite en bout de plaque est : $\delta = 5l/(Re_l)^{1/2} = 0.0085\,m$.

L'épaisseur δ est de l'ordre de $8\,mm$. Le coefficient de traînée est donné par : $C_D = 1.328/(Re_l)^{1/2}$. On trouve $C_D = 0.0023$.

XVI.4. Echelles et paramètres caractéristiques de la couche limite

La présence d'une couche limite dans l'écoulement modifie les débits de masse, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique. Ces modifications peuvent être décrites à l'aide d'épaisseurs caractéristiques que nous allons maintenant définir. Nous verrons au chapitre XVII qu'il est possible de relier ces paramètres caractéristiques par des équations intégrales dont la résolution approximative conduit à de nombreux résultats.

XVI.4.1. Epaisseur de couche limite

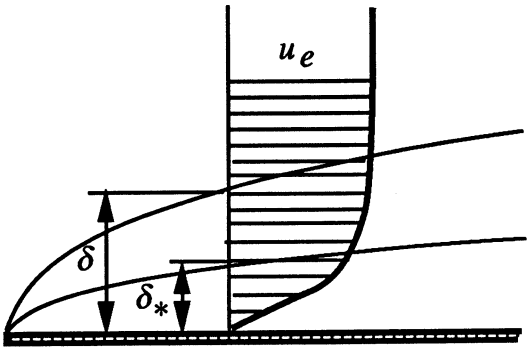
L'épaisseur de couche limite δ définit la dimension transversale de la couche limite. Dans une section donnée, cette épaisseur correspond à l'ordonnée du point où la vitesse axiale atteint 99% de sa valeur dans l'écoulement externe.

$$\frac{u(x,\delta)}{u_e(x)} = 0.99$$

Cette définition un peu arbitraire permet de déterminer de façon précise la frontière de la couche limite.

XVI.4.2. Epaisseur de déplacement

Considérons un écoulement plan comportant une couche limite. Dans la section x, l'épaisseur de cette couche est δ et la vitesse varie rapidement sur cette distance (figure 8). Le débit masse de fluide passant dans cette section à l'intérieur de la couche limite est :



$$\dot{m} = \int_o^\delta \rho u dy$$

***Figure 8.** Epaisseur de couche limite et épaisseur de déplacement.*

Si l'écoulement était celui d'un fluide parfait, la couche limite serait absente et le débit masse à travers la même section aurait pour expression :

$$\dot{m}_e = \int_o^\delta \rho_e u_e dy$$

La présence de la couche limite entraîne donc un déficit de débit masse dont la valeur est la différence des deux débits précédents : $\dot{m}_e - \dot{m} = \int_o^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy$.
On peut exprimer cette perte de débit en écrivant la différence $\dot{m}_e - \dot{m}$ sous la forme : $\dot{m}_e - \dot{m} = \rho_e u_e \delta_*$ où δ_* a la dimension d'une longueur. En rapprochant cette définition de l'expression précédente, on obtient :

$$\delta_* = \int_o^\delta (1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}) dy \qquad (XVI, 10)$$

La longueur δ_* est l'**épaisseur de déplacement**. C'est la distance de laquelle un écoulement de fluide parfait est "déplacé"par rapport à la paroi du fait du ralentissement de l'écoulement à l'intérieur de la couche limite. Si l'on considère le débit masse de fluide, tout se passe comme si la plaque était déplacée d'une épaisseur δ_*.

XVI.4.3. Epaisseur de quantité de mouvement

Considérons à présent le débit de quantité de mouvement passant à l'intérieur de la couche limite. Ce débit est, suivant l'axe des x :

$$J = \int_o^\delta \rho u^2 dy$$

Nous allons maintenant comparer ce débit à celui d'un écoulement qui aurait le **même débit masse** $\dot{m}$, mais dont la vitesse serait la vitesse externe u_e. Le débit masse passant dans la couche limite est :

$$\dot{m} = \int_o^\delta \rho u dy$$

et le débit de quantité de mouvement pour cet écoulement serait :

$$J_e = \dot{m} u_e = \int_o^\delta \rho u u_e dy$$

La différence de débits de quantité de mouvement est donc :

$$J_e - J = \int_o^\delta \rho u(u_e - u) dy \qquad (XVI, 11)$$

et cette différence peut être écrite sous la forme :

$$J_e - J = \rho_e u_e^2 \theta \qquad (XVI, 12)$$

Ici θ est homogène à une longueur et représente la perte de quantité de mouvement due à la couche limite. Pour cette raison, θ est appelé **épaisseur de perte de quantité de mouvement** ou **épaisseur de quantité de mouvement.**

En rapprochant (XVI,11) et (XVI,12), on obtient :

$$\theta = \int_o^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}(1 - \frac{u}{u_e}) dy \qquad (XVI, 13)$$

Nous verrons plus loin que cette quantité joue un rôle important dans l'analyse du processus de décollement et dans les études basées sur l'équation intégrale de Kármán.

Pour fixer les idées, nous allons chercher, dans l'exemple qui va suivre, la relation qui existe entre l'épaisseur θ et la contrainte pariétale τ_w.

Exemple

A l'aide d'un bilan macroscopique de quantité de mouvement effectué sur le volume de contrôle de la figure 9, déterminer la contrainte pariétale τ_w en fonction de l'épaisseur de quantité de mouvement. Pour la configuration envisagée, le gradient de pression axial est supposé nul et la pression reste constante partout.

Solution

Considérons le volume de contrôle de la figure 9, et effectuons un bilan de quantité de mouvement.

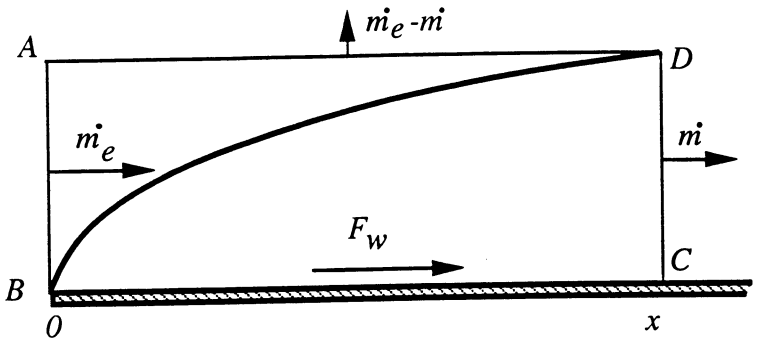


Figure 9. *Volume de contrôle utilisé dans la détermination de la force exercée par le fluide sur la plaque plane.*

Le débit de quantité de mouvement rentrant sur la face AB est : $\rho_e u_e^2 \delta$.

Le débit de quantité de mouvement sortant par la face CD est : $\int_o^\delta \rho u^2 dy$.

Considérons à présent la face AD, le débit masse sortant de cette face est : $\rho_e u_e \delta - \int_0^\delta \rho u dy = \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy$ et le débit de quantité de mouvement sortant est : $u_e \int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy$.

Si F_w désigne la force pariétale exercée par le fluide sur la plaque, on peut écrire le bilan de quantité de mouvement suivant :

$$\int_0^\delta \rho u^2 dy + \int_0^\delta u_e(\rho_e u_e - \rho u) dy - \rho_e u_e^2 \delta = -F_w + \int_{AB} p\, dy - \int_{CD} p\, dy$$

Ce bilan exprime simplement que la variation de quantité de mouvement du fluide est produite par les forces qui s'exercent sur la surface du volume de contrôle $ABCD$.

En l'absence de gradient de pression axial, la pression est constante partout et on obtient facilement :

$$F_w = \int_0^\delta \rho u(u_e - u) dy$$

soit :

$$F_w = \rho u_e^2 \theta$$

Ainsi, θ mesure directement la force pariétale exercée par le fluide sur la plaque plane entre 0 et x (la force pariétale est donnée ici par unité d'envergure).

La force pariétale exercée par le fluide entre les sections x_1 et x_2 s'obtient à partir de ce résultat :

$$\begin{aligned} F_w(x_1 \text{ à } x_2) &= F_w(x_2) - F_w(x_1) \\ &= \rho_e u_e^2 [\theta(x_2) - \theta(x_1)] \end{aligned}$$

Si l'on envisage un élément de plaque $\delta x = x_2 - x_1$, on a :

$$\delta F_w(\delta x) = \rho_e u_e^2[\theta(x + \delta x) - \theta(x)]$$

et la contrainte locale τ_w sur la plaque s'écrit :

$$\tau_w = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta F}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \rho_e u_e^2 \frac{\theta(x + \delta x) - \theta(x)}{\delta x}$$

soit

$$\tau_w = \rho_e u_e^2 \frac{d\theta}{dx}$$

D'après cette relation, la contrainte pariétale est directement proportionnelle à la variation d'épaisseur de quantité de mouvement. Nous retrouverons cette équation par d'autres moyens et sous forme généralisée au chapitre XVII.

XVI.4.4. Facteur de forme H

Le facteur de forme H désigne le rapport δ_*/θ. Ce facteur caractérise la forme du profil de vitesse dans la couche limite et il intervient dans l'équation intégrale de Kármán et dans l'analyse des écoulements séparés.

A titre d'illustration, considérons un profil de vitesse donné sous forme d'une puissance du rapport y/δ :

$$\frac{u}{u_e} = (\frac{y}{\delta})^{1/n}, \qquad 0 < y < \delta \qquad (XVI, 14)$$

où n est une constante. On trouve dans le cas d'un écoulement incompressible, ($\rho = \rho_e$), un facteur de forme : $H = (n + 2)/n$.

Ainsi, pour un profil linéaire correspondant à $n = 1$, le facteur de forme a pour valeur $H = 3$. Le profil linéaire est, comme on le verra plus loin, proche du profil de vitesse réel dans une couche limite laminaire sur une plaque plane dont l'épaisseur serait environ 1.5 fois celle utilisée dans l'expression (XVI,14). (Pour le profil laminaire réel, on trouve $H = 2.59$).

La valeur $n \simeq 7$ correspond à un profil de vitesse très proche de celui que l'on trouve dans les couches limites turbulentes, sauf au voisinage immédiat de la paroi. Pour cette valeur $H = 1.28$. En l'absence de couche limite, le facteur H est évidemment égal à 1.

Lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression axial, le facteur H évolue en même temps que le profil de vitesse. La figure 11 montre une telle évolution pour une couche limite laminaire soumise à une augmentation de la pression dans la direction de l'écoulement. Dans cette situation, le gradient de pression est appelé "**adverse**"car l'écoulement peut être amené à décoller. Lors du décollement, le profil de vitesse présente un point d'inflexion à la paroi et le facteur de forme atteint alors une valeur de l'ordre de 4. Cette observation conduit à un critère de décollement fondé sur l'évaluation du facteur de forme H.

XVI.4.5. Epaisseurs d'énergie cinétique, d'enthalpie d'arrêt et d'enthalpie

L'analyse du bilan d'énergie dans la couche limite fait apparaître les épaisseurs caractéristiques suivantes :

$$\delta_3 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}(1 - \frac{u^2}{u_e^2})dy \qquad (XVI, 15)$$

$$\Delta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}(\frac{h_i}{h_e} - 1)dy \qquad (XVI, 16)$$

$$\Delta_2 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}(\frac{h - h_e}{h_w - h_e})dy \qquad (XVI, 17)$$

Ces expressions représentent respectivement les épaisseurs d'énergie cinétique, d'enthalpie d'arrêt et d'enthalpie.

L'enthalpie d'arrêt est définie ici par : $h_i = h + u^2/2$

L'épaisseur d'enthalpie Δ joue, dans l'analyse des échanges de chaleur, un rôle comparable à celui de θ dans l'étude du frottement pariétal.

XVI.5. Décollement

Le phénomène de décollement est intimement lié au comportement dynamique de la couche limite. Le décollement intervient lorsque la couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est-à-dire dans une situation où la pression augmente dans la direction de l'écoulement. Dans ce cas, la vitesse u_e de l'écoulement externe diminue et les particules fluides subissent une décélération (figure 10). La décélération est encore plus importante dans la couche limite du fait des transferts de quantité de mouvement par les forces visqueuses. Dans ces conditions, la quantité de mouvement des particules fluides qui se déplacent près de la paroi est diminuée et le fluide perd son inertie et sa capacité à avancer. La quantité de mouvement du fluide diminue graduellement pour compenser le gradient de pression et les forces de frottement pariétales et, en un certain point, la vitesse des particules fluides s'annule.

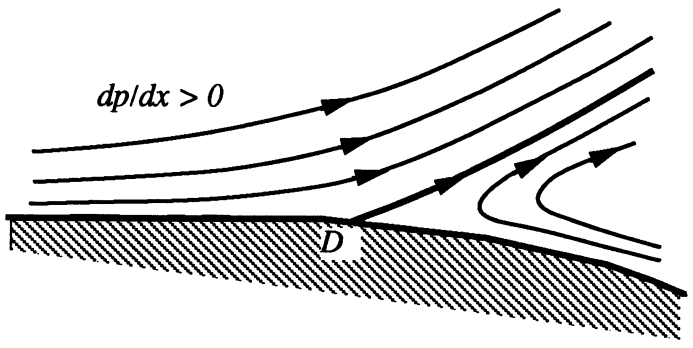


***Figure 10.** Le décollement apparaît lorsque la couche limite est soumise à un gradient de pression adverse.*

La théorie classique du décollement définit le point de séparation comme le point où $\partial u/\partial y = 0$. En ce lieu, la contrainte pariétale $\tau_w = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0}$ s'annule.

En aval du point de décollement, le gradient de pression induit un écoulement à contre-courant, l'épaisseur de la couche limite augmente notablement et les filets fluides quittent la paroi (figure 11).

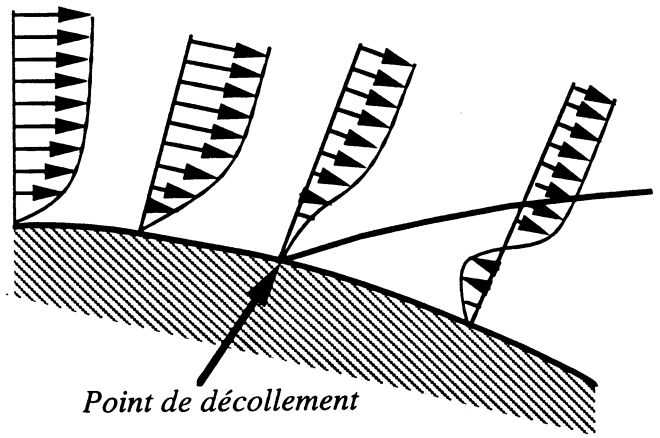


Figure 11. *Au point de décollement le profil de vitesse présente une tangente verticale et la contrainte pariétale s'annule.*

On observe alors la formation d'un sillage et l'approximation de couche limite n'est plus applicable.

Le décollement est généralement accompagné par le développement d'instabilités de l'écoulement. Très souvent des tourbillons se forment dans la région décollée. Ainsi, dans le cas d'un cylindre placé dans un écoulement uniforme, on observe pour certaines gammes de valeurs du nombre de Reynolds, un lâchage de tourbillons alternés (figure 12).

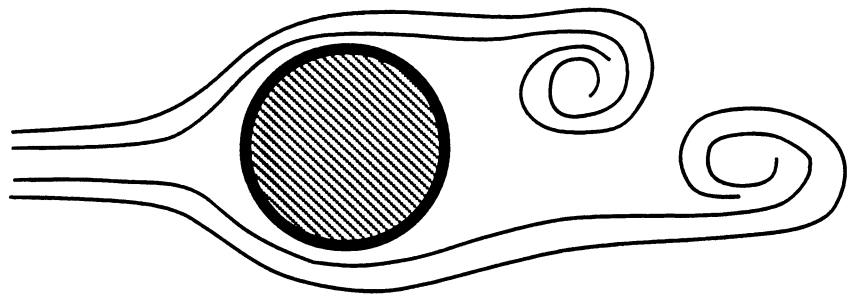


Figure 12. *Décollement de la couche limite sur un cylindre placé dans un écoulement uniforme. Le sillage est instationnaire et on observe sous certaines conditions un lâchage de tourbillons.*

Les caractéristiques de ce processus dépendent du nombre de Reynolds. La fréquence de lâchage des tourbillons est généralement déterminée par une loi de Strouhal. Ainsi par exemple, pour des cylindres de section circulaire placés dans un écoulement uniforme le nombre de Strouhal fd/v est de l'ordre de 0.2. (voir par exemple Blevins 1977).

Le décollement apparaît dans de nombreux autres cas d'écoulement. Il se produit par exemple dans les conduits fortement divergents. En amont du col, la pression décroît, l'écoulement est accéléré, les forces d'inertie augmentent et la couche limite adhère à la paroi du convergent (figure 13). En aval, le gradient de pression devient positif, l'écoulement décélère et la couche limite quitte la paroi. Le décollement est généralement asymétrique avec formation d'une zone de retour au voisinage de l'une des parois, l'écoulement principal suivant l'autre paroi. Le phénomène est accompagné par la formation et le lâchage de tourbillons dans la zone de retour. Pour éviter le décollement, on utilise en pratique des angles de divergent relativement faibles (inférieurs à 15°). On peut aussi placer des baffles qui partagent le divergent en canaux séparés et guident les filets fluides. Une autre méthode pour empêcher ou retarder le décollement consiste à rendre la couche limite turbulente. La transition vers la turbulence peut être obtenue à l'aide d'une petite protubérance ou de rugosités pariétales. Les couches limites turbulentes résistent mieux au décollement et les filets fluides suivent alors la paroi du diffuseur, mais ce résultat est obtenu au prix d'une perte de rendement, car le frottement pariétal est aussi plus important.

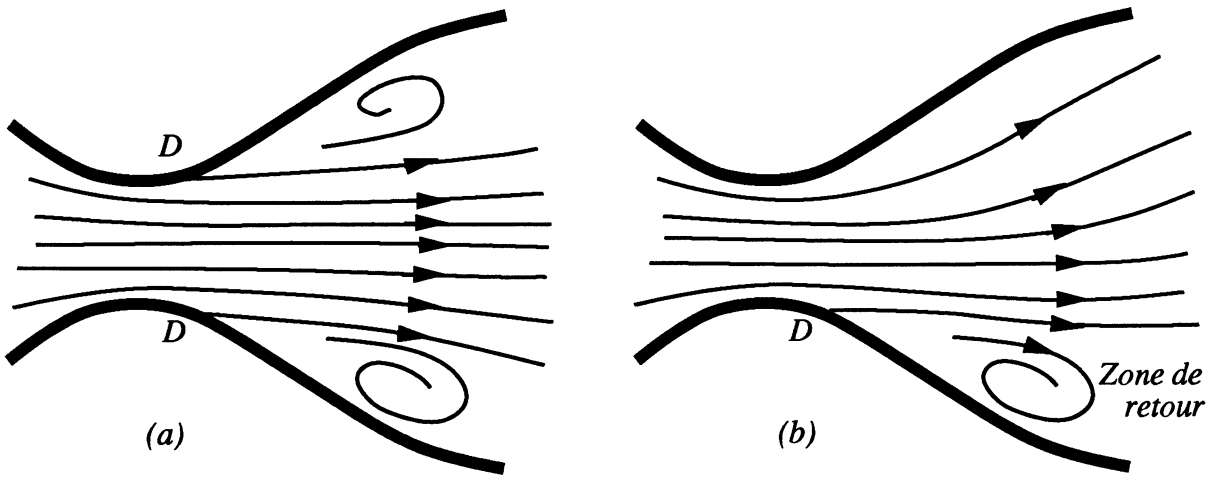


***Figure 13.** Ecoulements décollés dans des conduits fortement divergents.*
(a) Décollement symétrique (b) Décollement asymétrique.

Une situation très classique est celle d'un écoulement venant s'arrêter sur un mur à angle droit (figure 14). Le long de la ligne de courant qui aboutit au point d'arrêt, la vitesse diminue et la pression augmente. L'écoulement est donc dans un gradient de pression adverse, mais il n'y a pas décollement car les forces de frottement sont absentes. Si l'on considère maintenant la même géométrie mais que l'on place une plaque mince dans le plan de symétrie de la paroi d'arrêt (figure 15), on observe le décollement de l'écoulement. Cette fois en effet, la couche limite qui se développe sur la plaque est soumise à un gradient de pression positif. Cet exemple montre clairement que le décollement nécessite la présence simultanée de forces de frottement et d'un gradient de pression adverse.

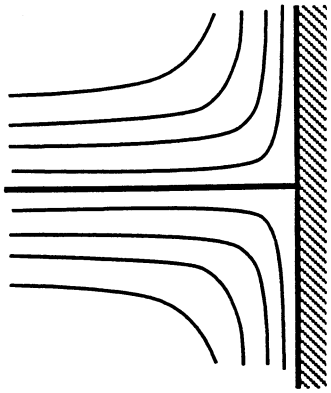


Figure 14. *Un écoulement initialement uniforme rencontre une paroi plane. On n'observe pas de décollement dans ce cas. Le gradient de pression adverse qui existe dans la direction axiale n'agit pas sur une couche limite et l'écoulement n'est pas perturbé.*

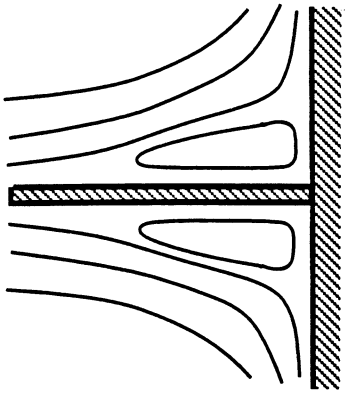


Figure 15. *Une plaque mince est placée dans le plan de symétrie de la paroi. Cette fois la couche limite qui se développe sur la plaque subit un gradient de pression adverse et on observe un décollement des filets fluides et la formation de deux poches de recirculation.*

Un autre cas important de décollement est celui que l'on observe pour un profil d'aile sous une forte incidence (figure 16a)). Aux faibles incidences, l'écoulement adhère au profil. L'augmentation de l'incidence augmente le gradient de pression qui existe sur l'extrados du profil. Lorsque l'incidence atteint une valeur d'environ 15°, le gradient de pression entraîne la séparation de la couche limite avec formation de tourbillons et d'un sillage épais (figure 16b)). Dans cette situation, qui correspond au **décrochage**, la portance du profil diminue brutalement et la traînée augmente (figure 17). Le décrochage peut être retardé en utilisant des méthodes de contrôle de la couche limite. On peut par exemple accélérer la transition de la couche limite pour augmenter sa capacité de résistance au décollement. On peut aussi renouveler (ou rajeunir) la couche limite en remplaçant le profil unique par un profil muni de volets séparés par des fentes. Le renouvellement de la couche limite peut aussi être obtenu par aspiration par des fentes ou par une paroi poreuse.

Ces quelques exemples montrent que la couche limite influence fortement les performances de systèmes aérodynamiques. Pour cette raison, un bon comportement de la couche limite doit être assuré au moment de la conception par une analyse soignée.

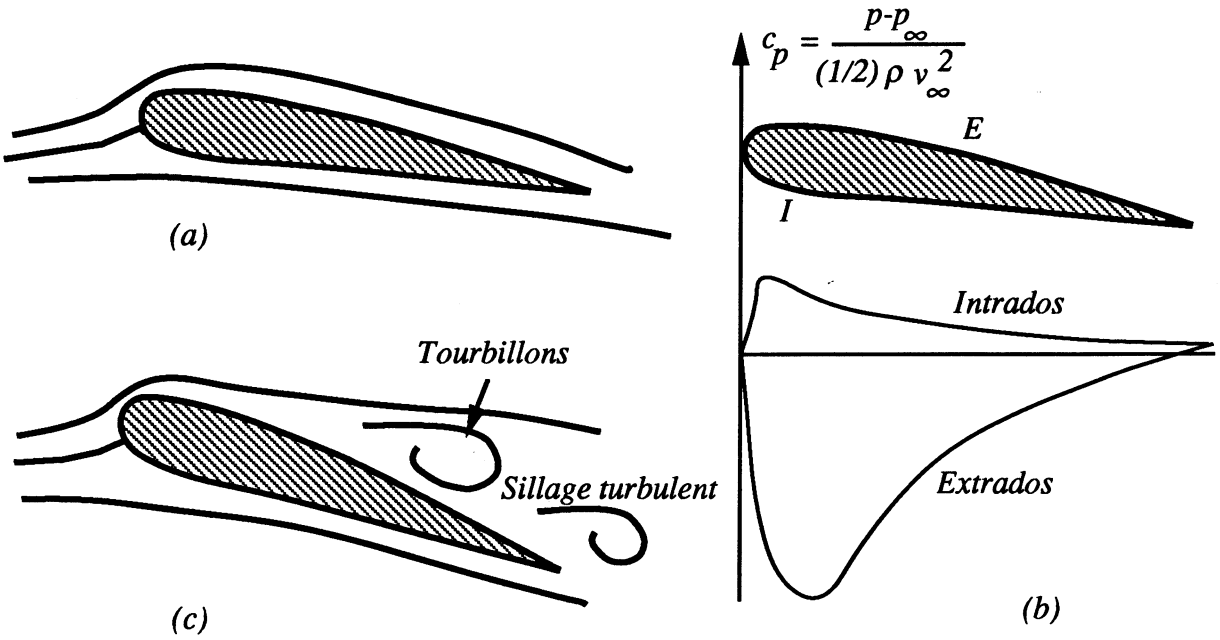


Figure 16. *Aux faibles incidences le gradient de pression adverse sur l'extrados reste suffisamment faible et la couche limite adhére à la paroi. Cette situation est représentée schématiquement à la figure (a). Les coefficients de pression correspondants sont donnés en (b). Lorsque l'angle d'incidence devient trop important, le gradient de pression entraîne le décollement des filets fluides à l'extrados du profil (c).*

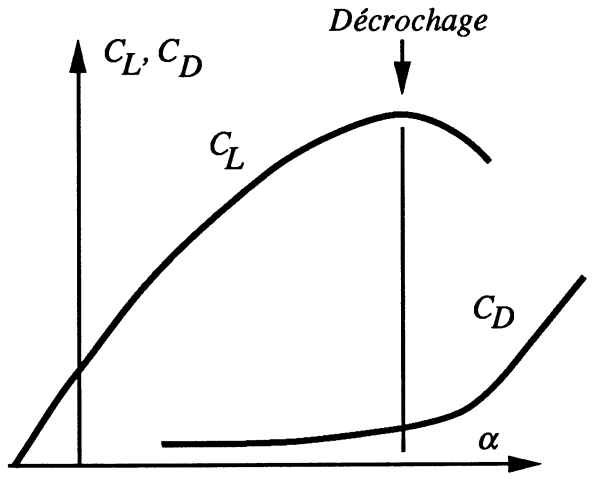


Figure 17. *Les coefficients aérodynamiques subissent une dégradation brutale au décrochage. Ce phénomène est associé au décollement de la couche limite sur l' extrados du profil.*

XVI.6. Transition vers la turbulence

Lorsque la vitesse dans l'écoulement externe devient suffisamment élevée, ou encore lorsque le nombre de Reynolds $Re_x = xU/\nu$ dépasse une certaine valeur critique, il y a transition et l'écoulement dans la couche limite devient turbulent. A la transition, on observe un épaississement notable de la couche limite et une augmentation simultanée de la contrainte

pariétale. Le phénomène est particulièrement bien mis en évidence si l'on représente le produit $\delta(U/\nu x)^{1/2}$ en fonction du nombre de Reynolds $Re_x = Ux/\nu$ (figure 18). Lorsque Re_x est inférieur au nombre de Reynolds critique, ($Re_c \sim 5.10^5$ dans le cas d'une plaque plane), le produit $\delta(U/\nu x)^{1/2}$ garde une valeur constante proche de 5. Au-dessus de Re_c, on observe une augmentation notable de ce produit. Cette variation est associée au changement de type d'écoulement. Des fluctuations turbulentes apparaissent dans la couche limite et intensifient les échanges de quantité de mouvement. La pente du profil de vitesse au voisinage de la paroi augmente de façon sensible entraînant une augmentation de la contrainte pariétale. La couche limite devient turbulente.

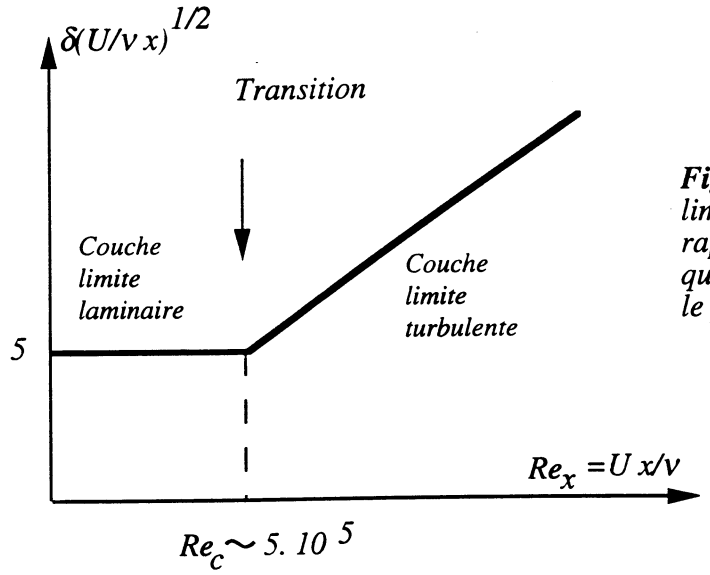


Figure 18. *La transition de la couche limite provoque une augmentation rapide de l'épaisseur de la couche limite que l'on peut observer en considérant le produit* $\delta(U/\nu x)^{1/2}$.

Il est intéressant d'évaluer le nombre de Reynolds $(Re)_\delta$ correspondant à cette transition. On a :

$$(Re)_\delta = \frac{U\delta}{\nu} = \frac{Ux}{\nu}\frac{\delta}{x} = 5(Re_x)^{1/2}$$

Lorsque $Re_x = Re_c = 5.10^5$, on a $(Re)_{\delta\,\text{critique}} \sim 2800$ et cette valeur est très proche de celle qui correspond à la transition dans un conduit cylindrique. Ce résultat n'est pas fortuit, car la transition est associée dans les deux cas à des mécanismes d'instabilité, du même type. Les perturbations instables apparaissent dans des écoulements dont l'échelle caractéristique est le diamètre (conduit cylindrique) ou l'épaisseur de couche limite (plaque plane).

La transition vers la turbulence se fait généralement en plusieurs étapes. Dans l'écoulement initialement laminaire on observe tout d'abord l'apparition d'ondes d'instabilité de faible amplitude. Ces ondes de Tollmien-Schlichting sont rapidement déformées par l'écoulement. Les lignes de vorticité associées à ces perturbations prennent la forme d'"épingles à cheveux" ou encore de "fer à cheval". Ces lignes de vorticité sont étirées par l'écoulement et la vorticité est ainsi rapidement augmentée.

Cette structure fine de l'écoulement donne naissance à des instabilités secondaires et plus en aval on voit apparaître des régions turbulentes localisées ou "spots". La croissance et

la fusion de ces structures conduit à un écoulement turbulent pleinement développé.
Le problème de la transition vers la turbulence est particulièrement important en pratique. Les mécanismes qui conduisent à la transition sont l'objet d'études nombreuses. Des critères souvent empiriques sont utilisés pour localiser la zone de transition.

Echelles caractéristiques pour la couche limite (Ecoulement bidimensionnel)

Epaisseur de la couche limite $\delta(x)$

$\delta(x)$ est la distance pour laquelle $u = 0.99\, u_e$

Epaisseur de déplacement

$$\delta_* = \int_0^\delta (1 - \frac{\rho\, u}{\rho_e u_e}) dy$$

Epaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho\, u}{\rho_e u_e} (1 - \frac{u}{u_e}) dy$$

Facteur de forme H

$$H = \delta_* / \theta$$

CHAPITRE XVII

COUCHE LIMITE LAMINAIRE EN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE

XVII.1. Introduction

La présentation qualitative du chapitre XVI va, maintenant, être complétée par une analyse théorique. Les équations de la couche limite sont d'abord établies dans le cas d'un écoulement **incompressible, stationnaire** et **bidimensionnel.** On envisage seulement le développement d'une couche limite **laminaire** sur une plaque plane. Le fluide en écoulement est **newtonien** et sa **viscosité est constante.** L'analyse est donc effectuée dans un cadre relativement restreint, mais les idées de base et l'approche théorique peuvent être étendues à des situations beaucoup plus complexes.

A titre d'exemple, l'approximation de couche limite permet le calcul de l'écoulement qui s'établit au voisinage d'une navette spatiale rentrant dans l'atmosphère. Dans une partie importante du domaine de vol, le libre parcours moyen des molécules est beaucoup plus petit qu'une dimension caractéristique de la navette, et les hypothèses du milieu continu sont applicables. Comme le nombre de Mach est très élevé (M_∞ est de l'ordre de 10), une onde de choc intense s'établit au voisinage de l'engin. Les molécules d'air passant au travers du choc sont portées à une température très élevée induisant des phénomènes de dissociation chimique et de déséquilibre thermodynamique. La relaxation moléculaire et des réactions de recombinaison des espèces dissociées se développent derrière le choc et dans la couche limite. Ces mécanismes sont importants car ils déterminent les taux de dégagement de chaleur au voisinage de l'engin et par conséquent les flux de chaleur à la paroi du véhicule. L'analyse de la couche limite doit donc prendre en compte un grand nombre de phénomènes physico-chimiques (compressibilité, diffusion des espèces, réactions chimiques, relaxations moléculaires, variation des coefficients de transport avec la composition et la température, dégagement de chaleur au sein de l'écoulement, catalycité de la paroi). Lorsque le Mach de vol est très élevé, l'onde de choc est très proche de la surface du véhicule et forme avec la couche limite une structure particulière appelée couche de choc visqueuse ("viscous shock layer"). Cet écoulement peut lui aussi être analysé dans l'approximation de couche limite en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot sur la frontière externe. Pour analyser des phénomènes aussi complexes, il faut utiliser des méthodes numériques. Cependant l'approximation de couche limite simplifie notablement la résolution de ce problème, car les équations d'évolution ont un caractère parabolique et peuvent être résolues en progressant dans la direction axiale par une méthode de marche

spatiale ("space marching"). En comparaison, la résolution des équations de Navier-Stokes en tenant compte des processus physico-chimiques cités plus haut s'avère beaucoup plus difficile.

Cet exemple met en perspective l'analyse très élémentaire qui va être développée dans ce chapitre. Nous établirons, dans un premier temps, les équations de la couche limite laminaire pour une plaque plane (section 2). La résolution des équations de la couche limite est envisagée dans la section 3. Les résultats principaux obtenus pour la couche limite sur une plaque plane sont présentés dans la même section. Les relations intégrales déduites des équations de la couche limite sont présentées dans la section 4. Ces relations permettent une analyse approchée de problèmes de couche limite par une méthode due à Kármán et Polhausen (section 4.4). L'intérêt de cette méthode dépasse largement le cadre des problèmes de couche limite et les mêmes principes peuvent être appliqués à diverses situations d'écoulement.

XVII.2. Equations de la couche limite laminaire sur une plaque plane

Pour simplifier au maximum cette première présentation de la théorie de la couche limite, on considère ici **l'écoulement bidimensionnel** d'un fluide **incompressible** au voisinage d'une **plaque plane** (figure 1).

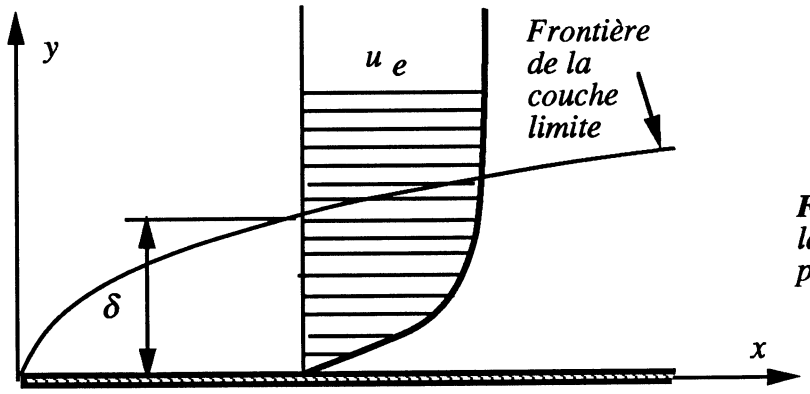


***Figure 1.** Couche limite laminaire sur une plaque plane.*

Comme indiqué à plusieurs reprises, la vitesse du fluide s'annule sur la plaque et le passage de cette vitesse nulle à la vitesse de l'écoulement externe u_e s'effectue sur une petite distance δ à l'intérieur de la couche limite.

Les équations de continuité et de la quantité de mouvement s'écrivent, dans le cas d'un fluide en écoulement incompressible et **permanent**, sous les formes suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \qquad (XVII,1)$$
$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

et les conditions aux limites pour le problème représenté sur la figure 1 sont :

$$u(x,0)=0, \quad v(x,0)=0, \quad u(x,\infty)=u_e(x) \qquad (XVII,2)$$

Nous allons maintenant effectuer une estimation a priori des termes qui apparaissent dans les équations du mouvement. Pour cette estimation, nous utiliserons deux échelles caractéristiques de l'écoulement :

- δ l'épaisseur de la couche limite,
- l une longueur caractéristique dans la direction de l'écoulement.

Nous supposerons, en outre, que la couche limite est mince et telle que $\delta/l << 1$. Considérons à présent l'équation de continuité. Si U désigne une vitesse axiale typique et V une vitesse transversale typique, les gradients $\partial u/\partial x$ et $\partial v/\partial y$ peuvent être estimés par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{U}{l}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{V}{\delta} \qquad (XVII,3)$$

Pour que l'équation de continuité soit satisfaite, ces deux termes doivent être du même ordre :

$$\frac{V}{\delta}\sim\frac{U}{l} \qquad (XVII,4)$$

et dans ces conditions, l'ordre de grandeur de la vitesse transversale est donné par :

$$V\sim U\frac{\delta}{l} \qquad (XVII,5)$$

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction x :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (XVII,6)$$

les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont respectivement :

$\frac{U^2}{l}$	$(\frac{U}{l}\frac{\delta}{\delta})\frac{U}{\delta}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta x}$	$\nu\frac{U}{l^2}$	$\nu\frac{U}{\delta^2}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Les deux premiers termes sont du même ordre de grandeur U^2/l. Le quatrième terme est beaucoup plus petit que le cinquième.

$$\frac{(4)}{(5)}\sim(\frac{\delta}{l})^2<<1 \qquad (XVII,7)$$

On peut donc raisonnablement négliger le quatrième terme, mais il faut garder le cinquième terme (sinon les effets de viscosité seraient totalement absents de l'équation simplifiée et nous aurions à nouveau une équation d'Euler décrivant le mouvement d'un fluide idéal). Les deux premiers termes et le cinquième terme doivent donc avoir le même ordre de grandeur : (1) et (2) $\sim$ (5), soit :

$$\frac{U^2}{l} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \qquad (XVII,8)$$

Cette condition fixe le rapport de l'épaisseur δ à la longueur l :

$$(\frac{\delta}{l})^2 \sim \frac{\nu}{U\,l} = \frac{1}{Re_l}$$

soit :

$$\delta \sim \frac{l}{(Re_l)^{1/2}} \qquad (XVII,9)$$

Ainsi pour que le rapport δ/l soit petit devant 1, il faut que le nombre de Reynolds basé sur la distance l soit suffisamment grand : $\delta/l << 1$ si $Re_l >> 1$. Une conséquence de la relation (XVII,9) est que les équations de la couche limite ne sont pas strictement valables près du bord d'attaque de la plaque. En toute rigueur, il faudrait utiliser dans cette région les équations de Navier-Stokes complètes.

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée dans la direction transversale :

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Les ordres de grandeur de chacun des termes de cette équation sont ici :

$$U(\frac{U\,\delta}{l^2}) \qquad (\frac{U\,\delta}{l})^2\frac{1}{\delta} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta y} \qquad \frac{\nu U\,\delta}{l^3} \qquad \frac{\nu U \delta}{l\,\delta^2}$$

Pour que l'équilibre des termes qui composent cette équation puisse être réalisé, le gradient de pression transverse doit avoir comme ordre de grandeur :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \sim U^2\frac{\delta}{l^2}$$

Alors que le gradient de pression longitudinal a comme ordre de grandeur :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{U^2}{l}$$

Le gradient de pression dans la direction transversale est inférieur d'un ordre de grandeur à celui qui existe dans la direction axiale :

$$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y})/(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}) \sim \frac{\delta}{l} << 1 \qquad (XVII,10)$$

Dans une couche limite, la **pression ne varie pratiquement pas dans la direction transversale,** et l'équation de la quantité de mouvement suivant y peut être remplacée par :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (XVII.11)$$

Considérons à présent l'écoulement externe (l'écoulement à l'extérieur de la couche limite). Dans cette région, il n'y a pas de gradient important dans la direction transversale et l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant la direction des x devient :

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (XVII,12)$$

D'après (XVII,11), la pression p ne dépend que de x et les dérivées partielles sont remplacées par des dérivées ordinaires.

$$u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \qquad (XVII.13)$$

L'intégration de (XVII,13) indique simplement que la pression et la vitesse sont liées, à l'extérieur de la couche limite, par l'équation de Bernoulli.

$$p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = \text{constante}$$

En définitive la couche limite peut être décrite par le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \qquad (XVII,14)$$

Dans l'écoulement externe :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = u_e\frac{du_e}{dx} \quad \text{ou} \quad p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = \text{constante}$$

Les conditions aux limites pour la situation envisagée ont pour forme :

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad u(x,\infty) = u_e(x) \qquad (XVII,15)$$

Les deux premières conditions expriment que la vitesse s'annule à la paroi c'est-à-dire que les particules fluides adhèrent à la paroi. La troisième condition indique que la vitesse à grande distance de la paroi est égale à la vitesse à l'extérieur de la couche limite.

XVII.3. Solution exacte des équations de la couche limite

XVII.3.1. Principe

Nous considérons ici le problème le plus simple d'une **plaque plane** placée dans un **écoulement uniforme** de vitesse u_e= constante. Dans cette situation, le gradient de pression axial est nul et les équations de la couche limite deviennent :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \qquad (XVII, 16)$$

avec les conditions aux limites :

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad u(x,\infty) = u_e \qquad (XVII, 17)$$

Il est commode d'introduire la fonction de courant $\psi(x,y)$ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (XVII, 18)$$

L'équation de continuité est ainsi automatiquement satisfaite, mais l'équation de la quantité de mouvement fait apparaître des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \qquad (XVII, 19)$$

Les trois conditions aux limites écrites pour ψ sont :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,\infty) = u_e \qquad (XVII, 20)$$

La deuxième condition peut être transformée en notant que :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0)dx = \psi(x,0) - \psi(0,0) = 0 \qquad (XVII, 21)$$

Si l'on choisit $\psi(0,0) = 0$, on déduit la nouvelle condition $\psi(x,0) = 0$; (le choix $\psi(0,0) = 0$ ne diminue pas le degré de généralité, car ψ est défini à une constante près).
Le problème considéré ici ne **possède pas d'échelle propre** et il est donc naturel de rechercher des **solutions auto-semblables** pour les profils de vitesse. En d'autres termes, on peut se demander si les profils de vitesse dans chaque section ne deviennent pas identiques lorsqu'on rapporte l'ordonnée à l'épaisseur locale de la couche limite. Il s'agit donc de chercher s'il est possible d'écrire :

$$\frac{u(x,y)}{u_e} = \Phi(\frac{y}{\delta}) \qquad (XVII, 22)$$

où Φ serait la même fonction "universelle"pour toutes les absisses x.
Nous savons déjà que $\delta \sim (\nu x/u_e)^{1/2}$ et on peut donc utiliser comme **variable de similitude** :

$$\eta = y(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2} \qquad (XVII,23)$$

D'autre part, si la vitesse axiale est telle que : $u = u_e\Phi(y/\delta)$, alors la fonction de courant devra avoir pour forme : $\psi(x,y) = u_e\delta f(\eta)$. La fonction f qui apparaît dans cette expression doit être telle que $f'(\eta) = \Phi$.
En définitive, la recherche de profils de similitude revient donc à chercher ψ sous la forme :

$$\psi(x,y) = (u_e x\nu)^{1/2} f(\eta) \qquad (XVII,24)$$

avec :

$$\eta = y(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2}$$

Pour résoudre l'équation (XVII,19), nous devons maintenant déterminer les dérivées successives de ψ par rapport à x et y. Notons d'abord que :

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}y(\frac{u_e}{\nu x^3})^{1/2} = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{x}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = (\frac{u_e}{\nu x})^{1/2} = \frac{\eta}{y}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2}(\frac{u_e\nu}{x})^{1/2} f + (u_e\nu x)^{1/2}\frac{\partial\eta}{\partial x}f' = \frac{1}{2}(\frac{u_e\nu}{x})^{1/2}(f - \eta f')$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = (u_e\nu x)^{1/2}\frac{\partial\eta}{\partial y}f' = u_e f'$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = u_e f''\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{x}u_e f''$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = u_e f''\frac{\partial\eta}{\partial y} = u_e f''(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2}$$

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} = u_e f'''(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2}\frac{\partial\eta}{\partial y} = u_e f'''\frac{u_e}{\nu x}$$

Substituons maintenant ces expressions dans l'équation (XVII,19) reproduite ci-dessous pour plus de commodité :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

On obtient :

$$u_e f'(-\frac{1}{2})\frac{u_e\eta}{x}f'' - \frac{1}{2}(\frac{u_e\nu}{x})^{1/2}(f - \eta f')u_e f''(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2} = \nu\frac{u_e^2}{\nu x}f''' \qquad (XVII,25)$$

Après simplification, on obtient l'équation de Blasius :

$$2f''' + ff'' = 0 \qquad (XVII,26)$$

La variable x a totalement disparu de cette dernière équation, confirmant ainsi l'existence de solutions auto-semblables du type (XVII,24). La fonction $f(\eta)$ est donc solution d'une équation différentielle du troisième ordre. Les conditions aux limites pour $f(\eta)$ sont obtenues à partir de celles définies pour la fonction de courant :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \psi(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,\infty) = u_e \qquad (XVII,27)$$

On obtient facilement :

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 0, \qquad \text{et} \qquad f'(\infty) = 1 \qquad (XVII,28)$$

Nous avons donc transformé le problème aux dérivées partielles initial en un problème différentiel ordinaire avec des conditions aux limites définies en deux points. La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils.

