

Automatique

Romain Bourdais
Antoine Chaillet
Jean-Luc Collette
Gilles Duc
Didier Dumur
Emmanuel Godoy
Maria Makarova
Cristina Maniu
Houria Siguerdidjane
Sihem Tebbani
Cristina Vlad

Table des matières

Avant propos	9
1 Introduction	11
1.1 Généralités sur l'Automatique	11
1.2 Buts de l'Automatique	13
1.3 Bref historique	13
2 Structure d'un système asservi	17
2.1 Retour sur la notion de système	18
2.1.1 Classe des systèmes considérés	18
2.1.2 Modélisation mathématique des systèmes continus et discrets	21
2.2 Structure d'un système asservi	22
2.2.1 Structure des systèmes asservis continus	23
2.2.2 Cas des systèmes continus pilotés par calculateur	24
2.3 Principaux critères de performance	25
2.4 Hiérarchisation des systèmes automatiques industriels	26
3 Analyse des systèmes asservis à temps continu	29
3.1 Structure générale et boucle fermée	29
3.1.1 Boucle ouverte - Boucle fermée	29
3.1.1.1 Définitions	29
3.1.1.2 Prise en compte de perturbations	30
3.1.1.3 Pulsation de coupure en boucle ouverte	31
3.1.2 Tracé approximatif de la réponse fréquentielle en boucle fermée . .	32
3.2 Stabilité	32
3.2.1 Critère de Nyquist	33
3.2.1.1 Théorème de Cauchy	33
3.2.1.2 Application à l'étude de la stabilité en boucle fermée . . .	34
3.2.1.3 Cas de pôles de la boucle ouverte sur l'axe imaginaire . . .	36
3.2.1.4 Énoncé du critère de Nyquist	37
3.2.1.5 Exemples	37
3.2.1.6 Critère de Nyquist simplifié : critère du revers	40
3.2.2 Marges de stabilité	40
3.2.2.1 Marge de phase – Marge de gain	41
3.2.2.2 Marge de retard	43
3.2.2.3 Marge de module	44
3.2.2.4 Stabilité conditionnelle	45

3.2.2.5	Relation entre marges de stabilité, amortissement et dépassement de la réponse indicielle	45
3.2.2.6	Relation entre rapidité et pulsation de coupure	47
3.2.2.7	Relation entre marge de stabilité et résonance harmonique	49
3.3	Précision	49
3.3.1	Précision en régime permanent	50
3.3.1.1	Précision vis-à-vis de la consigne	51
3.3.1.2	Précision vis-à-vis de la perturbation	53
3.3.1.3	Remarque sur les systèmes de classe 2	53
3.3.1.4	Récapitulatif	54
3.3.2	Précision transitoire – Méthode de la “sinusoïde équivalente”	55
3.3.3	Conclusion	56
4	Analyse des systèmes asservis à temps discret	57
4.1	Modélisation des systèmes pilotés par ordinateur	57
4.1.1	Impact de l’ensemble échantillonneur-bloqueur	57
4.1.2	Modèle discret équivalent	58
4.1.3	Application à une structure bouclée	60
4.1.4	Cas particulier d’un retour unitaire	61
4.2	Stabilité	62
4.2.1	Stabilité des systèmes bouclés	63
4.2.1.1	Critère de Nyquist	63
4.2.1.2	Exemple	64
4.2.1.3	Cas des systèmes ayant des pôles sur le cercle unité	65
4.2.2	Utilisation des diagrammes de Bode	68
4.3	Précision	68
4.3.1	Précision vis-à-vis de la consigne	69
4.3.1.1	Cas d’une consigne en échelon	70
4.3.1.2	Cas d’une consigne en rampe	70
4.3.2	Précision vis-à-vis de perturbations	72
4.3.2.1	Cas d’une perturbation en échelon	73
4.3.2.2	Exemple	73
5	Synthèse des systèmes asservis à temps continu	77
5.1	Correction série	80
5.1.1	Définition	80
5.1.2	Correction proportionnelle	81
5.1.2.1	Fonction de transfert	81
5.1.2.2	Aspect temporel	81
5.1.2.3	Méthode de réglage dans le plan de Bode	82
5.1.3	Correction par avance de phase	85
5.1.3.1	Fonction de transfert	85
5.1.3.2	Méthode de réglage dans le plan de Bode	87
5.1.3.3	Conclusion	89
5.1.4	Correction PI (Proportionnelle Intégrale)	89
5.1.4.1	Fonction de transfert	89
5.1.4.2	Aspect temporel	90
5.1.4.3	Réponse fréquentielle	91

5.1.4.4	Méthode de réglage dans le plan de Bode	92
5.1.5	Correction PID (Proportionnelle Intégrale Dérivée)	93
5.1.5.1	Fonction de transfert	93
5.1.5.2	Aspect temporel	93
5.1.5.3	Réponse fréquentielle	95
5.1.5.4	Réalisation de la dérivée et structure du correcteur	96
5.1.5.5	Méthodes de réglage dans le plan de Bode	97
5.1.5.6	Méthode de Ziegler-Nichols	100
5.1.5.7	Méthode de réglage empirique	102
5.2	Correction par anticipation	103
5.2.1	Compensation de la consigne	103
5.2.2	Compensation des perturbations	104
5.3	Correction cascade	105
5.3.1	Structure et intérêt	105
5.3.1.1	Augmentation de la rapidité	106
5.3.1.2	Réduction de l'impact des perturbations	108
5.3.1.3	Réguler une variable intermédiaire	109
5.3.2	Règles de synthèse	109
5.4	Conclusions	111
6	Transposition numérique de correcteurs à temps continu	113
6.1	Structure d'un système asservi par calculateur numérique	113
6.2	Choix de la période d'échantillonnage	114
6.2.1	Critères temporels	114
6.2.2	Critères fréquentsiels	115
6.3	Approximation numérique des fonctions à temps continu	115
6.3.1	Transformation d'Euler ou méthode des rectangles	115
6.3.2	Transformation bilinéaire ou méthode des trapèzes	117
6.4	Méthodes de transposition	118
6.4.1	Méthode des rectangles arrière ou transformation d'Euler	118
6.4.2	Méthode des trapèzes ou transformation bilinéaire	118
6.4.3	Méthode de transposition directe (matched transform)	118
6.4.4	Exemple	119
6.5	Mise en œuvre	120
6.5.1	Cas général	120
6.5.1.1	Algorithme de commande	120
6.5.1.2	Temps de calcul et quantification	121
6.5.2	Cas du correcteur PID	121
6.5.2.1	Approximations du dérivateur numérique	121
6.5.2.2	Réponses fréquentielles d'un correcteur PID analogique et numérique	123
6.5.3	Algorithme de commande	124
6.6	Exemple	126
7	Commande par retour d'état	133
7.1	Rappels sur la représentation d'état	133
7.1.1	Représentation interne : notion d'état	133
7.1.2	Equations d'état et de mesure	133