La procédure que nous venons de décrire en détail est résumée au tableau 1.

Tableau 1. Transformation des équations de la couche limite en un problème différentiel ordinaire

1) Problème initial :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$u(x,0) = v(x,0) = 0, \qquad u(x,\infty) = u_e$$

2) Introduction de la fonction de courant : $u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,0) = 0, \psi(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,\infty) = u_e$$

3) Recherche de solutions auto-semblables :

$$\psi(x,y) = (u_e \nu\, x)^{1/2} f(\eta)$$

$$\eta = y(u_e/\nu\, x)^{1/2}$$

$$2f''' + ff'' = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \qquad f'(\infty) = 1$$

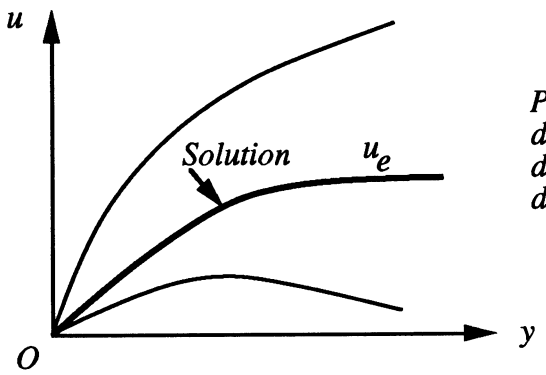
Le champ de vitesse est donné par :

$$u(x,y) = u_e f'(\eta)$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_e \nu}{x}\right)^{1/2}(\eta f' - f)$$

XVII.3.2. Une méthode d'intégration numérique des équations de la couche limite

Des méthodes très variées permettent la résolution numérique des équations de la couche limite. Les méthodes modernes utilisent en général une discrétisation aux différences finies. Les schémas les plus courants traitent les équations de façon couplée et implicite (voir par exemple Keller 1978, Cebeci et Bradshaw 1977, 1984). Si l'on s'intéresse seulement à des problèmes différentiels avec des conditions aux limites spécifiées en deux points comme celui défini par l'équation (XVII,26) munie des conditions aux limites (XVII,28), on peut aussi utiliser des méthodes de "tir". Dans ce type de procédure, on remplace d'abord l'équation différentielle à intégrer par un système différentiel du premier ordre. On munit ce système de conditions initiales en l'un des points et on intègre le problème aux conditions initiales ainsi défini. Il s'agit alors d'ajuster les conditions initiales pour que les conditions sur la deuxième frontière du domaine soient satisfaites. Le principe de cette méthode est schématisé ci-dessous.



Principe de la détermination de la solution des équations de la couche limite à l'aide d'une méthode de tir.

Nous allons maintenant spécialiser cette méthode à l'analyse des problèmes rencontrés dans l'étude de la couche limite. Plus précisément, nous envisageons l'équation de Falkner-Skan :

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m[1 - (f')^2] = 0 \qquad (XVII, 29)$$

La résolution va être effectuée en suivant une méthode proposée par Keller et reprise par Cebeci et Bradshaw .

Nous verrons plus loin que l'équation (XVII,29) décrit le développement de couches limites laminaires en présence d'un gradient de pression axial. L'équation de Blasius (XVII,26) est en fait un cas particulier de ces équations plus générales, correspondant à une valeur du paramètre $m = 0$.

Les conditions aux limites pour (XVII,29) sont spécifiées en **deux points** :

$$\text{en } \eta = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad \text{en } \eta = \eta_\infty, f'(\eta_\infty) = 1 \qquad (XVII, 30)$$

où η_∞ correspond à la frontière de la couche limite et doit être grand par rapport à 1.

La première étape de la résolution du problème (XVII,29) (XVII,30) consiste à remplacer l'équation différentielle (XVII,29) du troisième ordre par un système de trois équations du premier ordre. On introduit, dans ce but, deux nouvelles variables u et g telles que :

$$\begin{aligned} f' &= u \\ u' &= g \\ g' &= -\frac{m+1}{2} f\, g - m(1-u^2) \end{aligned} \qquad (XVII,31)$$

(Ici u et g sont de simples fonctions auxiliaires. Notons cependant que u désigne le rapport u/u_e de la vitesse axiale à la vitesse axiale extérieure).

Les conditions aux limites (XVII,30) deviennent :

$$f(0) = 0 \qquad (XVII,32)$$

$$u(0) = 0 \qquad (XVII,33)$$

et :

$$u(\eta_\infty) = 1 \qquad (XVII,34)$$

Désignons par s la valeur de g en $\eta = 0$:

$$g(0) = s \qquad (XVII,35)$$

Le problème aux limites (XVII,31) et (XVII,32)(XVII,33)(XVII,34) peut être ramené à un problème aux conditions initiales (XVII,31) et (XVII,32)(XVII,33)(XVII,35) pour lequel on recherche la valeur de s qui permet de satisfaire la condition (XVII,34) sur la frontière externe η_∞.

Nous allons donc intégrer numériquement le système :

$$\begin{aligned} f' &= u \\ u' &= g \\ g' &= -\frac{m+1}{2} f\, g - m(1-u^2) \end{aligned} \qquad (XVII,36)$$

en partant des conditions initiales :

$$f(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad g(0) = s \qquad (XVII,37)$$

La solution de ce système dépendra à la fois de η et de s. Il s'agira de trouver la valeur de s telle que :

$$u(\eta_\infty, s) - 1 = 0 \qquad (XVII,38)$$

Si $D(s) = u(\eta_\infty, s) - 1$, la valeur de s cherchée est une racine de $D(s) = 0$. Pour déterminer cette racine, on peut utiliser la **méthode de Newton**. Le principe de cette méthode est bien connu.

Désignons par s_o une première estimation de la racine de l'équation $D(s) = 0$. Une meilleure estimation de cette racine peut être obtenue (dans certains cas) en cherchant le

point d'intersection de la tangente à $y = D(s)$ au point s_o avec l'axe des s. La valeur ainsi obtenue est :

$$s_1 = s_o - \frac{D(s_o)}{\frac{\partial D}{\partial s}(s_o)}$$

La recherche de la racine de $D(s) = 0$ peut donc être effectuée à l'aide d'une itération dans laquelle la valeur itérée s_{n+1} est déduite de la valeur s_n à l'aide de :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{D(s_n)}{(\partial D/\partial s)_{s_n}}$$

Comme

$$D(s_n) = u(\eta_\infty, s_n) - 1$$

La dérivée de $D(s)$ par rapport à s s'écrit :

$$\frac{\partial D}{\partial s}(s_n) = \frac{\partial u}{\partial s}(\eta_\infty, s_n)$$

on peut écrire :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{u(\eta_\infty, s_n) - 1}{\frac{\partial u}{\partial s}(\eta_\infty, s_n)} \qquad (XVII, 39)$$

On aura : $s_{n+1} = s_n$ lorsque $D(s_n) = 0$. En général, ce cas n'est jamais atteint, mais on peut arrêter l'itération lorsque l'écart $|s_{n+1} - s_n|$ devient inférieur à une valeur ϵ faible fixée à priori.

Il reste à trouver un moyen permettant la détermination de la dérivée de u par rapport à s. On peut utiliser pour cela un système "variationnel"que l'on adjoint au système initial et que l'on intègre en même temps que le système initial.

Nous introduisons les nouvelles inconnues :

$$F = \frac{\partial f}{\partial s}(\eta, s), \quad U = \frac{\partial u}{\partial s}(\eta, s), \quad G = \frac{\partial g}{\partial s}(\eta, s) \qquad (XVII, 40)$$

Différentions le système (XVII,36) par rapport à s. On obtient facilement :

$$F' = U, U' = G, G' = -\frac{m+1}{2}(fG + gF) + 2m\,u\,U \qquad (XVII, 41)$$

Les conditions initiales (XVII,37) différentiées par rapport à s donnent :

$$F(0) = 0, U(0) = 0, G(0) = 1 \qquad (XVII, 42)$$

L'intégration simultanée des deux systèmes (XVII,31) et (XVII,41) à partir des conditions initiales (XVII,37) et (XVII,42) donne donc $u(\eta_\infty, s)$ et sa dérivée $U(\eta_\infty, s) = \frac{\partial u}{\partial s}(\eta_\infty, s)$.

La formule (XVII,39) fournit la nouvelle valeur de s et une nouvelle intégration peut être effectuée. On peut arrêter l'itération lorsque : $|s_{n+1} - s_n| < \epsilon_1$ ou encore lorsque $|u(\eta_\infty, s_{n+1}) - 1| < \epsilon_2$. La méthode de résolution de l'équation de Falkner-Skan que nous venons de décrire est résumée au tableau 2.

En pratique, l'intégration numérique de l'étape 2 est facilement effectuée à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta et quelques itérations sur le paramètre s suffisent pour obtenir la solution cherchée.

Tableau 2. Méthode de tir pour la résolution de l'équation de Falkner-Skan

1) Choix initial de s

2) Intégration numérique du système ordinaire :

$$\begin{aligned} f' &= u \\ u' &= g \\ g' &= -\frac{m+1}{2} fg - m(1-u^2) \\ F' &= U \\ U' &= G \\ G' &= -\frac{m+1}{2}(fG + gF) + 2muF \end{aligned}$$

à partir des conditions initiales :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ g(0) &= s \\ F(0) &= 0 \\ U(0) &= 0 \\ G(0) &= 1 \end{aligned}$$

3) Détermination de la nouvelle valeur de

$$s_{n+1} = s_n - \frac{u(\eta_\infty, s_n) - 1}{U(\eta_\infty, s_n)}$$

4) Si $|s_{n+1} - s_n| > \epsilon$ retour en 2,
Si $|s_{n+1} - s_n| < \epsilon$ le problème est résolu

XVII.4. Résultats principaux

Cette section concerne uniquement la couche limite sur une plaque plane en l'absence d'un gradient de pression ($m = 0$). La détermination des fonctions f et f' permet le calcul de toutes les caractéristiques de la couche limite . La fonction $f(\eta)$ et sa dérivée $f'(\eta)$ sont

représentées sur la figure 2. On note que $f'(\eta)$ varie de façon presque linéaire au voisinage de $\eta = 0$, puis tend asymptotiquement vers 1 lorsque η augmente et tend vers η_∞. Pour $\eta = 5$, $f'(\eta) = 0.99$ et en ce point $u = 0.99\, u_e$. L'épaisseur de la couche limite δ définie comme la distance à laquelle u atteint 99% de la vitesse de l'écoulement externe a donc pour valeur :

$$\delta \sim 5.0(\frac{\nu x}{u_e})^{1/2} \qquad (XVII, 43)$$

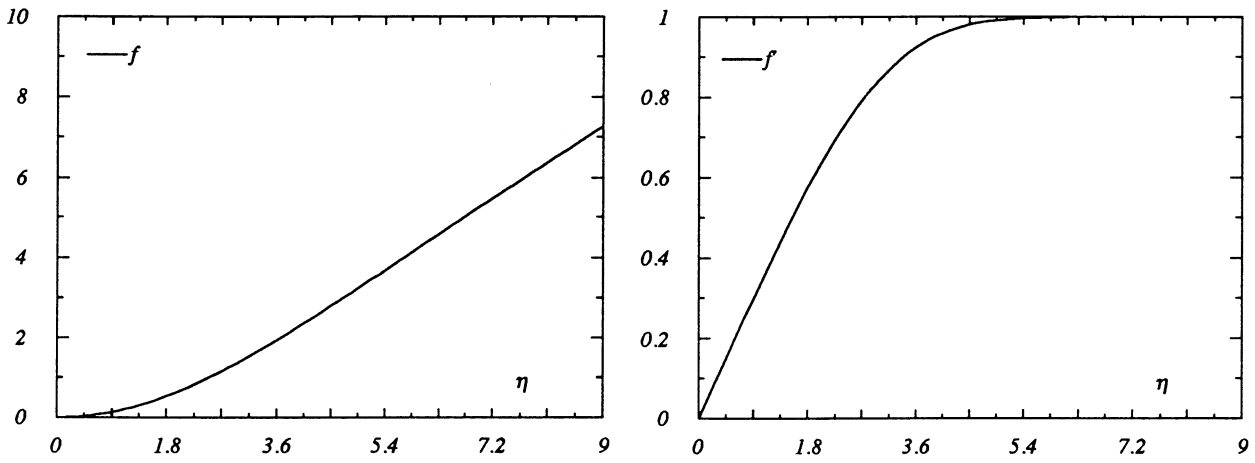


Figure 2. Les fonctions f et f' pour la couche limite laminaire sur une plaque plane.

La composante normale du champ de vitesse peut être déduite de $f(\eta)$ à l'aide de :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} u_e (\frac{\nu}{u_e\, x})^{1/2} (\eta f' - f)$$

Si l'on représente le produit :

$$\frac{v}{u_e}(\frac{u_e x}{\nu})^{1/2} = \frac{v}{u_e}(Re_x)^{1/2} = \frac{1}{2}(\eta f' - f)$$

en fonction de η, on constate que cette fonction tend vers une valeur constante égale à 0.860 lorsque $\eta \to \infty$. Ainsi sur la frontière de la couche limite, la vitesse transversale garde une valeur non nulle telle que :

$$v_e = 0.860 \frac{u_e}{(Re_x)^{1/2}} \qquad (XVII, 44)$$

L'augmentation de l'épaisseur de la couche limite induit un déplacement du fluide dans la direction transversale.

Evaluation des épaisseurs caractéristiques

L'épaisseur de déplacement est donnée dans le cas général par :

$$\delta_* = \int_0^\delta (1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e})dy$$

En écoulement incompressible, cette expression devient :

$$\delta_* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{u_e})dy$$

Pour calculer cette intégrale, on peut introduire la variable réduite :

$$\eta = y(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2} = \frac{y}{x}(Re_x)^{1/2}$$

et on obtient :

$$\delta_* = \frac{x}{(Re_x)^{1/2}} \int_0^{\eta\infty} [1 - f'(\eta)]d\eta$$

Ainsi l'épaisseur de déplacement est donnée sous la forme :

$$\delta_* = \frac{x}{(Re_x)^{1/2}}\delta_{1*} \quad \text{où} \quad \delta_{1*} = \int_0^{\eta\infty} [1 - f'(\eta)]d\eta = \eta_\infty - f(\eta_\infty) + f(0)$$

On trouve $\delta_{1*} = 1.720$ et par conséquent l'épaisseur de déplacement s'écrit :

$$\delta_* = 1.720\frac{x}{(Re_x)^{1/2}} \qquad (XVII, 45)$$

Considérons à présent l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}(1 - \frac{u}{u_e})dy$$

En écoulement incompressible, cette épaisseur est donnée par :

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_e}(1 - \frac{u}{u_e})dy$$

et l'introduction de la variable réduite η conduit à :

$$\theta = \frac{x}{(Re_x)^{1/2}}\theta_1 \quad \text{où} \quad \theta_1 = \int_0^{\eta\infty} f'(1 - f')d\eta$$

Pour obtenir θ_1, il faut intégrer l'expression précédente. Lorsque $m = 0$, l'intégration analytique est possible. On a en effet $\theta_1 = f(\eta_\infty) - f(0) - \int_0^{\eta\infty} f'^2 d\eta$ et on peut intégrer le troisième terme de cette expression par parties :

$$\int_0^{\eta\infty} f'^2 d\eta = [f'f]_0^{\eta\infty} - \int_0^{\eta\infty} ff''d\eta$$

Pour compléter cette intégration, il faut utiliser l'équation de Blasius $f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0$ (la fonction f est solution de cette équation). On obtient ainsi :

$$\int_0^{\eta_\infty} f'^2 d\eta = f(\eta_\infty)f'(\eta_\infty) - f(0)f'(0) + 2f''(\eta_\infty) - 2f''(0)$$
$$= f(\eta_\infty) - 2f''(0)$$

Finalement, en rassemblant ces expressions, on obtient : $\theta_1 = 2f''(0)$.
Le calcul numérique donne $f''(0) = 0.332$ et par conséquent :

$$\theta = \frac{x}{(Re_x)^{1/2}} 0.664 \qquad (XVII, 46)$$

Le facteur de forme pour une couche limite sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression se déduit immédiatement des expressions (XVII,45) et (XVII,46) :

$$H = \frac{\delta_*}{\theta} = 2.59 \qquad (XVII, 47)$$

Evaluation de la contrainte pariétale et du coefficient de frottement

La contrainte pariétale est donnée par :

$$\tau_w = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0}$$

Pour évaluer cette expression, nous utilisons, là encore, la variable réduite :

$$\eta = y(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2} = \frac{y}{x}(Re_x)^{1/2}$$

Ainsi la contrainte pariétale devient $\tau_w = \mu(\frac{\partial u}{\partial \eta})_{\eta=0}\frac{\partial \eta}{\partial y}$. Comme $u = u_e f'(\eta)$, on trouve :

$$\tau_w = \mu u_e \frac{(Re_x)^{1/2}}{x} f''(0)$$

et le coefficient de frottement local défini par : $c_f = \tau_w/(1/2\rho u_e^2)$ s'exprime sous la forme : $c_f = 2f''(0)/(Re_x)^{1/2}$
La valeur de la dérivée seconde $f''(0)$ donnée plus haut conduit à :

$$c_f = \frac{0.664}{(Re_x)^{1/2}} \qquad (XVII, 48)$$

Evaluation de la traînée et du coefficient de traînée de la plaque

Nous venons de donner des expressions pour la contrainte locale τ_w et le coefficient de frottement local. Nous allons maintenant chercher à déterminer la force de frottement

totale qui agit sur une plaque de longueur l et d'envergure unité. Pour un côté de la plaque seulement, cette force est égale à la somme des contraintes locales :

$$D = \int_0^l \tau_w dx \qquad (XVII, 49)$$

où

$$\tau_w = \mu u_e f''(0)(\frac{u_e}{\nu x})^{1/2}$$

L'intégration de (XVII,49) conduit à :

$$D = 2\mu u_e f''(0)(\frac{u_e l}{\nu})^{1/2}$$

et le coefficient de traînée est donné par :

$$c_D = \frac{D}{(1/2)\rho u_e^2 l}$$

soit :

$$c_D = \frac{4f''(0)}{(u_e l/\nu)^{1/2}} \quad \text{où} \quad c_D = \frac{1.328}{(Re_l)^{1/2}}$$

Cette expression obtenue pour la première fois par Blasius reste valable pour des nombres de Reynolds $Re_l < 5.10^5$. Au-delà de cette valeur, la couche limite devient turbulente et le frottement à la paroi devient beaucoup plus important.

Résultats expérimentaux

De nombreuses observations expérimentales confirment les résultats théoriques qui viennent d'être présentés. Les expériences font clairement apparaître la **similitude** des profils de vitesse relevés dans plusieurs sections axiales (figure 3) et elles démontrent l'exactitude de la loi de Blasius (XVII,48) pour le coefficient de frottement local (figure 4).

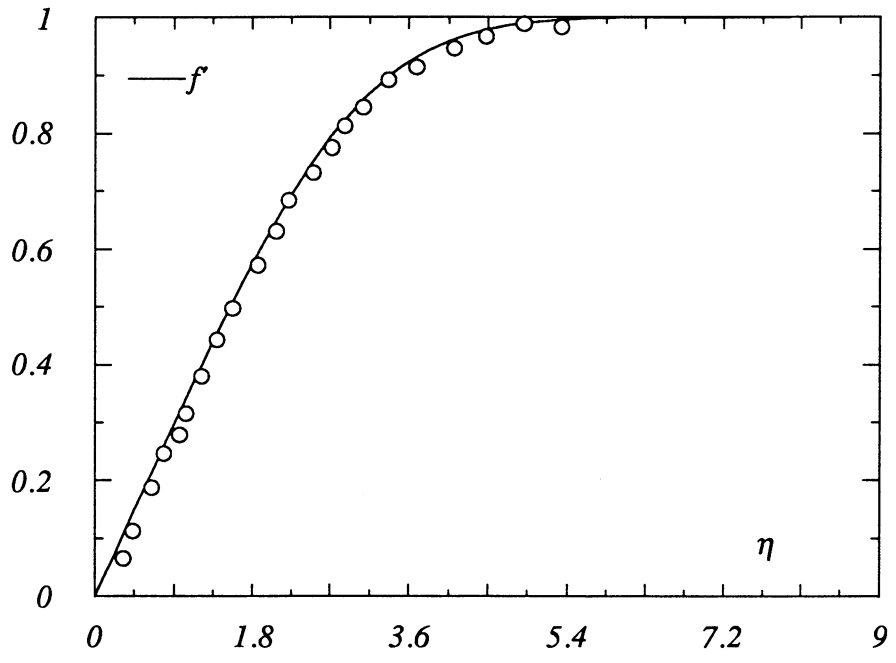


***Figure 3.** Distribution de vitesse dans une couche limite laminaire sur une plaque plane.*

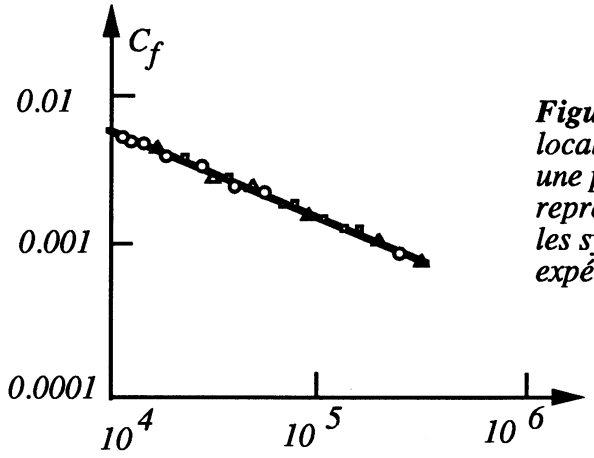


***Figure 4.** Coefficient de frottement local pour une couche limite sur une plaque plane. Le trait plein représente la valeur théorique, les symboles correspondent à des expériences.*

Les tableaux 3, 4 et 5 résument les équations de départ, la représentation sous forme de profils auto-semblables et les résultats principaux de la résolution numérique du problème de Blasius.

Tableau 3. Equations fondamentales pour la couche limite laminaire (écoulement bidimensionnel, stationnaire incompressible)

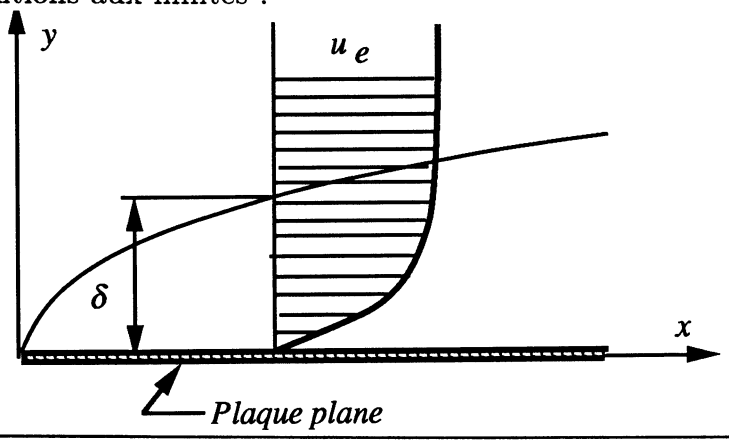
Equations de la couche limite :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Dans l'écoulement externe, $p + 1/2\rho u_e^2 =$ constante

Conditions aux limites :



$$u(x,0) = v(x,0) = 0$$

$$u(x,\infty) = u_e(x)$$

Tableau 4. Résolution des équations de la couche limite sur une plaque plane à l'aide de la fonction de courant

1) Fonction de courant :

$$\psi = (u_e \nu x)^{1/2} f(\eta)$$
$$\eta = y/(\frac{\nu x}{u_e})^{1/2}$$

2) Equation pour $f(\eta)$:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

3) Conditions aux limites :

$$f(0) = f'(0) = 0$$
$$f'(\infty) = 1$$

4) Composantes du vecteur vitesse :

$$u = u_e f'(\eta)$$
$$v = \frac{1}{2}(\frac{\nu u_e}{x})^{1/2}(\eta f' - f)$$

5) Contrainte pariétale :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = f''(0)(\frac{\nu}{u_e x})^{1/2}$$

Tableau 5. Résultats principaux pour la couche limite laminaire sur une plaque plane

Epaisseur de la couche limite :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{(Re_x)^{1/2}}$$

Epaisseur de déplacement :

$$\frac{\delta_*(x)}{x} = \frac{1.73}{(Re_x)^{1/2}}$$

Epaisseur de quantité de mouvement :

$$\frac{\theta(x)}{x} = \frac{0.664}{(Re_x)^{1/2}}$$

Contrainte pariétale :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{0.332}{(Re_x)^{1/2}}, \quad c_f = \frac{\tau_w}{(1/2)\rho\, u_e^2} = \frac{0.664}{(Re_x)^{1/2}}$$

Vitesse transversale en $y = \delta$:

$$v(x,\delta) = \frac{0.86\, u_e}{(Re_x)^{1/2}}$$

Nombre de Reynolds :

$$Re_x = \frac{x u_e}{\nu}$$

XVII.5. Equations intégrales pour les couches limites

Les équations obtenues en intégrant les équations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse sur toute l'épaisseur de la couche limite sont utiles dans de nombreuses circonstances. Ces équations permettent en particulier d'analyser l'écoulement à l'aide de méthodes approchées et elles constituent un outil pour l'interprétation qualitative des résultats.

La méthode des équations intégrales peut être utilisée pour étudier de nombreux autres problèmes de mécanique des fluides (ondes longues à la surface d'un liquide, développement d'écoulements libres du type jet ou sillage, propagation de flammes dans les conduits etc.).

Nous allons ici établir les équations intégrales pour la couche limite dans le cas d'un écoulement bidimensionnel incompressible.

XVII.5.1. Equation intégrale pour l'entraînement

Considérons d'abord l'équation de continuité : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

L'intégration de cette équation sur l'épaisseur de la couche limite donne :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0$$

Le deuxième terme est facilement intégré :

$$\int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = v(x,\delta) - v(x,0)$$

Comme $v(x,0) = 0$, on obtient pour la vitesse transversale à la frontière de la couche limite $v_e = v(x,\delta)$ la relation suivante:

$$v_e = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$v_e = -\frac{d}{dx}\int_0^\delta u dy + u_e \frac{d\delta}{dx} \qquad (XVII,50)$$

On peut introduire dans cette expression l'épaisseur de déplacement δ_*. En écoulement incompressible, cette épaisseur est définie par :

$$\delta_* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{u_e}) dy$$

et on peut donc écrire :

$$\delta_* u_e - \delta u_e = -\int_0^\delta u dy \qquad (XVII,51)$$

En portant cette dernière relation dans (XVII,50), on obtient :

$$v_e = \frac{d}{dx}(\delta_* u_e - \delta u_e) + u_e \frac{d\delta}{dx}$$

soit :

$$v_e = \frac{d}{dx}(u_e \delta_*) - \delta \frac{du_e}{dx} \qquad (XVII,52)$$

Cette expression donne la vitesse transversale sur la frontière de la couche limite en fonction de u_e, δ_* et δ. Elle permet par exemple de retrouver la vitesse v_e à partir de l'expression de δ_* pour la couche limite sur une plaque plane. En effet dans ce cas u_e = constante et $\delta_* = 1.72\, x/(Re_x)^{1/2}$. On a donc :

$$v_e = u_e \frac{d\delta_*}{dx} = \frac{1}{2} 1.72\, u_e (\frac{\nu}{x\, u_e})^{1/2}$$

soit :

$$v_e = 0.860 \frac{u_e}{(Re_x)^{1/2}}$$

et cette expression est bien celle que nous avions donnée plus haut.

XVII.5.2. La vitesse d'entraînement

Considérons maintenant le débit volume qui passe par unité d'envergure à l'intérieur de la couche limite, c'est-à-dire entre 0 et δ. Ce débit volume a pour expression (figure 5) : $\int_O^\delta u dy$.

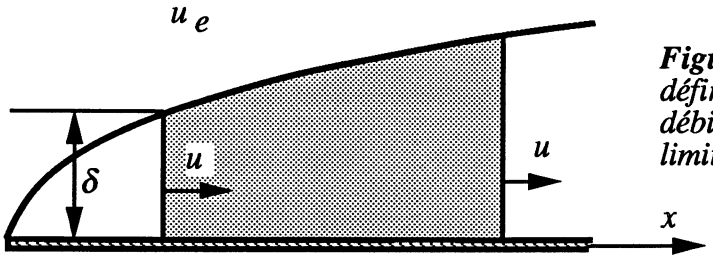


***Figure 5.** La vitesse d'entrainement est définie comme le taux de variation du débit volume passant dans la couche limite par unité d'envergure.*

et la vitesse d'entraînement peut être définie comme le taux de variation de ce débit volume en fonction de x :

$$v_E = \frac{d}{dx}\int_O^\delta u dy \qquad (XVII, 53)$$

D'après (XVII,51), cette expression peut encore s'écrire :

$$v_E = \frac{d}{dx} u_e(\delta - \delta_*) \qquad (XVII, 54)$$

ou encore en utilisant (XVII,52) :

$$v_E = u_e \frac{d\delta}{dx} - v_e$$

XVII.5.3. Equation intégrale pour la quantité de mouvement (Equation de Kármán)

La démonstration, relativement longue, de cette équation est donnée à l'Annexe A. L'intégration de l'équation de la quantité de mouvement sur l'épaisseur de la couche limite conduit à l'expression suivante :

$$\frac{d\theta}{dx} + (\delta_* + 2\theta)\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \qquad (XVII, 55)$$

que l'on peut aussi écrire en faisant apparaître le facteur de forme et le coefficient de frottement local :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H + 2)\frac{\theta}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{c_f}{2} \qquad (XVII, 56)$$

Cette équation intégrale, due à Von Kármán, relie les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement à la variation de vitesse extérieure et au coefficient de frottement local.

L'équation est applicable à des couches limites incompressibles, soumises ou non à un gradient de pression. L'écoulement dans la couche limite peut être **laminaire** ou **turbulent.**

Notons que cette expression généralise la relation obtenue au chapitre XVI sur la base d'un bilan des quantités de mouvement pour un volume de contrôle élémentaire. Pour fixer les idées, considérons d'abord l'application élémentaire suivante :

Exemple 1

Calculer la vitesse d'entraînement pour une couche limite sur une plaque plane en l'absence d'un gradient de pression.

Solution

Pour calculer la vitesse d'entraînement, nous avons besoin des expressions de l'épaisseur δ et de la vitesse transversale v_e sur la frontière de la couche limite. Ici :

$$\delta = 5x/(Re_x)^{1/2} \quad \text{et} \quad v_e = 0.860\, u_e/(Re_x)^{1/2}$$

On obtient facilement :

$$v_E = 1.640\, u_e/(Re_x)^{1/2}$$

L'entraînement est positif, indiquant l'augmentation continue du débit masse passant dans la couche limite.

Exemple 2

En utilisant l'équation de Kármán, retrouver l'expression de $\tau_w/\rho\, u_e^2$ pour une couche limite laminaire sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression axial.

Solution

Dans le cas d'une couche limite laminaire sur une plaque plane : $du_e/dx = 0$ et :

$$\theta = 0.664\frac{x}{(Re_x)^{1/2}} = 0.664(\frac{\nu x}{u_e})^{1/2} \qquad (XVII, 57)$$

L'équation intégrale de Kármán (XVII,55) donne :

$$\frac{\tau_w}{\rho\, u_e^2} = \frac{d\theta}{dx}$$

et en portant (XVII,57) dans cette expression, on obtient :

$$\frac{\tau_w}{\rho\, u_e^2} = \frac{1}{2}0.664(\frac{\nu}{u_e\, x})^{1/2}$$

soit :

$$\frac{\tau_w}{\rho\, u_e^2} = \frac{0.332}{(Re_x)^{1/2}}$$

XVII.5.4. Analyse de la couche limite par la méthode de Kármán-Polhausen

Nous allons maintenant montrer comment on peut utiliser l'équation intégrale de Kármán pour obtenir de façon simple mais approximative la plupart des propriétés importantes de l'écoulement dans la couche limite. La méthode que nous allons présenter est due à Kármán et Polhausen.

Pour simplifier cette présentation, nous considérons encore le cas d'une couche limite laminaire sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression. Dans cette situation, nous avons les conditions aux limites suivantes :

en $y = 0$:

$$u(x,0) = 0,\ v(x,0) = 0 \qquad (XVII,58)$$

en $y = \delta$:

$$u(x,\delta) = u_e,\ \frac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0 \qquad (XVII,59)$$

D'autre part, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit, à l'intérieur de la couche limite, sous la forme :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (XVII,60)$$

Si on applique cette équation en $y = 0$, on obtient :

$$u(x,0)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)_{y=0} + v(x,0)\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{y=0} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)_{y=0}$$

et en utilisant les conditions (XVII,58), on trouve :

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{y=0} = 0 \qquad (XVII,61)$$

Pour une couche limite sur une plaque plane, en l'absence de gradient de pression, la courbure du profil de vitesse est nulle à la paroi.

L'idée de base de la méthode de Kármán-Polhausen consiste à représenter le profil de vitesse sous une forme approchée satisfaisant au moins partiellement les conditions aux limites du problème.

Nous avons ici quatre conditions (XVII,58), (XVII,59),(XVII,61) sur u et on peut utiliser par exemple un profil de vitesse du type polynôme du troisième ordre :

$$u = a_o + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \qquad (XVII,62)$$

Les dérivées première et seconde de ce profil sont respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2a_2 + 6a_3 y$$

La condition $u(x,0) = 0$ donne immédiatement $a_o = 0$. On a aussi $(\partial^2 u/\partial y^2)_{y=0}$ qui se traduit par $a_2 = 0$.

Les conditions (XVII,59) ont alors pour conséquence :

$$\begin{aligned} u_e &= a_1\delta + a_3\delta^3 \\ 0 &= a_1 + 3a_3\delta^2 \end{aligned}$$

et on déduit facilement :

$$a_1 = \frac{3}{2}\frac{u_e}{\delta}, \qquad a_3 = -\frac{u_e}{2\delta^3}$$

Le profil de vitesse prend la forme suivante :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3 \qquad (XVII,63)$$

Nous allons maintenant utiliser ce profil pour calculer l'épaisseur de quantité de mouvement θ. Par définition :

$$\theta = \int_O^\delta \frac{u}{u_e}(1 - \frac{u}{u_e})dy$$

Il est commode d'introduire la variable :

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

Avec cette variable :

$$\frac{u}{u_e} = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \qquad (XVII,64)$$

et l'épaisseur de quantité de mouvement θ s'écrit :

$$\theta = \delta \int_0^1 [\frac{u}{u_e} - (\frac{u}{u_e})^2]d\eta$$

En substituant (XVII,64) dans cette expression, on obtient :

$$\theta = \delta \int_0^1 [\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 - (\frac{9}{4}\eta^2 - \frac{3}{2}\eta^4 + \frac{1}{4}\eta^6)]d\eta$$

soit :

$$\theta = \delta \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\eta - \frac{9}{4}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta^4 - \frac{1}{4}\eta^6\right)d\eta$$

et après intégration :

$$\theta = \delta(\frac{3}{4} - \frac{9}{12} - \frac{1}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{28})$$

c'est-à-dire :

$$\theta = \delta\frac{39}{280} \qquad (XVII,65)$$

Nous allons maintenant exprimer $\tau_w/\rho u_e^2$ à l'aide du profil de vitesse (XVII,64). Pour cela, nous partons de :

$$\tau_w = \mu(\frac{\partial u}{\partial y})_{y=0} = \frac{\mu u_e}{\delta}\frac{d}{d\eta}(\frac{u}{u_e})_{\eta=0} \qquad (XVII,66)$$

et d'après (XVII,64) :

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_e}{\delta}$$

Dans ces conditions :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{3}{2}\frac{\nu}{\delta u_e} \qquad (XVII,67)$$

Les expressions (XVII,65) et (XVII,67) peuvent être substituées dans l'équation de Kármán qui s'écrit ici :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{39}{280}\frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2}\frac{\nu}{\delta u_e}$$

soit :

$$\frac{d\delta^2}{dx} = \frac{280}{13}\frac{\nu}{u_e}$$

Comme l'épaisseur de la couche limite est nulle au bord d'attaque, $\delta = 0$ en $x = 0$, cette équation donne par intégration :

$$\delta^2 = \frac{280}{13}\frac{\nu x}{u_e}$$

soit :

$$\frac{\delta}{x} = 4.63(\frac{\nu}{u_e x})^{1/2} = \frac{4.63}{(Re_x)^{1/2}} \qquad (XVII,68)$$

Cette expression détermine complètement le profil de vitesse (XVII,64), l'épaisseur de quantité de mouvement θ, la contrainte pariétale et le rapport $\tau_w/\rho u_e^2$ (XVII,67). On obtient facilement :

$$\frac{\theta}{x} = \frac{39}{280}\frac{4.63}{(Re_x)^{1/2}} = \frac{0.644}{(Re_x)^{1/2}} \qquad (XVII,69)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{3}{2}\frac{\nu}{u_e x}\frac{(Re_x)^{1/2}}{4.63} = \frac{0.323}{(Re_x)^{1/2}} \qquad (XVII,70)$$

Ces expressions sont très proches des relations exactes présentées plus haut et reproduites ci-dessous :

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{(Re_x)^{1/2}}, \quad \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{0.332}{(Re_x)^{1/2}}$$

On peut donc obtenir à l'aide de cette méthode approchée la plupart des résultats utiles en pratique et ceci sans avoir à déterminer de façon exacte la forme du profil de vitesse.

Nous avons présenté la méthode de Kármán-Polhausen en utilisant un profil de vitesse polynômial du troisième degré. Le choix du profil de vitesse est en fait arbitraire et on peut essayer d'utiliser d'autres types de polynômes de degré plus ou moins élevé. Le tableau 6 donne quelques exemples de profils polynômiaux ainsi que les résultats obtenus pour le produit $(\tau_w/\rho u_e^2)(Re_x)^{1/2}$, en appliquant la méthode de Kármán-Polhausen.

On constate que le résultat n'est pas sensiblement influencé par le profil utilisé pour représenter la vitesse dans la couche limite.

Tableau 7. L'équation intégrale de Von Kármán

Couche limite bidimensionnelle en écoulement incompressible :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}(2\theta + \delta_*) = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}$$

ou encore :

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{u_e}\frac{du_e}{dx}(H + 2) = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}$$

Couche limite bidimensionnelle sur une plaque plane :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}$$

Tableau 6

Polynôme utilisé pour définir le profil de vitesse	Conditions aux limites	Profil obtenu ($\eta = y/\delta$)	Valeur obtenue pour $(\tau_w/\rho u_e^2)(Re_x)^{1/2}$
$u = a_o + a_1 y$	$y = 0,\ u = 0,$ $y = \delta,\ u = u_e.$	$u/u_e = \eta$	0.289
$u = a_o + a_1 y + a_2 y^2$	$y = 0,\ u = 0,$ $y = \delta,\ u = u_e,$ $\partial u/\partial y = 0.$	$u/u_e = 2\eta - \eta^2$	0.375
$u = a_o + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$	$y = 0,\ u = 0,$ $\partial^2 u/\partial y^2 = 0,$ $y = \delta,\ u = u_e,$ $\partial u/\partial y = 0.$	$u/u_e = (3/2)\eta - (1/2)\eta^3$	0.323
$u = a_o + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$ $+ a_4 y^4$	$y = 0,\ u = 0,$ $\partial^2 u/\partial y^2 = 0,$ $y = \delta,\ u = u_e,$ $\partial u/\partial y = 0,$ $\partial^2 u/\partial y^2 = 0.$	$u/u_e = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	0.343
Solution exacte de l'équation de Blasius			0.332

ANNEXE A

DEMONSTRATION DE L'EQUATION INTEGRALE DE VON KARMAN

Pour établir l'équation intégrale de von Kármán, nous partons de l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x qui s'écrit dans l'approximation de couche limite :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (A,1)$$

Pour la commodité du développement, il est préférable de remplacer $-(1/\rho)\,dp/dx$ par $u_e\,du_e/dx$ et $\nu\,\partial^2 u/\partial y^2$ par $(1/\rho)\,\partial\tau/\partial y$ où τ représente la contrainte visqueuse $\tau_{xy} = \mu\,\partial u/\partial y$

Ainsi (A,1) devient :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (A,2)$$

L'équation de continuité a ici pour forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Multiplions cette équation par u et ajoutons-la à l'équation (A,2). On obtient facilement :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}uv = u_e\frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \qquad (A,3)$$

Nous allons maintenant intégrer cette équation dans la direction transversale entre 0 et δ

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy + \int_0^\delta \frac{\partial uv}{\partial y}dy = \int_0^\delta u_e\frac{du_e}{dx}dy + \int_0^\delta \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}dy \qquad (A,4)$$

(1) (2) (3) (4)

puis transformer tous les termes de cette expression pour faire apparaître les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement et le coefficient de frottement local.

Considérons d'abord le deuxième terme :

$$\int_0^\delta \frac{\partial uv}{\partial y}dy = u(x,\delta)v(x,\delta) - u(x,0)v(x,0)$$

Sur la frontière externe et sur la paroi, on peut écrire $u(x,\delta) = u_e$, $v(x,\delta) = v_e$ et $u(x,0) = 0$, $v(x,0) = 0$ et ce terme devient :

$$\int_0^\delta \frac{\partial uv}{\partial y} dy = u_e v_e$$

Il est commode de remplacer v_e par l'expression obtenue en intégrant l'équation de continuité. Ainsi :

$$\int_0^\delta \frac{\partial uv}{\partial y} dy = -u_e \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \qquad (A,5)$$

Considérons à présent le quatrième terme :

$$\int_0^\delta \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho}[\tau(x,\delta) - \tau(x,0)]$$

La contrainte à la frontière de la couche limite est nulle, car $(\partial u/\partial y)_{y=\delta} = 0$. Dans ces conditions, l'expression précédente devient :

$$\int_0^\delta \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad (A,6)$$

où τ_w représente la contrainte pariétale $\tau_w = \tau(x,0)$
En portant (A,5) et (A,6) dans l'équation (A,4), on obtient :

$$\int_0^\delta [\frac{\partial u^2}{\partial x} - u_e \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx}] dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad (A,7)$$

On va maintenant chercher à exprimer le premier membre à l'aide des épaisseurs θ et δ_*. Pour cela, on peut d'abord écrire l'intégrale de (A,7) sous la forme :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} - u_e \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} u(u_e - u) - \frac{du_e}{dx}(u_e - u) \qquad (A,8)$$

L'équation (A,7) devient :

$$-\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} u(u_e - u) dy - \frac{du_e}{dx} \int_0^\delta (u_e - u) dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad (A,9)$$

Le premier terme de cette équation peut encore s'écrire :

$$-\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} u(u_e - u) dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u(u_e - u) dy + [u(u_e - u)]_{y=\delta} \frac{d\delta}{dx}$$

Comme $(u_e - u)$ est identiquement nul en $y = \delta$, on a :

$$-\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} u(u_e - u) dy = -\frac{d}{dx} \int_0^\delta u(u_e - u) dy = -\frac{d}{dx} u_e^2 \int_0^\delta \frac{u(u_e - u)}{u_e^2} dy$$

soit finalement :

$$-\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} u(u_e - u)dy = -\frac{d}{dx}(u_e^2\theta) \qquad (A,10)$$

Le second terme de l'équation (A,9) s'écrit :

$$-\frac{du_e}{dx}\int_0^\delta (u_e - u)dy = -u_e\frac{du_e}{dx}\int_0^\delta \frac{u_e - u}{u_e}dy = -u_e\frac{du_e}{dx}\delta_* \qquad (A,11)$$

En insérant (A,10) et (A,11) dans l'équation (A,9), on obtient :

$$\frac{d}{dx}(u_e^2\theta) + u_e\frac{du_e}{dx}\delta_* = \frac{\tau_w}{\rho} \qquad (A,12)$$

ou encore :

$$\frac{d\theta}{dx} + (\delta_* + 2\theta)\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \qquad (A,13)$$

On peut encore faire apparaître le facteur de forme et le coefficient de frottement local :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + (H+2)\frac{\theta}{u_e}\frac{du_e}{dx} = \frac{c_f}{2}} \qquad (A,14)$$

L'équation précédente a été établie pour un écoulement bidimensionnel, incompressible sans toutefois spécifier la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement.

CHAPITRE XVIII

COUCHE LIMITE LAMINAIRE EN ECOULEMENT INCOMPRESSIBLE AVEC GRADIENT DE PRESSION

XVIII.1. Introduction

La couche limite est très sensible aux gradients de pression externes. Ces gradients modifient sa structure et déterminent l'évolution générale de l'écoulement au voisinage de la paroi. Lorsque le gradient de pression correspond à une décélération de l'écoulement externe, la contrainte pariétale diminue et le profil de vitesse peut éventuellement prendre une pente initiale nulle. A partir de ce point, la couche limite peut décoller de la paroi et un écoulement de retour peut apparaître en aval du décollement.

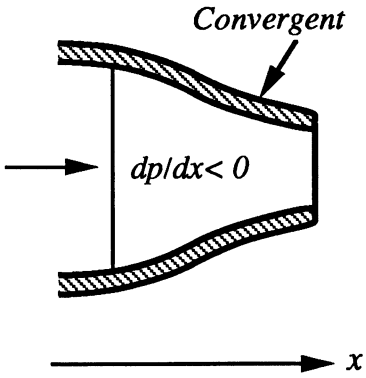
Lorsque le gradient de pression correspond à une accélération de l'écoulement externe, la contrainte pariétale augmente, les échanges de quantité de mouvement dans la couche limite deviennent plus intenses et les filets fluides adhèrent à la paroi.

Des gradients de pression existent dans de nombreuses configurations pratiques comme les tuyères convergentes-divergentes, les diffuseurs, l'extrados et l'intrados de profils et de voilures, les grilles d'aubes de turbomachines... Dans tous ces éléments, les couches limites pariétales sont fortement influencées par le gradient de pression externe.

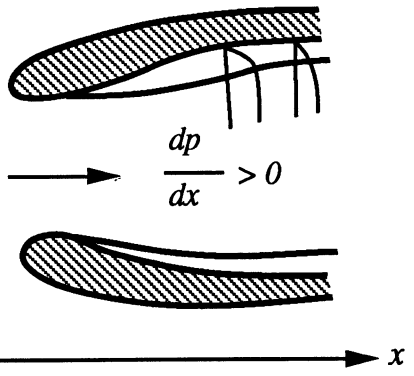
L'étude des phénomènes qui viennent d'être évoqués peut être menée à l'aide des équations de la couche limite établies au chapitre XVII. Notons cependant que ces équations ne sont pas applicables en aval du point de décollement. En effet, les approximations de couche limite ne peuvent être utilisées dans cette région, et on doit poursuivre les calculs avec les équations de Navier-Stokes. Cette première étude des effets des gradients de pression externes est basée sur les équations de Falkner-Skan. Celles-ci sont obtenues au terme d'un processus de recherche des solutions auto-semblables des équations de la couche limite. Nous verrons que de telles solutions existent lorsque le champ de vitesse externe est de la forme : $u_e = c_o x^m$, c'est-à-dire lorsque le gradient de pression externe possède une forme polynomiale :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -c_o m x^{2m-1}$$

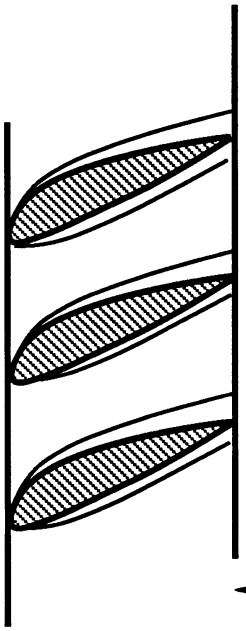
L'analyse s'applique donc à des types d'écoulements externes **particuliers**. Cependant, les conclusions qualitatives obtenues ici peuvent s'étendre à des situations plus générales.



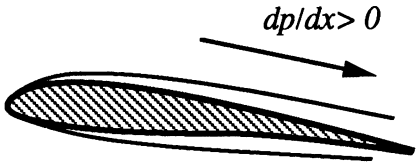
(a) La couche limite se développe ici en présence d'un gradient de pression négatif et donc "favorable".



(b) La couche limite dans cette prise d'air se développe en présence d'un gradient de pression positif et donc "défavorable".



(c) Les couches limites dans une grille d'aubes de turbomachine sont soumises à des gradients de pression externes.



(d) Sur l' extrados, le gradient de pression dévient positif à partir d'une certaine distance du bord d' attaque du profil et ce gradient peut entraîner le décollement de la couche limite.

Figure 1. *Quelques types de couches limites soumises à des gradients de pression.*

L'intérêt principal de l'analyse théorique qui va suivre est de permettre de comprendre pourquoi un **gradient de pression positif**, correspondant à une décélération de l'écoulement, est **défavorable** et peut conduire au décollement de la couche limite. Nous verrons aussi pourquoi un **gradient de pression négatif**, correspondant à une accélération de l'écoulement, est au contraire **favorable**.

XVIII.2. Equations de la couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression axial

Considérons à nouveau l'écoulement bidimensionnel laminaire sur une plaque plane, mais supposons maintenant qu'un gradient de pression existe dans l'écoulement externe. Ce gradient peut être produit par exemple à l'aide d'une deuxième paroi, convergente ou divergente, qui entraîne l'accélération ou la décélération de l'écoulement (figure 2).

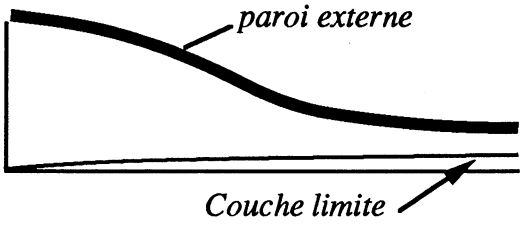


***Figure 2.** La couche limite qui s'établit sur la plaque plane est soumise au gradient de pression imposé par la paroi convergente.*

Dans ces conditions, les équations de la couche limite peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (XVIII,1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (XVIII,2)$$

avec comme conditions aux limites :

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad u(x,\infty) = u_e \qquad (XVIII,3)$$

Dans l'écoulement externe, l'équation de Bernoulli donne une relation entre p et u_e :

$$p + \frac{1}{2}u_e^2 = \text{constante} \qquad (XVIII,4)$$

que l'on peut encore écrire sous forme différentielle :

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = u_e\frac{du_e}{dx} \qquad (XVIII,5)$$

L'équation (XVIII,2) peut donc s'écrire sous la forme équivalente :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (XVIII,6)$$

Comme pour le problème de Blasius, il est commode d'introduire la fonction de courant $\psi(x,y)$ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (XVIII,7)$$

L'équation de continuité (XVIII,1) est ainsi automatiquement satisfaite et il nous reste à résoudre l'équation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \qquad (XVIII,8)$$

Les conditions aux limites exprimées à l'aide de ψ sont :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\infty) = u_e \qquad (XVIII,9)$$

La seconde condition peut être intégrée suivant x. On obtient ainsi :

$$\psi(x,0) - \psi(0,0) = 0 \qquad (XVIII,10)$$

On peut donc remplacer la deuxième condition à la limite (XVIII,9) par $\psi(x,0) = 0$.
En définitive, l'analyse va porter sur le problème aux limites suivant :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \qquad (XVIII,11)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \psi(x,0) = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\infty) = u_e(x) \qquad (XVIII,12)$$

XVIII.3. Recherche de solutions semblables

XVIII.3.1. La méthode de Falkner-Skan

Nous allons maintenant déterminer les conditions dans lesquelles le problème précédent possède des solutions auto-semblables. A cet effet, nous allons d'abord transcrire le problème (XVIII,11 et 12) en fonction de deux nouvelles variables ζ et η, puis nous chercherons les conditions nécessaires pour que η devienne une variable de similitude (c'est-à-dire pour que les profils de vitesse dans chaque section ne dépendent plus que de η). Posons :

$$\zeta = x, \quad \text{et} \quad \eta = yg(x)$$

Pour écrire l'équation (XVIII,11) en fonction de ces nouvelles variables, il faut calculer les dérivées par rapport à x et y. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta} + \eta\frac{g'}{g}\frac{\partial}{\partial\eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) = g\frac{\partial}{\partial\eta}\end{aligned} \qquad (XVIII,13)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial x}) = g\frac{\partial}{\partial \eta}[(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}) + \eta\frac{g'}{g}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}] \qquad (XVIII, 15)$$

Comme g'/g ne dépend que de x, c'est-à-dire de ζ, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \psi}{\partial x}) = g\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + g'\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \eta g'\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \qquad (XVIII, 16)$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = g^3\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3}$$

L'équation (XVIII,11) devient :

$$\begin{aligned} g\frac{\partial \psi}{\partial \eta}[g\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + g'\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \eta g'\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}] - [\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \eta\frac{g'}{g}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}][g^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}] \\ = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu g^3\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \end{aligned} \qquad (XVIII, 17)$$

L'expression précédente peut être simplifiée et prend la forme :

$$g\frac{\partial \psi}{\partial \eta}[g\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + g'\frac{\partial \psi}{\partial \eta}] - g^2\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = u_e\frac{du_e}{dx} + \nu g^3\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \qquad (XVIII, 18)$$

avec comme conditions aux limites :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\zeta, 0) = 0, \quad \psi(\zeta, 0) = 0, \quad g\frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\zeta, \infty) = u_e(\zeta) \qquad (XVIII, 19)$$

Ainsi formulé, le problème est encore trop général et nous allons nous borner à rechercher des solutions dans la situation suivante :

$$u_e(\zeta) = c_o\zeta^m, \quad g(\zeta) = c_1\zeta^\alpha, \quad \psi(\zeta, \eta) = c_2\zeta^\beta f(\eta) \qquad (XVIII, 20)$$

où c_o, c_1, c_2, m, α et β sont des constantes. Le paramètre m est supposé donné au départ et sa valeur correspond à la situation pratique envisagée.
En substituant ces trois expressions dans l'équation (XVIII,19), on obtient :

$$\begin{aligned} c_1\zeta^\alpha c_2\zeta^\beta f'[c_1\zeta^\alpha c_2\beta\zeta^{\beta-1}f' + c_1\alpha\zeta^{\alpha-1}c_2\zeta^\beta f'] \\ - c_1^2\zeta^{2\alpha}c_2\beta\zeta^{\beta-1}fc_2\zeta^\beta f'' \\ = c_o^2 m\zeta^{2m-1} + \nu c_1^3\zeta^{3\alpha}c_2\zeta^\beta f''' \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)c_1^2c_2^2\zeta^{2\alpha+2\beta-1}(f')^2 - c_1^2c_2^2\beta\zeta^{2\alpha+2\beta-1}ff'' \\ = mc_o^2\zeta^{2m-1} + \nu c_1^3c_2\zeta^{3\alpha+\beta}f''' \end{aligned} \qquad (XVIII, 21)$$

Pour que cette équation soit homogène en ζ, il faut :

$$2\alpha + 2\beta - 1 = 2m - 1$$

$$2\alpha + 2\beta - 1 = 3\alpha + \beta$$

soit encore :

$$2\alpha + 2\beta - 1 = 2m - 1$$

$$-\alpha + \beta - 1 = 0$$

Ces relations conduisent à choisir les paramètres suivants :

$$\alpha = \frac{m-1}{2}, \qquad \beta = \frac{m+1}{2}$$

On peut dans cette situation éliminer totalement la variable ζ de l'équation (XVIII,21) :

$$mc_1^2c_2^2(f')^2 - \frac{m+1}{2}c_1^2c_2^2ff'' = mc_o^2 + \nu c_1^3c_2f''' \qquad (XVIII,22)$$

En général, c_o est donné à priori mais c_1 et c_2 sont des constantes que l'on peut spécifier arbitrairement. Il est commode d'imposer :

$$c_1^2c_2^2 = c_o^2, \quad c_1^2c_2^2 = \nu c_1^3c_2$$

D'après ces deux relations, $c_2 = \nu c_1$ et on obtient : $c_1 = (c_o/\nu)^{1/2}$, $\quad c_2 = (\nu c_o)^{1/2}$
L'équation (XVIII,22) devient dans ce cas :

$$f''' + \frac{m+1}{2}ff'' + m(1 - f'^2) = 0$$

La variable η est donnée par :

$$\eta = yc_1\zeta^\alpha = (\frac{c_o}{\nu})^{1/2}x^{(m-1)/2}y$$
$$= (\frac{c_ox^m}{\nu x})^{1/2}y$$

Comme la vitesse externe a la forme : $u_e = c_ox^m$, la variable η peut encore s'écrire :

$$\eta = \frac{y}{(\nu x/u_e)^{1/2}} \qquad (XVIII,23)$$

La fonction de courant a pour expression : $\psi = c_2\zeta^\beta f(\eta)$, soit :

$$\psi = (\nu c_o)^{1/2}x^{(m+1)/2}f(\eta) = (\nu c_ox^mx)^{1/2}f(\eta)$$

Ainsi : $\psi = (\nu u_e x)^{1/2}f(\eta)$
Les conditions aux limites sur la paroi donnent immédiatement : $f'(0) = 0, f(0) = 0$.
Sur la frontière externe de la couche limite :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\infty) = u_e$$

Comme :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = g\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = (\frac{c_o}{\nu})^{1/2} x^{(m-1)/2} (u_e \nu x)^{1/2} f'(\eta)$$
$$= u_e f'(\eta)$$

Cette condition devient : $f'(\infty) = 1$.
En définitive, nous avons à traiter le problème suivant :

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0 \qquad (XVIII, 24)$$
$$f(0) = f'(0) = 0,\ f'(\infty) = 1$$

avec :

$$u_e = c_o x^m, \quad \psi(x,y) = (u_e \nu x)^{1/2} f(\eta), \quad \eta = y/(\frac{\nu x}{u_e})^{1/2}$$

L'équation différentielle obtenue pour f est l'équation de Falkner-Skan.

XVIII.3.2. Grandeurs caractéristiques de la couche limite

Il est intéressant d'exprimer les épaisseurs δ_* et θ et le coefficient de frottement pariétal à l'aide de la fonction f. Les calculs sont en tous points identiques à ceux déjà effectués au chapitre précédent pour la couche limite sur une plaque plane.
On trouve facilement :

$$\delta_* = \frac{x}{(Re_x)^{1/2}} \delta_{1*}, \quad \theta = \frac{x}{(Re_x)^{1/2}} \theta_1, \quad c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} = 2\frac{f''(0)}{(Re_x)^{1/2}}$$

Dans ces expressions Re_x désigne le nombre de Reynolds

$$Re_x = \frac{u_e x}{\nu}$$

et δ_{1*}, θ_1 sont des épaisseurs adimensionnelles :

$$\delta_{1*} = \int_0^{\eta_\infty} (1 - f')d\eta = \eta_\infty + f(x,0) - f(x,\eta_\infty)$$
$$\theta_1 = \int_0^{\eta_\infty} f'(1 - f')d\eta$$

On peut aussi exprimer la vitesse transversale v à l'aide de la fonction f :

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[(u_e \nu x)^{1/2} f(\eta)]$$

et on obtient facilement :

$$v = \frac{u_e}{(Re_x)^{1/2}} (\frac{\eta}{2} f' - \frac{m+1}{2} f)$$

XVIII.4. Solutions de l'équation de Falkner-Skan

Nous allons maintenant présenter quelques-unes des solutions de l'équation de Falkner-Skan.

Rappelons tout d'abord que la situation étudiée est celle d'une vitesse d'écoulement externe de la forme $u_e = c_o x^m$. Ce type de vitesse extérieure correspond par exemple au cas d'un dièdre placé dans un écoulement uniforme (figure 3). Si le demi-angle au sommet du dièdre est $\alpha = \beta\pi/2$, on peut montrer que la vitesse externe le long du dièdre a pour expression :

$$u_e(x) = c_o x^{\beta/(2-\beta)} \qquad (XVIII, 25)$$

On a donc : $m = \beta/(2-\beta)$

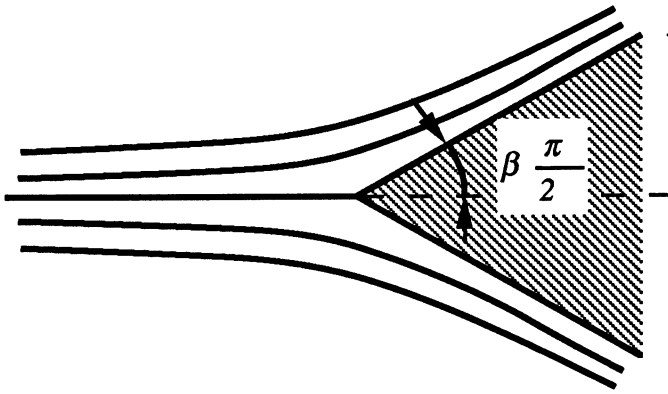


***Figure 3.** Ecoulement uniforme autour d'un dièdre. L'écoulement externe au voisinage du bord d'attaque peut être représenté par les expressions suivantes: $u_e(x) = c_o\, x^{\beta/(2-\beta)}$, $\alpha = \beta\,\pi/2$ où α désigne le demi-angle au sommet.*

Deux cas particuliers importants de ce type d'écoulement correspondent à : $\beta = 0$, et $\beta = 1$. Le premier cas est celui d'un écoulement sur une plaque plane, la valeur de m pour cette situation est $m = 0$ et l'équation de Falkner-Skan se réduit à l'équation de **Blasius** (figure 4) :

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \qquad (XVIII, 26)$$

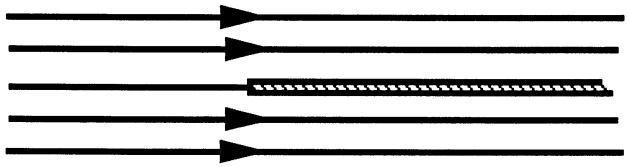


***Figure 4.** Le dièdre est ramené à une plaque plane pour laquelle $\beta = 0$ et $m = 0$.*

Le deuxième cas correspond à l'écoulement bidimensionnel au voisinage d'un point d'arrêt (figure 5). Dans cette situation, $\beta = m = 1$ et l'équation de Falkner-Skan devient :

$$f''' + f f'' - f'^2 + 1 = 0 \qquad (XVIII, 27)$$

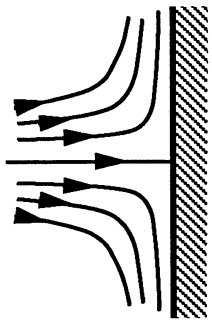
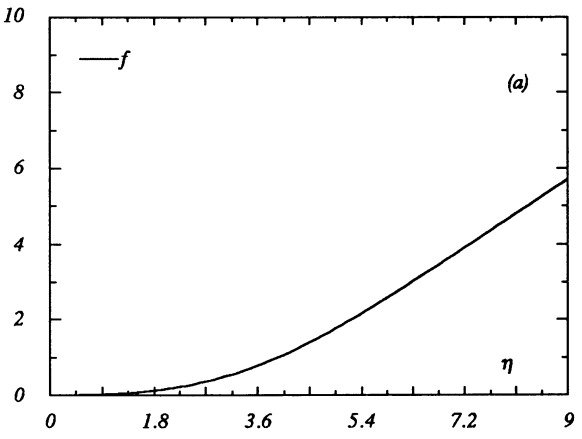
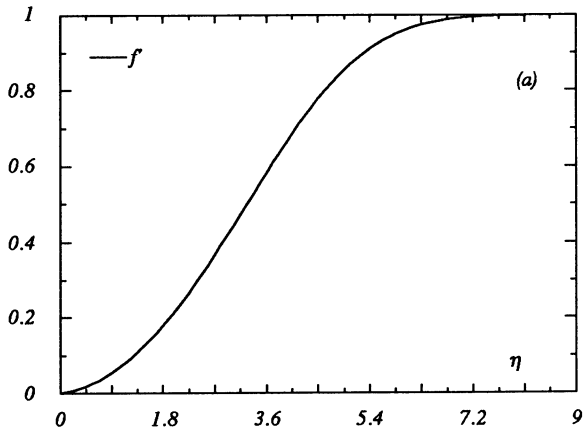


***Figure 5.** Le dièdre présente un demi-angle au sommet de 90°, β=1 et m=1. La situation est celle d'un point d'arrêt en écoulement bidimensionnel.*

Nous avons déjà décrit de façon détaillée le cas $m = 0$. La recherche des solutions de l'équation de Falkner-Skan pour des valeurs de m différentes de zéro s'effectue sans difficulté en utilisant la méthode numérique présentée plus haut. La valeur de $m = -0.0904$ correspond à une situation dans laquelle la dérivée seconde de la fonction f s'annule à la paroi $f''(0) = 0$. Dans ces circonstances, le coefficient de frottement c_f donné par (XVII,41) et la contrainte pariétale τ_w s'annulent et il y a décollement. La figure 7 présente les profils de vitesse réduite $u/u_e = f'(\eta)$ en fonction de η pour trois valeurs de m comprises entre - 0.0904 et 1. On note que la pente du profil à la paroi $d/d\eta(u/u_e)_{\eta=0}$ diminue lorsque la valeur de m diminue. Cette pente s'annule pour $m = -0.0904$ et cette valeur correspond au décollement.

Ainsi, l'effet du gradient de pression apparaît clairement. Un gradient de pression positif correspondant à une valeur de m légèrement négative, conduit au décollement. On dit que le gradient de pression est adverse. Au contraire, **un gradient de pression négatif**, correspondant à l'accélération de l'écoulement dans la direction axiale, apparaît comme **favorable** et la pente du gradient de vitesse à la paroi augmente.





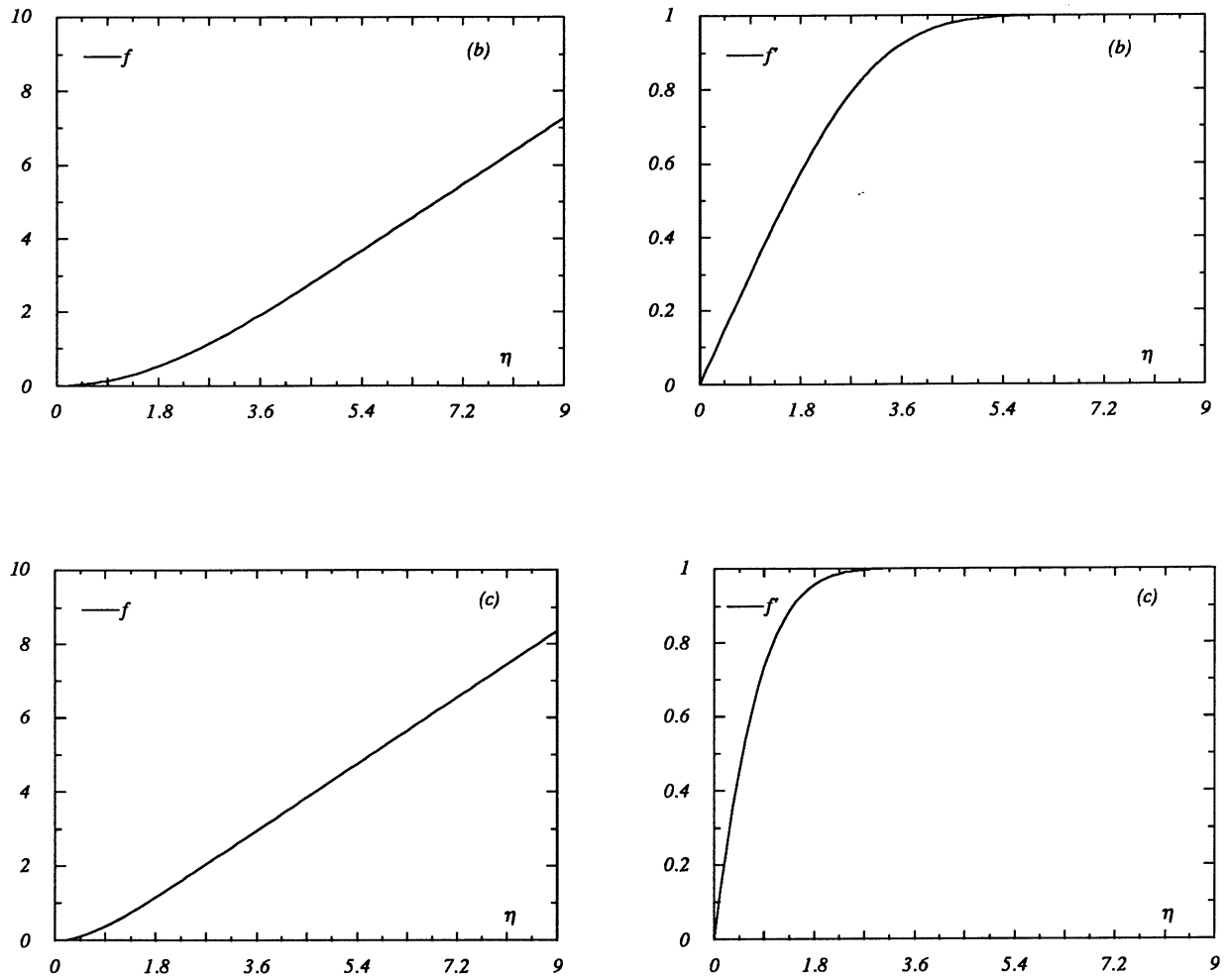


***Figure 6.** La fonction de courant f et sa dérivée f' représentées en fonction de la variable réduite η pour trois valeurs de m. (a) m=-0.090 , (b) m=0, (c) m=1.0.*

Le tableau 1 rassemble les valeurs de $f''(0), \delta_{1*}, \theta_1, H$ pour quelques valeurs de m comprises entre -0.0904 et 1.

Tableau 1. Grandeurs caractéristiques pour les solutions de l'équation de Falkner-Skan correspondantes à diverses valeurs de m

m	$f''(0) = \frac{1}{2} c_f (Re_x)^{1/2}$	δ_{1*}	θ_1	H
- 0.0904	0.0	3.427	0.868	3.94
0.0	0.332	1.720	0.664	2.59
0.33	0.757	0.985	0.429	2.29
1	1.23	0.648	0.292	2.21

L'examen de ce tableau permet de comprendre l'effet du gradient de pression axial sur l'écoulement dans la couche limite. Les gradients de pression favorables, correspondent à des valeurs de m positives, augmentent la valeur du coefficient de frottement et diminuent celles de l'épaisseur de déplacement et de quantité de mouvement. Lorsque m augmente, le facteur de forme diminue. Pour des valeurs de m très grandes, H tend asymptotiquement vers 2.1.

Les gradients de pression adverses, correspondant à une décélération de l'écoulement et à des valeurs négatives de m, font diminuer la valeur du frottement pariétal et font croître les épaisseurs caractéristiques ainsi que le facteur de forme. Pour $m = -0.0904$, le frottement pariétal s'annule, le profil de vitesse devient vertical et le facteur de forme atteint une valeur proche de 4. Cette situation correspond au décollement.

L'analyse que nous venons d'effectuer fournit les solutions auto-semblables pour des gradients de pression ayant la forme d'une puissance de la distance x. On peut cependant utiliser les résultats obtenus pour décrire l'évolution du profil de vitesse dans les configurations plus réalistes de la figure 7.

Considérons tout dabord la section convergente de la figure 7a. Dans cette section, la vitesse extérieure augmente. L'écoulement peut être localement représenté par une expression de la forme $u_e = c\,x^m$ avec m positif. Dans la section d'entrée du convergent, le profil de vitesse correspond à une couche limite en l'absence de gradient de pression ($m = 0$). L'accélération dans le convergent fait diminuer les taux de croissance des épaisseurs de couche limite et augmente le frottement pariétal. Le facteur de forme H passe progressivement de la valeur 2.59 (section d'entrée) à des valeurs plus faibles caractérisant les profils de couches limites accélérées.

Dans la section divergente de la figure 7b, les processus sont inversés. La vitesse extérieure diminue à partir de la section d'entrée et l'écoulement peut être localement représenté par une expression de la forme $u_e = c\,x^m$ avec m légèrement négatif. Dans cette situation, les épaisseurs de couche limite augmentent plus rapidement, le frottement pariétal diminue et le point où la contrainte visqueuse atteint son maximum quitte la plaque plane. A une certaine distance, le profil de vitesse devient vertical au niveau de la paroi. En ce point, le frottement pariétal s'annule et la couche limite décolle.

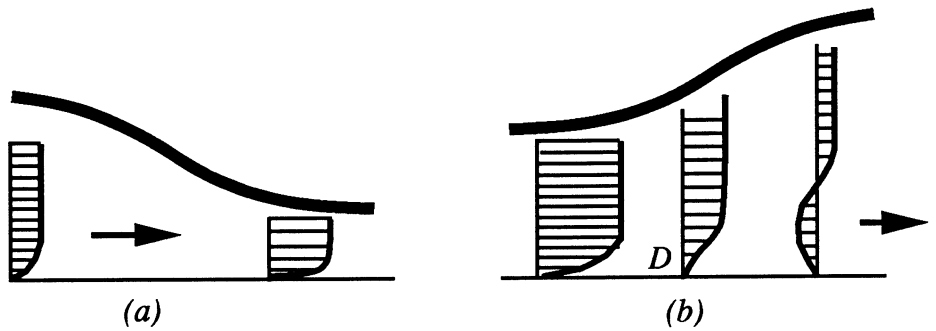


***Figure 7.** Evolution de la couche limite en présence d'un gradient de pression. (a) gradient favorable, (b) gradient défavorable.*

CHAPITRE XIX

ECOULEMENTS TURBULENTS

XIX.1. Introduction

La plupart des écoulements d'intérêt technologique sont turbulents. Le jet qui s'échappe d'un turboréacteur, le panache de fumée issu d'une cheminée, la couche limite qui s'établit sur la voilure d'un avion, l'eau qui circule dans une conduite forcée de barrage, la flamme qui se propage dans un moteur à allumage commandé, le fluide tournant dans un réacteur chimique agité sont des exemples d'écoulements turbulents. L'étude de la turbulence est donc très importante par ses nombreuses applications. On souhaite en général déterminer la structure de l'écoulement, les coefficients aérodynamiques, les coefficients de frottement, les pertes de charge, les flux turbulents de chaleur et de masse. On s'intéresse aux problèmes de décollement, de stabilité d'écoulement, d'amélioration du mélange ou encore au rayonnement de bruit par les fluctuations turbulentes.

La turbulence pose aussi de nombreux problèmes fondamentaux sur son origine, le rôle des instabilités dans le processus de transition, la présence de structures ordonnées, les échanges énergétiques entre les diverses échelles de fluctuations, le rôle de l'intermittence, etc.

Toutes ces questions ne seront pas abordées dans ce chapitre. Pour cette présentation introductive, nous décrirons principalement les bases du traitement statistique de la turbulence et les problèmes de modélisation rencontrés dans cette approche.

Après des considérations générales sur les écoulements turbulents (section 2), nous introduisons les notions d'échelle et de cascade énergétique (section 3). Le traitement statistique des équations à l'aide de la décomposition de Reynolds est abordé dans la section 4. Les équations qui régissent l'écoulement moyen sont établies, et le problème de la **fermeture** de ces équations est abordé.

Les équations de Reynolds sont ensuite spécialisées au cas des écoulements cisaillés minces dans la section 5, ce qui permet l'étude d'une couche de mélange bidimensionnelle. Les méthodes de modélisation des contraintes de Reynolds font l'objet de la section 6.

Bibliographie

La littérature scientifique traitant de la turbulence est extrêmement vaste. Le sujet est traité dans le livre de Hinze 1975, et, de façon plus introductive, dans celui de Tennekes et Lumley 1972. La modélisation de la turbulence en vue du calcul de couches turbu-

lentes minces est présentée en détail par Cebeci et Bradshaw 1977,1984. Les problèmes de modélisation sont envisagés de façon plus générale par Bradshaw, Cebeci et Whitelaw 1981, ainsi que par Mathieu, Jeandel et Reynolds 1984. Batchelor 1953 constitue une référence classique sur la turbulence homogène, et Towsend 1976 traite des écoulements turbulents cisaillés. Les problèmes de stabilité hydrodynamique sont étudiés dans les livres de Lin 1955, Betchov et Criminale 1967, Drazin et Reid 1982. La théorie mathématique de la turbulence est présentée par Leslie 1973. Lesieur 1987 fournit une présentation relativement concise des problèmes de turbulence.

On trouvera aussi un grand nombre d'articles de revue sur la modélisation, les structures cohérentes, la simulation directe dans la série des *Annual Reviews of Fluid Mechanics.*

XIX.2. Considérations générales

Les écoulements turbulents apparaissent dans des circonstances variées et sous des formes très différentes. On peut cependant dégager un certain nombre de traits communs.

(1) Les écoulements turbulents sont caractérisés par leur irrégularité. Les variables comme la vitesse, la pression, la masse volumique, la température fluctuent de façon aléatoire. A titre d'exemple, la figure 1 donne la forme du signal de vitesse mesuré en un point d'une zone de mélange turbulente. La composante de vitesse considérée fluctue autour d'une valeur moyenne. Le caractère aléatoire de l'écoulement conduit à envisager un traitement statistique de la turbulence.

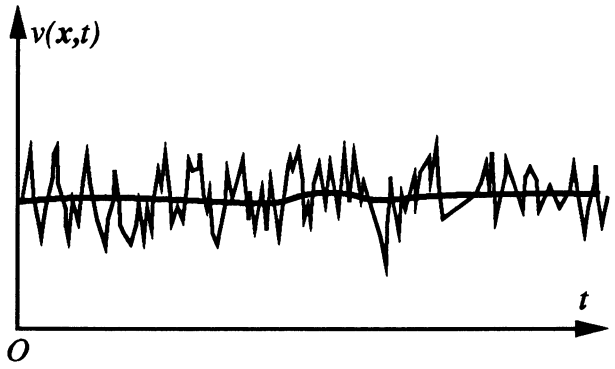


***Figure 1.** Fluctuations de vitesse en un point d'un écoulement turbulent.*

(2) La turbulence apparaît dans des écoulements dont le nombre de Reynolds est élevé. Elle a souvent pour origine le développement d'une **instabilité** d'un écoulement laminaire. Lorsque le nombre de Reynolds dépasse une certaine valeur critique, les petites perturbations de l'écoulement deviennent instables et leur croissance rapide produit la transition vers la turbulence. C'est ainsi que la couche limite laminaire sur une plaque plane devient turbulente lorsque le nombre de Reynolds Re_l dépasse 5.10^5 (figure 2). De même, la transition apparaît dans un écoulement en conduit cylindrique pour un nombre de Reynolds $Re_D \sim 2500$. Le traitement statistique de la turbulence est présenté de façon détaillée par Monin et Yaglom 1971.

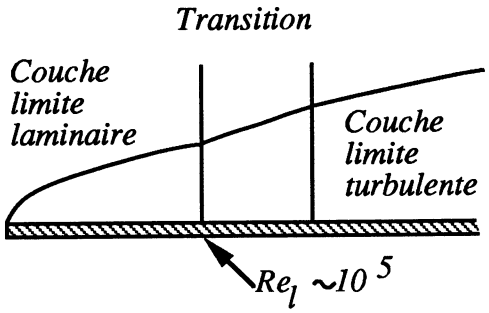


***Figure 2.** La couche limite laminaire sur une plaque plane devient turbulente lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique de l' ordre de 10^5.*

(3) Les écoulements turbulents sont caractérisés par une large gamme d'échelles de longueur, de vitesses, et de fréquences. La structure des fluctuations à grande échelle est principalement liée à la configuration de l'écoulement moyen, alors que les fluctuations à petite échelle ont une dynamique propre et sont peu influencées par la configuration moyenne. Les échelles turbulentes sont toujours largement supérieures au libre parcours moyen et les équations de Navier-Stokes restent applicables.

(4) Les écoulements turbulents sont dissipatifs. L'énergie cinétique turbulente tirée de l'écoulement moyen est transférée vers les petites structures turbulentes, où elle est dissipée par les contraintes visqueuses. L'écoulement turbulent ne peut subsister sans un transfert permanent d'énergie. On évoque très souvent l'analogie avec une "cascade" dans laquelle les fluctuations à grande échelle reçoivent leur énergie de l'écoulement moyen pour la transférer vers des fluctuations d'échelles de plus en plus réduites. L'énergie est finalement dissipée lorsque la taille des fluctuations est devenue suffisamment faible pour que les contraintes visqueuses puissent agir.

(5) Les écoulements turbulents sont fortement rotationnels. L'écoulement est formé par un enchevêtrement de tourbillons ayant des tailles et des orientations distribuées de façon aléatoire. L'amplitude des tourbillons est augmentée par un mécanisme important d'étirement des lignes tourbillonnaires ("vortex stretching").

(6) Des structures organisées plus ou moins cohérentes existent dans la plupart des écoulements turbulents. Ces structures jouent un rôle important dans les mécanismes de transfert d'énergie et de mélange turbulent.

(7) La turbulence accélère les processus de mélange. Les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont fortement augmentés. La turbulence accroît le frottement pariétal, les pertes de charges et les flux de chaleur. L'intensification des processus de mélange est particulièrement importante en pratique et il est intéressant de l'illustrer par l'exemple suivant.

Exemple

On considère un volume cubique rempli d'air de côté $L = 3\,m$ (figure 3). Une portion de l'une des facettes du cube est constituée par une surface chauffante de hauteur $h = 0.1\,m$. La température de la plaque diffère de la température de l'air contenu dans le volume de $\Delta T = 10\,K$. La diffusivité thermique du fluide est $\alpha = 2.10^{-5}\,m^2/s$. Estimer le temps nécessaire à la diffusion de la chaleur dans cette enceinte. On envisagera successivement un processus de diffusion moléculaire en l'absence de tout écoulement, puis un processus de diffusion turbulente, associé à la convection naturelle sur la plaque.

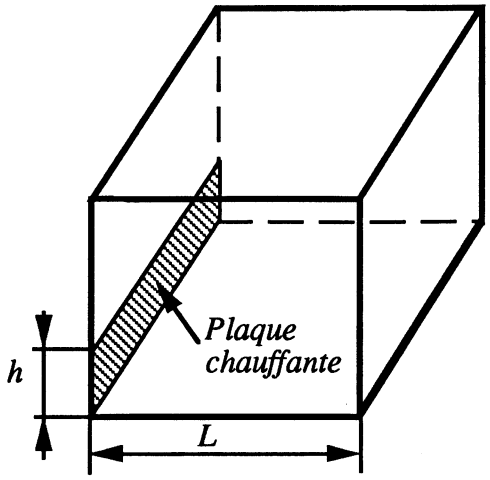


***Figure 3.** Une pièce cubique de côté L chauffée par une plaque de hauteur h.*

Solution

Si la diffusion de chaleur s'effectue uniquement par des processus moléculaires, les transferts de chaleur sont régis par l'équation de l'énergie débarrassée des termes convectifs.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta^2 T$$

On peut aussi écrire $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Delta^2 T$, où $\alpha = k/\rho c_p$ désigne le coefficient de diffusivité thermique.

Le temps caractéristique τ_L du processus d'échange de chaleur par diffusion moléculaire peut être estimé par analyse dimensionnelle de l'équation précédente :

$$\frac{\Delta T}{\tau_L} \sim \alpha \frac{\Delta T}{L^2}$$

On trouve $\tau_L \sim L^2/\alpha$. Pour la situation envisagée :

$$\tau_L \sim (3)^2/2.10^{-5} = 4.5\,10^5\, s \sim 125\, h$$

Ce temps caractéristique est très grand, car les échanges moléculaires sont très lents. En réalité, la plaque chauffante induit un mouvement de convection naturelle. Il en résulte un écoulement turbulent dans l'ensemble du volume. L'échelle de cet écoulement est L et sa vitesse typique est u. Le temps caractéristique des échanges de chaleur est alors fixé par $\tau_T \sim L/u$.

Pour estimer u, il faut déterminer la vitesse de convection sur la plaque chauffante. Pour cela, on peut d'abord évaluer l'accélération γ_z des particules fluides résultant de la convection naturelle. Considérons un élément de fluide dont la densité diffère de $\Delta\rho$ de la densité ambiante. La force d'Archimède qui agit sur cet élément est $g\Delta\rho$, et son accélération résulte de la loi de Newton : $\rho\gamma_z \sim g\Delta\rho$.

On a donc $\gamma_z \sim g(\Delta\rho/\rho) = g(\Delta T/T)$. Cette accélération agit sur une hauteur h; la vitesse de convection est donc $v_z \sim (gh\Delta T/T)^{1/2}$.

On trouve ici $v_z \sim 0.17\,m/s$. Cette valeur est surestimée et il faut prendre plutôt $v_z \sim 0.02\,m/s$. Le temps caractéristique correspondant est $\tau_T \sim 3/0.02 = 150\,s \sim 3\,mn$. Ce temps est nettement plus court que τ_L. La turbulence accélère fortement les échanges de chaleur dans le volume. Cet aspect est confirmé en formant le rapport des temps caractéristiques :

$$\frac{\tau_T}{\tau_L} \sim \frac{L}{u}\frac{\alpha}{L^2} = \frac{\alpha}{uL}$$

Ce rapport est inversement proportionnel au nombre de Peclet $Pe = uL/\alpha$, qui est lui-même égal au produit du nombre de Prandtl par le nombre de Reynolds : $Pe = (\frac{uL}{\nu})(\frac{\nu}{\alpha}) = Pr\,Re$

Le nombre de Prandtl pour les gaz est de l'ordre de 0.7, de telle sorte que :

$$\tau_T/\tau_L \sim 1/Re$$

Le rapport des temps caractéristiques est donc inversement proportionnel au nombre de Reynolds.

XIX.3. Echelles caractéristiques de la turbulence et cascade de Kolmogorov

Les tailles, les vitesses et les fréquences des fluctuations qui composent un écoulement turbulent couvrent des gammes étendues de valeurs. Parmi les fluctuations présentes, il est intéressant de dégager celles qui sont les plus caractéristiques et de déterminer les échelles spatiales et temporelles et les vitesses correspondantes.

L'écoulement moyen est ainsi caractérisé par une vitesse U et une échelle typique L. Le temps caractéristique associé est $T = L/U$. Les fluctuations turbulentes qui ont la plus grande taille sont décrites par une vitesse typique u et une échelle l appelée **macro-échelle.** Le temps caractéristique est dans ce cas $\tau = \frac{l}{u}$. Ces tourbillons de grande dimension tirent leur énergie de l'écoulement moyen.