7.1.2.1	Systèmes continus	133
7.1.2.2	Systèmes discrets	135
7.1.3	Linéarisation autour d'un point d'équilibre	136
7.1.4	Passage état-transfert	137
7.1.5	Passage transfert-état (cas monovariable)	139
7.1.5.1	Forme compagnon pour la commande	139
7.1.5.2	Forme compagnon pour l'observation	140
7.1.5.3	Dualité des deux formes compagnons	141
7.1.6	Changement de base dans l'espace d'état	141
7.2	Commandabilité des systèmes	142
7.2.1	Définitions générales	142
7.2.2	Critère de commandabilité des systèmes linéaires et invariants à temps continu	143
7.2.3	Critère de commandabilité des systèmes linéaires et invariants à temps discret	144
7.2.4	Représentation des systèmes partiellement commandables	144
7.2.4.1	Structure canonique	145
7.2.4.2	Fonction de transfert associée	147
7.3	Observabilité des systèmes	147
7.3.1	Définitions générales	147
7.3.2	Critère d'observabilité des systèmes linéaires et invariants à temps continu	148
7.3.3	Critère d'observabilité des systèmes linéaires et invariants à temps discret	149
7.3.4	Représentation des systèmes partiellement observables	150
7.4	Commande par retour d'état des systèmes monovariabiles invariants	151
7.4.1	Commande par retour d'état des systèmes totalement commandables	152
7.4.1.1	Cas général	152
7.4.1.2	Cas d'un système sous forme compagnon pour la commande	154
7.4.1.3	Remarque sur les systèmes à temps discret	154
7.4.1.4	Exemples	155
7.4.2	Commande par retour d'état des systèmes partiellement commandables	161
8	Observateurs et commande par retour d'état estimé	163
8.1	Synthèse d'observateur	163
8.1.1	Observateur à mémoire finie	163
8.1.2	Observateur dynamique	165
8.2	Commande par retour d'état estimé	169
8.2.1	Principe de séparation	169
8.2.2	Correcteur équivalent	171
8.2.3	Exemples	173
	Bibliographie	179

A Réponses transitoires et harmoniques de systèmes types continus	181
A.1 Influence des pôles sur le régime transitoire	181
A.1.1 En temps continu	181
A.1.2 En temps discret	183
A.2 Rappel de concepts temporels et fréquentiels	185
A.2.1 Définitions générales relatives à la réponse indicielle	185
A.2.1.1 Temps d'établissement	185
A.2.1.2 Dépassement	185
A.2.2 Réponses harmoniques : les différents diagrammes	186
A.2.2.1 Diagramme de Nyquist	186
A.2.2.2 Diagramme de Bode	186
A.2.2.3 Diagramme de Black-Nichols	187
A.3 Systèmes du premier ordre	188
A.4 Systèmes du premier ordre généralisé	190
A.5 Systèmes du deuxième ordre	192
A.6 Systèmes du premier ordre + intégrateur	194
A.7 Cas des systèmes instables ou à déphasage non-minimal	196
A.8 Cas des systèmes à retards	197
A.9 Abaques : dépassement et temps du 1 ^{er} maximum pour les systèmes du 2 ^{ème} ordre	198

Avant propos

Cet ouvrage est le fruit du travail d'une équipe constituée de professeurs des trois campus de CentraleSupélec.

L'Automatique recouvre ici l'analyse, l'observation, la commande et la régulation des systèmes dynamiques à état continu. Ne sont pas abordés ici les automatismes associés aux systèmes séquentiels.

Ce polycopié présente les principaux concepts et outils de l'Automatique classique. Les méthodes fréquentielles abordées ne traitent que des systèmes linéaires monovariables. Notons cependant que des systèmes plus complexes peuvent souvent se décomposer en de tels systèmes à l'aide de techniques de hiérarchisation et de linéarisation, permettant ainsi l'utilisation des démarches présentées ici. Les méthodes de commande sont abordées aussi bien dans le domaine du temps continu (au moyen de la transformée de Laplace comme outil de représentation) que celui du temps discret (transformée en Z).

Ce polycopié présente également des méthodes de commande par retour d'état qui permettent d'exploiter des modèles d'état monovariables comme multivariables. Ces approches temporelles rendent possible la commande de systèmes complexes qui ne sont pas facilement décomposables en sous-systèmes monovariables.

Il aborde enfin des techniques de synthèse d'observateurs, permettant d'estimer des états qui ne seraient pas directement accessibles à la mesure par des capteurs, ainsi que des méthodes de commande fondées sur ces observateurs.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités sur l'Automatique

Le substantif “Automatique” a été utilisé pour la première fois en 1914 dans un article ‘Essai sur l'Automatique’ publié par Torres y Quevedo dans la revue de l'Académie Royale des Sciences de Madrid. D'une manière générale, on peut définir l'Automatique comme l'ensemble des disciplines théoriques et technologiques intervenant dans la conception, la construction et l'emploi des systèmes permettant la suppression totale ou partielle de l'intervention humaine dans l'exécution de tâches diverses : industrielles, agricoles, domestiques, administratives ou scientifiques.

L'automatique peut donc se définir comme un ensemble de théories mathématiques et une technique de raisonnement concernant la prise de décision et la commande de systèmes. La traduction anglaise “automatic control” est plus explicite puisqu'elle précise la notion de commande. Le terme anglais “control” est un faux ami à ne surtout pas traduire par contrôle, il signifie commande.

Précisons tout d'abord le mot “système” avec la définition du dictionnaire : Un *système* est un dispositif constitué de divers éléments et assurant une fonction déterminée. Des objets agencés entre eux, c'est-à-dire ayant une certaine dépendance, constituent un système réalisant une certaine fonction. Les entrées sont les signaux qui apportent au système les informations du milieu extérieur, les sorties fournissent la réponse du système par dépendance des entrées ; on peut parler de causes (entrées) et d'effets (sorties). On utilise de manière synonyme à “système” le terme de “procédé” ou de “processus” (“process” ou “plant” en anglais).

Théoriquement, un processus se définit comme un ensemble de lois d'évolution de différentes grandeurs physiques, c'est la façon dont évolue un système sous l'effet des entrées. Dans le langage courant, on confond souvent le processus, notion abstraite, et l'installation matérielle dont le fonctionnement est régi par ces lois.

La commande d'un système consiste à exercer, via les entrées, une influence sur le système de manière à obtenir en sortie un comportement déterminé. Cette influence s'exerce souvent par l'intermédiaire d'une action sur le flux d'énergie ou de matériau injecté dans le système. Lorsque cette influence est exercée par l'homme, la commande est dite manuelle. Lorsque l'homme est remplacé par des dispositifs techniques autonomes, on parle de commande automatique.

Il existe deux grands types de systèmes automatiques :

- les *systèmes logiques combinatoires et séquentiels*, câblés ou programmés, qui

n'ont pas nécessairement une structure bouclée, c'est-à-dire qu'ils ne prennent pas nécessairement en considération une mesure sur l'état courant du système. De plus l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement. Par exemple un programmeur de machine à laver est un tel système. De tels systèmes sont appelés systèmes à "événements discrets" ou encore "automatismes séquentiels".

- les *systèmes asservis*, fonctionnant en régulation de maintien ou en poursuite d'une loi de référence. Dans le cas des systèmes asservis, toutes les situations possibles n'étant pas prévisibles (arrivée d'une perturbation par exemple), le déroulement des opérations ne peut être prédéterminé à l'avance. Les systèmes asservis sont nécessairement bouclés, c'est-à-dire qu'une mesure de la situation est en permanence prise en considération dans la détermination de la commande.

Un système complexe peut présenter simultanément des aspects séquentiels et des aspects continus, on parle alors de systèmes hybrides.

Dans ce cours, nous ne traiterons que de cette deuxième famille de systèmes automatiques : les systèmes asservis, au cœur desquels le bouclage joue un rôle essentiel.

Les systèmes de commande automatiques copient le plus souvent le comportement de l'homme. Prenons pour exemple introductif un conducteur au volant de son véhicule. Le système que l'homme commande est sa voiture dans l'environnement de la route ; le cerveau et les membres constituent les organes de commande. Les décisions concernant la direction, l'accélération et le freinage sont prises, à partir des mesures effectuées par l'œil, de manière à satisfaire un critère de performance qui peut être un compromis entre la durée du trajet, le confort, la consommation ou les réglementations. Cet exemple révèle les trois phases fondamentales accomplies par l'homme :

1. observation
2. réflexion
3. action.

Ces trois phases interviennent en permanence de manière cyclique (en boucle). Il est intéressant de noter que des types d'actions différents peuvent être appliqués, suivant les critères intégrés lors de la phase de réflexion. Un conducteur pressé appliquera une succession de freinages et d'accélération, au détriment de sa consommation alors qu'un conducteur économe adoptera une conduite plus souple.

La structure à trois phases met en évidence une opération de *bouclage* ("feedback" en anglais). Ce retour constitue l'une des notions fondamentales de l'Automatique.

L'Automatique ne s'est longtemps appliquée qu'aux systèmes mécaniques, électriques et électro-mécaniques, mais elle est maintenant utilisée en gestion, chimie, biologie, médecine, économie, etc. La Figure 1.1 précise les domaines d'applications de l'Automatique.

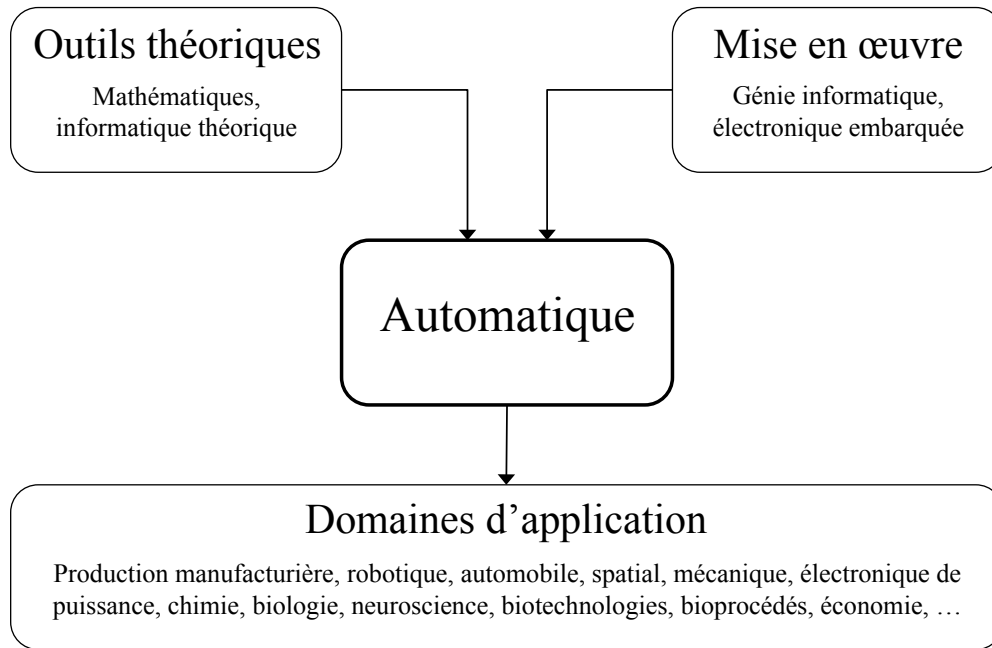


FIGURE 1.1 – Positionnement de l'Automatique.

1.2 Buts de l'Automatique

Réaliser un système automatique consiste à concevoir un système capable d'effectuer une ou plusieurs opérations sans l'intervention de l'homme.

Les systèmes automatiques permettent :

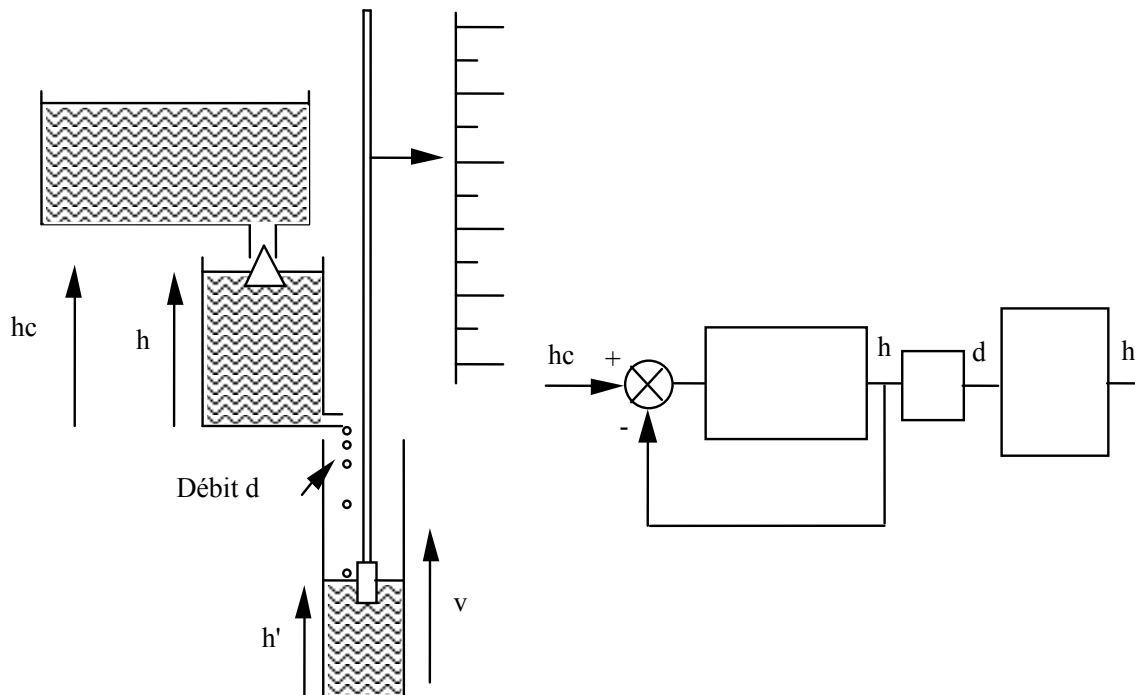
- de réaliser les opérations trop complexes, pénibles ou délicates et ne pouvant être confiées à l'homme (ex : atterrissage d'un engin spatial sur la Lune)
- de substituer la machine à l'homme dans des opérations trop répétitives ou dénuées d'intérêt (ex : boîte de vitesse automatique, appareillage électro-ménager, etc.)
- d'accroître la précision (ex : positionnement précis de l'effecteur d'un bras robotique malgré les imperfections liées à l'environnement.)
- de permettre une action sur la stabilité. Par exemple un oscillateur entretenu sera régulé par un dispositif qui lui évitera de diverger ou de cesser d'osciller. Inversement, un système en équilibre naturellement instable pourra être stabilisé (système mécanique du type pendule en position haute par exemple).