Comme le mécanisme de transfert énergétique est surtout efficace lorsque les temps caractéristiques de l'écoulement moyen et des fluctuations coïncident, on doit avoir :

$$\tau = \frac{l}{u} \sim \frac{L}{U} = T \qquad (XIX,1)$$

A l'autre extrémité de la gamme de tailles, les tourbillons les plus petits qui subsistent dans un écoulement turbulent ont une échelle l_k, la micro-échelle ou **échelle de Kolmogorov** et une vitesse v_k. Le temps caractéristique de ces fluctuations est $\tau_k = l_k/v_k$. L'énergie des tourbillons de Kolmogorov est dissipée par les contraintes visqueuses en un temps égal au temps caractéristique τ_k. Pour qu'il en soit ainsi, l'échelle l_k doit être de l'ordre de l'épaisseur d'une couche visqueuse qui se développerait sur une durée τ_k :

$$l_k \sim (\nu\tau_k)^{1/2} \qquad (XIX,2)$$

Comme $\tau_k \sim l_k/v_k$, on en déduit facilement que :

$$\frac{v_k l_k}{\nu} \sim 1 \qquad (XIX,3)$$

Le nombre de Reynolds des tourbillons de Kolmogorov est de l'ordre de l'unité. Les échelles qui viennent d'être définies peuvent être reliées entre elles à l'aide de la **cascade de Kolmogorov**. Dans cette représentation, le transfert d'énergie s'effectue des gros tourbillons vers les petits. L'énergie cinétique u^2 contenue dans les tourbillons à grande échelle est ainsi transmise aux tourbillons de taille inférieure pendant une durée égale au temps caractéristique $\tau = l/u$. L'énergie transférée par unité de temps est donc :

$$\epsilon \sim \frac{u^2}{\tau} = \frac{u^3}{l} \qquad (XIX,4)$$

Ce flux d'énergie garde la même valeur pour toutes les tailles de tourbillons supérieures ou égales à la taille des structures dissipatives l_k :

$$\epsilon \sim \frac{u^3}{l} \sim \frac{u_I^3}{l_I^3} \sim \frac{v_k^3}{l_k} \qquad (XIX,5)$$

où u_I et l_I désignent les caractéristiques de tourbillons de taille intermédiaire $l \geq l_I \geq l_k$. L'énergie fournie aux tourbillons de Kolmogorov est dissipée par les contraintes visqueuses. Le taux de dissipation peut être exprimé à l'aide de la fonction de dissipation visqueuse (la puissance des contraintes visqueuses) :

$$\epsilon \sim \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \sim \nu \frac{v_k^2}{l_k^2} \qquad (XIX,6)$$

En rapprochant les deux expressions obtenues pour ϵ :

$$\nu \frac{v_k^2}{l_k^2} \sim \frac{v_k^3}{l_k} \qquad (XIX,7)$$

On déduit immédiatement $\frac{v_k l_k}{\nu} \sim 1$. On retrouve ici que le nombre de Reynolds des tourbillons dissipatifs est égal à un.

En combinant (XIX,5) et (XIX,7), on peut exprimer l'échelle l_k et la vitesse v_k en fonction de la dissipation ϵ :

$$l_k \sim \frac{\nu^{3/4}}{\epsilon^{1/4}}, \qquad v_k \sim (\epsilon\nu)^{1/4} \qquad (XIX,8)$$

On peut aussi exprimer ces deux quantités en fonction des échelle et vitesse des gros tourbillons. Il suffit pour cela de remplacer ϵ par u^3/l. On trouve ainsi :

$$l_k \sim l\left(\frac{\nu}{ul}\right)^{3/4} = l(Re_l)^{-3/4} \qquad (XIX,9)$$

$$v_k \sim u\left(\frac{\nu}{ul}\right)^{3/4} = u(Re_l)^{-1/4} \qquad (XIX,10)$$

Le temps caractéristique des tourbillons de Kolmogorov s'écrit alors :

$$\tau_k \sim \frac{l_k}{v_k} = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \qquad (XIX,11)$$

ou encore :

$$\tau_k \sim \frac{l}{u}(\frac{\nu}{ul})^{1/2} = \tau(Re_l)^{-1/2} \qquad (XIX,12)$$

Les relations précédentes sont rassemblées au tableau 1. La **micro-échelle de Taylor** λ apparaît aussi dans ce tableau. Cette échelle ne correspond pas à une taille de tourbillons réels; λ est l'échelle de fluctuations dont la vitesse serait u (la vitesse des gros tourbillons) et qui assurerait une dissipation égale à ϵ. D'après cette définition :

$$\epsilon \sim \nu\frac{u^2}{\lambda^2} \qquad (XIX,13)$$

et on peut déduire de (XIX,5) et (XIX,13) :

$$\lambda \sim l(Re_l)^{-1/2} \qquad \text{et} \qquad \tau_\lambda = \frac{\lambda}{u} \sim \tau(Re_l)^{-1/2} \qquad (XIX,14)$$

Tableau 1. Estimation des grandeurs caractéristiques de la turbulence

	Echelle	Vitesse	Temps caractéristique	Nombre de Reynolds
Macro-tourbillons	l	u	$\tau = l/u$	$Re_l = ul/\nu$
Echelle de Taylor	$\lambda = l(Re_l)^{-1/2}$	u	$\tau = \lambda/u = \tau(Re_l)^{-1/2}$	$Re_\lambda = (Re_l)^{1/2}$
Tourbillons de Kolmogorov	$l_k = l(Re_l)^{-3/4} = \nu^{3/4}\epsilon^{-1/4}$	$v_k = u(Re_l)^{-1/4} = (\epsilon\nu)^{1/4}$	$\tau_k = \tau(Re_l)^{-1/2} = (\nu/\epsilon)^{1/2}$	$Re_k = \frac{v_k l_k}{\nu} = 1$

Le temps caractéristique associé à λ coïncide avec celui des structures dissipatives. On trouve aussi facilement :

$$\lambda \sim l_k(Re_l)^{1/4} \qquad (XIX,15)$$

$$Re_\lambda = \frac{u\lambda}{\nu} = \frac{ul}{\nu}\frac{\lambda}{l} = (Re_l)^{1/2} \qquad (XIX,16)$$

Cette dernière relation permet d'introduire Re_λ à la place de Re_l dans toutes les expressions précédentes.

En définitive, la description précédente distingue des gros tourbillons porteurs de l'énergie turbulente initiale, et, à l'autre extrémité de la gamme, des tailles des tourbillons dissipatifs assurant la disparition de l'énergie turbulente qui leur est transférée.

Cette représentation repose sur une hypothèse d'équilibre énergétique : l'énergie cinétique des fluctuations est transférée, en cascade, des structures les plus grosses vers les structures les plus fines pour être dissipée à ce niveau par les contraintes visqueuses.

En partant des mêmes idées, on peut aussi déterminer la distribution spectrale des fluctuations turbulentes. Sur ces aspects plus avancés, on pourra consulter Tennekes et Lumley 1972, Hinze 1975 ou Lesieur 1987.

La cascade de Kolmogorov offre une description intuitive de la répartition d'échelles dans les écoulements turbulents, mais elle est surtout bien adaptée au cas où la turbulence est quasi-isotrope.

Les résultats obtenus sur cette base sont cependant couramment utilisés pour estimer les échelles typiques d'écoulements turbulents complexes.

Exemple

On considère un écoulement turbulent ayant pour vitesse et échelle caractéristiques $U = 30\,m/s$, $L = 12.5\,cm$. Les fluctuations de vitesse sont de l'ordre de 20% de la vitesse moyenne. La viscosité cinématique est $\nu = 1.5\,10^{-5}\,m^2 s^{-1}$. Estimer les vitesses et les échelles caractéristiques de cet écoulement à l'aide de la cascade de Kolmogorov.

Solution

Les fluctuations de vitesse typiques u sont telles que : $\dfrac{u}{U} = 0.2$ d'où $u \sim 6\,m/s$.

L'échelle de ces fluctuations est celle qui assure l'égalité des temps caractéristiques de l'écoulement moyen et des gros tourbillons :

$$\frac{u}{l} \sim \frac{U}{L}$$

On a par conséquent $l/L \sim 0.2$, d'où $l \sim 2.5\,cm$. Le nombre de Reynolds des gros tourbillons est :

$$Re_l = \frac{ul}{\nu} = \frac{(2.5\,10^{-2})(6)}{1.5\,10^{-5}} = 10^4$$

L'échelle caractéristique des tourbillons dissipatifs est : $l_k = l(Re_l)^{-3/4}$, soit ici $l_k = (2.5\,10^{-2})10^{-3} = 2.5\,10^{-5}\,m$. La vitesse typique de ces tourbillons est : $v_k = u(Re_l)^{-1/4}$, soit $v_k = (6)(10^{-1}) = 0.6\,m/s$.

Le temps caractéristique de ces fluctuations est $\tau_k = l_k/v_k$. Ici, $\tau_k = 2.5\,10^{-5}/0.6 \simeq 4.\,10^{-5}\,s$.

La micro-échelle de Taylor a pour expression $\lambda = l(Re_l)^{-1/2}$, ce qui donne $\lambda = (2.5\,10^{-2})10^{-2} = 2.5\,10^{-4}\,m$.

XIX.4. Traitement statistique des écoulements turbulents Les équations de Reynolds

La description d'écoulements turbulents en tout point de l'espace et du temps est difficile à réaliser en général. On effectue depuis quelques années des simulations directes de la

turbulence, mais uniquement dans des configurations géométriques simples et pour des nombres de Reynolds peu élevés.

Les temps de calcul requis sont considérables, mais ils diminuent constamment avec l'amélioration des performances des ordinateurs. Il semble possible d'envisager l'utilisation, dans un avenir proche, des méthodes de simulation directe pour le traitement de problèmes pratiques. Actuellement, les méthodes les plus courantes restent fondées sur une approche statistique. On décompose toutes les variables qui décrivent l'écoulement en une valeur moyenne et une fluctuation. On peut ainsi établir un système d'équations qui décrit le champ d'écoulement moyen. Ces équations moyennées font apparaître un ensemble de moments d'ordre deux, les contraintes turbulentes ou contraintes de Reynolds, qui représentent les transferts turbulents associés aux fluctuations.

La résolution des équations moyennées nécessite la modélisation des contraintes turbulentes.

L'approche statistique est présentée, dans cette section, dans le cas des écoulements de fluides incompressibles newtoniens. On passe d'abord en revue les définitions de la moyenne d'une variable. La décomposition de Reynolds est introduite et les équations de Reynolds sont établies.

XIX.4.1. Opérateurs de moyenne

La moyenne d'une variable $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ peut être définie de différentes manières. Une première méthode consiste à effectuer une moyenne sur le temps.

$$\overline{\phi} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t-t/2}^{t+t/2} \phi(\boldsymbol{x}, t) dt \qquad (XIX, 17)$$

En principe, la période d'intégration T doit tendre vers l'infini, mais on ne dispose jamais de l'historique complet des évolutions d'une variable. On se contente d'effectuer la moyenne sur une période T, suffisamment grande par rapport au temps caractéristique des fluctuations de ϕ.

Si on considère par exemple une variable ϕ qui présente à la fois des évolutions lentes par rapport au temps et des fluctuations rapides (figure 4), on pourra séparer ϕ en une valeur moyenne et la fluctuation autour de cette valeur en prenant T suffisamment grand pour moyenner les fluctuations, mais aussi suffisamment petit par rapport au temps caractéristique des variations lentes de ϕ. On peut ainsi écrire :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \qquad (XIX, 18)$$

avec

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T} \int_{t-t/2}^{t+t/2} \phi(\boldsymbol{x}, t) dt \qquad (XIX, 19)$$

La fluctuation ϕ' s'obtient à chaque instant en retranchant de ϕ la valeur moyenne $\overline{\phi}$.

Un deuxième type de moyenne peut être défini à partir d'un ensemble de réalisations $\{\phi^k(\boldsymbol{x}, t)\}$ de la variable ϕ.

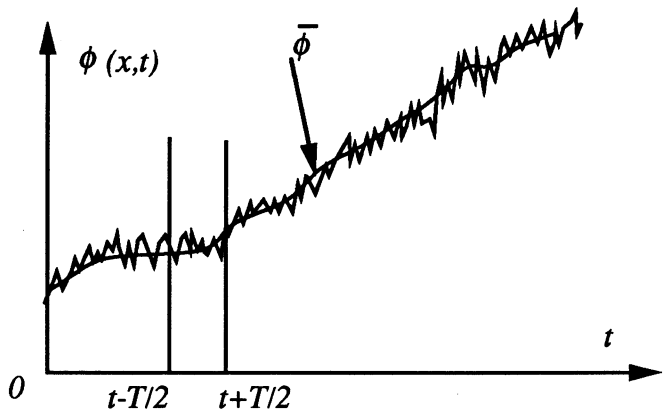


Figure 4. *Pour décomposer une variable $\phi(x,t)$ en une valeur moyenne $\bar{\phi}$ et une fluctuation ϕ' ,on effectue une moyenne sur un temps T suffisamment grand par rapport aux fluctuations rapides du signal et suffisamment petit par rapport aux variations lentes de la variable ϕ.*

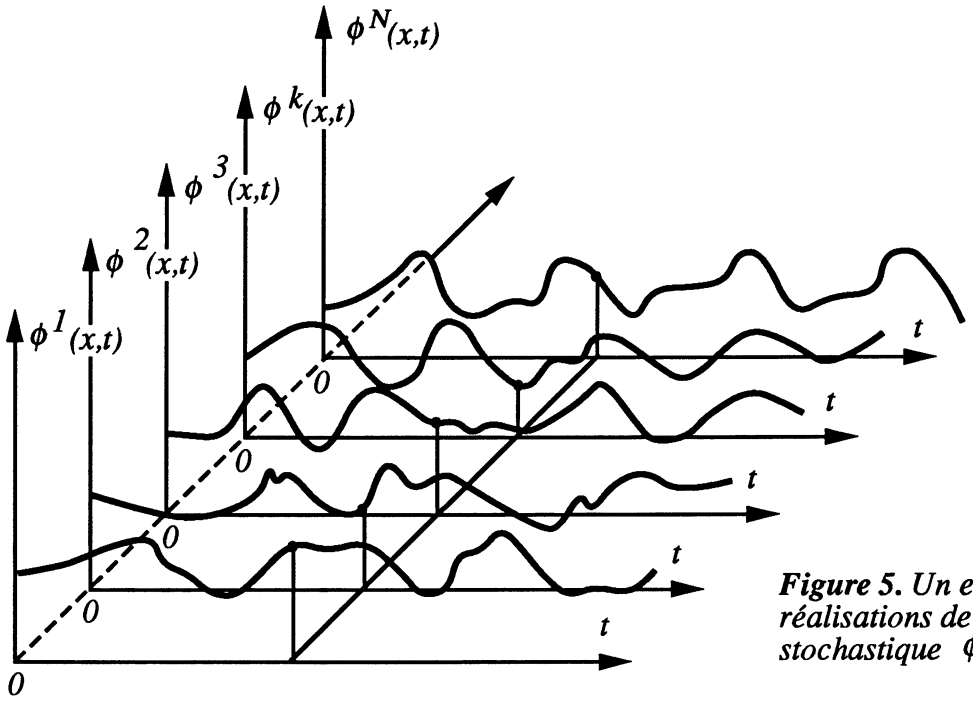


Figure 5. *Un ensemble de réalisations de la variable stochastique $\phi(x,t)$.*

On mesure cette variable sur un ensemble d'expériences (figure 5) et on forme à chaque instant la moyenne d'ensemble :

$$E[\phi] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\phi^k(\boldsymbol{x},t) \qquad (XIX,20)$$

Le nombre N doit, en principe, tendre vers l'infini. On se contente en pratique de valeurs suffisamment grandes pour assurer la stabilité statistique de $E[\phi]$. La moyenne d'ensemble peut aussi être déterminée à l'aide de la fonction de densité de probabilité de la variable ϕ. Si $p(\phi)d\phi$ représente la probabilité pour que la variable ϕ appartienne à l'intervalle

$[\phi, \phi + d\phi]$, alors :

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\phi)\phi d\phi \qquad (XIX, 21)$$

La moyenne d'ensemble est très utile sur le plan conceptuel, mais elle n'est pas généralement accessible en pratique. Il est difficile de faire fonctionner N expériences identiques ou de répéter N fois la même expérience. Dans certains cas, l'écoulement considéré est unique et on dispose d'une seule réalisation des variables du système. La question se pose alors de savoir s'il y a équivalence entre la moyenne temporelle et la moyenne d'ensemble. Cette équivalence est assurée pour une classe de processus particuliers, les processus stationnaires **ergodiques.**

Si le processus envisagé fait intervenir un phénomène périodique de période T, il est souvent utile de calculer une moyenne périodique :

$$< \phi >= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \phi(\boldsymbol{x}, t + kT) \qquad (XIX, 22)$$

On utilise ce type de moyenne dans l'étude d'écoulements soumis à une excitation périodique externe.

La moyenne de phase ou moyenne conditionnelle est la généralisation de la moyenne périodique à des situations où on peut repérer les instants d'apparition d'une série d'événements caractéristiques (passage d'un front, passage d'une structure). Si $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_k \ldots$ sont les instants correspondant aux événements $E_1, E_2 \ldots E_k \ldots$, la moyenne de phase peut s'écrire :

$$< \phi(\boldsymbol{x}, t) >= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \phi(\boldsymbol{x}, t + \tau_k) \qquad (XIX, 23)$$

On utilise la moyenne de phase pour mettre en évidence les structures organisées, on dit aussi les structures cohérentes de l'écoulement turbulent.

La moyenne temporelle (XIX,19) sera utilisée dans toute la suite.

XIX.4.2. Décomposition de Reynolds

La décomposition de Reynolds consiste à représenter chaque variable par la somme d'une valeur moyenne et d'une fluctuation $\phi = \overline{\phi} + \phi'$.

D'après cette relation, la fluctuation ϕ' peut être déterminée en retranchant $\overline{\phi}$ de ϕ.

Les fluctuations ϕ' ont une moyenne nulle. En effet :

$$\overline{\phi}' = \overline{\phi - \overline{\phi}} = \overline{\phi} - \overline{\phi} = 0 \qquad (XIX, 24)$$

Considérons à présent une deuxième variable $\psi = \overline{\psi} + \psi'$ et envisageons le produit $\phi\psi$. On a :

$$\begin{aligned} \phi\psi &= (\overline{\phi} + \phi')(\overline{\psi} + \psi') \\ &= \overline{\phi}\,\overline{\psi} + \phi'\overline{\psi} + \overline{\phi}\psi' + \phi'\psi' \end{aligned}$$

La moyenne de l'expression précédente a pour forme :

$$\overline{\phi\psi} = \overline{\phi}\,\overline{\psi} + \overline{\phi'}\,\overline{\psi} + \overline{\psi'}\,\overline{\phi} + \overline{\phi'\psi'}$$

Comme les moyennes des fluctuations sont nulles, on trouve :

$$\overline{\phi\psi} = \overline{\phi}\,\overline{\psi} + \overline{\phi'}\,\overline{\psi'} \qquad (XIX,25)$$

La moyenne du produit $\phi\psi$ est constituée par la somme du produit des moyennes et de la moyenne du produit des fluctuations :

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Moyenne du}\\ \text{produit } \phi\psi\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Produit des}\\ \text{moyennes de}\\ \phi \text{ et } \psi\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{Moyenne du}\\ \text{produit des fluctuations}\\ \phi'\psi'\end{array}\right\} \qquad (XIX,26)$$

Ce résultat, classique en statistique, va nous permettre d'établir des équations moyennées. Si les variables ϕ et ψ représentent les composantes de vitesse u, v, w, on a :

$$\begin{aligned}\overline{u^2} &= (\overline{u})^2 + \overline{u'^2},\ \overline{v^2} = (\overline{v})^2 + \overline{v'^2},\ \overline{w^2} = (\overline{w})^2 + \overline{w'^2}\\ \overline{uv} &= \overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'},\ \overline{uw} = \overline{u}\,\overline{w} + \overline{u'w'},\ \overline{vw} = \overline{v}\,\overline{w} + \overline{v'w'}\end{aligned} \qquad (XIX,27)$$

Toutes ces expressions s'écrivent sous la forme plus compacte :

$$\overline{v_i v_j} = \overline{v}_i\overline{v}_j + \overline{v_i' v_j'} \qquad (XIX,28)$$

XIX.4.3. Les équations de Reynolds

Nous considérons ici des écoulements turbulents de fluides incompressibles et newtoniens. Les équations du mouvement sont dans ce cas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (XIX,29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u + \frac{\partial}{\partial x}\rho u^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho u + \frac{\partial}{\partial z}\rho uw = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + g_x \qquad (XIX,30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v + \frac{\partial}{\partial x}\rho uv + \frac{\partial}{\partial y}\rho v^2 + \frac{\partial}{\partial z}\rho vw = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v + g_y \qquad (XIX,31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho w + \frac{\partial}{\partial x}\rho uw + \frac{\partial}{\partial y}\rho vw + \frac{\partial}{\partial z}\rho w^2 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 w + g_z \qquad (XIX,32)$$

Remplaçons maintenant les variables u, v, w et p par leurs décompositions de Reynolds $u = \overline{u} + u', \ldots p = \overline{p} + p'$. L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (XIX,33)$$

En prenant la moyenne de cette expression, on trouve :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} = 0$$

Comme les moyennes des fluctuations sont nulles $\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0$, il reste :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \qquad (XIX, 34)$$

Nous avons ainsi obtenu l'équation de continuité pour le champ moyen. En retranchant cette expression de l'équation (XIX,33), on obtient :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (XIX, 35)$$

qui constitue l'équation de continuité pour les fluctuations.

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x. L'introduction de la décomposition de Reynolds conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\overline{u}+u') + \frac{\partial}{\partial x}\rho(\overline{u}+u')^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho(\overline{u}+u')(\overline{v}+v') \qquad (XIX, 36)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\rho(\overline{u}+u')(\overline{w}+w') = -\frac{\partial}{\partial x}(\overline{p}+p') + \mu\nabla^2(\overline{u}+u') + g_x$$

La moyenne de l'équation précédente est facilement déduite à l'aide des expressions données plus haut pour les produits de deux variables. On trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{u} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\overline{u}^2 + \rho\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u}\,\overline{v} + \rho\overline{u'v'})$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\rho\overline{u}\,\overline{w} + \rho\overline{u'w'}) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\overline{u} + g_x$$

En faisant passer les moyennes des produits de fluctuations au second membre, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{u} + \frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{u}\,\overline{v} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{u}\,\overline{w} = \qquad (XIX, 37)$$
$$-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\overline{u} + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'}) + g_x$$

La forme de cette expression est très proche de celle de l'équation de départ. On voit cependant apparaître trois nouveaux termes :

$$+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'})$$

Les transferts de quantité de mouvement associés aux fluctuations turbulentes sont ainsi représentés par les **corrélations** $-\rho\overline{u'^2}$, $-\rho\overline{u'v'}$, $-\rho\overline{u'w'}$. On peut assimiler ces termes à des contraintes turbulentes agissant dans la direction x sur les faces d'un volume de contrôle dont les normales sont les axes x, y, z.

La contrainte $-\rho\overline{u'^2}$ est une contrainte normale et $-\rho\overline{u'v'}, -\rho\overline{u'w'}$ sont des contraintes de cisaillement. Pour représenter ces contraintes, on peut utiliser des notations semblables à celles de l'analyse des contraintes visqueuses.

Ainsi : $\tau^t_{xx} = -\rho\overline{u'u'}$, $\tau^t_{xy} = -\rho\overline{u'v'}$, $\tau^t_{xz} = -\rho\overline{u'w'}$ désignent les contraintes turbulentes ou **contraintes de Reynolds** qui apparaissent dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe des x et moyennée dans le temps :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{u} + \frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{u}\,\overline{v} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{u}\,\overline{w}$$
$$= -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{\tau}^l_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tau}^l_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tau}^l_{xz} + \frac{\partial}{\partial x}\tau^t_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau^t_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau^t_{xz} + \rho g_x \quad (XIX,38)$$

Contraintes visqueuses Contraintes turbulentes

On a de la même manière :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v} + \frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}\,\overline{v} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v}^2 + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v}\,\overline{w}$$
$$= -\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{\tau}^l_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tau}^l_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tau}^l_{yz} + \frac{\partial}{\partial x}\tau^t_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau^t_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau^t_{yz} + \rho g_y \quad (XIX,39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{w} + \frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}\,\overline{w} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v}\,\overline{w} + \frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{w}^2$$
$$= -\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{\tau}^l_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{\tau}^l_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{\tau}^l_{zz} + \frac{\partial}{\partial x}\tau^t_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau^t_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\tau^t_{zz} + \rho g_z \quad (XIX,40)$$

On peut aussi écrire sous forme indicielle plus compacte :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{v}_i\overline{v}_j = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tau}^l_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\tau^t_{ij} + \rho g_i} \quad (XIX,41)$$

où $\overline{\tau}^l_{ij}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses pour l'écoulement moyen, et τ^t_{ij} désigne les contraintes de Reynolds ou contraintes turbulentes.

$$\tau^t_{ij} = -\rho\overline{v'_i v'_j}, \quad \overline{\tau}^l_{ij} = \mu\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\nabla.\overline{v}\delta_{ij} \quad (XIX,42)$$

Les équations de Reynolds sont rassemblées au tableau 2.

Les contraintes de Reynolds apparaissent dans les équations précédentes comme des inconnues supplémentaires. Le problème central de l'analyse statistique des écoulements turbulents consiste en la **modélisation de ces contraintes**. En effet, pour résoudre les équations représentant l'écoulement moyen, il faut établir un modèle permettant le calcul des contraintes turbulentes à partir des variables de cet écoulement moyen. Le problème que nous venons de décrire est généralement désigné sous le nom de **problème de fermeture**.

Il n'y a pas de représentation unique des contraintes de Reynolds en fonction de l'écoulement moyen et les **hypothèses de fermeture** (les modèles de turbulence) utilisées en pratique sont très variées. Les modèles de turbulence se présentent en général sous la forme d'un ensemble d'équations dans lesquelles apparaissent les contraintes turbulentes.

Cet ensemble d'équations complète les équations dynamiques moyennes et doit permettre la résolution simultanée de toutes les équations du mouvement (figure 6).

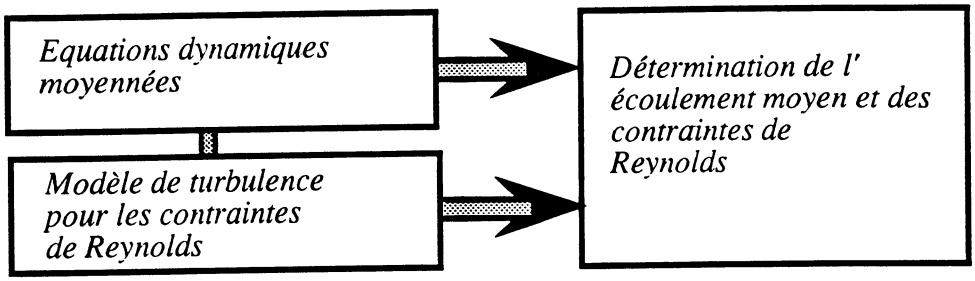


Figure 6. *Schéma de principe de la modélisation physique des écoulements turbulents.*

La modélisation des contraintes turbulentes est abordée dans l'analyse d'une couche de cisaillement. Cette question est reprise sur un plan plus général à la section 6.

XIX.5. Ecoulements turbulents cisaillés

Des écoulements cisaillés apparaissent dans un grand nombre de situations pratiques. Les jets libres, les zones de mélange, les sillages, les couches limites appartiennent à cette classe d'écoulement. Lorsque la zone de cisaillement est mince, c'est-à-dire lorsque son épaisseur reste faible devant une échelle longitudinale typique, l'écoulement peut être analysé dans le cadre de l'approximation de couche limite. Les équations de Reynolds prennent dans ce cas une forme simplifiée de type parabolique, et la détermination de solutions analytiques ou numériques est notablement facilitée. Dans un certain nombre de configurations, on trouve des solutions auto-semblables qui permettent des calculs simples dans des problèmes d'ingénieur. Des exposés complets de la théorie des écoulements turbulents cisaillés sont proposés par Towsend 1976, Hinze 1975, Tennekes et Lumley 1972 et Cebecci et Bradshaw 1984. L'analyse développée ici sera beaucoup plus restreinte. Nous établirons d'abord les équations de Reynolds simplifiées à l'aide des approximations de couche limite, puis nous examinerons le cas typique d'une zone de mélange bidimensionnelle. La solution sera obtenue dans cette configuration à l'aide des méthodes de similitude. Il faudra, au passage, se donner un modèle pour les contraintes de Reynolds et ainsi réaliser la fermeture du problème et déterminer la solution. Le modèle de Goertler adopté ici donne une représentation simple et conduit à une solution convenable du problème envisagé.

Des modèles de fermeture plus élaborés seront introduits dans la dernière partie de ce chapitre.

XIX.5.1. Equations de Reynolds pour des écoulements cisaillés minces

Pour simplifier l'exposé, considérons d'emblée un écoulement stationnaire et bidimen-

sionnel en moyenne. Les caractéristiques moyennes : vitesse, pression, corrélations des vitesses fluctuantes sont indépendantes du temps et ne dépendent que de deux coordonnées d'espace, x et y. Dans cette hypothèse, la composante de vitesse $\overline{w} = 0$, mais les corrélations $\overline{u'w'}$ et $\overline{v'w'}$ sont non nulles. On a cependant $\partial\overline{u'w'}/\partial z = 0$ et $\partial\overline{v'w'}/\partial z = 0$, car toutes les moyennes sont indépendantes de z.

Dans ces conditions, les équations de Reynolds prennent la forme simplifiée :

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) \qquad (XIX,43)$$

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(-\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{v'^2}) \qquad (XIX,44)$$

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial y} = 0 \qquad (XIX,45)$$

Pour spécialiser ces équations au cas d'une couche de mélange mince, nous adoptons une procédure d'estimation en ordres de grandeur semblable à celle utilisée dans la théorie de la couche limite.

Soit l et δ des dimensions longitudinale et transversale typiques (figure 7). On suppose que $\delta/l << 1$. Les vitesses moyennes caractéristiques dans les directions x et y sont respectivement U et V. Les expériences montrent que les fluctuations de vitesse u' et v' sont de l'ordre de grandeur représenté par u_t, et que les corrélations $\overline{u'^2}$, $\overline{u'v'}$ et $\overline{v'^2}$ sont d'ordre u_t^2.

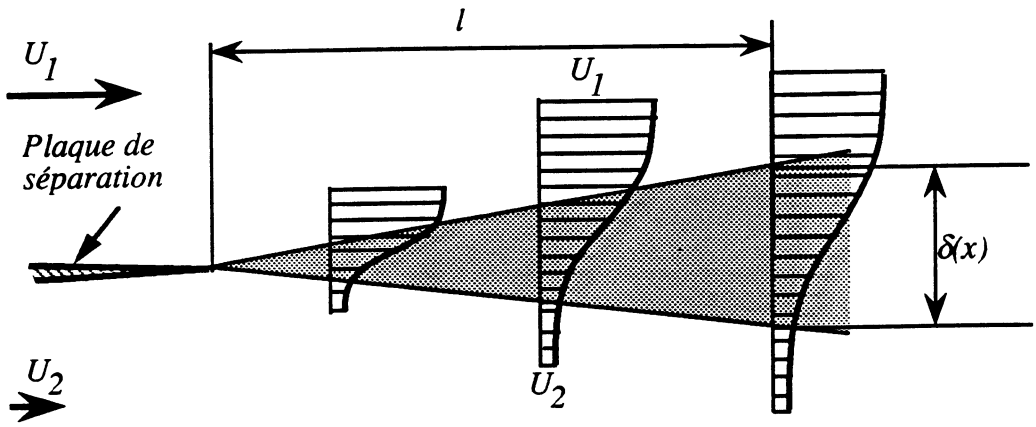


***Figure 7.** Zone de mélange formée à la confluence de deux écoulements parallèles de vitesse différente.*

Considérons maintenant l'équation de conservation de la masse (XIX,45). L'estimation en ordre de grandeur donne : $\frac{u}{l} \sim \frac{V}{\delta}$, de telle sorte que $V \sim (\delta/l)U$.

Considérons à présent la projection suivant x de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les termes qui composent cette équation ont respectivement pour ordre de grandeur :

$$\frac{U^2}{l}, \quad \frac{\delta}{l}U\frac{U}{\delta}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\nu U}{l^2}, \quad \frac{\nu U}{\delta^2}, \quad \frac{u_t^2}{l}, \quad \frac{u_t^2}{\delta}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Les deux termes convectifs qui constituent le premier membre ont le même ordre de grandeur U^2/l. Comme dans la théorie de la couche limite, on peut considérer que le gradient de pression est imposé à la couche de cisaillement par l'écoulement externe. Les rapports des termes (4) et (5) aux termes du premier membre sont :

$$(4)/(1) \sim \frac{\nu}{l^2}\frac{U}{U^2}l = \frac{\nu}{Ul} = \frac{1}{Re_l}$$

$$(5)/(1) \sim \frac{\nu U}{\delta^2}\frac{l}{U^2} = \frac{\nu}{Ul}(\frac{l}{\delta})^2 = \frac{1}{Re_l}(\frac{l}{\delta})^2$$

Les rapports des termes (6) et (7) aux termes du premier membre sont :

$$(6)/(1) \sim \frac{u_t^2}{U^2}$$

$$(7)/(1) \sim \frac{u_t^2}{U^2}(\frac{l}{\delta})$$

Les écoulements turbulents cisaillés sont généralement caractérisés par un grand nombre de Reynolds $Re_l > 10^4$ et une épaisseur δ de l'ordre du dixième de l'échelle axiale $\delta/l \sim 0.1$. Dans ces écoulements, les fluctuations de vitesse sont de l'ordre de 15% de la vitesse axiale $u_t \sim 0.15\,U$. Dans ces conditions, le rapport (4)/(1) est inférieur à 10^{-4}, le rapport (5)/(1) ne dépasse pas 10^{-2} et les termes (4) et (5) peuvent être négligés. Notons cependant que le terme (5) reste important si le nombre de Reynolds est plus faible ($\sim 10^2$), ce qui est le cas au voisinage de l'origine de la couche de cisaillement. Ce terme doit aussi être retenu dans l'analyse de la couche de fluide proche d'une paroi (la sous-couche limite laminaire d'une couche limite turbulente). Le terme (5) sera négligé ici, car nous allons plutôt considérer une couche de mélange libre pleinement développée.

Le rapport (6)/(1) est de l'ordre de 0.02, alors que (7)/(1) est de l'ordre de l'unité. Bien que le sixième terme soit relativement faible, on peut le retenir en l'intégrant au terme de pression. Le septième terme est essentiel puisqu'il assure l'équilibre des forces dans la couche de mélange.

L'équation (XIX,43) s'écrit après simplification :

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{p} + \rho\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) \qquad (XIX,46)$$

Considérons à présent l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant y. Les termes successifs qui composent cette équation ont pour ordre de grandeur :

$$\frac{U^2}{l}(\frac{\delta}{l}), \quad \frac{U^2}{l}(\frac{\delta}{l}), \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\nu U}{l^2}(\frac{\delta}{l}), \quad \frac{\nu U}{\delta^2}(\frac{\delta}{l}), \quad \frac{u_t^2}{l}, \quad \frac{u_t^2}{\delta}$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Les termes convectifs du premier membre de cette équation sont inférieurs d'un ordre de grandeur à ceux de l'équation suivant x. Il en est de même des termes (4) et (5). On négligera tous ces termes, ainsi que (6) pour ne retenir que le terme de pression et le terme (7). L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial(-\overline{v'^2})}{\partial y} \qquad (XIX,47)$$

Les équations (XIX,45-47) forment déjà un système simplifié. Pour continuer l'analyse, on va d'abord déterminer le gradient de pression. Pour cela, il faut considérer l'écoulement externe. En dehors de la couche de cisaillement, les vitesses transverses sont faibles, les fluctuations de vitesse et leurs corrélations sont négligeables.

L'écoulement est alors déterminé par :

$$u_e\frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (XIX,48)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (XIX,49)$$

La pression ne dépend pas de y, et sa valeur est donc fixée par l'évolution de la vitesse externe u_e. On peut écrire :

$$\lim_{y\to+\infty} p(x,y) = p_e(x) \qquad \text{avec} \quad p_e(x) + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = \text{constante}$$

En intégrant l'équation (XIX,47) de la frontière externe de la couche de cisaillement jusqu'à la cote y, on obtient :

$$p(x,y) = p_e(x) - \rho\overline{v'^2} \qquad (XIX,50)$$

En portant cette relation dans l'équation (XIX,46), on trouve :

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} - \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}) \qquad (XIX,51)$$

Les deux corrélations $\overline{u'^2}$ et $\overline{v'^2}$ sont du même ordre et le gradient axial de la différence $\overline{u'^2} - \overline{v'^2}$ est négligeable.

On peut poursuivre l'analyse à partir du système d'équations :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \qquad (XIX,52)$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\tau^t \qquad (XIX,53)$$

Dans cette dernière équation τ^t désigne la contrainte de Reynolds $\tau^t = -\rho\overline{u'v'}$. Lorsque l'écoulement externe est uniforme, le gradient de pression s'annule et l'équation de conservation de la quantité de mouvement prend la forme :

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\tau^t \qquad (XIX,54)$$

Les équations qui viennent d'être établies décrivent des écoulements turbulents bidimensionnels stationnaires en moyenne de fluides incompressibles. La zone turbulente doit être mince pour permettre l'application des approximations de couche limite. Le système (XIX,52-53) décrit alors convenablement des écoulements turbulents libres (des écoulements qui se développent à distance d'une paroi). Si l'écoulement envisagé est voisin d'une paroi ou si le nombre de Reynolds Re_l est modéré, il faut compléter l'équation (XIX,53) par un terme correspondant à la contrainte visqueuse principale $\tau^l = \mu \partial \overline{u}/\partial y$.

L'équation (XIX,53) s'écrit alors :

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\tau^l + \tau^t) \qquad (XIX,55)$$

XIX.5.2. Recherche de solutions auto-semblables pour une couche de cisaillement libre

Considérons à présent une zone de mélange bidimensionnelle formée par la confluence de deux écoulements uniformes (figure 7). Les vitesses initiales des deux écoulements sont U_1 et U_2.

Pour déterminer le profil de vitesse moyenne dans la couche de cisaillement, nous allons chercher s'il existe une solution auto-semblable.

L'approche donnée ci-dessous s'apparente à celles utilisées à plusieurs reprises (voir en particulier les chapitres XIV et XVII). L'existence de solutions auto-semblables peut être prévue en notant que, dans chaque section de l'écoulement, l'épaisseur de la couche de mélange constitue la seule échelle caractéristique. On peut donc chercher s'il existe des solutions sous la forme :

$$\frac{\overline{u} - U_2}{U_1 - U_2} = f[\frac{y}{\delta(x)}] = f(\eta) \qquad (XIX,56)$$

où $\eta = y/\delta(x)$ désigne la variable de similitude alors que $\delta(x)$ représente l'épaisseur de la zone de mélange. Il est commode d'introduire, dès maintenant, la différence des vitesses $\Delta U = U_1 - U_2$ et la vitesse moyenne $U_o = (U_1 + U_2)/2$. Si on considère $\tau^t/\rho(\Delta U)^2$, l'analyse dimensionnelle indique que ce rapport doit aussi être une fonction de la coordonnée réduite η :

$$\tau^t = \rho(\Delta U)^2 g(\eta) \qquad (XIX,57)$$

Cette expression est confirmée par des expériences, et elle est d'autre part compatible avec la recherche d'une solution auto-semblable.

Il s'agit maintenant de substituer (XIX,56) et (XIX,57) dans les équations du mouvement. Nous allons d'abord calculer les gradients $\partial \overline{u}/\partial x$ et $\partial \overline{u}/\partial y$, puis nous exprimerons la composante de vitesse transversale $\overline{v}$.

On obtient facilement :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \Delta U(-\frac{y}{\delta^2}\delta')f' = \Delta U(-\eta\frac{\delta'}{\delta})f' \qquad (XIX,58)$$

Ici f' et δ' représentent respectivement les dérivées par rapport à η et x, $f' = df/d\eta$, $\delta' = d\delta/dx$. On a d'autre part :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \Delta U \frac{1}{\delta} f' \qquad (XIX, 59)$$

Pour déterminer la vitesse transversale $\overline{v}$, on peut intégrer l'équation de continuité. Il est commode de prendre comme origine de l'intervalle d'intégration le point où la vitesse transversale s'annule. Soit $y_o(x)$ la cote de ce point. On a :

$$\overline{v}(x, y_o) = 0 \qquad \text{et} \quad \overline{v} = \int_{y_o}^{y} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} dy = -\int_{y_o}^{y} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} dy$$

que l'on peut encore écrire :

$$\overline{v} = \int_{\eta_o}^{\eta} \Delta U \delta' f' \eta d\eta = \Delta U \delta' \int_{\eta_o}^{\eta} f' \eta d\eta \qquad (XIX, 60)$$

où $\eta_o = y_o/\delta$ désigne la coordonnée réduite pour laquelle la vitesse transversale s'annule. Soit $G(\eta) = \int f' \eta d\eta$, la vitesse transversale prend la forme :

$$\overline{v} = \Delta U \delta' [G(\eta) - G(\eta_o)] \qquad (XIX, 61)$$

Les termes convectifs de l'équation (XIX,53) s'écrivent :

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = (\Delta U f + U_2) \Delta U (-\eta \frac{\delta'}{\delta}) f' \qquad (XIX, 62)$$

$$\overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = (\Delta U)^2 \frac{\delta'}{\delta} [G(\eta) - G(\eta_o)] f' \qquad (XIX, 63)$$

On a d'autre part :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^t}{\partial y} = (\Delta U)^2 \frac{1}{\delta} g' \qquad (XIX, 64)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit finalement :

$$-\delta' [\eta f f' + (U_2/\Delta U) \eta f' - f' G(\eta)] - \delta' f' G(\eta_o) = g' \qquad (XIX, 65)$$

Dans cette expression, la fonction entre crochets et g' dépendent de η, alors que δ' et $G(\eta_o)$ sont fonction de x. Pour que l'équation précédente puisse être vérifiée pour tout x, il faut que $\delta'(x)$ soit une constante et que le produit $\delta'(x) G(\eta_o)$ soit indépendant de x.

L'épaisseur de la zone de mélange doit être une fonction linéaire de x : $\delta(x) = a_2 x$ où a_2 = constante. La coordonnée réduite η_o doit aussi être constante. En se référant à la définition de cette variable, on voit immédiatement que la cote y_o du point où la vitesse transversale s'annule doit aussi varier linéairement avec x :

$$y_o = a_o x \qquad \text{où} \quad (a_o = \eta_o a_2)$$

Ces deux résultats ont été obtenus sans avoir eu à spécifier la contrainte de Reynolds. Nous avons simplement supposé que les profils de vitesse et la contrainte de Reynolds étaient

uniquement fonction de la variable réduite η. Les comportements linéaires de l'épaisseur δ et de la position y_o sont bien confirmés par des expériences sur des couches de mélange.

XIX.5.3. Solution pour le modèle de Goertler

Pour déterminer complètement le profil de vitesse, il faut choisir un modèle pour la contrainte τ^t. On peut utiliser ici un modèle particulièrement simple proposé par Goertler. La contrainte de Reynolds est représentée à l'aide d'une viscosité turbulente ν_t :

$$\tau^t = \rho \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \qquad (XIX, 66)$$

Cette expression rappelle celle de la contrainte visqueuse pour un fluide newtonien. Le mécanisme d'échange de quantité de mouvement par les fluctuations turbulentes est ainsi assimilé au mécanisme d'échange associé aux collisions moléculaires. Ici, cependant, la viscosité turbulente n'est pas une propriété du fluide, mais doit dépendre directement de l'écoulement envisagé. D'un point de vue dimensionnel, cette viscosité doit être proportionnelle au produit d'une vitesse par une longueur. On peut logiquement choisir :

$$\nu_t = k\delta(x)\Delta U \qquad (XIX, 67)$$

où k est une constante de proportionnalité.

Pour simplifier les calculs, nous allons considérer ici le cas où la vitesse U_2 est nulle. Il est commode d'introduire une fonction de courant :

$$\psi = \Delta U \, x F(\zeta) \qquad (XIX, 68)$$

où ζ représente la variable réduite.

Ici $\zeta = \sigma y/x$ et σ est une constante dont la valeur est indéterminée.

Les composantes de vitesse déduites de la fonction de courant satisfont automatiquement l'équation de continuité; on doit donc uniquement considérer l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Pour exprimer les divers termes de cette équation à l'aide de $F(\zeta)$, on doit effectuer les calculs suivants :

$$\overline{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \Delta U \, x F' \sigma / x = \Delta U \, \sigma F' \qquad (XIX, 69)$$

$$\overline{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(\Delta U x F) = -\Delta U (F - \zeta F') \qquad (XIX, 70)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = -\Delta U \sigma^2 \frac{y}{x^2} F'' = -\Delta U \sigma \frac{\zeta}{x} F'' \qquad (XIX, 71)$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \Delta U \sigma^2 \frac{1}{x} F'' \qquad (XIX, 72)$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} &= -\frac{(\Delta U)^2 \sigma^2 \zeta}{x} F' F'' + \frac{(\Delta U)^2 \sigma^2}{x} F''(\zeta F' - F) \\ &= -\frac{(\Delta U)^2 \sigma^2}{x} F F'' \end{aligned} \qquad (XIX, 73)$$

On a d'autre part :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau^t}{\partial y} = ka_2(\Delta U)^2\frac{\sigma^3}{x}F''' \qquad (XIX,74)$$

En rassemblant les expression précédentes, on obtient :

$$F''' + \frac{1}{ka_2\sigma}FF'' = 0 \qquad (XIX,75)$$

On peut choisir σ de façon arbitraire. Il est ici commode de prendre $\sigma = 1/(2ka_2)^{1/2}$. L'équation (XIX,75) devient alors :

$$F''' + 2\sigma FF'' = 0 \qquad (XIX,76)$$

Les conditions aux limites pour cette équation sont déduites de $\overline{u}(x,-\infty) = 0$ et $\overline{u}(x,\infty) = U_1$. On obtient :

$$F'(-\infty) = 0, \qquad F'(+\infty) = 1/\sigma \qquad (XIX,77)$$

Pour résoudre l'équation (XIX,76), il faut qu'une troisième condition soit remplie. On peut supposer que le point où la vitesse transversale s'annule correspond à la coordonnée réduite $\zeta = 0$ (cela revient à prendre comme origine des coordonnées y le point où la vitesse $\overline{v}$ s'annule). Ce choix conduit à la condition supplémentaire :

$$F(0) = 0 \qquad (XIX,78)$$

La solution du problème (XIX,76-78) peut être recherchée sous la forme d'un développement en série :

$$\sigma F(\zeta) = \frac{\zeta}{2} + h_1(\zeta) + h_2(\zeta) + \ldots \qquad (XIX,79)$$

La fonction inconnue $h_1(\zeta)$ est solution du problème aux limites :

$$h_1''' + 2\zeta h_1'' = 0 \qquad (XIX,80)$$

$$h_1'(-\infty) = -\frac{1}{2}, \quad h_1'(+\infty) = \frac{1}{2}, \quad h_1(0) = 0 \qquad (XIX,81)$$

On obtient facilement :

$$h_1'(\zeta) = \frac{1}{\pi^{1/2}}\int_o^\zeta e^{-z^2}dz = \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\zeta) \qquad (XIX,82)$$

Si l'on conserve uniquement les 2 premiers termes de la série (XIX,79), le profil de vitesse prend la forme :

$$\overline{u} = \frac{\Delta U}{2}[1 + \mathrm{erf}(\zeta)] \qquad (XIX,83)$$

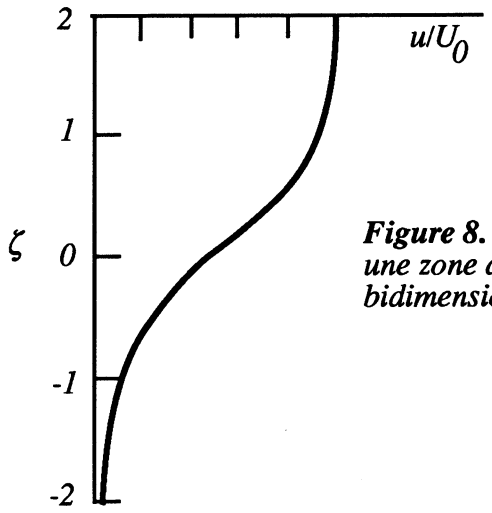


***Figure 8.** La solution de Goertler pour une zone de mélange turbulente bidimensionnelle.*

Les termes suivants de la série (XIX,79) corrigent légérement le profil de vitesse (XIX,83) et peuvent être négligés. L'expression ainsi obtenue est représentée à la figure 8. La forme du profil de vitesse est en accord avec de nombreuses mesures effectuées dans des configurations diverses. A l'issue de ce calcul, les constantes k et a_2 restent indéterminées. Pour fixer leurs valeurs, il faut utiliser des profils expérimentaux et procéder à une comparaison avec les profils théoriques.

L'analyse qui vient d'être présentée illustre plusieurs aspects importants. Nous avons d'abord établi un système d'équations simplifiées permettant l'analyse de couches turbulentes minces. Nous avons ensuite montré comment on pouvait trouver des solutions auto-semblables pour un écoulement turbulent typique. Pour déterminer la solution, il a fallu introduire un premier modèle pour les contraintes de Reynolds.

Nous allons maintenant considérer le problème de modélisation des contraintes turbulentes sur un plan plus général.

XIX.6. Modèles de turbulence

Le problème de la modélisation de la turbulence apparaît lorsqu'on applique un traitement statistique aux équations de Navier-Stokes. On obtient le système d'équations de Reynolds, qui s'écrit, pour un fluide incompressible et newtonien, sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{v}_i) = 0 \qquad (XIX,84)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v}_i\overline{v}_j) = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\tau}^l_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}\tau^t_{ij} + \rho g_i \qquad (XIX,85)$$

où :

$$\overline{\tau}^l_{ij} = \mu\left(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v_j}}{\partial x_i}\right) = 2\mu\overline{d_{ij}}, \qquad \text{et} \quad \tau^t_{ij} = -\rho\overline{v'_i v'_j} \qquad (XIX,86)$$

Les contraintes turbulentes τ_{ij}^t doivent être spécifiées si l'on souhaite déterminer l'écoulement moyen. Il faut utiliser à cet effet un modèle de turbulence. L'objectif de la modélisation est d'établir des relations ou des équations permettant le calcul des contraintes de Reynolds à partir des caractéristiques de l'écoulement moyen. Ces relations forment, avec les équations de Reynolds, un système **fermé**.

Il existe une grande variété de modèles de turbulence. On distingue en général les différentes méthodes de fermeture en fonction de leur complexité relative. Les modèles les plus simples utilisent des relations purement **algébriques** pour spécifier les contraintes turbulentes. Ces modèles s'appuient sur le concept de **viscosité turbulente**, dont la détermination est effectuée à l'aide de formules empiriques simples (modèles de Goertler, Prandtl, Cebeci-Smith, Baldwin-Lomax...)

Dans les modèles à **une équation de transport**, la détermination des contraintes de Reynolds nécessite l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. On considère généralement une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente et on exprime la viscosité turbulente en fonction de cette quantité (modèle de Prandtl-Kolmogorov).

Les modèles à **deux équations de transport**, comme le modèle $k - \epsilon$ ou le modèle $k - \omega^2$, font intervenir deux équations aux dérivées partielles pour déterminer la viscosité turbulente. On utilise encore une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente et une deuxième équation, qui décrit la dissipation ou la pseudo-vorticité.

Les modèles précédents s'appuient tous sur la notion de viscosité turbulente. Ce concept est mis en défaut dans divers types d'écoulements, ce qui conduit à spécifier les contraintes de Reynolds à l'aide d'un système complet d'équations de transport. On parle alors de **modèles du second ordre ou modèles RSM** ("Reynolds Stress Models").

Il existe aussi des modèles intermédiaires qui utilisent deux équations de transport et un ensemble de relations algébriques pour calculer les éléments du tenseur de Reynolds.

Nous allons effectuer ici un tour panoramique de ces modèles, en laissant de côté les modèles les plus complexes (RSM et ASM). L'exposé est incomplet sur plusieurs plans, mais la littérature scientifique traitant du sujet est abondante; le lecteur intéressé pourra consulter, pour des informations complémentaires, les livres de Mathieu, Jeandel et Reynolds 1984, Cebeci et Bradshaw 1984, ou Bradshaw, Cebeci et Whitelaw 1981.

XIX.6.1. Le concept de viscosité turbulente

La plupart des modèles de turbulence utilisés à l'heure actuelle font appel au concept de viscosité turbulente. Cette notion, proposée initialement par Boussinesq, a déjà été utilisée plus haut, dans l'analyse de la solution de Goertler, pour une zone de mélange turbulente. La viscosité turbulente est introduite par analogie avec la viscosité laminaire.

Pour simplifier l'exposé, considérons la couche de mélange libre qui s'établit entre deux écoulements uniformes de vitesse U_1 et U_2 (figure 9). Si l'épaisseur de cette couche est faible, la contrainte de Reynolds principale est :

$$\tau_{12}^t = -\rho\overline{v_1' v_2'}$$

Les autres contraintes ($\tau_{11}^t = -\rho\overline{v_1'^2}$, $\tau_{22}^t = -\rho\overline{v_2'^2}\ldots$) sont négligeables ou ne participent pas à l'équilibre dynamique de la couche de mélange.

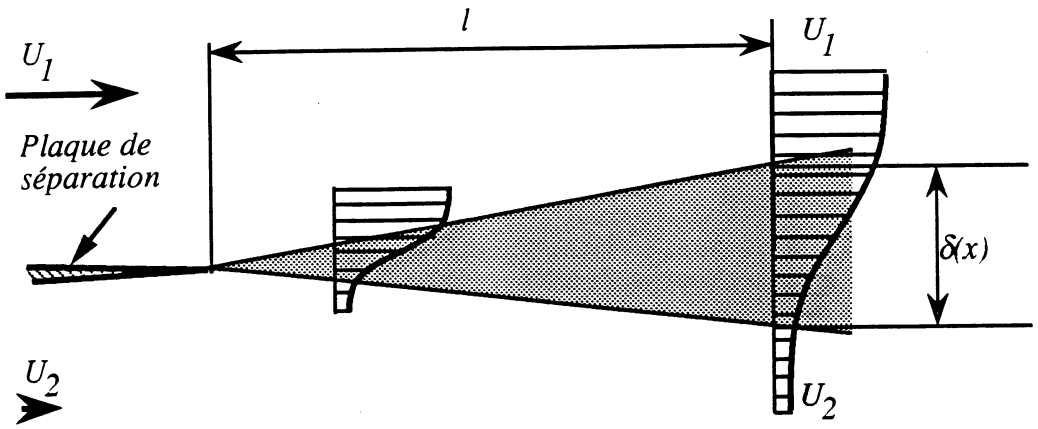


Figure 9. *Couche de mélange turbulente bidimensionnelle. La contrainte dominante est* $-\rho v_1' v_2'$.

L'analogie avec les mécanismes qui produisent les contraintes visqueuses conduit à écrire :

$$-\rho\overline{v_1' v_2'} = \mu_t \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2} \qquad (XIX, 87)$$

La contrainte τ_{12}^t est proportionnelle au gradient transversal de vitesse. Le coefficient de proportionnalité μ_t, à la différence de la viscosité laminaire, dépend directement de l'écoulement envisagé. Le problème est ainsi ramené à la détermination de μ_t. Les possibilités sont diverses, mais toutes ont un champ d'application limité.

Une méthode particulièrement simple consiste à supposer que μ_t garde une valeur constante dans chaque section de la couche de mélange. Un raisonnement dimensionnel montre alors que μ_t doit être proportionnel au produit d'une vitesse et d'une échelle typiques de la section considérée :

$$\mu_t \sim \rho U l$$

On peut prendre pour U la différence de vitesse $U_1 - U_2$ et pour l l'épaisseur locale δ de la couche de mélange. On a alors :

$$\mu_t = K\rho(U_1 - U_2)\delta \qquad (XIX, 88)$$

La constante de proportionnalité K peut être ajustée au moyen de comparaisons entre des solutions théoriques des équations de Reynolds et des profils expérimentaux.

XIX.6.2. Généralisation du concept de viscosité turbulente

La généralisation en trois dimensions de la notion de viscosité turbulente nécessite l'introduction de l'énergie cinétique turbulente :

$$k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'} = \frac{1}{2}(\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2}) \qquad (XIX, 89)$$

On peut écrire :

$$-\rho\overline{v_i'v_j'} = \mu_t[(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\frac{\partial\overline{v}_k}{\partial x_k})\delta_{ij}] - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \qquad (XIX,90)$$

Le dernier terme de cette expression est nécessaire pour assurer la compatibilité des contraintes normales. En effet, la somme de ces contraintes doit être en valeur absolue égale au double de l'énergie cinétique par unité de volume :

$$(-\rho\overline{v_1'v_1'}) + (-\rho\overline{v_2'v_2'}) + (-\rho\overline{v_3'v_3'}) = -2\rho k$$

Cette relation est bien vérifiée par l'expression (XIX,90).

XIX.6.3. Le modèle de longueur de mélange de Prandtl

Le modèle de longueur de mélange proposé par Prandtl en 1925 appartient à la catégorie des modèles algébriques. Dans ce modèle, μ_t est directement relié au **gradient de vitesse moyenne** par l'intermédiaire d'une longueur l_m, appelée par Prandtl **longueur de mélange.**

Considérons à nouveau la couche turbulente mince de la figure 9. Dans cette situation, le modèle de Prandtl consiste à représenter μ_t sous la forme :

$$\mu_t = \rho l_m^2 |\frac{\partial\overline{v_1}}{\partial x_2}| \qquad (XIX,91)$$

La contrainte de Reynolds $-\rho\overline{v_1'v_2'}$ prend alors la forme :

$$-\rho\overline{v_1'v_2'} = \rho l_m^2 |\frac{\partial\overline{v_1}}{\partial x_2}|\frac{\partial\overline{v_1}}{\partial x_2} \qquad (XIX,92)$$

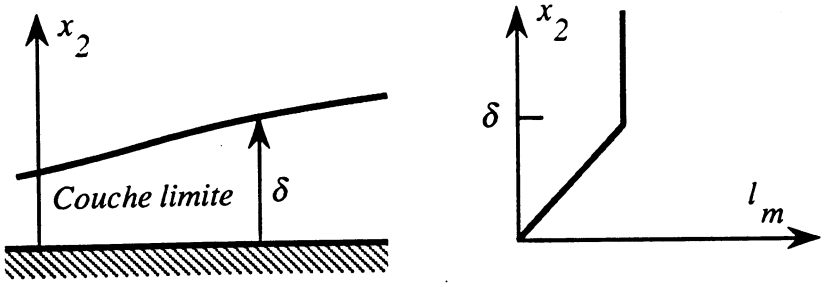


***Figure 10.** Profil de longueur de mélange dans une couche limite turbulente.*

La longueur de mélange l_m doit être déterminée de façon empirique. Pour les écoulements turbulents libres (zones de mélange, jets, sillages), on peut supposer que l_m reste constant dans chaque section et proportionnelle à l'épaisseur de la couche de mélange. La constante de proportionnalité dépend de l'écoulement étudié.

Dans le cas des couches limites turbulentes il faut utiliser, au voisinage de la paroi, une longueur de mélange proportionnelle à la distance x_2 de la paroi :

$$l_m = Kx_2 \qquad \text{où} \quad K \simeq 0.41 \quad \text{est la constante de Kármán}$$

Dans la région externe de la couche limite, l_m doit être proportionnelle à l'épaisseur de la couche limite (figure 10).

Le choix de la longueur de mélange l_m dépend du type d'écoulement envisagé et, de ce fait, les modèles de turbulence basés sur cette notion n'ont pas un degré de généralité élevé. Des améliorations de ce modèle (Van Driest, Cebeci et Smith, Baldwin et Lomax) permettent cependant l'analyse de la plupart des écoulements turbulents cisaillés simples.

XIX.6.4. Modèle à une équation de transport (Prandtl-Kolmogorov)

Pour définir une modélisation à caractère plus général, il faut recourir à des équations de transport supplémentaires. Il est logique de considérer d'abord l'énergie cinétique turbulente :

$$k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'} = \frac{1}{2}(\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2})$$

On garde encore le concept de viscosité turbulente pour exprimer les contraintes de Reynolds, mais on abandonne les expressions algébriques donnant μ_t. Si l'on admet que μ_t doit être une fonction de la densité ρ, de l'énergie cinétique de la turbulence k et d'une longueur caractéristique l :

$$\mu_t = f(\rho, k, l) \qquad (XIX,93)$$

alors l'analyse dimensionnelle indique que μ_t doit être obligatoirement de la forme :

$$\mu_t = C_\mu \rho k^{1/2} l \qquad (XIX,94)$$

L'énergie cinétique de la turbulence qui apparaît dans cette expression va être déterminée à l'aide d'une équation de transport. Cette équation, établie à partir des équations de Navier-Stokes (voir Annexe A), s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_i}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p' v_j'} + \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i' v_j'} - 2\mu\overline{s_{ij} v_i'}\right)}_{(1)\qquad\qquad\qquad(2)}$$
$$\underbrace{-\rho\overline{v_i' v_j'}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}}_{(3)} \underbrace{-\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}}_{(4)} \qquad (XIX,95)$$

Le premier terme représente le taux de variation de l'énergie cinétique turbulente par unité de volume. Cette variation résulte des trois termes qui apparaissent au second membre. Si on considère d'abord le troisième terme, on note que cet élément de l'équation (XIX,95) est toujours positif ou nul. En effet :

$$P = -\rho\overline{v_i' v_j'}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}$$
$$= \frac{1}{2}\mu_t\left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i}\right)^2 \geq 0 \qquad (XIX,96)$$

Ce terme est facilement estimé en appliquant les règles suivantes :

• l'énergie cinétique est de l'ordre de u^2.

• l'échelle des gradients qui apparaissent à l'extérieur de l'opérateur de moyenne est l. On a ainsi :

$$(3) \sim (\rho u l)\frac{u^2}{l^2} = \rho\frac{u^3}{l}$$

Les dimensions de ce terme sont donc celles d'une énergie cinétique par unité de volume et de temps. Comme le signe est positif, le troisième terme représente la production d'énergie cinétique par les taux de déformation de l'écoulement moyen.

Le quatrième terme est aussi positif ou nul. Comme ce terme est précédé par le signe moins, il représente une disparition d'énergie cinétique. La forme du quatrième terme rappelle celle de la fonction de dissipation visqueuse, et son ordre de grandeur peut être estimé à l'aide de la règle suivante :

• lorsque le signe de dérivation apparaît à l'intérieur de l'opérateur de moyenne, l'échelle de longueur appropriée est λ (l'échelle de Taylor). L'application de cette règle conduit à :

$$\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} \sim \mu\frac{u^2}{\lambda^2}$$

Cette expression est identique à celle du taux de dissipation $\rho\epsilon$ de la section 3.

Le quatrième terme représente donc la dissipation de l'énergie cinétique par l'action des contraintes visqueuses.

La signification physique du second terme est moins claire. Ce terme a la forme de la divergence d'un flux. Ce flux comprend une corrélation pression-vitesse, une corrélation triple entre l'énergie cinétique et les fluctuations de vitesse et une corrélation entre les taux de déformation et les vitesses. On considère généralement que ce terme représente un mécanisme de diffusion turbulente de l'énergie cinétique.

Pour utiliser l'équation de transport de l'énergie cinétique k, il faut modéliser les termes (2) et (4) du second membre. Cette modélisation s'appuie sur les remarques précédentes. On écrit :

$$-\overline{p'v_j'} + \frac{1}{2}\rho\overline{v_i'v_i'v_j'} - 2\mu\overline{s_{ij}v_i'} = (\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k})\frac{\partial k}{\partial x_j} \qquad (XIX,97)$$

$$\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} = \rho\epsilon \qquad (XIX,98)$$

avec :

$$\epsilon = C_D k^{3/2}/l \qquad (XIX,99)$$

Dans ces expressions, σ_k et C_D sont des constantes empiriques.

La relation (XIX,97) exprime le terme de flux comme un terme de diffusion par gradient et la disparition d'énergie cinétique est représentée à l'aide du taux de dissipation ϵ. L'expression (XIX,99) utilisée pour ϵ s'apparente à celle retenue dans la cascade de Kolmogorov (voir section 3). On peut encore justifier cette représentation par un raisonnement dimensionnel. On sait en effet que ϵ constitue un taux de variation d'énergie cinétique et on peut écrire :

$$\epsilon \sim \frac{\text{énergie cinétique turbulente}}{\text{temps caractéristique des fluctuations}}$$

Le seul temps caractéristique que l'on puisse former à partir de l et k est $l/k^{1/2}$. On a par conséquent :

$$\epsilon \sim \frac{k}{(l/k^{1/2})} \qquad \text{soit} \quad \epsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l}$$

L'équation de bilan pour l'énergie cinétique turbulente modélisée à l'aide des expressions (XIX,97) et (XIX,98) s'écrit finalement :

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{v_i}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right] - \rho\overline{v_i' v_j'}\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} - \rho\epsilon \qquad (XIX,100)$$

avec : $\epsilon = C_D k^{3/2}/l$.

Cette équation utilisée en association avec l'expression des contraintes (XIX,90) permet la détermination de μ_t. Les constantes empiriques utilisées couramment sont $\sigma_k = 1$ et $C_D = 0.08$. Le problème de la spécification de l'échelle de longueur l subsiste.

Pour comprendre les relations qui existent entre le modèle de longueur de mélange et le modèle à une équation de transport pour k, envisageons le cas d'un écoulement cisaillé mince.

On peut utiliser les approximations de couche limite pour simplifier le bilan d'énergie cinétique. On a dans cette situation :

$$\rho\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_2}\right] + \mu_t\left(\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2}\right)^2 - \rho C_D \frac{k^{3/2}}{l} \qquad (XIX,101)$$

Si l'on admet qu'un équilibre s'établit entre les termes de production et de dissipation d'énergie cinétique, c'est-à-dire si l'on néglige les termes de transport et de diffusion de l'équation précédente, on a :

$$\mu_t\left(\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2}\right)^2 = \rho C_D \frac{k^{3/2}}{l} \qquad (XIX,102)$$

Comme $\mu_t = \rho k^{1/2} l$, on déduit facilement :

$$k = \frac{l^2}{C_D}\left(\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2}\right)^2 \qquad \text{et} \quad \mu_t = \frac{\rho l^2}{(C_D)^{1/2}}\left|\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_2}\right|$$

On retrouve ainsi le modèle de longueur de mélange en posant $l_m = l/(C_D)^{1/4}$.

Le modèle de Prandtl-Kolmogorov apparaît ainsi comme la généralisation du modèle de longueur de mélange aux situations dans lesquelles l'équilibre entre la production et la dissipation d'énergie cinétique n'est plus assuré.

XIX.6.5. Le modèle $k - \epsilon$

L'utilisation d'une seule équation de transport ne permet pas la détermination de l'échelle caractéristique l. Comme la distribution de cette échelle n'est pas connue a priori, la

spécification empirique de l s'avère difficile. Pour lever cette difficulté, on peut rechercher une nouvelle équation de transport permettant la détermination de cette échelle. Il est plus facile, en pratique, d'établir une équation de transport pour une variable composite $\Phi = k^m l^m$. Les exposants m et n sont arbitraires, mais le choix le plus courant à ce jour consiste à prendre $m = 3/2$, $n = -1$. La variable Φ est, dans ce cas, la dissipation ϵ. L'équation de bilan pour ϵ peut être tirée des équations de Navier-Stokes. Cette équation fait intervenir des corrélations doubles des vitesses et de leurs gradients. La modélisation de ces termes est relativement complexe et nécessite un grand nombre d'hypothèses. L'équation de transport de la dissipation s'écrit finalement :

$$\rho\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}\right] + C_{1\epsilon}\frac{\epsilon}{k}P - \rho C_{2\epsilon}\frac{\epsilon^2}{k} \qquad (XIX, 103)$$

(1) (2) (3) (4)

où :

$$P = -\rho\overline{v_i' v_j'}\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} \qquad (XIX, 104)$$

On retrouve au second membre de cette équation un terme de diffusion turbulente, un terme de production et un terme de destruction. Le terme de production (3) conduit à une augmentation de la dissipation, alors que le terme de destruction fait diminuer cette quantité.

La viscosité turbulente est maintenant déduite de l'énergie cinétique et de la dissipation, suivant l'expression :

$$\mu_t = \rho C_\mu (k^2/\epsilon) \qquad (XIX, 105)$$

Les cinq constantes empiriques du modèle prennent les valeurs suivantes :

$$C_{1\epsilon} = 1.44 \qquad C_{2\epsilon} = 1.92 \qquad C_\mu = 0.09 \qquad \sigma_k = 1 \qquad \sigma_\epsilon = 1.3$$

Ces valeurs ont été ajustées pour des écoulements turbulents libres. Diverses modifications des équations de transport de k et ϵ permettent le calcul d'écoulements dont le nombre de Reynolds est faible. Ces améliorations sont particulièrement utiles dans des calculs de couche limites turbulentes.

Bien que le modèle $k - \epsilon$ soit couramment utilisé dans un grand nombre d'applications, il ne donne pas une réponse définitive au problème de modélisation de la turbulence.

Les modèles de turbulence que nous venons de décrire ont été utilisés extensivement dans un grand nombre d'applications. A titre d'illustration les figures 14 à 18 donnent les résultats de calculs effectués dans le cas d'un jet libre subsonique représenté schématiquement à la figure 13 (Sadallah 1984). Les planches 14 et 15 donnent respectivement la distribution de vitesse axiale et la répartition d'énergie cinétique turbulente calculées à l'aide du modèle de Prandtl-Kolmogorov. Les figures 16, 17 et 18 donnent la vitesse axiale, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation obtenues dans la même situation à l'aide du modèle $k - \epsilon$. Les vitesses axiales calculées avec les deux modèles sont semblables et reproduisent convenablement les répartitions déterminées expérimentalement. Les distributions d'énergie cinétique turbulente sont moins proches. Des comparaisons détaillées entre des calculs et l'expérience montrent que le modèle $(k - \epsilon)$ est bien adapté au calcul des jets libres et plus généralement des écoulements cisaillés simples (zones de mélange, sillages ; couches limites). La formulation doit cependant être affinée pour traiter des écoulements plus complexes.

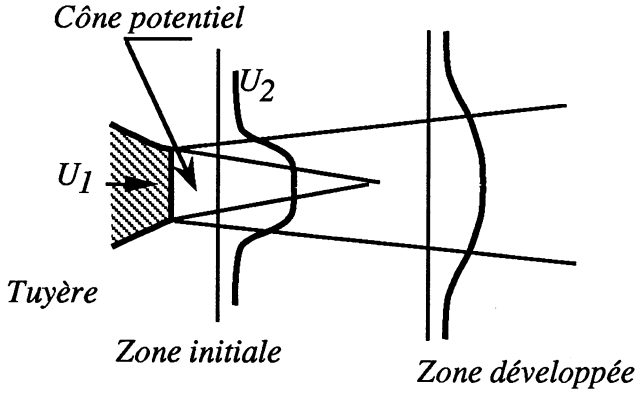


Figure 13. *Jet libre subsonique.*

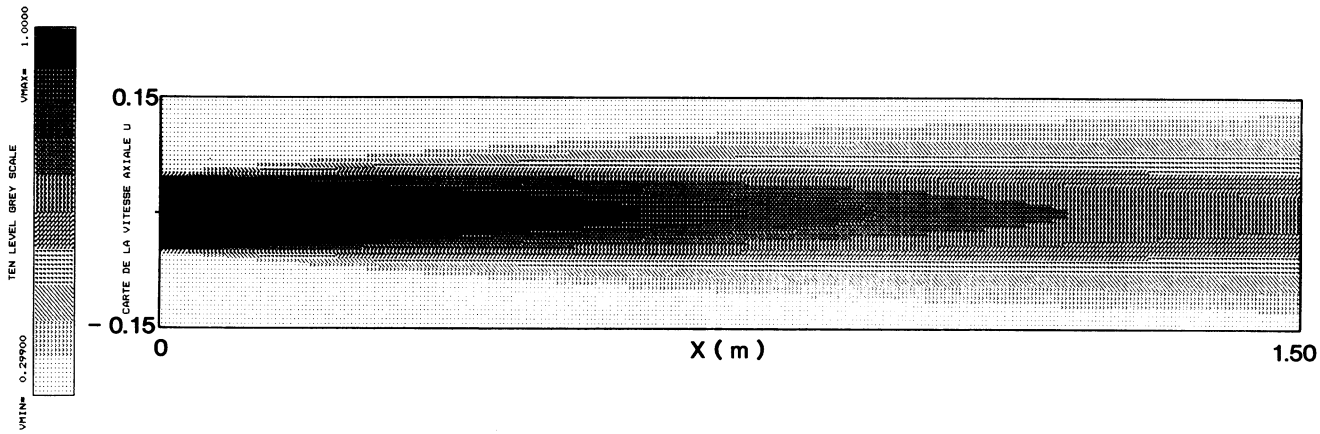


Figure 14. *Structure moyenne d'un jet libre. La vitesse axiale u est représentée à l'aide d'une échelle de gris. Le symbole le plus clair correspond à une vitesse nulle. Le symbole le plus foncé représente la vitesse maximum. Les contraintes de Reynolds sont obtenues dans ce calcul à l'aide du modéle de Prandtl-Kolmogorov.*

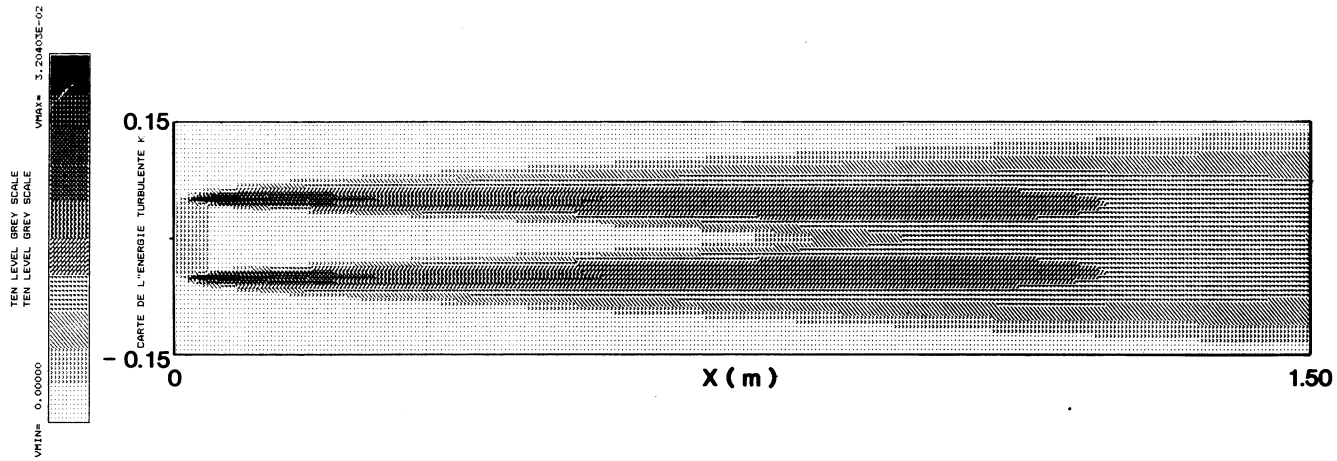


Figure 15. *Répartition de l'energie cinétique turbulente obtenue dans le calcul du jet de la figure 14. Le modéle de Prandtl-Kolmogorov est utilisé dans ce calcul.*

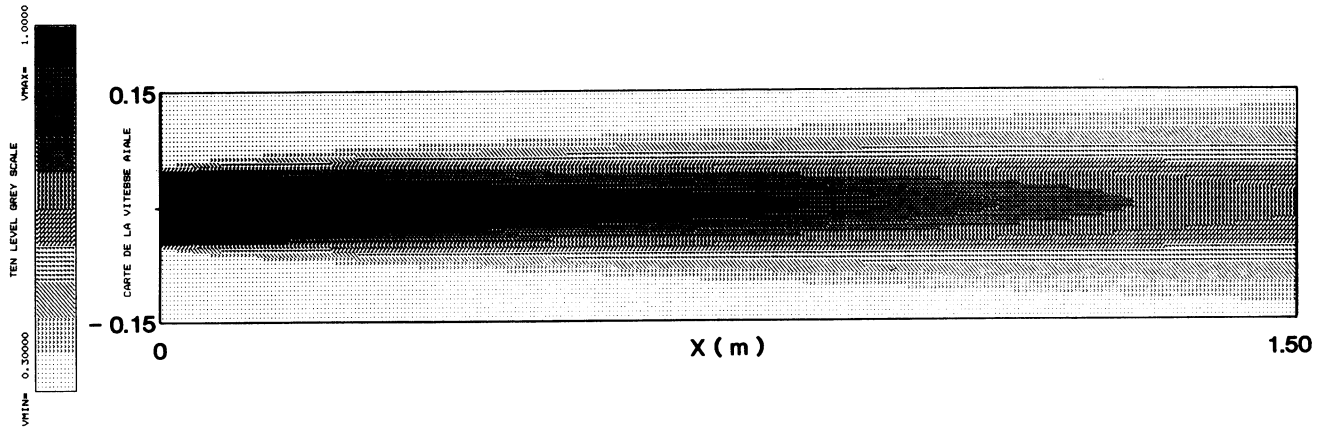


Figure 16. *Structure moyenne d'un jet libre. La vitesse axiale u est représentée à l'aide d'une échelle de gris. Le symbole le plus clair correspond à une vitesse nulle. Le symbole le plus foncé représente la vitesse maximum. Les contraintes de Reynolds sont obtenues dans ce calcul à l'aide du modéle de k - ε.*

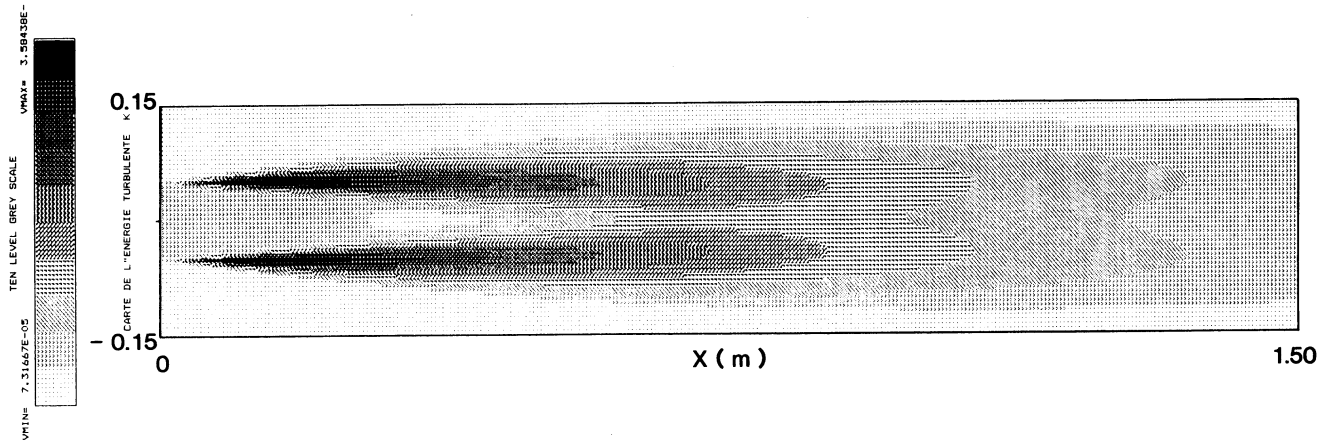


Figure 17. *Répartition de l'energie cinétique turbulente obtenue dans le calcul du jet de la figure 16. Le modéle k - ε est utilisé dans ce calcul.*

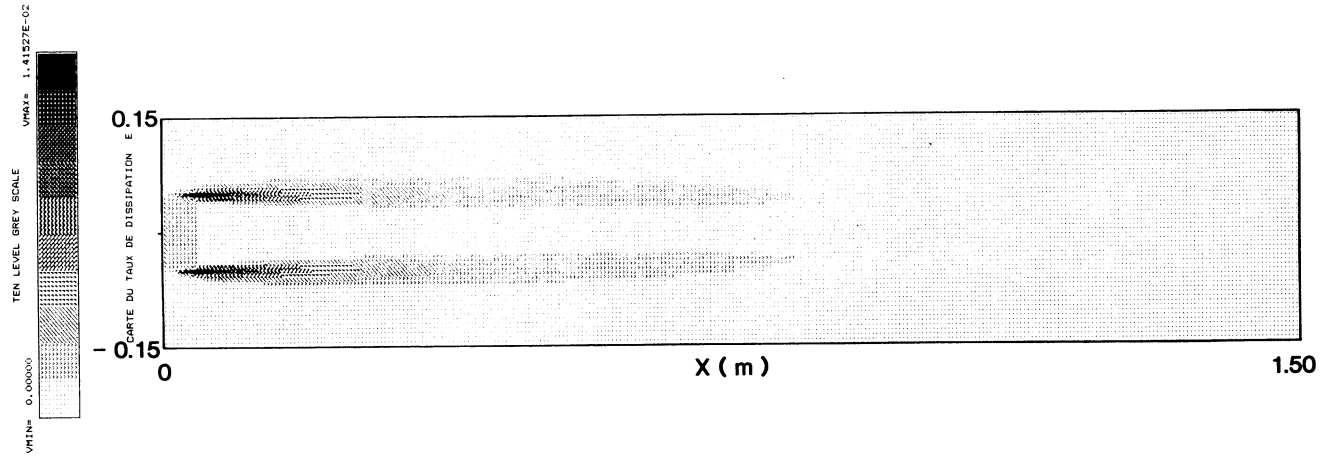


Figure 18. *Répartition de la dissipation obtenue dans le calcul du jet de la figure 16. Le modéle k - ε est utilisé dans ce calcul.*

ANNEXE A

EQUATION DE BILAN POUR L'ENERGIE CINETIQUE DE LA TURBULENCE

Nous allons maintenant écrire une relation de bilan pour l'énergie cinétique de la turbulence $k = \overline{\frac{1}{2}v_i'v_i'}$. L'établissement de cette équation nécessite une série d'opérations algébriques que nous décrirons en détail pour faciliter leur compréhension. Le point de départ est constitué par l'équation de bilan pour l'énergie cinétique. Il s'agit d'une équation générale établie au chapitre VI et reproduite ici pour des raisons de commodité :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_i v_i v_j) = -v_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad (A,1)$$

Nous considérons uniquement des écoulements de fluides newtoniens et incompressibles. Dans ces conditions, le tenseur des contraintes visqueuses peut se mettre sous la forme :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} \qquad (A,2)$$

où

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

représente le tenseur des taux de déformation.

On peut écrire l'équation (1) sous une forme différente :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_i v_i v_j) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(pv_i) + p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}v_i) - \tau_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}v_i \qquad (A,3)$$

Le deuxième terme du second membre fait intervenir la divergence de la vitesse et il est identiquement nul. Le troisième terme peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu d_{ij}v_i) \qquad (A,4)$$

Le quatrième terme prend la forme :

$$\tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \tau_{ij}\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) = 2\mu d_{ij}d_{ij} \qquad (A,5)$$

L'équation (3) s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho v_i v_i v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(pv_j - 2\mu d_{ij} v_i) = -2\mu d_{ij} d_{ij} \qquad (A,6)$$

Nous allons maintenant décomposer tous les termes de cette équation en leur valeur moyenne et leurs fluctuations. Pour cela nous posons :

$$v_i = \overline{v}_i + v'_i, \quad p_i = \overline{p}_i + p', \quad d_{ij} = D_{ij} + s_{ij} \qquad (A,7)$$

Cette décomposition nous conduit à écrire :

$$\begin{aligned} v_i v_i &= \overline{v}_i\overline{v}_i + \overline{v}_i v'_i + v'_i\overline{v}_i + v'_i v'_i \\ v_i v_i v_j &= \overline{v}_i\overline{v}_i\overline{v}_j + v'_i\overline{v}_i\overline{v}_j + v'_i v'_i\overline{v}_j \\ &\quad + \overline{v}_i\overline{v}_i v'_j + v'_i\overline{v}_i\overline{v}_j + v'_i v'_j\overline{v}_i + v'_i v'_j\overline{v}_i + v'_i v'_i v'_j \end{aligned} \qquad (A,8)$$

$$\begin{aligned} pv_j &= \overline{p}\,\overline{v}_j + p'\overline{v}_j + \overline{p}v'_j + p'v'_j \\ d_{ij}v_i &= D_{ij}\overline{v}_i + D_{ij}v'_i + s_{ij}\overline{v}_i + s_{ij}v'_i \\ d_{ij}d_{ij} &= D_{ij}D_{ij} + D_{ij}s_{ij} + s_{ij}D_{ij} + s_{ij}s_{ij} \end{aligned} \qquad (A,9)$$

Nous prenons maintenant la moyenne de cet ensemble d'expressions :

$$\begin{aligned} \overline{v_i v_i} &= \overline{v}_i\overline{v}_i + \overline{v'_i v'_i} \\ \overline{v_i v_i v_j} &= \overline{v}_i\overline{v}_i\overline{v}_j + \overline{v'_i v'_i}\overline{v}_j + 2\overline{v'_i v'_j}\overline{v}_i + \overline{v'_i v'_i v'_j} \\ \overline{pv_j} &= \overline{p}\,\overline{v}_j + \overline{p'v'_j} \\ \overline{d_{ij}v_i} &= D_{ij}\overline{v}_i + \overline{s_{ij}v'_i} \\ \overline{d_{ij}d_{ij}} &= D_{ij}D_{ij} + \overline{s_{ij}s_{ij}} \end{aligned} \qquad (A,10)$$

L'application de l'opérateur de moyenne à l'équation (A,6) conduit à :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho\overline{v}_i\overline{v}_i + \frac{1}{2}\rho\overline{v'_i v'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho\overline{v}_i\overline{v}_i\overline{v}_j + \frac{1}{2}\rho\overline{v'_i v'_i}\overline{v}_j + \rho\overline{v'_i v'_j}\overline{v}_i + \frac{1}{2}\rho\overline{v'_i v'_i v'_j}) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p}\,\overline{v}_j + \overline{p'v'_j} - 2\mu D_{ij}\overline{v}_i - 2\mu\overline{s_{ij}v'_i}) \\ &\qquad = -2\mu D_{ij}D_{ij} - 2\mu\overline{s_{ij}s_{ij}} \end{aligned} \qquad (A,11)$$

L'expression que nous venons d'obtenir peut être simplifiée. Pour cela, nous partons de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme moyennée :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v}_i\overline{v}_j + \rho\overline{v'_i v'_j} + \overline{p}\delta_{ij} - 2\mu D_{ij}) = 0 \qquad (A,12)$$

Multiplions cette équation par $\overline{v}_i$. On obtient ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho\overline{v}_i\overline{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho\overline{v}_i\overline{v}_i\overline{v}_j) + \overline{v}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{v'_i v'_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p}\,\overline{v}_j - 2\mu\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}\overline{v}_i = 0 \qquad (A,13)$$

On peut encore écrire le dernier terme de cette équation sous la forme :

$$2\mu\overline{v}_i\frac{\partial}{\partial x_j}D_{ij} = 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}(D_{ij}\overline{v}_i) - 2\mu D_{ij}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} = 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}(D_{ij}\overline{v}_i) - 2\mu D_{ij}D_{ij} \qquad (A,14)$$

L'équation (13) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho\overline{v}_i\overline{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho\overline{v}_i\overline{v}_i\overline{v}_j) + \overline{v}_i\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{v'_iv'_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p}\,\overline{v}_j - 2\mu D_{ij}\overline{v}_i) = -2\mu D_{ij}D_{ij} \quad (A,15)$$

On peut maintenant soustraire cette relation de celle obtenue plus haut (11). Cette opération conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho\overline{v'_iv'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{2}\rho\overline{v'_iv'_i}\overline{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v'_iv'_j}\overline{v}_i)$$
$$- \overline{v}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{v'_iv'_j}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p'v'_j} + \frac{1}{2}\rho\overline{v'_iv'_iv'_j} - 2\mu\overline{s_{ij}v'_i}) = -2\mu\overline{s_{ij}s_{ij}} \quad (A,16)$$

On peut maintenant faire apparaître l'énergie cinétique turbulente k et garder uniquement au premier membre les termes qui représentent le transport de cette quantité :

$$\underset{(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\rho k + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k\overline{v}_j)} = \underset{(2)}{-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p'v'_j} + \frac{1}{2}\rho\overline{v'_iv'_iv'_j} - 2\mu\overline{s_{ij}v'_i})}$$

$$\underset{(3)}{-\rho\overline{v'_iv'_j}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}} \underset{(4)}{- 2\mu\overline{s_{ij}s_{ij}}} \qquad (A,17)$$

ou encore :

$$\underset{(1)}{\frac{\partial}{\partial t}\rho k + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k\overline{v}_j)} = \underset{(2)}{-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{p'v'_j} + \frac{1}{2}\rho\overline{v'_iv'_iv'_j} - 2\mu\overline{s_{ij}v'_i})}$$

$$\underset{(3)}{-\rho\overline{v'_iv'_j}D_{ij}} \underset{(4)}{- 2\mu\overline{s_{ij}s_{ij}}} \qquad (A,18)$$

Le premier membre de cette équation peut aussi se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho k + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k\overline{v}_j) = \rho\frac{dk}{dt} \qquad (A,19)$$

Les termes (3) et (4) écrits sous forme plus explicite deviennent :

$$-\rho\overline{v'_iv'_j}D_{ij} = -\rho\overline{v'_iv'_j}\frac{1}{2}(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}) = -\rho\overline{v'_iv'_j}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} \qquad (A,20)$$

et :

$$-2\mu\overline{s_{ij}s_{ij}} = -2\mu\overline{s_{ij}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j'}{\partial x_i}\right)} = -2\mu\overline{s_{ij}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} = -\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}} \qquad (A,21)$$

En définitive, l'équation de bilan pour l'énergie cinétique turbulente prend la forme :

$$\begin{aligned}\rho\frac{dk}{dt} = &-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p'v_j'}+\frac{1}{2}\rho\overline{v_i'v_i'v_j'}-2\mu\overline{s_{ij}v_i'}\right)\\ &-\rho\overline{v_i'v_j'}\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}-\mu\overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_j}\frac{\partial v_j'}{\partial x_j}}\end{aligned} \qquad (A,22)$$

Tableau 1. Les équations de Reynolds pour un fluide incompressible et newtonien

Notation indicielle :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{v}_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{v}_i\overline{v}_j = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\mu\nabla^2\overline{v}_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho\overline{v_i'v_j'}\right)+\rho g_i$$

ou encore :

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t}+\overline{v}_j\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}+\mu\nabla^2\overline{v}_i+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho\overline{v_i'v_j'}\right)+\rho g_i$$

Projection des équations de Reynolds sur les trois axes :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho\overline{u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}^2+\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{u}\,\overline{v}+\frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{u}\,\overline{w} =\\ &\quad -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\overline{u}-\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u'u'}-\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{u'v'}-\frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{u'w'}+\rho g_x\\ &\frac{\partial\rho\overline{v}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}\,\overline{v}+\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v}^2+\frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v}\,\overline{w} =\\ &\quad -\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\mu\nabla^2\overline{v}-\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u'v'}-\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v'v'}-\frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{v'w'}+\rho g_y\\ &\frac{\partial\rho\overline{w}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u}\,\overline{w}+\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v}\,\overline{w}+\frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{w}^2 =\\ &\quad -\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\overline{w}-\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{u'w'}-\frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v'w'}-\frac{\partial}{\partial z}\rho\overline{w'w'}+\rho g_z\end{aligned}$$

Tableau 2. Equations pour les couches turbulentes minces bidimensionnelles

Quantité de mouvement suivant x :

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_*}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\tau}^l + \tau^t)$$

où :

$$p_* = p_\infty + \frac{\rho}{2}(\overline{u'^2} - \overline{v'^2}), \qquad \overline{\tau}^l = \mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}, \qquad \tau^t = -\rho\overline{u'v'}$$

Quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = 0$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0$$

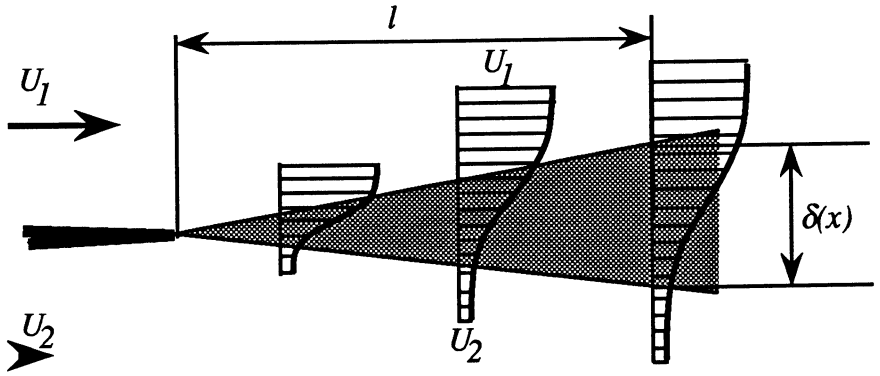


Figure 11.