1.3 Bref historique

L'histoire des systèmes automatiques peut se diviser en trois époques.

La première époque, que l'on peut qualifier de préhistoire de l'Automatique, s'étend de l'antiquité à la fin du XIX^{ème} siècle. Des inventeurs géniaux ont conçu des systèmes automatiques de manière purement intuitive. Dès 250 avant J.C., nous avons des exemples de régulation de niveau, comme par exemple la lampe à huile de Philon de Byzance et la

machine à doser le vin de Héron d’Alexandrie. L’horloge automatique à eau de Ktesybios, représentée en Figure 1.2, est un exemple particulièrement illustratif.



hc = hauteur de consigne (position du flotteur quand la valve est fermée)
 h = hauteur d'eau dans le réservoir intermédiaire
 v = vitesse d'ascension de l'indicateur de temps
 h' = hauteur d'eau dans le réservoir de sortie

FIGURE 1.2 – Clepsydre (horloge à eau) de Ktesybios.

Le principe de cette horloge est d’animer la tige qui sert d’indicateur avec un mouvement à vitesse constante (donc avec une amplitude proportionnelle au temps). Pour obtenir le déplacement, il est nécessaire de faire varier le volume d’eau d’une manière proportionnelle au temps en utilisant un débit d’alimentation rigoureusement constant. L’intégrale d’un débit constant donne bien un volume variant linéairement avec le temps. Le problème se ramène donc à générer un débit connu constant. Dans un réservoir à écoulement libre, le débit de sortie est en général fonction de la pression, donc de la hauteur d’eau dans le réservoir. Pour obtenir un débit de sortie constant, il suffit de garantir un niveau constant dans ce réservoir. Le niveau dans le réservoir intermédiaire est contrôlé grâce à une valve liée à un flotteur qui va garantir un niveau de référence. Lorsque le niveau est trop bas, la valve s’ouvre davantage et le réservoir se remplit, faisant ainsi monter le niveau. Si le niveau de référence est dépassé, la valve se ferme davantage, le débit d’alimentation diminue et le niveau baisse. En fonctionnement normal, on est donc assuré d’un niveau constant égal au niveau de référence souhaité, ce qui implique que le débit en sortie du réservoir corresponde bien à la valeur constante voulue. On peut représenter le comportement du système par le schéma-bloc à droite de la Figure 1.2.

Plus tard, Réaumur, Watt avec son régulateur (1788) et Jacquard avec son métier à cartes perforées, font progresser l’automatisation. Le régulateur de Watt, représenté

en Figure 1.3, a pour but de maintenir constante la vitesse de rotation d'une turbine à vapeur. La commande d'admission de vapeur dans la turbine est contrôlée par une vanne dont on peut manœuvrer le pointeau. Un ensemble mécanique déformable constitué de masselottes et de tringles permet une mesure de la vitesse de rotation par l'effet de force centrifuge : l'écartement des masselottes est d'autant plus important que la vitesse de rotation de l'axe est grande. Pour réaliser un asservissement de vitesse il suffit de transmettre mécaniquement une variation de cet écartement en commande de déplacement du pointeau de la vanne. Si la vitesse de rotation est trop faible, l'écartement insuffisant de masselottes engendre une ouverture de la vanne d'admission de vapeur, entraînant une augmentation de la vitesse. Un comportement symétrique a lieu en cas de vitesse trop élevée.

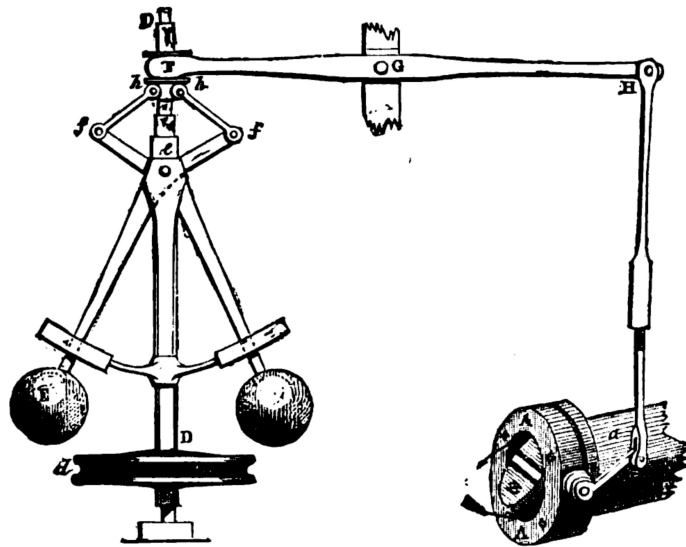


FIGURE 1.3 – Régulateur de Watt.

La seconde époque, à partir du milieu du XIX^{ème} siècle, est caractérisée par la théorie du bouclage et les applications de l'algèbre de Boole. Les premiers travaux théoriques sur le bouclage sont dus à Maxwell (1868), à Routh avec son critère algébrique (1872), et à Hurwitz (1890). L'étude analytique de la stabilité du régulateur de Watt fut commencée par Maxwell en 1868 et complétée en 1876 par Wyschnegradsky. Les travaux de Lyapunov ont ensuite offert un cadre théorique pour l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires. L'étude des systèmes bouclés doit beaucoup à l'approche fréquentielle développée par Nyquist, Bode, Black, Nichols, Hall et Evans dans les années 1920-1930. Les premières implantations des systèmes de commande reposaient alors sur l'utilisation de dispositifs électroniques à lampes.