Tableau 3. Modèle de viscosité turbulente (Couche turbulente mince)

Contrainte de Reynolds :

$$-\rho\overline{v_1' v_2'} = \mu_t \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

Viscosité turbulente :

$$\mu_t = \rho\, k(U_1 - U_2)\delta$$

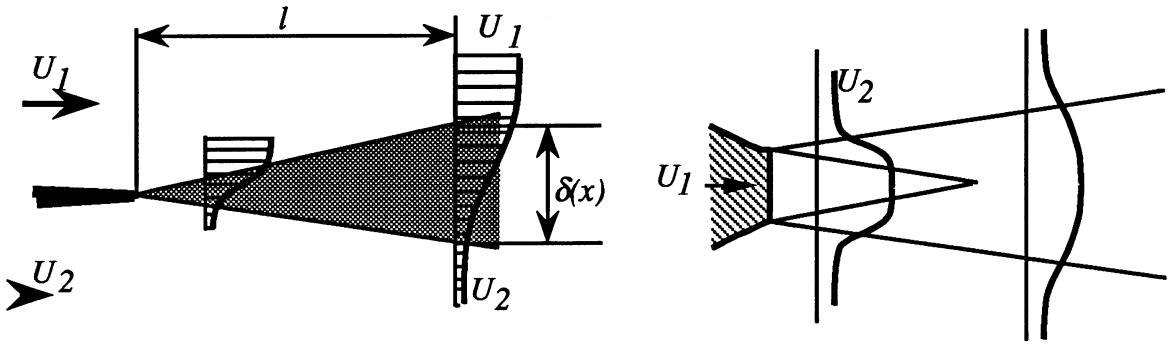


***Figure 12.** La viscosité turbulente peut être évaluée en fonction de la différence des vitesses $U_1 - U_2$ dans la section considérée.*

Tableau 4. Modèle de longueur de mélange de Prandtl (Couche turbulente mince)

Contrainte de Reynolds :

$$-\rho\overline{v_1' v_2'} = \mu_t \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}$$

Viscosité turbulente :

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left|\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}\right|$$

Longueur de mélange :

Ecoulement libre :	$l_m = c\,\delta$	
Ecoulement pariétal :	$l_m = K x_2$	près de la paroi
	$l_m = c\delta$	région externe

Tableau 5. Modèle de Prandtl-Kolmogorov (Couche turbulente mince)

Contrainte de Reynolds :

$$-\rho\overline{v_1' v_2'} = \mu_t \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}$$

Viscosité turbulente :

$$\mu_t = \rho k^{1/2} l$$

Equation de bilan pour l'énergie cinétique turbulente :

$$\rho\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_2}\right) + \mu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}\right)^2 - \rho\epsilon$$

avec : $\epsilon = C_D\, k^{3/2}/l$

Constantes empiriques : $\sigma_k = 1, \qquad C_D = 0.08$

Tableau 6. Modèle $(k-\epsilon)$ (Couche turbulente mince)

Contrainte de Reynolds :

$$-\rho\overline{v_1' v_2'} = \mu_t \frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}$$

Viscosité turbulente :

$$\mu_t = \rho C_\mu k^2/\epsilon$$

Equation de bilan pour l'énergie cinétique :

$$\rho\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_2}\right) + \mu_t\left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}\right)^2 - \rho\epsilon$$

Equation de bilan pour la dissipation :

$$\rho\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x_2}\right) + C_{1\epsilon}\mu_t\frac{\epsilon}{k}\left(\frac{\partial \overline{v}_1}{\partial x_2}\right)^2 - C_{2\epsilon}\rho\frac{\epsilon^2}{k}$$

Constantes empiriques : $C_\mu \sim 0.09, \quad C_{1\epsilon} \sim 1.44, \quad C_{2\epsilon} \sim 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\epsilon \sim 1.3$

Ecoulement isentropique avec changement de section, $\gamma = 1.40$

M	T/T_i	p/p_i	ρ/ρ_i	f/f^*	$(p/p_i)(A/A^*)$	A/A^*
.00	0.0000E+00	0.1000E+01	0.1000E+01	inf	inf	inf
.01	0.1000E+01	0.9999E+00	0.9999E+00	0.4565E+02	0.5787E+02	0.5787E+02
.02	0.9999E+00	0.9997E+00	0.9998E+00	0.2283E+02	0.2893E+02	0.2894E+02
.03	0.9998E+00	0.9994E+00	0.9995E+00	0.1523E+02	0.1929E+02	0.1930E+02
.04	0.9997E+00	0.9989E+00	0.9992E+00	0.1143E+02	0.1447E+02	0.1448E+02
.05	0.9995E+00	0.9983E+00	0.9988E+00	0.9158E+01	0.1157E+02	0.1159E+02
.06	0.9993E+00	0.9975E+00	0.9982E+00	0.7643E+01	0.9642E+01	0.9666E+01
.07	0.9990E+00	0.9966E+00	0.9976E+00	0.6562E+01	0.8263E+01	0.8292E+01
.08	0.9987E+00	0.9955E+00	0.9968E+00	0.5753E+01	0.7229E+01	0.7262E+01
.09	0.9984E+00	0.9944E+00	0.9960E+00	0.5125E+01	0.6425E+01	0.6461E+01
.10	0.9980E+00	0.9930E+00	0.9950E+00	0.4624E+01	0.5781E+01	0.5822E+01
.11	0.9976E+00	0.9916E+00	0.9940E+00	0.4215E+01	0.5255E+01	0.5299E+01
.12	0.9971E+00	0.9900E+00	0.9928E+00	0.3875E+01	0.4816E+01	0.4864E+01
.13	0.9966E+00	0.9883E+00	0.9916E+00	0.3588E+01	0.4444E+01	0.4497E+01
.14	0.9961E+00	0.9864E+00	0.9903E+00	0.3343E+01	0.4126E+01	0.4182E+01
.15	0.9955E+00	0.9844E+00	0.9888E+00	0.3132E+01	0.3849E+01	0.3910E+01
.16	0.9949E+00	0.9823E+00	0.9873E+00	0.2947E+01	0.3608E+01	0.3673E+01
.17	0.9943E+00	0.9800E+00	0.9857E+00	0.2786E+01	0.3394E+01	0.3464E+01
.18	0.9936E+00	0.9776E+00	0.9840E+00	0.2642E+01	0.3205E+01	0.3278E+01
.19	0.9928E+00	0.9751E+00	0.9822E+00	0.2515E+01	0.3035E+01	0.3112E+01
.20	0.9921E+00	0.9725E+00	0.9803E+00	0.2400E+01	0.2882E+01	0.2964E+01
.21	0.9913E+00	0.9697E+00	0.9783E+00	0.2298E+01	0.2744E+01	0.2829E+01
.22	0.9904E+00	0.9668E+00	0.9762E+00	0.2205E+01	0.2618E+01	0.2708E+01
.23	0.9895E+00	0.9638E+00	0.9740E+00	0.2120E+01	0.2503E+01	0.2597E+01
.24	0.9886E+00	0.9607E+00	0.9718E+00	0.2043E+01	0.2397E+01	0.2496E+01
.25	0.9877E+00	0.9575E+00	0.9694E+00	0.1973E+01	0.2300E+01	0.2403E+01
.26	0.9867E+00	0.9541E+00	0.9670E+00	0.1909E+01	0.2211E+01	0.2317E+01
.27	0.9856E+00	0.9506E+00	0.9645E+00	0.1850E+01	0.2128E+01	0.2238E+01
.28	0.9846E+00	0.9470E+00	0.9619E+00	0.1795E+01	0.2051E+01	0.2166E+01
.29	0.9835E+00	0.9433E+00	0.9592E+00	0.1745E+01	0.1979E+01	0.2098E+01
.30	0.9823E+00	0.9395E+00	0.9564E+00	0.1698E+01	0.1912E+01	0.2035E+01
.31	0.9811E+00	0.9355E+00	0.9535E+00	0.1655E+01	0.1849E+01	0.1977E+01
.32	0.9799E+00	0.9315E+00	0.9506E+00	0.1614E+01	0.1790E+01	0.1922E+01
.33	0.9787E+00	0.9274E+00	0.9476E+00	0.1577E+01	0.1735E+01	0.1871E+01
.34	0.9774E+00	0.9231E+00	0.9445E+00	0.1542E+01	0.1683E+01	0.1823E+01
.35	0.9761E+00	0.9188E+00	0.9413E+00	0.1509E+01	0.1634E+01	0.1778E+01
.36	0.9747E+00	0.9143E+00	0.9380E+00	0.1479E+01	0.1587E+01	0.1736E+01
.37	0.9733E+00	0.9098E+00	0.9347E+00	0.1450E+01	0.1543E+01	0.1696E+01
.38	0.9719E+00	0.9052E+00	0.9313E+00	0.1424E+01	0.1501E+01	0.1659E+01
.39	0.9705E+00	0.9004E+00	0.9278E+00	0.1398E+01	0.1462E+01	0.1623E+01
.40	0.9690E+00	0.8956E+00	0.9243E+00	0.1375E+01	0.1424E+01	0.1590E+01
.41	0.9675E+00	0.8907E+00	0.9207E+00	0.1353E+01	0.1388E+01	0.1559E+01
.42	0.9659E+00	0.8857E+00	0.9170E+00	0.1332E+01	0.1354E+01	0.1529E+01
.43	0.9643E+00	0.8807E+00	0.9132E+00	0.1312E+01	0.1322E+01	0.1501E+01
.44	0.9627E+00	0.8755E+00	0.9094E+00	0.1294E+01	0.1290E+01	0.1474E+01
.45	0.9611E+00	0.8703E+00	0.9055E+00	0.1276E+01	0.1261E+01	0.1449E+01
.46	0.9594E+00	0.8650E+00	0.9016E+00	0.1260E+01	0.1232E+01	0.1425E+01
.47	0.9577E+00	0.8596E+00	0.8976E+00	0.1244E+01	0.1205E+01	0.1402E+01
.48	0.9559E+00	0.8541E+00	0.8935E+00	0.1230E+01	0.1179E+01	0.1380E+01
.49	0.9542E+00	0.8486E+00	0.8894E+00	0.1216E+01	0.1154E+01	0.1359E+01
.50	0.9524E+00	0.8430E+00	0.8852E+00	0.1203E+01	0.1130E+01	0.1340E+01

Ecoulement isentropique avec changement de section, $\gamma = 1.40$

M	T/T_i	p/p_i	ρ/ρ_i	f/f^*	$(p/p_i)(A/A^*)$	A/A^*
.51	0.9506E+00	0.8374E+00	0.8809E+00	0.1190E+01	0.1106E+01	0.1321E+01
.52	0.9487E+00	0.8317E+00	0.8766E+00	0.1179E+01	0.1084E+01	0.1303E+01
.53	0.9468E+00	0.8259E+00	0.8723E+00	0.1168E+01	0.1062E+01	0.1286E+01
.54	0.9449E+00	0.8201E+00	0.8679E+00	0.1157E+01	0.1042E+01	0.1270E+01
.55	0.9430E+00	0.8142E+00	0.8634E+00	0.1147E+01	0.1022E+01	0.1255E+01
.56	0.9410E+00	0.8082E+00	0.8589E+00	0.1138E+01	0.1002E+01	0.1240E+01
.57	0.9390E+00	0.8022E+00	0.8544E+00	0.1129E+01	0.9838E+00	0.1226E+01
.58	0.9370E+00	0.7962E+00	0.8498E+00	0.1121E+01	0.9658E+00	0.1213E+01
.59	0.9349E+00	0.7901E+00	0.8451E+00	0.1113E+01	0.9484E+00	0.1200E+01
.60	0.9328E+00	0.7840E+00	0.8405E+00	0.1105E+01	0.9316E+00	0.1188E+01
.61	0.9307E+00	0.7778E+00	0.8357E+00	0.1098E+01	0.9152E+00	0.1177E+01
.62	0.9286E+00	0.7716E+00	0.8310E+00	0.1091E+01	0.8995E+00	0.1166E+01
.63	0.9265E+00	0.7654E+00	0.8262E+00	0.1085E+01	0.8842E+00	0.1155E+01
.64	0.9243E+00	0.7591E+00	0.8213E+00	0.1079E+01	0.8693E+00	0.1145E+01
.65	0.9221E+00	0.7528E+00	0.8164E+00	0.1073E+01	0.8549E+00	0.1136E+01
.66	0.9199E+00	0.7465E+00	0.8115E+00	0.1068E+01	0.8410E+00	0.1127E+01
.67	0.9176E+00	0.7401E+00	0.8066E+00	0.1063E+01	0.8274E+00	0.1118E+01
.68	0.9153E+00	0.7338E+00	0.8016E+00	0.1058E+01	0.8142E+00	0.1110E+01
.69	0.9131E+00	0.7274E+00	0.7966E+00	0.1053E+01	0.8014E+00	0.1102E+01
.70	0.9107E+00	0.7209E+00	0.7916E+00	0.1049E+01	0.7890E+00	0.1094E+01
.71	0.9084E+00	0.7145E+00	0.7865E+00	0.1045E+01	0.7769E+00	0.1087E+01
.72	0.9061E+00	0.7080E+00	0.7814E+00	0.1041E+01	0.7651E+00	0.1081E+01
.73	0.9037E+00	0.7016E+00	0.7763E+00	0.1038E+01	0.7536E+00	0.1074E+01
.74	0.9013E+00	0.6951E+00	0.7712E+00	0.1034E+01	0.7424E+00	0.1068E+01
.75	0.8989E+00	0.6886E+00	0.7660E+00	0.1031E+01	0.7316E+00	0.1062E+01
.76	0.8964E+00	0.6821E+00	0.7609E+00	0.1028E+01	0.7209E+00	0.1057E+01
.77	0.8940E+00	0.6756E+00	0.7557E+00	0.1026E+01	0.7106E+00	0.1052E+01
.78	0.8915E+00	0.6691E+00	0.7505E+00	0.1023E+01	0.7005E+00	0.1047E+01
.79	0.8890E+00	0.6625E+00	0.7452E+00	0.1021E+01	0.6907E+00	0.1043E+01
.80	0.8865E+00	0.6560E+00	0.7400E+00	0.1019E+01	0.6811E+00	0.1038E+01
.81	0.8840E+00	0.6495E+00	0.7347E+00	0.1016E+01	0.6717E+00	0.1034E+01
.82	0.8815E+00	0.6430E+00	0.7295E+00	0.1015E+01	0.6626E+00	0.1030E+01
.83	0.8789E+00	0.6365E+00	0.7242E+00	0.1013E+01	0.6537E+00	0.1027E+01
.84	0.8763E+00	0.6300E+00	0.7189E+00	0.1011E+01	0.6449E+00	0.1024E+01
.85	0.8737E+00	0.6235E+00	0.7136E+00	0.1010E+01	0.6364E+00	0.1021E+01
.86	0.8711E+00	0.6170E+00	0.7083E+00	0.1008E+01	0.6281E+00	0.1018E+01
.87	0.8685E+00	0.6106E+00	0.7030E+00	0.1007E+01	0.6199E+00	0.1015E+01
.88	0.8659E+00	0.6041E+00	0.6977E+00	0.1006E+01	0.6119E+00	0.1013E+01
.89	0.8632E+00	0.5977E+00	0.6924E+00	0.1005E+01	0.6041E+00	0.1011E+01
.90	0.8606E+00	0.5913E+00	0.6870E+00	0.1004E+01	0.5965E+00	0.1009E+01
.91	0.8579E+00	0.5849E+00	0.6817E+00	0.1003E+01	0.5890E+00	0.1007E+01
.92	0.8552E+00	0.5785E+00	0.6764E+00	0.1002E+01	0.5817E+00	0.1006E+01
.93	0.8525E+00	0.5721E+00	0.6711E+00	0.1002E+01	0.5746E+00	0.1004E+01
.94	0.8498E+00	0.5658E+00	0.6658E+00	0.1001E+01	0.5675E+00	0.1003E+01
.95	0.8471E+00	0.5595E+00	0.6604E+00	0.1001E+01	0.5607E+00	0.1002E+01
.96	0.8444E+00	0.5532E+00	0.6551E+00	0.1001E+01	0.5539E+00	0.1001E+01
.97	0.8416E+00	0.5469E+00	0.6498E+00	0.1000E+01	0.5473E+00	0.1001E+01
.98	0.8389E+00	0.5407E+00	0.6445E+00	0.1000E+01	0.5409E+00	0.1000E+01
.99	0.8361E+00	0.5345E+00	0.6392E+00	0.1000E+01	0.5345E+00	0.1000E+01
1.00	0.8333E+00	0.5283E+00	0.6339E+00	0.1000E+01	0.5283E+00	0.1000E+01

Ecoulement isentropique avec changement de section, $\gamma = 1.40$

M	T/T_i	p/p_i	ρ/ρ_i	f/f^*	$(p/p_i)(A/A^*)$	A/A^*
1.01	0.8306E+00	0.5221E+00	0.6287E+00	0.1000E+01	0.5222E+00	0.1000E+01
1.02	0.8278E+00	0.5160E+00	0.6234E+00	0.1000E+01	0.5162E+00	0.1000E+01
1.03	0.8250E+00	0.5099E+00	0.6181E+00	0.1000E+01	0.5103E+00	0.1001E+01
1.04	0.8222E+00	0.5039E+00	0.6129E+00	0.1001E+01	0.5045E+00	0.1001E+01
1.05	0.8193E+00	0.4979E+00	0.6077E+00	0.1001E+01	0.4989E+00	0.1002E+01
1.06	0.8165E+00	0.4919E+00	0.6024E+00	0.1001E+01	0.4933E+00	0.1003E+01
1.07	0.8137E+00	0.4860E+00	0.5972E+00	0.1002E+01	0.4879E+00	0.1004E+01
1.08	0.8108E+00	0.4800E+00	0.5920E+00	0.1002E+01	0.4825E+00	0.1005E+01
1.09	0.8080E+00	0.4742E+00	0.5869E+00	0.1003E+01	0.4772E+00	0.1006E+01
1.10	0.8052E+00	0.4684E+00	0.5817E+00	0.1003E+01	0.4721E+00	0.1008E+01
1.11	0.8023E+00	0.4626E+00	0.5766E+00	0.1004E+01	0.4670E+00	0.1010E+01
1.12	0.7994E+00	0.4568E+00	0.5714E+00	0.1004E+01	0.4620E+00	0.1011E+01
1.13	0.7966E+00	0.4511E+00	0.5663E+00	0.1005E+01	0.4571E+00	0.1013E+01
1.14	0.7937E+00	0.4455E+00	0.5612E+00	0.1006E+01	0.4523E+00	0.1015E+01
1.15	0.7908E+00	0.4398E+00	0.5562E+00	0.1006E+01	0.4475E+00	0.1017E+01
1.16	0.7879E+00	0.4343E+00	0.5511E+00	0.1007E+01	0.4428E+00	0.1020E+01
1.17	0.7851E+00	0.4287E+00	0.5461E+00	0.1008E+01	0.4383E+00	0.1022E+01
1.18	0.7822E+00	0.4232E+00	0.5411E+00	0.1009E+01	0.4337E+00	0.1025E+01
1.19	0.7793E+00	0.4178E+00	0.5361E+00	0.1010E+01	0.4293E+00	0.1028E+01
1.20	0.7764E+00	0.4124E+00	0.5311E+00	0.1011E+01	0.4249E+00	0.1030E+01
1.21	0.7735E+00	0.4070E+00	0.5262E+00	0.1012E+01	0.4206E+00	0.1033E+01
1.22	0.7706E+00	0.4017E+00	0.5213E+00	0.1013E+01	0.4164E+00	0.1037E+01
1.23	0.7677E+00	0.3964E+00	0.5164E+00	0.1014E+01	0.4122E+00	0.1040E+01
1.24	0.7648E+00	0.3912E+00	0.5115E+00	0.1015E+01	0.4081E+00	0.1043E+01
1.25	0.7619E+00	0.3861E+00	0.5067E+00	0.1016E+01	0.4041E+00	0.1047E+01
1.26	0.7590E+00	0.3809E+00	0.5019E+00	0.1017E+01	0.4001E+00	0.1050E+01
1.27	0.7561E+00	0.3759E+00	0.4971E+00	0.1018E+01	0.3962E+00	0.1054E+01
1.28	0.7532E+00	0.3708E+00	0.4923E+00	0.1019E+01	0.3924E+00	0.1058E+01
1.29	0.7503E+00	0.3658E+00	0.4876E+00	0.1021E+01	0.3886E+00	0.1062E+01
1.30	0.7474E+00	0.3609E+00	0.4829E+00	0.1022E+01	0.3848E+00	0.1066E+01
1.31	0.7445E+00	0.3560E+00	0.4782E+00	0.1023E+01	0.3812E+00	0.1071E+01
1.32	0.7416E+00	0.3512E+00	0.4736E+00	0.1024E+01	0.3775E+00	0.1075E+01
1.33	0.7387E+00	0.3464E+00	0.4690E+00	0.1025E+01	0.3740E+00	0.1080E+01
1.34	0.7358E+00	0.3417E+00	0.4644E+00	0.1027E+01	0.3704E+00	0.1084E+01
1.35	0.7329E+00	0.3370E+00	0.4598E+00	0.1028E+01	0.3670E+00	0.1089E+01
1.36	0.7300E+00	0.3323E+00	0.4553E+00	0.1029E+01	0.3636E+00	0.1094E+01
1.37	0.7271E+00	0.3277E+00	0.4508E+00	0.1031E+01	0.3602E+00	0.1099E+01
1.38	0.7242E+00	0.3232E+00	0.4463E+00	0.1032E+01	0.3569E+00	0.1104E+01
1.39	0.7213E+00	0.3187E+00	0.4418E+00	0.1033E+01	0.3536E+00	0.1109E+01
1.40	0.7184E+00	0.3142E+00	0.4374E+00	0.1035E+01	0.3504E+00	0.1115E+01
1.41	0.7155E+00	0.3098E+00	0.4330E+00	0.1036E+01	0.3472E+00	0.1120E+01
1.42	0.7126E+00	0.3055E+00	0.4287E+00	0.1037E+01	0.3440E+00	0.1126E+01
1.43	0.7097E+00	0.3012E+00	0.4244E+00	0.1039E+01	0.3409E+00	0.1132E+01
1.44	0.7069E+00	0.2969E+00	0.4201E+00	0.1040E+01	0.3379E+00	0.1138E+01
1.45	0.7040E+00	0.2927E+00	0.4158E+00	0.1042E+01	0.3349E+00	0.1144E+01
1.46	0.7011E+00	0.2886E+00	0.4116E+00	0.1043E+01	0.3319E+00	0.1150E+01
1.47	0.6982E+00	0.2845E+00	0.4074E+00	0.1044E+01	0.3290E+00	0.1156E+01
1.48	0.6954E+00	0.2804E+00	0.4032E+00	0.1046E+01	0.3261E+00	0.1163E+01
1.49	0.6925E+00	0.2764E+00	0.3991E+00	0.1047E+01	0.3232E+00	0.1169E+01
1.50	0.6897E+00	0.2724E+00	0.3950E+00	0.1049E+01	0.3204E+00	0.1176E+01

Ecoulement isentropique avec changement de section, $\gamma = 1.40$

M	T/T_i	p/p_i	ρ/ρ_i	f/f^*	$(p/p_i)(A/A^*)$	A/A^*
1.51	0.6868E+00	0.2685E+00	0.3909E+00	0.1050E+01	0.3176E+00	0.1183E+01
1.52	0.6840E+00	0.2646E+00	0.3869E+00	0.1052E+01	0.3149E+00	0.1190E+01
1.53	0.6811E+00	0.2608E+00	0.3829E+00	0.1053E+01	0.3122E+00	0.1197E+01
1.54	0.6783E+00	0.2570E+00	0.3789E+00	0.1055E+01	0.3095E+00	0.1204E+01
1.55	0.6754E+00	0.2533E+00	0.3750E+00	0.1056E+01	0.3068E+00	0.1212E+01
1.56	0.6726E+00	0.2496E+00	0.3710E+00	0.1058E+01	0.3042E+00	0.1219E+01
1.57	0.6698E+00	0.2459E+00	0.3672E+00	0.1059E+01	0.3017E+00	0.1227E+01
1.58	0.6670E+00	0.2423E+00	0.3633E+00	0.1060E+01	0.2991E+00	0.1234E+01
1.59	0.6642E+00	0.2388E+00	0.3595E+00	0.1062E+01	0.2966E+00	0.1242E+01
1.60	0.6614E+00	0.2353E+00	0.3557E+00	0.1063E+01	0.2941E+00	0.1250E+01
1.61	0.6586E+00	0.2318E+00	0.3520E+00	0.1065E+01	0.2917E+00	0.1258E+01
1.62	0.6558E+00	0.2284E+00	0.3483E+00	0.1066E+01	0.2893E+00	0.1267E+01
1.63	0.6530E+00	0.2250E+00	0.3446E+00	0.1068E+01	0.2869E+00	0.1275E+01
1.64	0.6502E+00	0.2217E+00	0.3409E+00	0.1069E+01	0.2845E+00	0.1284E+01
1.65	0.6475E+00	0.2184E+00	0.3373E+00	0.1071E+01	0.2822E+00	0.1292E+01
1.66	0.6447E+00	0.2152E+00	0.3337E+00	0.1072E+01	0.2799E+00	0.1301E+01
1.67	0.6419E+00	0.2119E+00	0.3302E+00	0.1074E+01	0.2776E+00	0.1310E+01
1.68	0.6392E+00	0.2088E+00	0.3266E+00	0.1075E+01	0.2754E+00	0.1319E+01
1.69	0.6364E+00	0.2057E+00	0.3232E+00	0.1077E+01	0.2732E+00	0.1328E+01
1.70	0.6337E+00	0.2026E+00	0.3197E+00	0.1079E+01	0.2710E+00	0.1338E+01
1.71	0.6310E+00	0.1996E+00	0.3163E+00	0.1080E+01	0.2688E+00	0.1347E+01
1.72	0.6283E+00	0.1966E+00	0.3129E+00	0.1082E+01	0.2667E+00	0.1357E+01
1.73	0.6256E+00	0.1936E+00	0.3095E+00	0.1083E+01	0.2646E+00	0.1367E+01
1.74	0.6229E+00	0.1907E+00	0.3062E+00	0.1085E+01	0.2625E+00	0.1376E+01
1.75	0.6202E+00	0.1878E+00	0.3029E+00	0.1086E+01	0.2604E+00	0.1386E+01
1.76	0.6175E+00	0.1850E+00	0.2996E+00	0.1088E+01	0.2584E+00	0.1397E+01
1.77	0.6148E+00	0.1822E+00	0.2964E+00	0.1089E+01	0.2564E+00	0.1407E+01
1.78	0.6121E+00	0.1794E+00	0.2931E+00	0.1091E+01	0.2544E+00	0.1418E+01
1.79	0.6095E+00	0.1767E+00	0.2900E+00	0.1092E+01	0.2524E+00	0.1428E+01
1.80	0.6068E+00	0.1740E+00	0.2868E+00	0.1094E+01	0.2504E+00	0.1439E+01
1.81	0.6041E+00	0.1714E+00	0.2837E+00	0.1095E+01	0.2485E+00	0.1450E+01
1.82	0.6015E+00	0.1688E+00	0.2806E+00	0.1096E+01	0.2466E+00	0.1461E+01
1.83	0.5989E+00	0.1662E+00	0.2776E+00	0.1098E+01	0.2447E+00	0.1472E+01
1.84	0.5963E+00	0.1637E+00	0.2745E+00	0.1099E+01	0.2429E+00	0.1484E+01
1.85	0.5936E+00	0.1612E+00	0.2715E+00	0.1101E+01	0.2410E+00	0.1495E+01
1.86	0.5910E+00	0.1587E+00	0.2686E+00	0.1102E+01	0.2392E+00	0.1507E+01
1.87	0.5885E+00	0.1563E+00	0.2656E+00	0.1104E+01	0.2374E+00	0.1519E+01
1.88	0.5859E+00	0.1539E+00	0.2627E+00	0.1105E+01	0.2356E+00	0.1531E+01
1.89	0.5833E+00	0.1516E+00	0.2598E+00	0.1107E+01	0.2338E+00	0.1543E+01
1.90	0.5807E+00	0.1492E+00	0.2570E+00	0.1108E+01	0.2321E+00	0.1555E+01
1.91	0.5782E+00	0.1470E+00	0.2542E+00	0.1110E+01	0.2304E+00	0.1568E+01
1.92	0.5756E+00	0.1447E+00	0.2514E+00	0.1111E+01	0.2287E+00	0.1580E+01
1.93	0.5731E+00	0.1425E+00	0.2486E+00	0.1113E+01	0.2270E+00	0.1593E+01
1.94	0.5705E+00	0.1403E+00	0.2459E+00	0.1114E+01	0.2253E+00	0.1606E+01
1.95	0.5680E+00	0.1381E+00	0.2432E+00	0.1116E+01	0.2237E+00	0.1619E+01
1.96	0.5655E+00	0.1360E+00	0.2405E+00	0.1117E+01	0.2220E+00	0.1633E+01
1.97	0.5630E+00	0.1339E+00	0.2378E+00	0.1118E+01	0.2204E+00	0.1646E+01
1.98	0.5605E+00	0.1318E+00	0.2352E+00	0.1120E+01	0.2188E+00	0.1660E+01
1.99	0.5580E+00	0.1298E+00	0.2326E+00	0.1121E+01	0.2172E+00	0.1674E+01
2.00	0.5556E+00	0.1278E+00	0.2300E+00	0.1123E+01	0.2157E+00	0.1687E+01

Ecoulement isentropique avec changement de section, $\gamma = 1.40$

M	T/T_i	p/p_i	ρ/ρ_i	f/f^*	$(p/p_i)(A/A^*)$	A/A^*
2.02	0.5506E+00	0.1239E+00	0.2250E+00	0.1126E+01	0.2126E+00	0.1716E+01
2.04	0.5458E+00	0.1201E+00	0.2200E+00	0.1128E+01	0.2096E+00	0.1745E+01
2.06	0.5409E+00	0.1164E+00	0.2152E+00	0.1131E+01	0.2066E+00	0.1775E+01
2.08	0.5361E+00	0.1128E+00	0.2104E+00	0.1134E+01	0.2037E+00	0.1806E+01
2.10	0.5314E+00	0.1094E+00	0.2058E+00	0.1137E+01	0.2009E+00	0.1837E+01
2.12	0.5266E+00	0.1060E+00	0.2013E+00	0.1139E+01	0.1981E+00	0.1869E+01
2.14	0.5219E+00	0.1027E+00	0.1968E+00	0.1142E+01	0.1954E+00	0.1902E+01
2.16	0.5173E+00	0.9956E-01	0.1925E+00	0.1145E+01	0.1927E+00	0.1935E+01
2.18	0.5127E+00	0.9650E-01	0.1882E+00	0.1147E+01	0.1901E+00	0.1970E+01
2.20	0.5081E+00	0.9352E-01	0.1841E+00	0.1150E+01	0.1875E+00	0.2005E+01
2.22	0.5036E+00	0.9064E-01	0.1800E+00	0.1153E+01	0.1850E+00	0.2041E+01
2.24	0.4991E+00	0.8785E-01	0.1760E+00	0.1155E+01	0.1825E+00	0.2078E+01
2.26	0.4947E+00	0.8514E-01	0.1721E+00	0.1158E+01	0.1801E+00	0.2115E+01
2.28	0.4903E+00	0.8252E-01	0.1683E+00	0.1160E+01	0.1777E+00	0.2154E+01
2.30	0.4859E+00	0.7997E-01	0.1646E+00	0.1163E+01	0.1754E+00	0.2193E+01
2.32	0.4816E+00	0.7751E-01	0.1609E+00	0.1165E+01	0.1731E+00	0.2233E+01
2.34	0.4773E+00	0.7512E-01	0.1574E+00	0.1168E+01	0.1709E+00	0.2274E+01
2.36	0.4731E+00	0.7281E-01	0.1539E+00	0.1170E+01	0.1687E+00	0.2316E+01
2.38	0.4689E+00	0.7057E-01	0.1505E+00	0.1173E+01	0.1665E+00	0.2359E+01
2.40	0.4647E+00	0.6840E-01	0.1472E+00	0.1175E+01	0.1644E+00	0.2403E+01
2.42	0.4606E+00	0.6630E-01	0.1439E+00	0.1177E+01	0.1623E+00	0.2448E+01
2.44	0.4565E+00	0.6426E-01	0.1408E+00	0.1180E+01	0.1602E+00	0.2494E+01
2.46	0.4524E+00	0.6229E-01	0.1377E+00	0.1182E+01	0.1582E+00	0.2540E+01
2.48	0.4484E+00	0.6038E-01	0.1346E+00	0.1184E+01	0.1563E+00	0.2588E+01
2.50	0.4444E+00	0.5853E-01	0.1317E+00	0.1187E+01	0.1543E+00	0.2637E+01
2.52	0.4405E+00	0.5674E-01	0.1288E+00	0.1189E+01	0.1524E+00	0.2686E+01
2.54	0.4366E+00	0.5500E-01	0.1260E+00	0.1191E+01	0.1505E+00	0.2737E+01
2.56	0.4328E+00	0.5332E-01	0.1232E+00	0.1193E+01	0.1487E+00	0.2789E+01
2.58	0.4289E+00	0.5169E-01	0.1205E+00	0.1196E+01	0.1469E+00	0.2842E+01
2.60	0.4252E+00	0.5012E-01	0.1179E+00	0.1198E+01	0.1451E+00	0.2896E+01
2.62	0.4214E+00	0.4859E-01	0.1153E+00	0.1200E+01	0.1434E+00	0.2951E+01
2.64	0.4177E+00	0.4711E-01	0.1128E+00	0.1202E+01	0.1417E+00	0.3007E+01
2.66	0.4141E+00	0.4568E-01	0.1103E+00	0.1204E+01	0.1400E+00	0.3065E+01
2.68	0.4104E+00	0.4429E-01	0.1079E+00	0.1206E+01	0.1383E+00	0.3123E+01
2.70	0.4068E+00	0.4295E-01	0.1056E+00	0.1208E+01	0.1367E+00	0.3183E+01
2.72	0.4033E+00	0.4165E-01	0.1033E+00	0.1210E+01	0.1351E+00	0.3244E+01
2.74	0.3998E+00	0.4039E-01	0.1010E+00	0.1212E+01	0.1335E+00	0.3306E+01
2.76	0.3963E+00	0.3917E-01	0.9885E-01	0.1214E+01	0.1320E+00	0.3370E+01
2.78	0.3928E+00	0.3799E-01	0.9671E-01	0.1216E+01	0.1305E+00	0.3434E+01
2.80	0.3894E+00	0.3685E-01	0.9463E-01	0.1218E+01	0.1290E+00	0.3500E+01
2.82	0.3860E+00	0.3574E-01	0.9259E-01	0.1220E+01	0.1275E+00	0.3567E+01
2.84	0.3827E+00	0.3467E-01	0.9059E-01	0.1222E+01	0.1261E+00	0.3636E+01
2.86	0.3794E+00	0.3363E-01	0.8865E-01	0.1224E+01	0.1246E+00	0.3706E+01
2.88	0.3761E+00	0.3263E-01	0.8675E-01	0.1226E+01	0.1232E+00	0.3777E+01
2.90	0.3729E+00	0.3165E-01	0.8489E-01	0.1228E+01	0.1219E+00	0.3850E+01
2.92	0.3696E+00	0.3071E-01	0.8308E-01	0.1229E+01	0.1205E+00	0.3924E+01
2.94	0.3665E+00	0.2980E-01	0.8130E-01	0.1231E+01	0.1192E+00	0.3999E+01
2.96	0.3633E+00	0.2891E-01	0.7957E-01	0.1233E+01	0.1178E+00	0.4076E+01
2.98	0.3602E+00	0.2805E-01	0.7788E-01	0.1235E+01	0.1166E+00	0.4155E+01
3.00	0.3571E+00	0.2722E-01	0.7623E-01	0.1237E+01	0.1153E+00	0.4235E+01

Ecoulement isentropique avec changement de section, $\gamma = 1.40$

M	T/T_i	p/p_i	ρ/ρ_i	f/f^*	$(p/p_i)(A/A^*)$	A/A^*
3.10	0.3422E+00	0.2345E-01	0.6852E-01	0.1245E+01	0.1092E+00	0.4657E+01
3.20	0.3281E+00	0.2023E-01	0.6165E-01	0.1253E+01	0.1036E+00	0.5121E+01
3.30	0.3147E+00	0.1748E-01	0.5554E-01	0.1260E+01	0.9837E-01	0.5629E+01
3.40	0.3019E+00	0.1512E-01	0.5009E-01	0.1268E+01	0.9353E-01	0.6184E+01
3.50	0.2899E+00	0.1311E-01	0.4523E-01	0.1274E+01	0.8902E-01	0.6790E+01
3.60	0.2784E+00	0.1138E-01	0.4089E-01	0.1281E+01	0.8482E-01	0.7450E+01
3.70	0.2675E+00	0.9903E-02	0.3702E-01	0.1287E+01	0.8090E-01	0.8169E+01
3.80	0.2572E+00	0.8629E-02	0.3355E-01	0.1292E+01	0.7723E-01	0.8951E+01
3.90	0.2474E+00	0.7532E-02	0.3044E-01	0.1298E+01	0.7381E-01	0.9799E+01
4.00	0.2381E+00	0.6586E-02	0.2766E-01	0.1303E+01	0.7059E-01	0.1072E+02
4.10	0.2293E+00	0.5769E-02	0.2516E-01	0.1308E+01	0.6758E-01	0.1171E+02
4.20	0.2208E+00	0.5062E-02	0.2292E-01	0.1312E+01	0.6475E-01	0.1279E+02
4.30	0.2129E+00	0.4449E-02	0.2090E-01	0.1317E+01	0.6209E-01	0.1395E+02
4.40	0.2053E+00	0.3918E-02	0.1909E-01	0.1321E+01	0.5959E-01	0.1521E+02
4.50	0.1980E+00	0.3455E-02	0.1745E-01	0.1325E+01	0.5723E-01	0.1656E+02
4.60	0.1911E+00	0.3053E-02	0.1597E-01	0.1328E+01	0.5500E-01	0.1802E+02
4.70	0.1846E+00	0.2701E-02	0.1464E-01	0.1332E+01	0.5290E-01	0.1958E+02
4.80	0.1783E+00	0.2394E-02	0.1343E-01	0.1335E+01	0.5091E-01	0.2126E+02
4.90	0.1724E+00	0.2126E-02	0.1233E-01	0.1339E+01	0.4903E-01	0.2307E+02
5.00	0.1667E+00	0.1890E-02	0.1134E-01	0.1342E+01	0.4725E-01	0.2500E+02
5.10	0.1612E+00	0.1683E-02	0.1044E-01	0.1345E+01	0.4556E-01	0.2707E+02
5.20	0.1561E+00	0.1501E-02	0.9620E-02	0.1347E+01	0.4396E-01	0.2928E+02
5.30	0.1511E+00	0.1341E-02	0.8875E-02	0.1350E+01	0.4244E-01	0.3165E+02
5.40	0.1464E+00	0.1200E-02	0.8197E-02	0.1352E+01	0.4100E-01	0.3417E+02
5.50	0.1418E+00	0.1075E-02	0.7578E-02	0.1355E+01	0.3963E-01	0.3687E+02
5.60	0.1375E+00	0.9643E-03	0.7012E-02	0.1357E+01	0.3832E-01	0.3974E+02
5.70	0.1334E+00	0.8664E-03	0.6496E-02	0.1359E+01	0.3708E-01	0.4280E+02
5.80	0.1294E+00	0.7794E-03	0.6023E-02	0.1362E+01	0.3589E-01	0.4605E+02
5.90	0.1256E+00	0.7021E-03	0.5590E-02	0.1364E+01	0.3476E-01	0.4951E+02
6.00	0.1220E+00	0.6334E-03	0.5194E-02	0.1365E+01	0.3368E-01	0.5318E+02
6.50	0.1058E+00	0.3855E-03	0.3643E-02	0.1374E+01	0.2896E-01	0.7513E+02
7.00	0.9259E-01	0.2416E-03	0.2609E-02	0.1381E+01	0.2516E-01	0.1041E+03
7.50	0.8163E-01	0.1554E-03	0.1904E-02	0.1387E+01	0.2205E-01	0.1418E+03
8.00	0.7246E-01	0.1024E-03	0.1414E-02	0.1391E+01	0.1947E-01	0.1901E+03
8.50	0.6473E-01	0.6898E-04	0.1066E-02	0.1396E+01	0.1732E-01	0.2511E+03
9.00	0.5814E-01	0.4739E-04	0.8150E-03	0.1399E+01	0.1550E-01	0.3272E+03
9.50	0.5249E-01	0.3314E-04	0.6313E-03	0.1402E+01	0.1396E-01	0.4211E+03
10.00	0.4762E-01	0.2356E-04	0.4948E-03	0.1404E+01	0.1263E-01	0.5359E+03
11.00	0.3968E-01	0.1245E-04	0.3137E-03	0.1408E+01	0.1048E-01	0.8419E+03
12.00	0.3356E-01	0.6922E-05	0.2063E-03	0.1412E+01	0.8834E-02	0.1276E+04
13.00	0.2874E-01	0.4022E-05	0.1400E-03	0.1414E+01	0.7546E-02	0.1876E+04
14.00	0.2488E-01	0.2428E-05	0.9760E-04	0.1416E+01	0.6520E-02	0.2685E+04
15.00	0.2174E-01	0.1515E-05	0.6968E-04	0.1418E+01	0.5688E-02	0.3755E+04
16.00	0.1916E-01	0.9731E-06	0.5080E-04	0.1419E+01	0.5006E-02	0.5145E+04
17.00	0.1701E-01	0.6415E-06	0.3772E-04	0.1420E+01	0.4439E-02	0.6921E+04
18.00	0.1520E-01	0.4327E-06	0.2847E-04	0.1421E+01	0.3963E-02	0.9159E+04
19.00	0.1366E-01	0.2980E-06	0.2181E-04	0.1422E+01	0.3560E-02	0.1195E+05
20.00	0.1235E-01	0.2091E-06	0.1694E-04	0.1423E+01	0.3215E-02	0.1538E+05
30.00	0.5525E-02	0.1254E-07	0.2269E-05	0.1426E+01	0.1434E-02	0.1144E+06
40.00	0.3115E-02	0.1687E-08	0.5417E-06	0.1427E+01	0.8075E-03	0.4785E+06
50.00	0.1996E-02	0.3553E-09	0.1780E-06	0.1428E+01	0.5171E-03	0.1455E+07
60.00	0.1387E-02	0.9936E-10	0.7164E-07	0.1428E+01	0.3592E-03	0.3615E+07
70.00	0.1019E-02	0.3382E-10	0.3318E-07	0.1428E+01	0.2640E-03	0.7805E+07
80.00	0.7806E-03	0.1329E-10	0.1703E-07	0.1428E+01	0.2021E-03	0.1521E+08
inf	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.1429E+01	0.0000E+00	inf