La troisième époque débute avec les années 1950. L'apparition de calculateurs numériques révolutionne le monde de l'Automatique. La puissance de calcul disponible fait naître les méthodes dites de l'Automatique "moderne" ou "avancée". Parmi les faits marquants, on peut citer :

- Introduction de la représentation d'état, particulièrement bien adaptée à l'utilisation des calculateurs numériques, pour l'étude et la commande des systèmes complexes et multivariables

- Introduction de la commande optimale, définissant la meilleure loi de commande à appliquer selon un critère donné
 - Développement des méthodes d'étude et de commande des systèmes non-linéaires
 - Prise en compte des phénomènes aléatoires
 - Essor des calculateurs et lois de commandes avancées telles que : la commande adaptative, la commande prédictive, la commande robuste, etc.
-

Chapitre 2

Structure d'un système asservi

On a vu en introduction l'intérêt, voire la nécessité, du bouclage. Un bouclage apparaît chaque fois qu'au cours d'une opération, un système prend en compte l'observation de son état pour le modifier. Ce bouclage apparaît parfois naturellement dans le système physique, comme par exemple :

- augmentation de la force de frottement lorsque la vitesse augmente
- régulation d'une population animale par le taux de maladie apparaissant en cas de surpopulation
- bulle spéculative en finance
- phénomènes d'homéostasie en biologie.

Ce bouclage peut également être induit artificiellement, comme par exemple :

- automobile + chauffeur réalisant l'opération de conduite sur route (système non automatique, puisque la correction est réalisée par l'homme)
- régulation de la température d'un fer à repasser (système automatique).

Le bouclage est nécessaire ou souhaitable dans les opérations où :

- la **précision** mise en jeu est importante. L'observation de la grandeur à asservir permet de constater un écart ou une dérive quelconque par rapport à la référence souhaitée et donc de réagir en conséquence. Dans une solution sans bouclage, on est amené à faire des hypothèses *a priori* quant au comportement de certains éléments. Toute variation par rapport au comportement présupposé entraîne alors irrémédiablement un défaut sur le résultat final. On remarque ici que la précision de l'opération dépend essentiellement de la précision avec laquelle est faite l'observation.
 - des **perturbations** interviennent en cours d'opération modifiant ainsi l'état du système. Par exemple, l'ouverture de la porte d'un four thermostaté entraîne une déperdition de chaleur et donc une baisse de température que l'on compense en augmentant la puissance de chauffage. Dans le cas d'un système bouclé, l'observation de la grandeur de sortie rendra compte de l'apparition d'une telle perturbation.
 - le **comportement** du système est mal connu ou variable. Ainsi, en électronique, le bouclage d'un amplificateur opérationnel conduit à un comportement tel que la relation entrée-sortie est beaucoup moins sensible aux variations de gain de l'amplificateur seul non bouclé. Dans le cas de réalisations en série, on évite ainsi des opérations de tri sévère sur les composants, tout en garantissant des performances acceptables pour chaque réalisation.
-

- la **stabilité** est en cause. Nombre d'applications (comme par exemple la fusée, le gyropode, ou la fission nucléaire) requièrent en effet la stabilisation d'un système dont le comportement sans bouclage serait instable.

Ces différents besoins peuvent naturellement coexister dans certaines opérations. Parmi les systèmes asservis, on distingue :

- les **régulations**, qui sont des systèmes destinés à maintenir une ou plusieurs grandeurs physiques à des valeurs fixées constantes, même en présence de perturbations. Citons par exemple : la régulation de température d'un four, la régulation de vitesse d'un alternateur, la régulation de la glycémie, ou le pilote automatique d'avion en phase de croisière (maintien d'une altitude constante malgré les perturbations).
- les **asservissements** qui sont des systèmes destinés à faire suivre une loi, généralement non fixée à l'avance, à une ou plusieurs grandeurs physiques. Dans ce cas, l'asservissement a pour mission d'assurer une recopie la plus fidèle possible quelles que soient les lois de variations fixées. Citons à titre d'exemples : le pilote automatique d'un engin mobile, le suivi de trajectoire d'un robot, le suivi de cible, les manœuvres de ravitaillement automatisées, ou la commande numérique d'une machine outil telle qu'une fraiseuse. Dans le cas où l'asservissement fait intervenir des organes mécaniques, on parle de servomécanisme (mécanisme asservi).

Rappelons avant d'analyser la structure d'un système asservi les modélisations considérées dans les chapitres à venir, liées à la notion de système.

2.1 Retour sur la notion de système

Cette notion a été longuement développée dans le cours de “Modélisation” de première année et le lecteur pourra consulter son polycopié pour plus de détails. Le but des paragraphes ci-dessous est de définir le domaine des systèmes considérés lors des chapitres à suivre, ainsi que de résumer rapidement les concepts nécessaires à la modélisation des systèmes à temps continu et à temps discret.

2.1.1 Classe des systèmes considérés

Un système dynamique est un ensemble d'éléments liés entre eux dans le but de réaliser une tâche donnée. Sa réponse dépend simultanément de l'excitation présente et des excitations et réponses passées, contrairement à la notion de système statique, pour lequel la réponse à une excitation est instantanée et ne dépend que des entrées. Ce dispositif soumis aux lois physiques est caractérisé par des grandeurs de deux types : les entrées et les sorties, comme représenté sur la Figure 2.1.

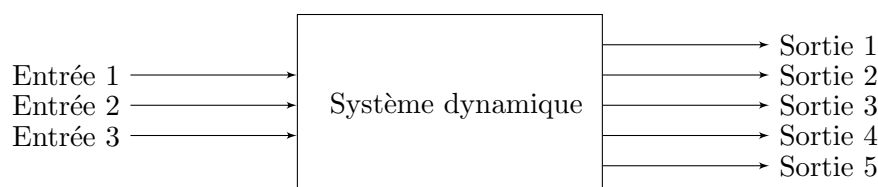


FIGURE 2.1 – Représentation entrée/sortie d'un système dynamique.

Les entrées peuvent être classées en deux types : les grandeurs de commande et les signaux parasites appelés perturbations. Les commandes correspondent aux signaux que l'on pourra modifier afin d'agir sur le système. Les perturbations correspondent aux signaux que l'on ne pourra pas manipuler et que le système devra subir.

Les sorties sont les grandeurs d'intérêt qui permettent de juger de la qualité de la tâche accomplie.

Par exemple pour un four, on pourrait considérer les grandeurs suivantes :

- commande : débit de combustible ou intensité du courant dans la résistance
- perturbation : déperdition de chaleur
- sortie : température à l'intérieur du four.

On a l'habitude de représenter un système par un schéma fonctionnel, en indiquant les entrées accessibles à la commande, les entrées parasites subies (perturbations) et les sorties d'intérêt. Par exemple, pour qualifier le comportement d'un véhicule automobile, on pourrait dresser une liste sommaire de grandeurs utiles et préciser leur nature, comme indiqué en Figure 2.2.

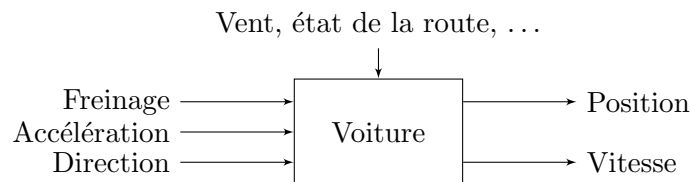


FIGURE 2.2 – Schéma fonctionnel simple pour un véhicule automobile, en distinguant commandes, perturbations et sorties.

Nous nous limiterons par la suite à des systèmes dynamiques :

- à *état continu*, à *temps continu* ou à *temps discret*, *linéaires* et *invariants*. Le lecteur pourra se reporter au polycopié du cours de “Modélisation” de première année pour plus de détails sur ces concepts.
- à *paramètres localisés*, c’est-à-dire pouvant être décrits par des équations différentielles ordinaires. Les systèmes dits à paramètres distribués ou répartis mettent en œuvre des phénomènes de propagation (ligne électrique par exemple) qui nécessitent des équations aux dérivées partielles pour représenter leur comportement.
- *monovariabiles*, c’est-à-dire ne possédant qu’une seule entrée et une seule sortie. En fait, la plupart des systèmes réels sont des systèmes multivariabiles. Cependant, la difficulté de réaliser une commande multidimensionnelle conduit souvent l’automaticien à sélectionner un couple “entrée-sortie” conférant ainsi au système une représentation monovariable. L’effet des autres entrées ou perturbations est alors analysé séparément. Si le système subit plusieurs perturbations, on analysera leur effet en ne considérant qu’une seule perturbation présente à la fois puis on superposera leurs effets : les systèmes étudiés étant linéaires et invariants, le principe de superposition s’applique.

Exemple 2.1 (Echangeur de chaleur) Analysons par exemple la démarche d’approximation d’un système multivariable dans le cas d’un échangeur de chaleur. Un échangeur

(Figure 2.3) est constitué de deux enceintes dans lesquelles circulent des fluides à des températures différentes. La proximité des fluides entraîne des échanges thermiques, permettant ainsi de refroidir ou réchauffer un fluide. Sur la Figure 2.3, Q_c représente le débit d'eau chaude, Q_f le débit d'eau froide, T_c la température de sortie de l'eau chaude et T_f la température de sortie de l'eau froide.

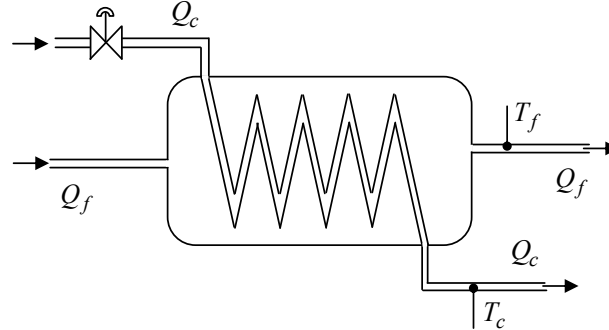


FIGURE 2.3 – Principe d'un échangeur de chaleur.

Si le but utilitaire de cet échangeur est de refroidir le fluide chaud, T_c est considéré comme grandeur unique de sortie. Il est clair que les débits Q_c et Q_f agissent tous deux sur cette température, ce système est donc naturellement multivariable (Figure 2.4).

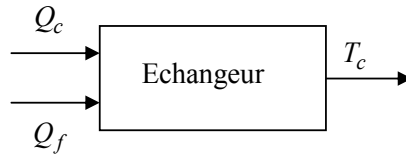


FIGURE 2.4 – Schéma fonctionnel multivariable de l'échangeur de chaleur.

L'automaticien pourra retenir comme seule grandeur de commande le débit Q_c et considérer en première approche que Q_f est constant. Une variation éventuelle de Q_f serait considérée comme une perturbation, d'où le schéma fonctionnel simplifié de la Figure 2.5.

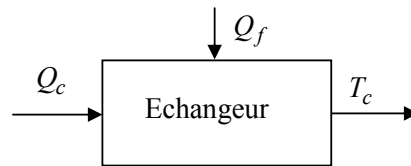


FIGURE 2.5 – Schéma fonctionnel monovariable de l'échangeur de chaleur.

En résumé, l'exemple précédent révèle en fait que les grandeurs physiques agissant sur le système sont de deux natures :

- les grandeurs sur lesquelles on exerce une action volontaire (le débit de fluide chaud réglé par une vanne pour l'exemple ci-dessus). Les grandeurs seront appelées grandeurs de commande.

- les grandeurs laissées libres de leur évolution (le débit de fluide froid pour l'échangeur de chaleur), et ceci généralement pour des raisons de coût économique prohibitif ou même, dans certains cas, en raison d'une quasi impossibilité technique à maîtriser ces variables. Dans ces conditions, ces grandeurs sont regroupées sous le terme "perturbations".

Au cours de la synthèse d'un système asservi, on est conduit à assimiler les perturbations à des signaux typiques, qui visent à émuler les allures réelles des signaux auxquels le dispositif est soumis en marche normale. Parmi les signaux utilisés, on peut noter :

- l'échelon (perturbation constante)
- la rampe (perturbation linéaire en fonction du temps)
- la sinusoïde (perturbation à une fréquence particulière)
- un signal aléatoire, faisant l'objet de traitements probabilistes (perturbations sous forme de bruits blancs par exemple).

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux signaux *certaines* (non aléatoires) et *causaux* (nuls pour $t < 0$).

2.1.2 Modélisation mathématique des systèmes continus et discrets

Pour réaliser une commande automatique, il est nécessaire d'établir les relations existant entre les entrées (variables de commande ou de perturbation) et les sorties (variables d'observation). L'ensemble de ces relations constitue un "modèle mathématique" du système (Figure 2.6).

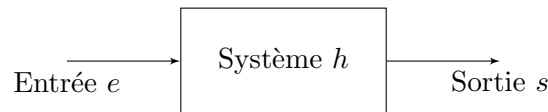


FIGURE 2.6 – Modélisation mathématique entrée-sortie.

Il a été vu en cours de "Modélisation" que la relation entrée-sortie d'un système linéaire et invariant de réponse impulsionnelle h est une équation de convolution dans le domaine temporel :

$$s = h * e. \quad (2.1)$$

Si l'on applique la transformée adéquate (de Laplace pour les systèmes à temps continu et en Z pour les systèmes à temps discret), on obtient grâce aux propriétés de ces transformées la *fonction de transfert* du système (correspondant à la transformée de Laplace ou en Z de la réponse impulsionnelle) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad \text{ou} \quad H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}. \quad (2.2)$$

L'intérêt de l'utilisation des fonctions de transfert vient du fait que la plupart des systèmes étudiés sont constitués par l'association de sous-systèmes élémentaires. L'utilisation des fonctions de transfert conduit alors à des expressions simples, obtenues par opérations élémentaires, alors que l'étude dans le domaine temporel nécessite le calcul de produits de convolution.