Ondes de choc droites, $\gamma = 1.40$

M_1	M_2	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_2/p_1	p_{i2}/p_{i1} A_1^*/A_2^*	p_{i2}/p_1
1.00	1.00000	0.10000E+01	0.10000E+01	0.00000E+00	0.10000E+01	0.18929E+01
1.01	.99013	0.10167E+01	0.10066E+01	0.10235E+01	0.10000E+01	0.19152E+01
1.02	.98052	0.10334E+01	0.10132E+01	0.10471E+01	0.99999E+00	0.19379E+01
1.03	.97115	0.10502E+01	0.10198E+01	0.10710E+01	0.99997E+00	0.19610E+01
1.04	.96203	0.10671E+01	0.10263E+01	0.10952E+01	0.99992E+00	0.19844E+01
1.05	.95313	0.10840E+01	0.10328E+01	0.11196E+01	0.99985E+00	0.20083E+01
1.06	.94445	0.11009E+01	0.10393E+01	0.11442E+01	0.99975E+00	0.20325E+01
1.07	.93598	0.11179E+01	0.10458E+01	0.11690E+01	0.99961E+00	0.20570E+01
1.08	.92771	0.11349E+01	0.10522E+01	0.11941E+01	0.99943E+00	0.20819E+01
1.09	.91965	0.11520E+01	0.10586E+01	0.12194E+01	0.99920E+00	0.21072E+01
1.10	.91177	0.11691E+01	0.10649E+01	0.12450E+01	0.99893E+00	0.21328E+01
1.11	.90408	0.11862E+01	0.10713E+01	0.12708E+01	0.99860E+00	0.21588E+01
1.12	.89656	0.12034E+01	0.10776E+01	0.12968E+01	0.99821E+00	0.21851E+01
1.13	.88922	0.12206E+01	0.10840E+01	0.13230E+01	0.99777E+00	0.22118E+01
1.14	.88204	0.12378E+01	0.10903E+01	0.13495E+01	0.99726E+00	0.22388E+01
1.15	.87502	0.12550E+01	0.10966E+01	0.13762E+01	0.99669E+00	0.22661E+01
1.16	.86816	0.12723E+01	0.11029E+01	0.14032E+01	0.99605E+00	0.22937E+01
1.17	.86145	0.12896E+01	0.11092E+01	0.14304E+01	0.99535E+00	0.23217E+01
1.18	.85488	0.13069E+01	0.11154E+01	0.14578E+01	0.99457E+00	0.23500E+01
1.19	.84846	0.13243E+01	0.11217E+01	0.14854E+01	0.99372E+00	0.23786E+01
1.20	.84217	0.13416E+01	0.11280E+01	0.15133E+01	0.99280E+00	0.24075E+01
1.21	.83601	0.13590E+01	0.11343E+01	0.15414E+01	0.99180E+00	0.24367E+01
1.22	.82999	0.13764E+01	0.11405E+01	0.15698E+01	0.99073E+00	0.24663E+01
1.23	.82408	0.13938E+01	0.11468E+01	0.15984E+01	0.98958E+00	0.24961E+01
1.24	.81830	0.14112E+01	0.11531E+01	0.16272E+01	0.98836E+00	0.25263E+01
1.25	.81264	0.14286E+01	0.11594E+01	0.16562E+01	0.98706E+00	0.25568E+01
1.26	.80709	0.14460E+01	0.11657E+01	0.16855E+01	0.98568E+00	0.25875E+01
1.27	.80164	0.14634E+01	0.11720E+01	0.17150E+01	0.98422E+00	0.26186E+01
1.28	.79631	0.14808E+01	0.11783E+01	0.17448E+01	0.98268E+00	0.26500E+01
1.29	.79108	0.14983E+01	0.11846E+01	0.17748E+01	0.98107E+00	0.26816E+01
1.30	.78596	0.15157E+01	0.11909E+01	0.18050E+01	0.97937E+00	0.27136E+01
1.31	.78093	0.15331E+01	0.11972E+01	0.18354E+01	0.97760E+00	0.27458E+01
1.32	.77600	0.15505E+01	0.12035E+01	0.18661E+01	0.97575E+00	0.27784E+01
1.33	.77116	0.15680E+01	0.12099E+01	0.18970E+01	0.97382E+00	0.28112E+01
1.34	.76641	0.15854E+01	0.12162E+01	0.19282E+01	0.97182E+00	0.28444E+01
1.35	.76175	0.16028E+01	0.12226E+01	0.19596E+01	0.96974E+00	0.28778E+01
1.36	.75718	0.16202E+01	0.12290E+01	0.19912E+01	0.96758E+00	0.29115E+01
1.37	.75269	0.16376E+01	0.12354E+01	0.20230E+01	0.96534E+00	0.29455E+01
1.38	.74829	0.16549E+01	0.12418E+01	0.20551E+01	0.96304E+00	0.29798E+01
1.39	.74396	0.16723E+01	0.12482E+01	0.20874E+01	0.96065E+00	0.30144E+01
1.40	.73971	0.16897E+01	0.12547E+01	0.21200E+01	0.95819E+00	0.30492E+01
1.41	.73554	0.17070E+01	0.12612E+01	0.21528E+01	0.95566E+00	0.30844E+01
1.42	.73144	0.17243E+01	0.12676E+01	0.21858E+01	0.95306E+00	0.31198E+01
1.43	.72741	0.17416E+01	0.12741E+01	0.22190E+01	0.95039E+00	0.31555E+01
1.44	.72345	0.17589E+01	0.12807E+01	0.22525E+01	0.94765E+00	0.31915E+01
1.45	.71956	0.17761E+01	0.12872E+01	0.22862E+01	0.94484E+00	0.32278E+01
1.46	.71574	0.17934E+01	0.12938E+01	0.23202E+01	0.94196E+00	0.32643E+01
1.47	.71198	0.18106E+01	0.13003E+01	0.23544E+01	0.93901E+00	0.33011E+01
1.48	.70829	0.18278E+01	0.13069E+01	0.23888E+01	0.93600E+00	0.33382E+01
1.49	.70466	0.18449E+01	0.13136E+01	0.24234E+01	0.93293E+00	0.33756E+01
1.50	.70109	0.18621E+01	0.13202E+01	0.24583E+01	0.92979E+00	0.34133E+01

Ondes de choc droites, $\gamma = 1.40$

M_1	M_2	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_2/p_1	pi_2/pi_1 A_1^*/A_2^*	pi_2/p_1
1.51	.69758	0.18792E+01	0.13269E+01	0.24934E+01	0.92659E+00	0.34512E+01
1.52	.69413	0.18963E+01	0.13336E+01	0.25288E+01	0.92332E+00	0.34894E+01
1.53	.69073	0.19133E+01	0.13403E+01	0.25644E+01	0.92000E+00	0.35279E+01
1.54	.68739	0.19303E+01	0.13470E+01	0.26002E+01	0.91662E+00	0.35667E+01
1.55	.68410	0.19473E+01	0.13538E+01	0.26362E+01	0.91319E+00	0.36057E+01
1.56	.68087	0.19643E+01	0.13606E+01	0.26725E+01	0.90970E+00	0.36450E+01
1.57	.67769	0.19812E+01	0.13674E+01	0.27090E+01	0.90615E+00	0.36846E+01
1.58	.67455	0.19981E+01	0.13742E+01	0.27458E+01	0.90255E+00	0.37244E+01
1.59	.67147	0.20149E+01	0.13811E+01	0.27828E+01	0.89890E+00	0.37646E+01
1.60	.66844	0.20317E+01	0.13880E+01	0.28200E+01	0.89520E+00	0.38050E+01
1.61	.66545	0.20485E+01	0.13949E+01	0.28574E+01	0.89145E+00	0.38456E+01
1.62	.66251	0.20653E+01	0.14018E+01	0.28951E+01	0.88765E+00	0.38866E+01
1.63	.65962	0.20820E+01	0.14088E+01	0.29330E+01	0.88381E+00	0.39278E+01
1.64	.65677	0.20986E+01	0.14158E+01	0.29712E+01	0.87992E+00	0.39693E+01
1.65	.65396	0.21152E+01	0.14228E+01	0.30096E+01	0.87599E+00	0.40110E+01
1.66	.65119	0.21318E+01	0.14299E+01	0.30482E+01	0.87201E+00	0.40531E+01
1.67	.64847	0.21484E+01	0.14369E+01	0.30870E+01	0.86800E+00	0.40953E+01
1.68	.64579	0.21649E+01	0.14440E+01	0.31261E+01	0.86394E+00	0.41379E+01
1.69	.64315	0.21813E+01	0.14512E+01	0.31654E+01	0.85985E+00	0.41807E+01
1.70	.64054	0.21977E+01	0.14583E+01	0.32050E+01	0.85572E+00	0.42238E+01
1.71	.63798	0.22141E+01	0.14655E+01	0.32448E+01	0.85156E+00	0.42672E+01
1.72	.63545	0.22304E+01	0.14727E+01	0.32848E+01	0.84736E+00	0.43108E+01
1.73	.63296	0.22467E+01	0.14800E+01	0.33250E+01	0.84312E+00	0.43547E+01
1.74	.63051	0.22629E+01	0.14873E+01	0.33655E+01	0.83886E+00	0.43989E+01
1.75	.62809	0.22791E+01	0.14946E+01	0.34062E+01	0.83457E+00	0.44433E+01
1.76	.62570	0.22952E+01	0.15019E+01	0.34472E+01	0.83024E+00	0.44880E+01
1.77	.62335	0.23113E+01	0.15093E+01	0.34884E+01	0.82589E+00	0.45330E+01
1.78	.62104	0.23273E+01	0.15167E+01	0.35298E+01	0.82151E+00	0.45782E+01
1.79	.61875	0.23433E+01	0.15241E+01	0.35714E+01	0.81711E+00	0.46237E+01
1.80	.61650	0.23592E+01	0.15316E+01	0.36133E+01	0.81268E+00	0.46695E+01
1.81	.61428	0.23751E+01	0.15391E+01	0.36554E+01	0.80823E+00	0.47155E+01
1.82	.61209	0.23909E+01	0.15466E+01	0.36978E+01	0.80376E+00	0.47618E+01
1.83	.60993	0.24067E+01	0.15541E+01	0.37404E+01	0.79927E+00	0.48084E+01
1.84	.60780	0.24224E+01	0.15617E+01	0.37832E+01	0.79476E+00	0.48552E+01
1.85	.60570	0.24381E+01	0.15693E+01	0.38262E+01	0.79023E+00	0.49023E+01
1.86	.60363	0.24537E+01	0.15770E+01	0.38695E+01	0.78569E+00	0.49497E+01
1.87	.60159	0.24693E+01	0.15847E+01	0.39130E+01	0.78113E+00	0.49973E+01
1.88	.59957	0.24848E+01	0.15924E+01	0.39568E+01	0.77655E+00	0.50452E+01
1.89	.59758	0.25003E+01	0.16001E+01	0.40008E+01	0.77196E+00	0.50934E+01
1.90	.59562	0.25157E+01	0.16079E+01	0.40450E+01	0.76736E+00	0.51418E+01
1.91	.59368	0.25310E+01	0.16157E+01	0.40894E+01	0.76274E+00	0.51905E+01
1.92	.59177	0.25463E+01	0.16236E+01	0.41341E+01	0.75812E+00	0.52394E+01
1.93	.58988	0.25616E+01	0.16314E+01	0.41790E+01	0.75349E+00	0.52886E+01
1.94	.58802	0.25767E+01	0.16394E+01	0.42242E+01	0.74884E+00	0.53381E+01
1.95	.58619	0.25919E+01	0.16473E+01	0.42696E+01	0.74420E+00	0.53878E+01
1.96	.58437	0.26069E+01	0.16553E+01	0.43152E+01	0.73954E+00	0.54378E+01
1.97	.58258	0.26220E+01	0.16633E+01	0.43610E+01	0.73488E+00	0.54881E+01
1.98	.58082	0.26369E+01	0.16713E+01	0.44071E+01	0.73021E+00	0.55386E+01
1.99	.57907	0.26518E+01	0.16794E+01	0.44534E+01	0.72555E+00	0.55894E+01
2.00	.57735	0.26667E+01	0.16875E+01	0.45000E+01	0.72087E+00	0.56404E+01

Ondes de choc droites, $\gamma = 1.40$

M_1	M_2	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_2/p_1	p_{i2}/p_{i1} A_1^*/A_2^*	p_{i2}/p_1
2.02	.57397	0.26962E+01	0.17038E+01	0.45938E+01	0.71153E+00	0.57433E+01
2.04	.57068	0.27255E+01	0.17203E+01	0.46885E+01	0.70218E+00	0.58473E+01
2.06	.56747	0.27545E+01	0.17369E+01	0.47842E+01	0.69284E+00	0.59522E+01
2.08	.56433	0.27833E+01	0.17536E+01	0.48808E+01	0.68351E+00	0.60583E+01
2.10	.56128	0.28119E+01	0.17704E+01	0.49783E+01	0.67420E+00	0.61654E+01
2.12	.55829	0.28402E+01	0.17875E+01	0.50768E+01	0.66492E+00	0.62735E+01
2.14	.55538	0.28683E+01	0.18046E+01	0.51762E+01	0.65567E+00	0.63827E+01
2.16	.55254	0.28962E+01	0.18219E+01	0.52765E+01	0.64645E+00	0.64929E+01
2.18	.54977	0.29238E+01	0.18393E+01	0.53778E+01	0.63727E+00	0.66042E+01
2.20	.54706	0.29512E+01	0.18569E+01	0.54800E+01	0.62814E+00	0.67165E+01
2.22	.54441	0.29784E+01	0.18746E+01	0.55831E+01	0.61905E+00	0.68298E+01
2.24	.54182	0.30053E+01	0.18924E+01	0.56872E+01	0.61002E+00	0.69442E+01
2.26	.53930	0.30319E+01	0.19104E+01	0.57922E+01	0.60105E+00	0.70597E+01
2.28	.53683	0.30584E+01	0.19285E+01	0.58981E+01	0.59214E+00	0.71761E+01
2.30	.53441	0.30845E+01	0.19468E+01	0.60050E+01	0.58330E+00	0.72937E+01
2.32	.53205	0.31105E+01	0.19652E+01	0.61128E+01	0.57452E+00	0.74122E+01
2.34	.52974	0.31362E+01	0.19838E+01	0.62215E+01	0.56581E+00	0.75318E+01
2.36	.52749	0.31617E+01	0.20025E+01	0.63312E+01	0.55718E+00	0.76525E+01
2.38	.52528	0.31869E+01	0.20213E+01	0.64418E+01	0.54862E+00	0.77742E+01
2.40	.52312	0.32119E+01	0.20403E+01	0.65533E+01	0.54014E+00	0.78969E+01
2.42	.52100	0.32367E+01	0.20595E+01	0.66658E+01	0.53175E+00	0.80207E+01
2.44	.51894	0.32612E+01	0.20788E+01	0.67792E+01	0.52344E+00	0.81455E+01
2.46	.51691	0.32855E+01	0.20982E+01	0.68935E+01	0.51521E+00	0.82713E+01
2.48	.51493	0.33095E+01	0.21178E+01	0.70088E+01	0.50707E+00	0.83982E+01
2.50	.51299	0.33333E+01	0.21375E+01	0.71250E+01	0.49902E+00	0.85261E+01
2.52	.51109	0.33569E+01	0.21574E+01	0.72421E+01	0.49105E+00	0.86551E+01
2.54	.50923	0.33803E+01	0.21774E+01	0.73602E+01	0.48318E+00	0.87851E+01
2.56	.50741	0.34034E+01	0.21976E+01	0.74792E+01	0.47540E+00	0.89161E+01
2.58	.50562	0.34263E+01	0.22179E+01	0.75991E+01	0.46772E+00	0.90482E+01
2.60	.50387	0.34490E+01	0.22383E+01	0.77200E+01	0.46012E+00	0.91813E+01
2.62	.50216	0.34714E+01	0.22590E+01	0.78418E+01	0.45263E+00	0.93154E+01
2.64	.50048	0.34936E+01	0.22797E+01	0.79645E+01	0.44522E+00	0.94506E+01
2.66	.49883	0.35156E+01	0.23006E+01	0.80882E+01	0.43792E+00	0.95868E+01
2.68	.49722	0.35374E+01	0.23217E+01	0.82128E+01	0.43071E+00	0.97241E+01
2.70	.49563	0.35590E+01	0.23429E+01	0.83383E+01	0.42359E+00	0.98624E+01
2.72	.49408	0.35803E+01	0.23642E+01	0.84648E+01	0.41657E+00	0.10002E+02
2.74	.49256	0.36015E+01	0.23858E+01	0.85922E+01	0.40965E+00	0.10142E+02
2.76	.49107	0.36224E+01	0.24074E+01	0.87205E+01	0.40283E+00	0.10283E+02
2.78	.48960	0.36431E+01	0.24292E+01	0.88498E+01	0.39610E+00	0.10426E+02
2.80	.48817	0.36636E+01	0.24512E+01	0.89800E+01	0.38946E+00	0.10569E+02
2.82	.48676	0.36838E+01	0.24733E+01	0.91111E+01	0.38293E+00	0.10714E+02
2.84	.48538	0.37039E+01	0.24955E+01	0.92432E+01	0.37649E+00	0.10859E+02
2.86	.48402	0.37238E+01	0.25179E+01	0.93762E+01	0.37014E+00	0.11006E+02
2.88	.48269	0.37434E+01	0.25405E+01	0.95101E+01	0.36389E+00	0.11154E+02
2.90	.48138	0.37629E+01	0.25632E+01	0.96450E+01	0.35773E+00	0.11302E+02
2.92	.48010	0.37821E+01	0.25861E+01	0.97808E+01	0.35167E+00	0.11452E+02
2.94	.47884	0.38012E+01	0.26091E+01	0.99175E+01	0.34570E+00	0.11603E+02
2.96	.47760	0.38200E+01	0.26322E+01	0.10055E+02	0.33982E+00	0.11754E+02
2.98	.47638	0.38387E+01	0.26555E+01	0.10194E+02	0.33404E+00	0.11907E+02
3.00	.47519	0.38571E+01	0.26790E+01	0.10333E+02	0.32834E+00	0.12061E+02

Ondes de choc droites, $\gamma = 1.40$

M_1	M_2	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_2/p_1	p_{i2}/p_{i1} A_1^*/A_2^*	p_{i2}/p_1
3.02	.47402	0.38754E+01	0.27026E+01	0.10474E+02	0.32274E+00	0.12216E+02
3.04	.47287	0.38935E+01	0.27264E+01	0.10615E+02	0.31723E+00	0.12372E+02
3.06	.47174	0.39114E+01	0.27503E+01	0.10758E+02	0.31180E+00	0.12529E+02
3.08	.47063	0.39291E+01	0.27744E+01	0.10901E+02	0.30646E+00	0.12687E+02
3.10	.46953	0.39466E+01	0.27986E+01	0.11045E+02	0.30121E+00	0.12846E+02
3.12	.46846	0.39639E+01	0.28230E+01	0.11190E+02	0.29605E+00	0.13006E+02
3.14	.46741	0.39811E+01	0.28475E+01	0.11336E+02	0.29097E+00	0.13167E+02
3.16	.46637	0.39981E+01	0.28722E+01	0.11483E+02	0.28597E+00	0.13329E+02
3.18	.46535	0.40149E+01	0.28970E+01	0.11631E+02	0.28106E+00	0.13492E+02
3.20	.46435	0.40315E+01	0.29220E+01	0.11780E+02	0.27623E+00	0.13656E+02
3.22	.46336	0.40479E+01	0.29471E+01	0.11930E+02	0.27148E+00	0.13821E+02
3.24	.46240	0.40642E+01	0.29724E+01	0.12081E+02	0.26681E+00	0.13987E+02
3.26	.46144	0.40803E+01	0.29979E+01	0.12232E+02	0.26222E+00	0.14155E+02
3.28	.46051	0.40963E+01	0.30234E+01	0.12385E+02	0.25771E+00	0.14323E+02
3.30	.45959	0.41120E+01	0.30492E+01	0.12538E+02	0.25328E+00	0.14492E+02
3.32	.45868	0.41276E+01	0.30751E+01	0.12693E+02	0.24892E+00	0.14662E+02
3.34	.45779	0.41431E+01	0.31011E+01	0.12848E+02	0.24464E+00	0.14834E+02
3.36	.45691	0.41583E+01	0.31273E+01	0.13005E+02	0.24043E+00	0.15006E+02
3.38	.45605	0.41734E+01	0.31537E+01	0.13162E+02	0.23629E+00	0.15180E+02
3.40	.45520	0.41884E+01	0.31802E+01	0.13320E+02	0.23223E+00	0.15354E+02
3.42	.45436	0.42032E+01	0.32069E+01	0.13479E+02	0.22823E+00	0.15530E+02
3.44	.45354	0.42178E+01	0.32337E+01	0.13639E+02	0.22431E+00	0.15706E+02
3.46	.45273	0.42323E+01	0.32607E+01	0.13800E+02	0.22045E+00	0.15884E+02
3.48	.45194	0.42467E+01	0.32878E+01	0.13962E+02	0.21667E+00	0.16062E+02
3.50	.45115	0.42609E+01	0.33150E+01	0.14125E+02	0.21295E+00	0.16242E+02
3.60	.44741	0.43296E+01	0.34537E+01	0.14953E+02	0.19531E+00	0.17156E+02
3.70	.44395	0.43949E+01	0.35962E+01	0.15805E+02	0.17919E+00	0.18095E+02
3.80	.44073	0.44568E+01	0.37426E+01	0.16680E+02	0.16447E+00	0.19060E+02
3.90	.43774	0.45156E+01	0.38928E+01	0.17578E+02	0.15103E+00	0.20051E+02
4.00	.43496	0.45714E+01	0.40469E+01	0.18500E+02	0.13876E+00	0.21068E+02
4.10	.43236	0.46245E+01	0.42048E+01	0.19445E+02	0.12756E+00	0.22111E+02
4.20	.42994	0.46749E+01	0.43666E+01	0.20413E+02	0.11733E+00	0.23179E+02
4.30	.42767	0.47229E+01	0.45322E+01	0.21405E+02	0.10800E+00	0.24273E+02
4.40	.42554	0.47685E+01	0.47017E+01	0.22420E+02	0.99481E-01	0.25393E+02
4.50	.42355	0.48119E+01	0.48751E+01	0.23458E+02	0.91698E-01	0.26539E+02
4.60	.42168	0.48532E+01	0.50523E+01	0.24520E+02	0.84587E-01	0.27710E+02
4.70	.41992	0.48926E+01	0.52334E+01	0.25605E+02	0.78086E-01	0.28907E+02
4.80	.41826	0.49301E+01	0.54184E+01	0.26713E+02	0.72140E-01	0.30130E+02
4.90	.41670	0.49659E+01	0.56073E+01	0.27845E+02	0.66699E-01	0.31379E+02
5.00	.41523	0.50000E+01	0.58000E+01	0.29000E+02	0.61716E-01	0.32653E+02
5.10	.41384	0.50326E+01	0.59966E+01	0.30178E+02	0.57151E-01	0.33954E+02
5.20	.41252	0.50637E+01	0.61971E+01	0.31380E+02	0.52966E-01	0.35280E+02
5.30	.41127	0.50934E+01	0.64014E+01	0.32605E+02	0.49126E-01	0.36631E+02
5.40	.41009	0.51218E+01	0.66097E+01	0.33853E+02	0.45601E-01	0.38009E+02
5.50	.40897	0.51489E+01	0.68218E+01	0.35125E+02	0.42362E-01	0.39412E+02
5.60	.40791	0.51749E+01	0.70378E+01	0.36420E+02	0.39383E-01	0.40841E+02
5.70	.40690	0.51998E+01	0.72577E+01	0.37738E+02	0.36643E-01	0.42296E+02
5.80	.40594	0.52236E+01	0.74814E+01	0.39080E+02	0.34120E-01	0.43777E+02
5.90	.40503	0.52464E+01	0.77091E+01	0.40445E+02	0.31795E-01	0.45283E+02
6.00	.40416	0.52683E+01	0.79406E+01	0.41833E+02	0.29651E-01	0.46815E+02

Ondes de choc droites, $\gamma = 1.40$

M_1	M_2	v_1/v_2 ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_2/p_1	p_{i2}/p_{i1} A_1^*/A_2^*	p_{i2}/p_1
6.50	.40038	0.53651E+01	0.91564E+01	0.49125E+02	0.21148E-01	0.54862E+02
7.00	.39736	0.54444E+01	0.10469E+02	0.57000E+02	0.15352E-01	0.63553E+02
7.50	.39491	0.55102E+01	0.11879E+02	0.65458E+02	0.11329E-01	0.72887E+02
8.00	.39289	0.55652E+01	0.13387E+02	0.74500E+02	0.84879E-02	0.82865E+02
8.50	.39121	0.56117E+01	0.14991E+02	0.84125E+02	0.64492E-02	0.93487E+02
9.00	.38980	0.56512E+01	0.16693E+02	0.94333E+02	0.49639E-02	0.10475E+03
9.50	.38860	0.56850E+01	0.18491E+02	0.10512E+03	0.38664E-02	0.11666E+03
10.00	.38758	0.57143E+01	0.20387E+02	0.11650E+03	0.30448E-02	0.12922E+03
11.00	.38592	0.57619E+01	0.24471E+02	0.14100E+03	0.19451E-02	0.15626E+03
12.00	.38466	0.57987E+01	0.28943E+02	0.16783E+03	0.12866E-02	0.18587E+03
13.00	.38368	0.58276E+01	0.33805E+02	0.19700E+03	0.87709E-03	0.21806E+03
14.00	.38289	0.58507E+01	0.39055E+02	0.22850E+03	0.61380E-03	0.25282E+03
15.00	.38226	0.58696E+01	0.44694E+02	0.26233E+03	0.43953E-03	0.29016E+03
16.00	.38174	0.58851E+01	0.50722E+02	0.29850E+03	0.32119E-03	0.33008E+03
17.00	.38131	0.58980E+01	0.57138E+02	0.33700E+03	0.23899E-03	0.37256E+03
18.00	.38095	0.59088E+01	0.63944E+02	0.37783E+03	0.18072E-03	0.41763E+03
19.00	.38065	0.59180E+01	0.71138E+02	0.42100E+03	0.13865E-03	0.46527E+03
20.00	.38039	0.59259E+01	0.78722E+02	0.46650E+03	0.10778E-03	0.51548E+03
21.00	.38016	0.59327E+01	0.86694E+02	0.51433E+03	0.84778E-04	0.56827E+03
22.00	.37997	0.59387E+01	0.95055E+02	0.56450E+03	0.67414E-04	0.62364E+03
23.00	.37980	0.59438E+01	0.10381E+03	0.61700E+03	0.54140E-04	0.68158E+03
24.00	.37965	0.59484E+01	0.11294E+03	0.67183E+03	0.43877E-04	0.74209E+03
25.00	.37952	0.59524E+01	0.12247E+03	0.72900E+03	0.35859E-04	0.80518E+03
infi	.37796	0.60000E+01	infi	infi	0.00000E+00	infi

Références générales

ARIS, R. (1962) - Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
BARRERE, M. and PRUD'HOMME, R. (1973) - Equations Fondamentales de l' Aérothermo-chimie, *Masson*, Paris.
BATCHELOR, G. K. (1970) - Introduction to Fluid Mechanics, *Cambridge University Press*, Cambridge.
BIRD, R. B., STEWART, W. E. and LIGHTFOOT, E. N. (1966) - Transport Phenomena, *John Wiley*, New York.
BRUN, E. A., MARTINOT-LAGARDE, A. and MATHIEU, J. (1970) - Mécanique des Fluides, *Dunod*, Paris.
FUNG, Y. C. (1965) - Foundations of Solid Mechanics, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
GERMAIN, P. and MULLER, P. (1886) - Introduction à la Mécanique des Milieux Continus, *Masson*, Paris.
GOLDSTEIN, S.,ed (1965) - Modern Developments in Fluid Dynamics. *Dover*, New York.
von KARMAN, T. (1956) - Collected Works, *Butterworths Scientific Publications*, London.
LANDAU, L. and LIFCHITZ, E. (1971) - Mécanique des Fluides, *Editions de Moscou*, Moscou.
LEMEHAUTE, B. (1976) - An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves, *Springer Verlag*, New York.
LIEPMANN, H. W. and ROSHKO, A. (1957) - Elements of Gasdynamics, *John Wiley*, New York.
LIGHTHILL, J. (1986) - An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics, *Clarendon Press*, Oxford.
MOORE, W. J. (1972) - Physical Chemistry, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
PRANDTL, L. and TIETJENS, O. G. (1934) - Fundamentals of Hydro- and Aero-mechanics, *Mc Graw-Hill*, New York.
PRANDTL, L. and TIETJENS, O. G. (1957) - Applied Hydro- and Aeromechanics, *Dover Publications*, New York.
SERRIN, J. (1959) - Mathematical principles of classical fluid mechanics. In *Encyclopedia of Physics (Hanbuch der Physik)*, S. Flügge,ed., *Springer-Verlag*, Berlin.
TRITTON, D. J. (1977) - Physical Fluid Dynamics, *Van Nostrand*, New York.
TRUESDELL, C. and TOUPIN, R. (1960) - The classical Field Theories. *Handbuch der Physik*, S. Flügge,ed., *Springer Verlag*, Berlin.
TSIEN, H. S. (1958) - The equations of gas dynamics. In *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. Fundamentals of Gas Dynamics*, Volume 3, H. W. Emmons,ed., *Princeton University Press*, Princeton.
VAN DYKE, M. (1982) - An Album of Fluid Motion, *Parabolic Press*, Palo Alto.
WHITAKER, S. (1968) - Introduction to Fluid Mechanics, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
ZUKROW, M. J. and HOFFMAN, J. D. (1976) - Gas Dynamics, *John Wiley*, New York.

Thermodynamique

BOREL, L. (1984) - Thermodynamique et Energétique, *Presses Polytechniques Romandes*, Lausanne.
CALLEN, H. B. (1960) - Thermodynamics, *John Wiley*, New York.
FAY, J. A. (1965) - Molecular Thermodynamics, *Addison -Wesley*, Reading.
KLING, R. (1980) - Thermodynamique générale et applications, *Technip*, Paris.
MOORE, W. J. (1972) - Physical chemistry, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.

Physique des gaz, phénomènes de transport, physique des plasmas

BARRERE, M. and PRUD'HOMME, R. (1973) - Equations Fondamentales de l' Aérothermo-chimie, *Masson*, Paris.
BIRD, R. B., STEWART, W. E. and LIGHTFOOT, E. N. (1966) - Transport Phenomena, *JohnWiley*, New York.
BRUN, R. (1986) - Transport et Relaxation dans les Ecoulements Gazeux., *Masson*, Paris.
CHAPMAN, S. and COWLING, T. G. (1961) - The Mathematical Theory of Non-uniform Gases, *John Wiley*, New York.
CLARKE, J. F. and M. McCHESNEY, M. (1964) - The Dynamics of Real Gases, *Butterworths*, London.
DELCROIX, J. L. (1963) - Physique des Plasmas, *Dunod*, Paris.
FERZIGER, J. N. and KAPER, H. G. (1972) - Mathematical Theory of Transport Processes in Gases, *North Holland Publishing Co*, Amsterdam.
HIRSCHFELDER, J. O., CURTISS, C. F. and BIRD, R. B. (1964) - Molecular Theory of Gases and Liquids, *John Wiley,* New York.
PARK, C. (1990) - Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics, *John Wiley,* New York.
VINCENTI, W. G. and KRUGER, C. H. (1965) - Introduction to Physical Gas Dynamics, *John Wiley*, New York.

Tables et données de base

COLEBROOK, C. F. (1938) - Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. *Journal of the Institute of Civil Engineers,* **11**, *133.*
MOODY, L. (1944) - Friction factors for pipe flow. *Transactions of the ASME,* **66**, *671.*
PERRY, J. H., ed. (1953) - Chemical Engineering Handbook, *Mc Graw-Hill*, New York.
REID, R. C., PRAUSNITZ, J. M. and SHERWOOD, T. K. (1977) - The Properties of Gases and Liquids, *Mc Graw Hill*, New York.
REYNOLDS, W. C. (1979) - Thermodynamics Properties in SI, *Department of Mechanical Engineering,Stanford U.*, Stanford.
STAFF, Ames Research Laboratory (1953) - Equations, Tables and Charts for Compressible Flow, *NACA Report 1135.*

Dynamique des gaz, aérodynamique

ABBOTT, I. H. and VON DOENHOFF, A. E. (1959) - Theory of Wing Sections, *Dover*, New York.
ANDERSON, J.D. Jr. (1989) - Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics, *McGraw-Hill,* New York.
BERTIN, J. J. and SMITH, M. L. (1979) - Aerodynamics for Engineers, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
BOUIS, X., FERGUSSON, K. J., FREYTAG, A. and OFFRINGA, G. (1988) - La grande soufflerie européenne. *La Recherche,* **n° 203**, *1190-1197.*
COURANT, R. and FRIEDRICHS, K. O. (1948) - Supersonic Flow and Shock Waves, *Macmillan*, New York.
CROCCO, L. (1958) - One-Dimensional treatment of Steady Gas Dynamics. In *Fundamentals of Gas Dynamics*, H. W. Emmons,ed., *Princeton University Press*, Princeton.
DONOVAN, A. F. and LAWRENCE, H. R., eds. (1957) - Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds. *Princeton University Press*, Princeton.
EMANUEL, G. (1986) - Gasdynamics: Theory and Applications, *AIAA*, Washington.
EMMONS, H. W., ed. (1958) - Fundamentals of Gas Dynamics. *Princeton University Press*, Princeton.

GILLY, J. P., ROSENTHAL, L. and SEMEZIS, Y. (1970) - Aérodynamique Hypersonique, *Gauthier-Villars*, Paris.
von KARMAN, T. (1947) - Supersonic aerodynamics-Principles and applications. *Journal of Aeronautical Science,* **14**, *373-402.*
von KARMAN, T. (1963) - Aerodynamics, *McGraw Hill*, New York.
KRASNOV, N. F. (1970) - Aerodynamics of Bodies of Revolution, *Elsevier*, New York.
KRASNOV, N. F. (1978) - Aerodynamics, *American Publishing Co.*, New Dehli.
KUETHE, A. M. and C.Y. CHOW, C. Y. (1986) - Foundations of Aerodynamics, *John Wiley*, New York.
KUCHEMANN, D. (1978) - The Aerodynamic Design of Aircraft, *Pergamon Press,* Oxford.
LIEPMANN, H. W. and ROSHKO, A. (1957) - Elements of Gasdynamics, *John Wiley*, New York.
MILNE-THOMSON, L. M. (1966) - Theoretical Aerodynamics, *Dover*, New York.
MORAN, J. (1984) - An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics, *John Wiley*, New York.
MOULDEN, T. H. (1984) - Fundamentals of Transonic Flow, *John Wiley*, New York.
REBUFFET, P. (1966) - Aérodynamique Expérimentale, *Dunod*, Paris.
ROBINSON, A. and LAURMANN (1956) - Wing Theory, *Cambridge University Press*, Cambridge.
SEARS, W. R., ed. (1954) - General Theory of High Speed Aerodynamics. *Princeton University Press*, Princeton.
SHAPIRO, A. (1953) - The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow, *The Ronald Press Company*, New York.
TSIEN, H. S. (1958) - The equations of gas dynamics. In *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion. Fundamentals of Gas Dynamics*, H. W. Emmons,ed., *Princeton University Press*, Princeton.
ZELDOVICH, Y. B. and RAIZER, Y. P. (1966) - The Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena, *Nauka* , Moscou.*(English translation, Academic Press 1971)*
ZUKROW, M. J. and HOFFMAN, J. D. (1976) - Gas Dynamics, *John Wiley*, New York.

Ecoulements visqueux, couche limite

BERGER, S. A. (1971) - Laminar Wakes, *American Elsevier Publishing Company*, New York.
BLASIUS, H. (1908) - Grenzschicht in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.,* **56** n°1.
BLOTTNER, F. G. (1979) - Introduction to computational techniques for boundary layers. Technical Report SAND 79-0893, *Sandia Laboratories*, Albuquerque.
CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1977) - Momentum Transfer in Boundary Layers, *Hemisphere Publishing Corporation*, Washington.
CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1984) - Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, *Springer Verlag*, New York.
CEBECI, T. and SMITH, A. M. O. (1974) - Analysis of Turbulent Boundary Layers, *Academic Press*, New York.
CLAUSER, F. (1956) - The turbulent boundary layer. *Advances in Applied Mechanics,* **4**, *1-51.*
DENN, M. M. (1980) - Process Fluid Mechanics, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
DRYDEN, H. L. (1959) - Transition from laminar to turbulent flow. *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, C. C. Lin,ed., *Princeton University Press*, Princeton.
FALKNER, V. M. and SKAN, S. W. (1930) *Some Approximate Solutions of the Boundary Layer Equations. British ARC Report n° 1314.*

HOWARTH, L. (1958) - Laminar Boundary Layers. *Encyclopedia of Physics (Hanbuch der Physik)*, S.Flügge, ed., *Springer-Verlag*, Berlin.
von KARMAN, T. (1921) - Über laminare und turbulente reibung. *Z. Angewandte Mathematik und Mechanik,* **1**, *233-252.*
KELLER, H. B. (1978) - Numerical methods in boundary-layer theory. *Annual Reviews of Fluid Mechanics,* **10**, 417-433
POLHAUSEN, K. (1921) - Zur näherungsweisen Integration der Differential-gleichung der laminaren Reibungsschicht. *Z. Angewandte Mathematik und Mechanik,* **1**, *252.*
PRANDTL, L. (1925) - Investigations on turbulent flow. *Z. Angewandte Mathematik und Mechanik,* **5**, *136.*
PRANDTL, L. and TIETJENS, O. G. (1934) - Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics, *Mc Graw-Hill*, New York.
ROSENHEAD, L., ed. (1963) - Laminar Boundary Layers. *Oxford University Press*, London.
SCHLICHTING, H. (1968) - Boundary-layer Theory, *McGraw-Hill*, New York.
SCHUBAUER, G. B. and SKRAMSTAD, H. K. (1947) - Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of Aeronautical Science,* **14**, *69.*
VAN DRIEST, E. R. (1956) - On turbulent flow near a wall. *Journal of Aeronautical Science,* **23**, *1007.*
WHITE, F. M. (1974) - Viscous Fluid Flow, *McGraw Hill*, New York.

Turbulence

ABRAMOVICH, G. N. (1963) - The Theory of Turbulent Jets, *MIT Press*, Cambridge.
BATCHELOR, G. K. (1953) - The Theory of Homogeneous Turbulence, *Cambridge University Press*, Cambrige.
BRADSHAW, P. (1975) - Introduction to Turbulence and its Measurement, *Pergamon Press*, New York.
BRADSHAW, P., ed (1978) - Turbulence. *Springer-Verlag*, Berlin.
BROADKEY, R. S., ed (1975) - Turbulence in Mixing Operations. *Academic Press*, New York.
BROWN, G. L. and ROSHKO, A. (1974) - On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics,* **64**, *775.*
CANTWELL, B. J. (1981) - Organized motion in turbulent flow. *Annual Review of Fluid Mechanics,* **13**, *457-515.*
CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1977) - Momentum Transfer in Boundary Layers, *Hemisphere Publishing Corporation*, Washington.
CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1984) - Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, *Springer Verlag*, New York.
CHANG, P. K. (1970) - Separation of Flow, *Pergamon Press*, Oxford.
HINZE, J. O. (1975) - Turbulence, *McGraw-Hill*, New York.
LESIEUR, M. (1987) - Turbulence in Fluids, *Martinus Nijhoff Publishers*, Dordrecht.
LESLIE, D. C. (1973) - Developments in the Theory of Turbulence, *Clarendon Press*, Oxford.
LIN, C. C. (1961) - Statistical Theories of Turbulence, *Princeton University Press*, Princeton.
MONIN, A. S. and YAGLOM, A. M. (1971) - Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, *M.I.T. Press*, Cambridge.
RAJARATHAM, M. (1976) - Turbulent Jets, *Elsevier Science Publishing Co*, Amsterdam.
REYNOLDS, O. (1883) - An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels. *Phil. Transactions of the Royal Society London,* **174**, *935-982.*
ROSHKO, A. (1976) - Structure of turbulent shear flows: a new look. *AIAA Journal,* **14**, *1349-1356.*
SCHETZ, J. A. (1980) - Injection and Mixing in Turbulent Flow, *AIAA*, New York.

SMITH, A. M. O. (1975) - High lift aerodynamics. *Journal of Aircraft,* **12**, *501-531.*
TENNEKES, H. and LUMLEY, J. L. (1972) - A First Course in Turbulence, *M.I.T. Press*, Cambridge.
TOWNSEND, A. A. (1976) - The Structure of Turbulent Shear Flow, *Cambridge University Press*, Cambridge.