Une alternative à la représentation fréquentielle des systèmes (c'est-à-dire par fonctions de transfert) est la représentation d'état, qui sera l'objet des Chapitres 7 et 8.

2.2 Structure d'un système asservi

Un système asservi est un système bouclé dont la structure générale peut se représenter par le schéma de la Figure 2.7, qui comprend trois opérations : observation, réflexion et action, exécutées cycliquement.

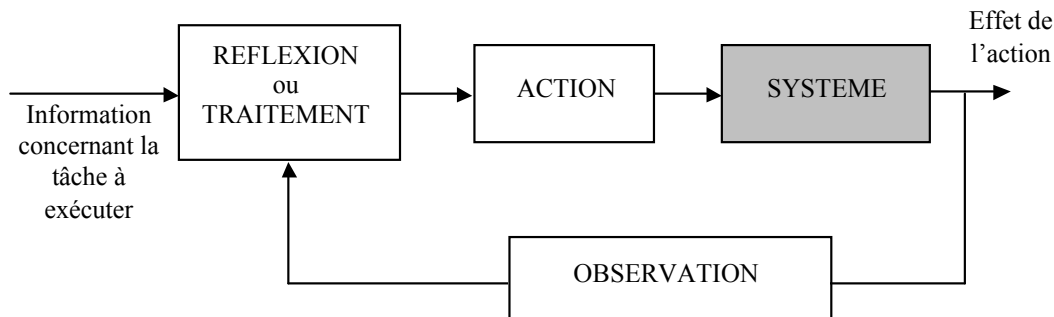


FIGURE 2.7 – Structure générale d'un système asservi.

Exemple 2.2 (Régulation de niveau) *Explicitons ces trois opérations sur un exemple. Prenons pour tâche à réaliser le remplissage d'une cuve dont on souhaite maintenir le niveau à une hauteur donnée (Figure 2.8).*

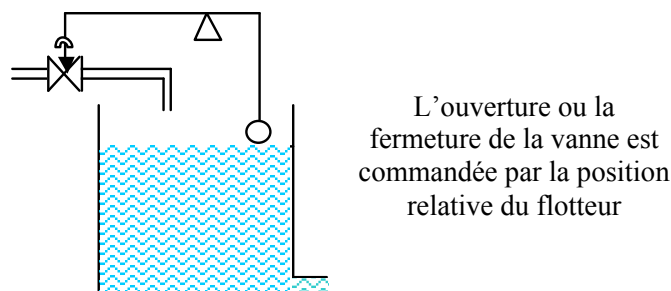


FIGURE 2.8 – Régulation automatique du niveau d'eau dans une cuve à fuite.

Dans ce cas, les trois opérations seront les suivantes :

- observation du niveau d'eau dans la cuve
- comparaison avec le niveau souhaité
- action sur le robinet (ouverture ou fermeture).

Le comportement du système peut être décrit par le schéma fonctionnel Figure 2.9. La consigne est une entrée représentant le niveau d'eau désiré. La sortie est le niveau d'eau réel. L'action se réalise après comparaison des niveaux désiré et réel. L'observation utilise un flotteur pour mesurer le niveau. L'action se fait par commande de l'ouverture ou fermeture de la vanne.

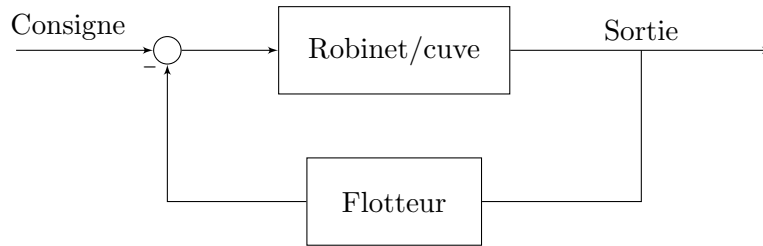


FIGURE 2.9 – Schéma fonctionnel de la régulation du niveau d'eau dans une cuve.

Le schéma-bloc ci-dessus fait apparaître un comparateur (représenté par un cercle), permettant d'évaluer la différence entre la consigne et le niveau d'eau mesuré par le flotteur. Dans tout ce polycopié, nous adopterons la convention suivante : **toutes les entrées d'un comparateur seront sommées, sauf celles repérées explicitement par un signe “-” (qui seront, elles, retranchées).**

2.2.1 Structure des systèmes asservis continus

On représente habituellement un système automatique bouclé par le “schéma-bloc” de la Figure 2.10.

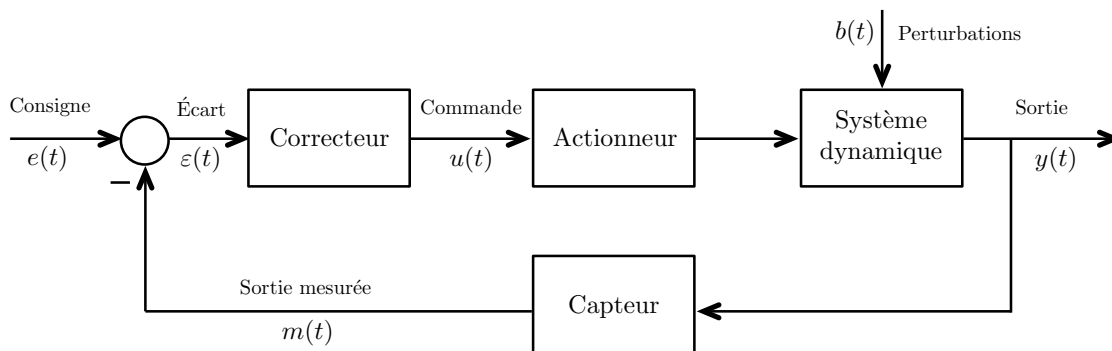


FIGURE 2.10 – Schéma-bloc d'un système automatique bouclé.

- Le **système dynamique** évolue suivant des lois physiques qui lui sont propres. La sortie, ou grandeur réglée, est en général une grandeur physique que l'on considère comme importante dans la tâche à réaliser. De plus, cette sortie peut fluctuer en fonction de perturbations extérieures, en général, imprévisibles. Par exemple, comme évoqué précédemment, un four est un système dynamique dont la température est fonction des variations de charge ou des déperditions de chaleur.
- L'**actionneur** ou organe d'action apporte, en général, la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche. Dans le cas du four, il s'agirait par exemple de la résistance électrique ou de la vanne d'admission de combustible.
- Le **capteur** délivre à partir de la sortie une grandeur caractérisant l'observation. Sa principale qualité est la précision dont dépendra la précision du système global. Il doit fournir une information fidèle des évolutions temporelles de la sortie. Dans le cas du four, il pourrait s'agir de la sonde de température.