Modélisation de la turbulence

AMANO, R. S. (1984) - Development of a turbulence near-wall model and its application to separated and reattached flows. *Numerical Heat Transfer,* **7**, *59-75.*
BRADSHAW, P., CEBECCI, T. and WHITELAW, J. H. (1981) - Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, *Academic Press*, New York.
CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1977) - Momentum Transfer in Boundary Layers, *Hemisphere Publishing Corporation*, Washington.
CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1984) - Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, *Springer Verlag*, New York.
CEBECI, T. and SMITH, A. M. O. (1974) - Analysis of Turbulent Boundary Layers, *Academic Press*, New York.
DALY, B. J. and HARLOW, F. H. (1970) - Transport equations in turbulence. *Physics of Fluids,* **13**, *2634.*
HANJALIK, K. and LAUNDER, B. E. (1972) - A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *Journal of Fluid Mechanics,* **52**, *609.*
HANJALIK, K. and LAUNDER, B. E. (1976) - Contributions towards a Reynolds stress closure for low-Reynolds number turbulence. *Journal of Fluid Mechanics,* **74**, *593.*
JONES, W. P. and LAUNDER, B. E. (1972) - The prediction of laminarization with a 2-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer,* **15**, *301.*
LAKSHMINARAYANA, B. (1986) - Turbulence modeling for complex shear flows. *AIAA Journal,* **24**, *1900-1917.*
LAUNDER, B. E. (1989) - Second-moment closure : present ... and future. *International Journal of Heat and Fluid Flow,* **10**, *282-300.*
LAUNDER, B. E., REECE, G. J. and RODI, W. (1975) - Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics,* **68**, *537.*
MATHIEU, J., JEANDEL, D., LAUNDER, B. E., REYNOLDS, W. E. and RODI, W. (1984) - La Simulation des Modèles de Turbulence et leurs Applications, *Eyrolles*, Paris.
MELLOR, G. and HERRING, H. J. (1973) - A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA Journal,* **11**, *590.*
REYNOLDS, W. C. (1976) - Computation of turbulent flows. *Annual Reviews of Fluid Mechanics,* **8**
SADALLAH, Y., CANDEL, S.M. and ESPOSITO, E. (1985) - Analyse des transports de masse dans un jet libre. In *Ecoulements turbulents à masse volumique variable.* NOT. MST 86-10, Marseille. 113-147.
SADALLAH, Y. (1984) - Analyse du jet de rechauffe d'un turboréacteur, Thèse de Docteur Ingénieur, *Ecole Centrale Paris,* Chatenay-Malabry.
SCHETZ, J. A. (1980) - Injection and Mixing in Turbulent Flow, *AIAA*, New York.

Propulsion, turbomachines

BARRERE, M., JAUMOTTE, B., FRAEIJS DE VEUBEKE, B. and VANDENKERHOVE, J. (1957) - La Propulsion par Fusées, *Dunod*, Paris.
HILL, P. G. and PETERSON, C. R. (1965) - Mechanics and Thermodynamics of Propulsion, *McGraw-Hill*, New York.
HORLOCK, J. H. (1973) - Axial Flow Compressors, *R.E. Krieger Publishing Company*, Huntington.
HORLOCK, J. H. (1978) - Actuator Disk Theory, *McGraw-Hill*, New York.

KERREBROCK, J. L. (1977) - Aircraft Engines and Gas Turbines, *M.I.T. Press*, Cambridge.
OATES, G. C. (1984) - Aerothermodynamics of Gas Turbine and Rocket Propulsion, *AIAA*, New York.
OATES, G.C., ed. (1985) - Aerothermodynamics of Aircraft Engine Components, *AIAA*, New York.

Mécanique des fluides numérique

ANDERSON, D. A., TANNEHILL, J. C. and PLETCHER, R. H. (1984) - Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, *Hemisphere Publishing Corporation*, New York.
BORIS, J. P. and ORAN, E.S. (1987) - Numerical Simulation of Reactive Flow, *Elsevier*, New York.
CHOW, C. Y. (1979) - An introduction to Computational Fluid Dynamics, *John Wiley*, New York.
CHUNG, T. J. (1978) - Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, *McGraw-Hill*, New York.
EUVRARD, D. (1988) - Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, *Masson*, Paris.
FERZIGER, J. H. (1981) - Numerical Methods for Engineering Application, *John Wiley*, New York.
HOLT, M. (1977) - Numerical Methods in Fluid Dynamics, *Springer*, Heidelberg.
KELLER, H. B. (1968) - Numerical Methods for Two-Point Boudary-Value Problems, *Blaisdell*, Waltham.
LAPIDUS, L. and PINDER, G. F. (1982) - Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering, *John Wiley*, New York.
MITCHELL, A. R. and GRIFFITHS, D. F. (1980) - The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, *John Wiley*, New York.
PATANKAR, S. V. (1980) - Numerical Heat Transfer, *Hemisphere Publishing Corporation*, Washington.
PEYRET, R. and TAYLOR, T. D. (1983) - Computational Methods for Fluid Flow, *Springer Verlag*, New York.
RICHTMEYER, R. D. and MORTON, K. W. (1957) - Difference Methods for Initial-Value Problems, *John Wiley*, New York.
ROACHE, P. J. (1972) - Computational Fluid Dynamics, *Hermosa Publishers*, Albuquerque.
TAYLOR, C. and HUGHES, T. J. (1981) - Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations, *Pineridge Press*, Swansea.

Hydrodynamique, hydraulique

LAMB, H. (1945) - Hydrodynamics, *Cambridge University Press*, Cambridge.
LEMEHAUTE, B. (1976) - An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves, *Springer Verlag*, New York.
NEWMAN, J. N. (1977) - Marine Hydrodynamics, *M.I.T. Press*, Cambridge.
YEAPLE F.D., ed (1966) - Hydraulic and Pneumatic Power and Control. *McGraw-Hill*, New York.

Ondes dans les fluides, instabilités

BETCHOV, R. and CRIMINALE, W. O., Jr. (1967) - Stability of parallel flows, *Academic Press*, New York.
DRAZIN, P. G. and REID, W. H. (1982) - Hydrodynamic stability, *Cambridge University Press*, Cambridge.

LIGHTHILL, M. J. (1978) - Waves in Fluids, *Cambridge University Press*, Cambridge.
LIN, C. C. (1955) - The Theory of Hydrodynamic Stability, *Cambridge University Press*, Cambridge.
PHILLIPS, O. M. (1969) - The Dynamics of the Upper Ocean, *Cambridge University Press*, Cambridge.
STOKER, J. J. (1957) - Water Waves, *Interscience*, New York.
WEHAUSEN, J. V. and LAITONE, E. V. (1960) - Surface Waves. *Encyclopedia of Physics (Hanbuch der Physik)*, S. Flügge, ed., *Springer-Verlag*, Berlin.
WHITHAM, G. B. (1974) - Linear and Nonlinear Waves, *John Wiley*, New York.

Combustion, écoulements diphasiques

BARRERE, M. and PRUD'HOMME, R. (1973) - Equations Fondamentales de l' Aérothermo-chimie, *Masson*, Paris.
BUCKMASTER, J. D. and LUDFORD, J. S. S. (1982) - Theory of Laminar Flames, *Cambridge University Press*, Cambridge.
CLAVIN, P., LARROUTUROU, B. and PELCE, P., eds. (1985) - Combustion and Nonlinear Phenomena. *Les Editions de la Physique*, Les Ulis.
DELHAYE, J. M., GIOT, M. and RIETHMULLER, M. L., eds (1981) - Thermalhydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering.*Hemisphere/ McGraw-Hill*, New York.
HESTRONI, G., ed. (1982) - Handbook of Multiphase Systems. *Hemisphere/McGraw-Hill*, New York.
ISHII, M. (1975) - Thermo-fluid Dynamic Theory of Two-phase Flow, *Eyrolles*, Paris.
KAPILA, A. K. (1983) - Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems, *Pitman*, Boston.
KUO, K. K. (1986) - Principles of Combustion, *John Wiley*, New York.
LEWIS, B. and VON ELBE, G. (1987) - Combustion, Flames and Explosions of Gases., *Academic Press*, San Diego.
LIBBY, P. A. and WILLIAMS, F. A., eds. (1980) - Turbulent reactive flows.*Springer Verlag*, New York.
SPALDING, D. B. (1978) - Combustion and Mass Transfer, *Pergamon Press*, Oxford.
STREHLOW, R. A. (1984) - Combustion Fundamentals, *Mc Graw Hill*, New York.
TOONG, T. Y. (1983) - Combustion Dynamics, *Mc Graw Hill*, New York.
WALLIS, G. B. (1969) - One-dimensional Two-phase Flow, *McGraw-Hill*, New York.
WILLIAMS, F. A. (1985) - Combustion Theory, *Benjamin Cummings*, Palo-Alto.
ZELDOVICH, Y. B., BARENBLATT, G. I., LIBROVICH, V. B. and MAKHVILADZE, G. M. (1985) - The Mathematical Theory of Combustion and Explosions, *Plenum Publishing Corporation*, New York.

Méthodes mathématiques

ARIS, R. (1962) - Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics, *Prentice Hall*, Englewood Cliffs.
BLUMAN, G. W. and COLE, J. D. (1974) - Similarity Methods for Differential Equations, *Springer-Verlag*, New York.
CHORIN, A. J. and MARDSEN, J. E. (1979) - A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, *Springer-Verlag*, New York.
CHAPMAN, S. and COWLING, T. G. (1961) - The Mathematical Theory of Non-uniform Gases, *John Wiley*, New York.
COLE, J. D. (1968) - Perturbation Methods in Applied Mathematics, *Blaisdell*, Waltham.
LESLIE, D. C. (1973) - Developments in the theory of turbulence, *Clarendon Press*, Oxford.
SERRIN, J. (1959) - Mathematical principles of classical fluid mechanics. In *Encyclopedia of Physics (Hanbuch der Physik)*, S. Flügge, ed., *Springer-Verlag*, Berlin.

VAN DYKE, M. (1975) - Perturbation Methods in Fluid Mechanics, *Parabolic Press*, Stanford.
ZELDOVICH, Y. B., BARENBLATT, G. I., LIBROVICH, V. B. and MAKHVILADZE, G. M. (1985) - The Mathematical Theory of Combustion and Explosions, *Plenum Publishing Corporation*, New York.

Analyse dimensionnelle

LANGHAAR, H. L. (1956) - Analyse Dimensionnelle et Théorie des Maquettes, *Dunod*, Paris.
LEMEHAUTE, B. (1976) - An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves, *Springer Verlag*, New York.-
SCHURING, D. J. (1977) - Scale Models in Engineering, *Pergamon Press*, Oxford.
SEDOV, L. I. (1959) - Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, *Academic Press*, New York.
TAYLOR, E. S. (1973) - Dimensional Analysis for Engineers, *Clarendon*, Oxford.

Ecoulements instationnaires

BLAKE, W. H. (1986) - Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration, *Academic Press*, Orlando.
BLEVINS, R. D. (1977) - Flow Induced Vibrations, *Van Nostrand*, New York.
ROSHKO, A. (1961) - Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics,* **10**, *345.*
TRITTON, D. J. (1959) - Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics,* **6**, *547.*

Transferts thermiques

CEBECI, T. and BRADSHAW, P. (1984) - Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, *Springer Verlag*, New York.
HOLMAN, J. P. (1976) - Heat Transfer, *McGraw-Hill*, New York.
OZISIK, M. N. (1985) - Heat Transfer, *Mc Graw Hill*, New York.
McADAMS, W. H. (1954) - Heat Transmission, *McGraw-Hill*, New York.
PATANKAR, S. V. (1980) - Numerical Heat Transfer, *Hemisphere Publishing Corporation*, Washington.
SPALDING, D. B. (1978) - Combustion and Mass Transfer, *Pergamon Press*, Oxford.
TAINE, J. and PETIT, J. P. (1989) - Transferts Thermiques, *Dunod*, Paris.

Méthodes expérimentales, visualisations d'écoulements

BOUTIER, A., PHILBERT, M., SURGET, J. and VERET, C. (1978) - Visualisation et procédés optiques de mesure en aérodynamique. *Techniques de l'Ingénieur, 17-43.*
BRADSHAW, P. (1975) - Introduction to Turbulence and its Measurement, *Pergamon Press*, New York.
HESSELINK, L. (1988) - Digital image processing in flow visualization. *Annual Review of Fluid Mechanics,* **20**, *421-485.*
LAUTERBORN, W. and VOGEL, A. (1984) - Modern optical techniques in fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics,* **16**, *223-244.*
REBUFFET, P. (1966) - Aérodynamique Expérimentale, *Dunod*, Paris.
SETTLES, G. S. (1986) - Modern developments in flow visualization. *AIAA Journal,* **24**, *1313-1323.*
VAN DYKE, M. (1982) - An Album of Fluid Motion, *Parabolic Press*, Palo Alto.

A

A réaction (v. Moteur) **186-189.**
Accélération d'une particule matérielle **49-52, 54.**
Adiabatique **203-205, 208.**
Air sec (v. Propriétés physiques de l') **38.**
Allées tourbillonnaires de Von Karman **13.**
Amorçage **279.**
Analyse dimensionnelle **299-320.**
Approximation unidimensionnelle **127-128.**
Arrêt (v. Conditions d') **208.**
Arrêt (v. Enthalpie d') **206, 209.**
Arrêt (v. Point d') **145.**
Arrêt (v. Pression d') **146-147, 216, 227, 239-240, 278.**
Arrêt (v. Surpression d') **146.**
Autosemblable (v. Solution) **292, 294, 346, 348, 401.**

B

Bernoulli (v. Constante de) **140.**
Bernoulli (v. Théorèmes de) **137-142.**
Bilan d'énergie **119.**
Bilan d'énergie cinétique **118-119.**
Bilan d'énergie cinétique turbulente **415-418.**
Bilan d'énergie mécanique pour un fluide incompressible **137, 167-171.**
Bilan d'entropie **123.**
Bilan macroscopique d'énergie **133-135.**
Bilans macroscopiques de masse et d'énergie **127-135.**
Bilans macroscopiques de quantité de mouvement **173-202.**
Blasius (v. Equation de) **347, 355.**
Blasius (v. Formule de) **162.**

C

Calorifique (v. Equation d'état) **21.**
Canalisation (v. Elargissement et rétrécissement brusque d'une) **164-165.**
Canalisations (v. Systèmes de) **151-152.**
Caractéristiques (v. Echelles) **387-390.**
Caractéristiques (v. Rapports) **226.**
Caractéristiques (v. Temps) **386-390.**
Caractéristiques aérodynamiques **310.**
Cascade de Kolmogorov **387-390.**
Cavitation **151.**
Célérité sonore **145, 211, 215, 228.**
Chaleur (v. Flux de) **35, 119, 121-123.**
Chaleur massique **26, 39.**
Chaleurs spécifiques **26, 39.**
Charge (v. Ligne de) **156-157.**
Charge (v. Perte de) **154, 158-166, 315.**
Choc (v. Ondes de) **229-265.**
Choc (v. Table de) **241, 429-432.**
Choc (v. Tubes à) **276-277.**
Choc droit (v. Recompression au travers d'un) **273.**
Cinématique **43-54.**
Cinématique (v. Viscosité) **37, 296.**
Cinétique (v. Energie) **19-20, 118-119, 125-126.**
Cinétique (v. Théorie cinétique) **2, 253.**
Circulation **293.**
Cisaillement **64-65, 321.**
Cisaillement (v. Contrainte de) **32.**
Cisaillement (v. Couches de) **321, 323, 399.**
Cisaillement (v. Taux de) **324.**
Cisaillés (v. Ecoulements) **321, 323-324.**
Coefficient d'influence **223, 227.**
Coefficient de compressibilité **39.**
Coefficient de débit **144.**
Coefficient de diffusivité thermique **37, 318, 386.**
Coefficient de dilatation **39.**
Coefficient de frottement **289-290, 307-308, 355, 361, 368, 370.**
Coefficient de moment **320.**
Coefficient de perte de charge **158, 164, 166.**
Coefficient de portance **309, 320.**
Coefficient de traînée **305-306, 308-310, 320.**
Coefficients d'influence **223, 227.**
Colebrook (v. Formule de) **162.**
Comportement (v. Lois de) **40-41.**
Composants principaux de l'air **31.**
Compressibilité **39, 40.**
Compressibilité isotherme (v. Coefficient de) **39.**
Compressible **6.**
Compressibles (v. Ecoulements) **1, 6.**
Compressibles (v. Fluides) **7.**
Compression **210.**
Concept de couche limite **325-326.**
Conditions critiques **213-214, 218.**
Conditions d'arrêt **208.**
Conditions d'arrêt isentropique **208.**
Conditions de similitude **313-314, 317.**
Conductivité **37.**
Conductivité thermique **35, 37, 39.**
Conduit (v. Force totale exercée sur un) **178-179.**
Configuration courante **45.**
Configuration de référence **45.**
Conservation (v. Equations de)
Conservation de l'énergie **119, 121.**

Conservation de l'énergie cinétique **118.**
Conservation de l'énergie interne **125-126.**
Conservation de l'énergie totale **125.**
Conservation de la masse **88-89.**
Conservation de la quantité de mouvement **92.**
Conservative (v. Forme) **98.**
Constante de Bernoulli **140.**
Constante de Karman **409.**
Constantes thermodynamiques de quelques gaz **24.**
Continu (v. Milieu) **1-2, 4.**
Continuité (v. Equation de) **89.**
Contractée (v. Section) **144.**
Contrainte **2, 4-5, 107.**
Contrainte (v. Vecteur) **93, 103-104.**
Contrainte dans un fluide **4, 103-115.**
Contrainte de cisaillement **32.**
Contrainte moyenne **4.**
Contraintes **4, 103-115.**
Contraintes (v. Tenseur des) **93-94, 109-110.**
Contraintes pariétales **355, 358.**
Contraintes turbulentes ou de Reynolds **395-396.**
Contraintes visqueuses **111-115.**
Contrôle (v. Volume de) **77-79.**
Convection naturelle (v. Ecoulements de) **39.**
Convention de signe pour génératrice et récepteur **155.**
Coordonnées matérielles **44-45.**
Coordonnées spatiales **44-45.**
Couche limite **6-7, 96, 204, 321-381.**
Couche limite (v. Concept de) **325-326.**
Couche limite (v. Epaisseur de la) **327, 329, 353.**
Couche limite (v. Equations de la) **342, 357.**
Couche limite (v. Résolutions numériques des équations de la) **349, 352.**
Couche limite avec gradient de pression **371-381.**
Couche limite pariétale **14.**
Couches de cisaillement **321, 323, 399.**
Couches limites (v. Décollement des) **1.**
Couette (v. Ecoulement de) **70-71, 286-287.**
Coup de bélier **7.**
Courant (v. Fonction de) **346.**
Critiques (v. Conditions) **213-214, 218.**
Cryogéniques (v. Souffleries) **277.**

D

Dalton (v. Loi de) **28.**
De Laval (v. Tuyère de) **214-215.**
Débit (v. Coefficient de) **144.**
Débit d'énergie cinétique **130.**
Débit de quantité de mouvement **129.**
Débit masse **130, 216, 268.**
Décharge (v. Vitesse de) **219.**
Décollement **15, 322, 334-338.**
Décollement des couches limites **1.**
Décomposition de Reynolds **393-394.**
Décrochage **337-338.**
Déformation (v. Taux de) **55, 62, 68-69, 72, 74.**
Déformation angulaire **64, 67.**
Densité **2, 39.**
Déplacement **45.**
Déplacement (v. Epaisseur de) **326, 330, 340, 354.**
Dérivée matérielle ou particulaire **48.**
Désamorçage du diffuseur **280.**
Détachées (v. Ondes de choc) **230.**
Détente **209.**
Détente externe **272.**
Deuxième principe de la thermodynamique **20.**
Diagramme de Mollier **208-209.**
Diagramme de Moody **160-161.**
Diaphragme calibré **149.**
Diffuseur **150-151, 164-165, 200-201, 213, 273, 276, 280.**
Diffuseur (v. Désamorçage du) **280.**
Diffuseur (v. Rendement d'un) **201.**
Diffusivité thermique **37, 39.**
Diffusivité thermique (v. Coefficient de) **37, 318, 386.**
Dilatation **62-63, 67, 73.**
Dilatation (v. Coefficient de) **39.**
Dilatation thermique **39.**
Dimensionnelle (v. Analyse) **299-320.**
Dimensions (v. Nombres sans) **318-320.**
Disque de Mach **272.**
Dissipation (v. Equation de transport de la) **412.**
Dissipation des fluctuations turbulentes par les forces visqueuses **410.**
Dissipation par les forces visqueuses **122, 124, 312.**
Dissipation visqueuse (v. Fonction de) **122, 124, 312.**
Distance (v. Variation relative de la) **68.**
Dynamique (v. Pression) **146.**

E

Eau (v. Propriétés physiques de l') **39.**
Echelle (v. Effet d') **312.**
Echelle de Kolmogorov **387.**
Echelle de Taylor **389.**

Echelles caractéristiques **387-390.**
Echelles caractéristiques de la couche limite **329-334, 340.**
Echelles caractéristiques de la turbulence **387-390.**
Echelles de temps **300.**
Ecoulement **1-2, 6, 11.**
Ecoulement (v. Phénomènes d') **6.**
Ecoulement (v. Stabilité de l') **1.**
Ecoulement (v. Strioscopie d') **7.**
Ecoulement (v. Structure de l') **1.**
Ecoulement autour d'un profil **233.**
Ecoulement de Couette **70-71, 286-287.**
Ecoulement de Poiseuille **285, 287, 290.**
Ecoulement isentropique (v. Tables d') **220, 422-427.**
Ecoulement isentropique de gaz parfaits **215-230.**
Ecoulement laminaire **9-10, 12.**
Ecoulement turbulent stationnaire **16.**
Ecoulements (v. Types d') **6.**
Ecoulements cisaillés **321, 323-324.**
Ecoulements compressibles **1, 6.**
Ecoulements dans les tuyères **267-280.**
Ecoulements de convection naturelle **39.**
Ecoulements incompressibles **1, 6.**
Ecoulements instationnaires **1, 13, 16.**
Ecoulements irrotationnels **59, 140.**
Ecoulements isentropiques **203-228.**
Ecoulements laminaires **1, 9.**
Ecoulements laminaires pleinement développés **128.**
Ecoulements parallèles **281-282, 285.**
Ecoulements rampants **281.**
Ecoulements rotationnels **59.**
Ecoulements stationnaires **1, 16.**
Ecoulements subsoniques **212.**
Ecoulements turbulents **1, 9, 383-421.**
Ecoulements turbulents cisaillés **397-405.**
Ecoulements turbulents développés **128.**
Ecoulements typiques **1.**
Ecoulements unidimensionnels **17, 128.**
Ecoulements unidimensionnels en entrée et sortie **17, 132.**
Effet d'échelle **312.**
Effets des changements de section **211-213, 221-223.**
Ejecteur **200, 323.**
Elargissement brusque **164, 198.**
Emission (v. Ligne d') **53.**
Energie (v. Bilan d') **119.**
Energie (v. Conservation de l') **119, 121.**
Energie cinétique **19-20, 118-119, 125-126.**
Energie cinétique (v. Débit d') **130.**
Energie cinétique turbulente **409-410, 412, 415-418.**
Energie interne (v. Conservation de l') **125-126.**
Energie interne d'un gaz parfait **25.**
Energie interne d'un mélange de gaz parfaits **29.**
Energie libre **21.**
Energie mécanique (v. Bilan d') **137, 167-171.**
Energie potentielle **19-20.**
Energie totale (v. Conservation de l') **125.**
Enthalpie **20, 25.**
Enthalpie d'arrêt **206, 209.**
Enthalpie d'un gaz parfait **25.**
Enthalpie d'un mélange de gaz parfaits **29.**
Enthalpie libre **21.**
Entrée d'air **205, 231.**
Entropie **20, 123, 245, 251.**
Entropie (v. Bilan d') **123.**
Entropie (v. Variation d') **30, 245-246, 251.**
Entropie d'un gaz parfait **26.**
Entropie d'un mélange de gaz parfaits **30.**
Eolienne **192.**
Eolienne (v. Rendement d'une) **197.**
Epaisseur d'une onde de choc **252.**
Epaisseur de déplacement **326, 330, 340, 354.**
Epaisseur de la couche limite **327, 329, 353.**
Epaisseur de quantité de mouvement **331, 340, 354.**
Equation (v. Forme conservative d'une) **98.**
Equation d'état calorique **21.**
Equation d'état thermique **21.**
Equation d'Euler **96.**
Equation de bilan pour l'entropie **123, 125-126.**
Equation de Blasius **347, 355.**
Equation de continuité **89.**
Equation de Falkner-Skan **349, 374, 377, 380.**
Equation de Laplace **59.**
Equation de transport de la dissipation **412.**
Equation intégrale de Von Karman **361-362, 368-370.**
Equation semi empirique de Schoenherr **307.**
Equations d'état canoniques **21.**
Equations de conservation **87-126.**
Equations de la couche limite **342, 349, 352, 357.**
Equations de Navier-Stokes **117-118, 281-297.**
Equations de Reynolds **383, 394, 418.**

Equations intégrales pour les couches limites **359**.
Estimation a priori **300**.
Etat (v. Fonction d') **19**.
Euler (v. Equation d') **96**.
Euler (v. Nombre de) **302, 319**.
Euler (v. Variables d') **45**.
Eulérienne (v. Formulation) **45**.
Eulérienne (v. Représentation) **43**.
Extensives (v. Variables d'état) **18**.

F

Facteur de forme **333, 340, 355, 381**.
Facteur de frottement **158-162**.
Faibles (v. Ondes de choc) **263-265**.
Falkner-Skan (v. Equation de) **349, 374, 380**.
Falkner-Skan (v. Solutions de l'équation de) **378-381**.
Fermé (v. Système) **19**.
Fermeture (v. Problème de) **383, 396**.
Filament tourbillonnaire **293**.
Films de mécanique des fluides **6**.
Fluide (v. Contrainte dans un) **4, 103-115**.
Fluide (v. Milieu) **1**.
Fluide (v. Mouvement d'un) **1-2**.
Fluide barotrope **141-142**.
Fluide en écoulement (Force exercée par un) **175, 177**.
Fluide idéal **96**.
Fluide incompressible **6**.
Fluide incompressible (v. Bilan d'énergie mécanique pour un) **137, 167-171**.
Fluide newtonien **32, 34, 112, 117**.
Fluides (v. Propriétés physiques des) **32**.
Fluides compressibles **8**.
Fluides en mouvement (v. Visualisations de) **6**.
Flux de chaleur **35, 119, 121-123**.
Fonction d'état **19**.
Fonction de courant **346**.
Fonction de dissipation visqueuse **122, 124, 312**.
Fonction de Gibbs **21**.
Force de volume **93, 95**.
Force exercée par un fluide en écoulement **175, 177**.
Force totale exercée sur un conduit **178-179**.
Forme conservative d'une équation **98**.
Formulation eulérienne **45**.
Formulation lagrangienne **45, 46**.
Formule de Blasius **162**.
Formule de Colebrook **162**.
Formule de Jouguet **211**.
Formule de Von Karman **162**.
Fourier (v. Loi de) **36**.
Fraction massique **28**.
Frottement (v. Coefficient de) **289-290, 307-308, 355, 361, 368, 370**.
Frottement (v. Facteur de) **158-162**.
Froude (v. Nombre de) **302, 318**.

G

Gaz (v. Dynamique des) **2**.
Gaz caloriquement parfait **25**.
Gaz parfait (v. Enthalpie d'un) **25**.
Gaz parfait (v. Entropie d'un) **26**.
Gaz parfaits **23, 25-26, 215, 236**.
Gaz parfaits (v. Chaleurs spécifiques des) **26**.
Gaz parfaits (v. Ecoulements isentropiques de) **215-228**.
Gaz parfaits (v. Energie interne de) **25**.
Gaz parfaits (v. Mélanges de) **27-28**.
Gaz parfaits (v. Propriétés thermodynamiques des) **23**.
Gibbs (v. Fonction de) **21**.
Gibbs (v. Relation de) **123, 158, 211**.
Goertler (v. Modèle de) **403**.
Goertler (v. Solution de) **405**.
Gradient de pression adverse **333**.
Gradient de pression défavorable **372**.
Gradient de pression favorable **372**.

H

Hélice (v. Rendement de propulsion pour une) **196**.
Hélice propulsive **193**.
Hugoniot (v. Relation d') **242-244, 246-247**.

I

Idéal (v. Fluide) **96**.
Impulsion **176-177, 218-219**.
Impulsion modifiée **178-179**.
Incompressible **6**.
Incompressible (v. Fluide) **6**.
Incompressibles (v. Ecoulements) **1, 6**.
Influence (Coefficient de) **223, 227**.
Instabilité **6, 13**.
Instationnaires (v. Ecoulements) **1, 13, 16**.
Instationnarité **13**.
Intensives (v. Variables d'état) **18**.
Interaction choc/couche limite **231-232**.
Interprétation de visualisations d'écoulements **43**.
Irrotationnels (v. Ecoulements) **59, 140**.
Isentropiques (v. Ecoulements) **203-228**.
Isentropiques (v. Processus) **208**.

J

Jet (v. Recompression d'un) **255.**
Jet libre **323, 413-414.**
Jouguet **20, 211.**
Jouguet (v. Formule de) **211.**

K

Karman (v. Constante de) **409.**
Karman (v. Tourbillons de) **13.**
Karman Polhausen (v. Méthode de) **363-367.**
Karman von (v. Allées tourbillonnaires de) **13.**
Kolmogorov (v. Cascade de) **387-390.**
Kolmogorov (v. Echelle de) **387.**
Kolmogorov (v. Tourbillons de) **389.**

L

Lachage de tourbillons **335.**
Lagrange (v. Variables de) **45.**
Lagrangienne (v. Formulation) **45, 46.**
Lagrangienne (v. Représentation) **43,.**
Laminaire **6.**
Laminaire (v. Ecoulement) **9-10, 12.**
Laminaires (v. Ecoulements) **1, 9, 128.**
Laplace (v. Equation de) **59.**
Libre (v. Energie) **21.**
Libre (v. Enthalpie) **21.**
Libre parcours moyen **3, 5, 253.**
Ligne d'émission **53.**
Ligne de charge **156-157.**
Ligne de courant **52.**
Ligne de Rayleigh **244.**
Ligne piézométrique **156-157.**
Limite (v. Couche) **6-17, 96, 204.**
Loi de Dalton **28.**
Loi de Fourier **36, 41.**
Loi de Newton **41.**
Lois de comportement **40, 41.**
Lois du mouvement **2.**
Longueur de mélange **408-409.**
Lubrification **282.**

M

Mach (v. Disque de) **272.**
Mach (v. Nombre de,) **8, 212, 214, 216-217, 220, 238-239, 241, 245, 248, 255, 261-262, 270, 302, 310, 317.**
Mach (v. Ondes de) **259.**
Machine génératrice **154-155.**
Machine réceptrice **154-155.**
Macroscopiques (v. Bilans) **127-135, 173-202.**
Maquette **299, 313-315.**
Masse (v. Bilans macroscopiques de) **127-135.**
Masse (v. Conservation de la) **88-89.**
Masse (v. Débit) **130, 216, 268.**
Masse spécifique **2-3.**
Masse volumique **1-3.**
Massique (v. Chaleur) **39.**
Massique (v. Chaleur) **26, 39.**
Massique (v. Fraction) **28.**
Matérielle (v. Dérivée) **43, 48.**
Matérielle (v. Particule) **49-52, 54.**
Matérielles (v. Coordonnées) **44-45.**
Matériels (v. Systèmes) **44.**
Mécanique (v. Bilan d') **137, 167-171.**
Mélange (v. Longueur de) **408-409.**
Mélange (v. Zone de) **323, 398, 405.**
Mélange de gaz parfaits (v. Entropie d'un) **30.**
Mélanges de gaz parfaits **27-29.**
Méthode de Karman Polhausen **363-367.**
Méthode de tir **349, 352.**
Méthodes d'approximation **40.**
Méthodes de l'analyse mathématique **40.**
Méthodes de résolution des problèmes de mécanique des fluides **1, 40.**
Méthodes numériques **40, 281-282.**
Micro-échelle **387.**
Milieu continu **1-2.**
Modèle de Goertler **403.**
Modèle de Prandlt **408.**
Modèle de Prandlt-Kolmogorov **409-410.**
Modèle k - ε **411-414.**
Modèles de turbulence **405-414.**
Mollier (v. Diagramme de) **208-209.**
Moment (v. Coefficient de) **320.**
Moment angulaire (v. Théorème du) **183.**
Moment angulaire des forces hydrodynamiques **184, 186.**
Moment angulaire total **186.**
Moody (v. Diagramme de) **160-161.**
Moteur à réaction **186-189.**
Moteur à réaction (v. Poussée d'un) **186, 189.**
Moteur à réaction (v. Traînée d'un) **189.**
Moteur fusée **190-192, 223.**
Moteur fusée (v. Poussée d'un) **190-192, 223.**
Mouvement (v. Lois du) **2.**
Mouvement d'un fluide **1-2.**
Mouvement général d'une particule **67, 73.**
Moyenne (v. Contrainte) **4.**
Moyenne (v. Masse spécifique) **2.**

N

Navier-Stokes (v. Equations de) **117-118, 281-297.**
Newton (v. Loi de) **41.**
Newtonien (v. Fluide) **32, 34, 112, 117.**
Nombre d'Euler **302, 319.**
Nombre de Froude **302, 318.**
Nombre de Mach **8, 212, 214, 216-217, 220, 238-239, 241, 245, 248, 255, 261-262, 270, 302, 310, 317.**
Nombre de Peclet **319, 387.**
Nombre de Prandtl **37, 39.**
Nombre de Reynolds **11, 159-162.**
Nombre de Strouhal **14, 303, 318.**
Nombres sans dimensions **318-320.**
Non compensé (v. Travail) **20.**
Noyau visqueux (v. Tourbillons à) **290, 293.**

O

Ombroscopie **7.**
Onde de choc conique **232.**
Ondes de choc détachées **230.**
Ondes de choc droites **229-253.**
Ondes de choc droites (v. Relation d'Hugoniot pour) **242-244, 246-247.**
Ondes de choc droites en translation **248-249.**
Ondes de choc faible **263-265.**
Ondes de choc hydrauliques (v. Propagation d') **7.**
Ondes de choc obliques **204, 255-265.**
Ondes de choc obliques dans les gaz parfaits **258-265.**
Ondes de détente **230**
Ondes de Mach **259.**
Opérateur de moyenne **391.**
Orifice en paroi épaisse **143.**
Orifice en paroi mince **143.**
Ouvert (v. Système) **19.**

P

Parfaits (v. Gaz) **25.**
Pariétale (v. Couche limite) **14.**
Pariétales (v. Contraintes) **355, 358.**
Particulaire (v. Dérivée) **48.**
Particule (v. Mouvement général d'une) **67, 73.**
Particule matérielle (v. Accélération d'une) **49-52, 54.**
Particules discrètes **2.**
Particules discrètes (v. Dynamique des) **1.**
Partiel (v. Volume) **29.**
Peclet (v. Nombre de) **319, 387.**
Perte de charge **154, 158-166, 315.**
Perte de charge (v. Coefficient de) **158, 164, 166.**
Pertes de charges singulières **154, 156, 164.**
Phénomènes d'écoulement **6.**
Pi (v. Théorème) **303-304.**
Piézométrique (v. Ligne) **156-157.**
Pitot (v. Tube de) **146, 239-240.**
Plaque plane **342, 352-353, 355, 357-358.**
Point d'arrêt ou de stagnation **145.**
Poiseuille (v. Ecoulement de) **285, 287, 290.**
Portance **308.**
Portance (v. Coefficient de) **309, 320.**
Potentielle (v. Energie) **19-20.**
Poussée d'un moteur à réaction **186, 189.**
Poussée d'un moteur fusée **191-192, 223.**
Poussée sur un coude **180.**
Prandlt (v. Modèle de) **408.**
Prandlt (v. Nombre de) **37, 39.**
Prandlt (v. Sonde de) **147.**
Prandlt-Kolmogorov (v. Modèle de) **409-410.**
Prandtl-Meyer (v. Relation de) **244-245.**
Premier principe de la thermodynamique **22-23, 157.**
Pression **1, 18, 111-112.**
Pression d'arrêt **146-147, 216, 227, 239-240, 278.**
Pression dynamique **146.**
Pression statique **146.**
Principe de la thermodynamique (v. Deuxième) **20.**
Principe de la thermodynamique (v. Premier) **22-23, 156-157.**
Principes fondamentaux **40.**
Problème de fermeture **383, 396.**
Problème de Stokes **293.**
Problèmes de mécanique des fluides (v. Méthodes de résolution des) **1, 40.**
Problèmes elliptiques **324.**
Problèmes paraboliques **324.**
Processus adiabatiques réels **208.**
Processus isentropiques **208.**
Propagation d'ondes de choc hydrauliques **7.**
Propriétés de transport **2.**
Propriétés physiques de l'air sec **38.**
Propriétés physiques de l'eau **39.**
Propriétés physiques des fluides **32.**
Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits **23.**
Propulsion (v. Rendement de) **195.**
Prototype **299, 315-317.**

Q

Quantité de mouvement (v. Bilans macroscopiques de) **173-202.**
Quantité de mouvement (v. Conservation de la) **92.**
Quantité de mouvement (v. Débit de) **129.**
Quantité de mouvement (v. Epaisseur de) **331, 340, 354.**

R

Rapports caractéristiques **226.**
Rayleigh (v. Ligne de) **244.**
Recompression au travers d'un choc droit **273.**
Recompression d'un jet **255.**
Recompression externe **272.**
Relation d'Hugoniot pour ondes de choc droites **242-244, 246-247.**
Relation de Gibbs **123, 158, 211.**
Relation de Prandtl-Meyer **244-245.**
Rendement d'un diffuseur **201.**
Réaction (v. Moteur à) **186-189.**
Récepteur (v. Convention de signe pour génératrice et) **155.**
Référence (v. Configuration de) **45.**
Régime critique **160.**
Régime d'écoulement dans les tuyères **270.**
Régime laminaire **159.**
Régime turbulent **160, 161.**
Rendement d'une éolienne **197.**
Rendement de propulsion **195.**
Rendement de propulsion pour une hélice **196.**
Représentation eulérienne **43.**
Représentation lagrangienne **43.**
Résolution (v. Méthodes de) **1.**
Résolutions numériques des équations de la couche limite **349, 352.**
Rétrécissement brusque **165.**
Reynolds (v. Contraintes de) **395-396.**
Reynolds (v. Décomposition de) **393-394.**
Reynolds (v. Equations de) **383, 394, 418.**
Reynolds (v. Nombre de) **11, 159-162.**
Reynolds (v. Théorème de) **92, 95.**
Rotamètre **149-150.**
Rotation (v. Taux de) **58-59, 70, 72.**
Rotationnel des vitesses **75.**
Rotationnels (v. Ecoulements) **59.**
Rugosité relative **159-161.**

S

Sans dimensions (v. Nombres) **318-320.**
Schoenherr (v. Equation semi empirique de) **307.**
Section contractée **144.**
Selfsimilaire (v. Solution) **292.**
Sillage **13, 204, 324.**
Similitude **299, 312-317.**
Similitude (v. Conditions de) **313-314, 317.**
Similitude (v. Variable de) **295, 347, 401.**
Similitude pour les écoulements de fluides compressibles **317.**
Similitude pour les écoulements de fluides incompressibles **314.**
Solution autosemblable **292, 294, 346, 348, 401.**
Solution de Goertler **405.**
Solution des équations de la couche limite **346.**
Solution selfsimilaire **292.**
Solutions de l'équation de Falkner-Skan **378-381.**
Sonde de Prandlt **147.**
Sonore (v. Célérité) **145, 211, 215, 228.**
Soufflerie supersonique **205, 220, 274-276.**
Souffleries à arc **276-277.**
Souffleries à rafale **275-276.**
Souffleries cryogéniques **277.**
Spatiales (v. Coordonnées) **44-45.**
Spécifique (v. Masse) **2-3.**
Spécifiques (v. Chaleurs) **26, 39.**
Stabilité de l'écoulement **1.**
Stagnation (v. Point d'arrêt ou de) **145.**
Stationnaire (v. Ecoulement turbulent) **16.**
Stationnaires (v. Ecoulements) **1, 16.**
Statique (v. Pression) **146.**
Stokes (Problème de) **293.**
Strioscopie d'écoulement **7.**
Strouhal (v. Nombre de) **14, 303, 318.**
Structure de l'écoulement **1.**
Structures organisées **385.**
Subsoniques (v. Ecoulements) **212.**
Supersonique **205, 220, 274-276.**
Surface de contrôle **78-79.**
Surpression d'arrêt **145.**
Système fermé **19.**
Système ouvert **19.**
Système unidimensionnel **17, 133.**
Système unidimensionnel en entrée et sortie **133.**
Systèmes de canalisations **151-152.**
Systèmes matériels **44.**
Systèmes thermodynamiques **18.**

T

Tables d'écoulement isentropique **220, 422-427.**

Tables de choc **241, 429-432.**
Taux de cisaillement **324.**
Taux de déformation **55, 62, 68-69, 72, 74.**
Taux de déformations (v. Tenseur des) **55, 72, 74.**
Taux de rotation **58-59, 70, 72.**
Taux de rotation (v. Tenseur des) **70, 72.**
Taux de variation relatif d'un volume **85.**
Taylor (v. Echelle de) **389.**
Temps caractéristiques **386-390.**
Tenseur des contraintes **93-94, 109-110.**
Tenseur des taux de déformations **55, 72, 74.**
Tenseur des taux de rotation **70, 72.**
Théorème de Bernoulli instationnaire **140.**
Théorème de Reynolds **92, 95.**
Théorème de transport en une dimension **79.**
Théorème de transport pour un volume **81.**
Théorème du moment angulaire **183.**
Théorème pi **303-304.**
Théorèmes de Bernoulli **137-142.**
Théorèmes de transport **77-86.**
Théorie cinétique **2, 253.**
Thermique (v. Conductivité) **35, 37.**
Thermique (v. Diffusivité) **37.**
Thermique (v. Dilatation) **39.**
Thermique (v. Equation d'état) **21.**
Thermodynamique (v. Deuxième principe de la) **22-23.**
Thermodynamique (v. Premier principe de la) **22-23, 156-157.**
Thermodynamiques (v. Constantes) **24.**
Thermodynamqies (v. Systèmes) **18.**
Tourbillon (v. Vecteur) **59-61.**
Tourbillon à noyau visqueux **290, 293.**
Tourbillonnaire (v. Filament) **293.**
Tourbillonnaires (v. Allées) **13.**
Tourbillons **13.**
Tourbillons (v. Lachage de) **335.**
Tourbillons de Karman **13.**
Tourbillons de Kolmogorov **389.**
Traînée (v. Coefficient de) **305-306, 308, 310, 320.**
Traînée d'un moteur à réaction **189.**
Traînée d'une plaque plane **306.**
Traînée d'une sphère **305.**
Traitement statistique de la turbulence **384, 390.**
Trajectoire **53.**
Transition vers la turbulence **338-339.**
Transport (v. Propriétés de) **2.**
Transport (v. Théorèmes de) **77-86.**
Travail non compensé **20.**
Tube de courant **204.**
Tube de Pitot **146, 239-240.**
Tubes à choc **276-277.**
Turboréacteurs **188.**
Turbulence **1, 383-421.**
Turbulence (v. Echelles caractéristiques de la) **387-390.**
Turbulence (v. Modèle de) **405-414.**
Turbulence (v. Traitement statistique de la) **384, 390.**
Turbulence (v. Transition vers la) **338-339.**
Turbulent (v. Ecoulement) **6, 9.**
Turbulente (v. Viscosité) **406-409, 412.**
Turbulente (v. Contrainte) **395-396.**
Turbulents (v. Ecoulements) **1, 9, 128, 383-421.**
Tuyère adaptée **272.**
Tuyère convergente divergente **231.**
Tuyère De Laval **214-215.**
Tuyères (v. Ecoulements dans les) **267-280.**
Tuyères (v. Régime d'écoulement dans les) **270.**
Types d'écoulements **6.**
Typiques (v. Ecoulements) **1.**

U-Z

Unidimensionnel (v. Système) **17, 133.**
Unidimensionnels (v. Ecoulements) **17, 128, 132.**

Variable de similitude **295, 347, 401.**
Variables d'état extensives **18.**
Variables d'état intensives **18.**
Variables d'Euler **45.**
Variables de Lagrange **45.**
Variables réduites **310.**
Variation (v. Taux de) **85.**
Variation d'entropie **30.**
Variation d'entropie pour une onde de choc droite **245-246, 251.**
Variation relative de la distance entre deux points par unité de temps **68.**
Vecteur contrainte **93, 103-104.**
Vecteur tourbillon **59-61.**
Venturi **147-149.**
Viscosité **32, 37, 39.**
Viscosité cinématique **37, 39, 296.**
Viscosité dynamique **112.**
Viscosité en volume **112.**
Viscosité turbulente **406-409, 412.**
Visqueuses (v. Contraintes) **111-115.**
Visqueuses (v. Dissipation par les forces)
Visualisations d'écoulements (v. Interprétation de) **43.**
Visualisations de fluides en mouvement **6.**
Vitesse **1-3, 45-46.**
Vitesse d'entraînement **361.**

Vitesse de décharge **219**.
Volume (v. Taux de variation relatif d'un) **85**.
Volume de contrôle **77-79**.
Volume de contrôle arbitraire **78-79**.
Volume partiel **29**.
Volumique (v. Masse) **1-3**.
Von Karman (v. Allées tourbillonnaires de) **13**.
Von Karman (v. Equation intégrale de) **361-362, 368-370**.
Von Karman (v. Formule de) **162**.

Zone de mélange **323, 398, 405**.