- Le signal d'**écart** ε caractérise la précision d'un système asservi. On le distingue parfois du signal d'**erreur**, qui se réfère quant à lui à la différence entre la consigne et la sortie pondérée par le gain statique du capteur. Dans le cadre de ce cours, les stratégies de commande viseront pour la plupart à minimiser la différence entre la consigne et la sortie mesurée, que nous appellerons donc indifféremment erreur ou écart. Notons toutefois que dans les phases transitoires (suite à un changement de consigne ou l'arrivée d'une perturbation par exemple) cet écart ne pourra être nul en permanence (car la dynamique du système introduit une inertie temporelle entre les commandes appliquées et l'effet résultant en sortie).
- Le **comparateur** calcule ce signal d'erreur.
- Le **correcteur** élabore le signal de commande à partir du signal d'erreur : c'est l'organe "intelligent". Il est souvent réalisé par un dispositif électronique ou par un calculateur numérique¹.

2.2.2 Cas des systèmes continus pilotés par calculateur

Les techniques de correction numériques mettent en œuvre des algorithmes de commande évolués, réalisés à partir d'informatique embarquée. Elles peuvent conduire à des améliorations notables de performances ainsi qu'à une simplicité de mise en œuvre par rapport au cas analogique, surtout pour la modification rapide des paramètres de correction.

Ainsi, à partir du schéma classique d'un asservissement continu donné Figure 2.10, le schéma d'un asservissement numérique est celui donné Figure 2.11.

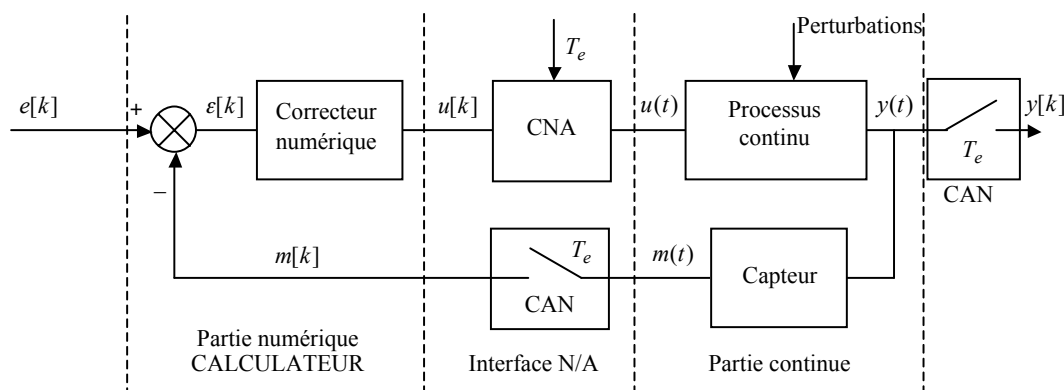


FIGURE 2.11 – Schéma-bloc de l'asservissement d'un système continu piloté par calculateur.

Le signal de consigne est généralement produit directement par le calculateur.

Le capteur délivre fréquemment une mesure analogique (par exemple génératrice tachymétrique pour une mesure de la vitesse d'un moteur), d'où la nécessité d'une *conversion analogique-numérique (CAN)*, ou fournit une mesure numérique sous la forme d'un nombre proportionnel à la grandeur à mesurer (par exemple codeur incrémental pour une mesure de la position d'un moteur).

1. Dans le cas de l'Exemple 2.2, ce régulateur est toutefois de nature purement mécanique.

De même, l'actionneur continu nécessite la présence d'un élément effectuant une *conversion numérique-analogique (CNA)* du signal de commande numérique généré par le calculateur².

Le correcteur numérique peut s'obtenir soit par transposition d'un correcteur à temps continu initial en temps discret, soit en utilisant des techniques propres aux systèmes discrets se fondant sur un modèle discret du système. Seule la première approche sera développée dans ce cours (Chapitre 6).

Toute la partie "calculateur" de la boucle d'asservissement (comparateur, correcteur numérique, CAN et CNA) évolue en temps discret à une cadence T_e appelée *période d'échantillonnage*.

2.3 Principaux critères de performance

Suivant l'application envisagée, divers critères de performance peuvent être privilégiés. D'une manière générale, trois critères fondamentaux sont retenus :

- la **stabilité**, qui traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre. Un système peut en effet présenter une sortie divergente soit en raison du comportement dynamique intrinsèque du système commandé, soit en raison du bouclage. Ce comportement est intolérable pour un système asservi. Dans la pratique, la seule stabilité asymptotique n'est pas une qualité suffisante : on exigera de plus un comportement transitoire correctement amorti (Figure 2.12).

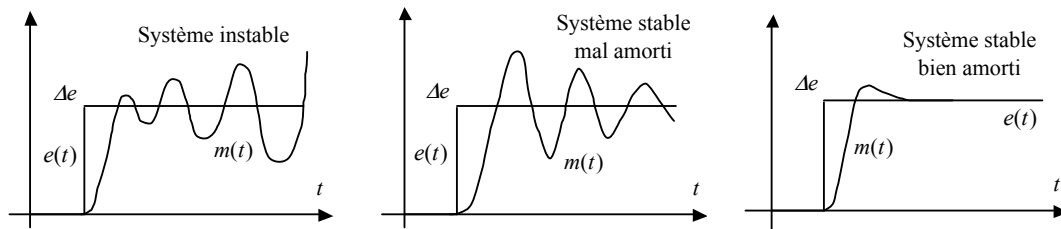


FIGURE 2.12 – Illustration de la stabilité et de l'amortissement.

- la **rapidité**, qui est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse), comme illustré Figure 2.13.
- la **précision**, qui est caractérisée par l'erreur avec laquelle la sortie mesurée suit la consigne imposée au système (Figure 2.14). On distinguera la **précision en régime permanent**, qui caractérise la capacité de la sortie à converger vers la consigne lorsque le temps $t \rightarrow +\infty$, et la **précision en régime transitoire** qui prend en compte le signal d'erreur pour des temps t finis. Lorsque l'erreur entre la consigne et la sortie mesurée tend vers une valeur constante en régime permanent, on parle d'*erreur statique*, par opposition à une *erreur dynamique*.

Ces trois aspects (précision, rapidité et stabilité) sont étroitement liés. Au cours de la synthèse des systèmes bouclés, on cherchera à rendre compatibles la rapidité ou la précision et un bon amortissement, par le choix d'un correcteur adapté.

2. Notons toutefois que d'autres réalisations peuvent exister, comme par exemple dans la commande de dispositifs d'électronique de puissance pilotés souvent par modulation de largeur d'impulsion (MLI).

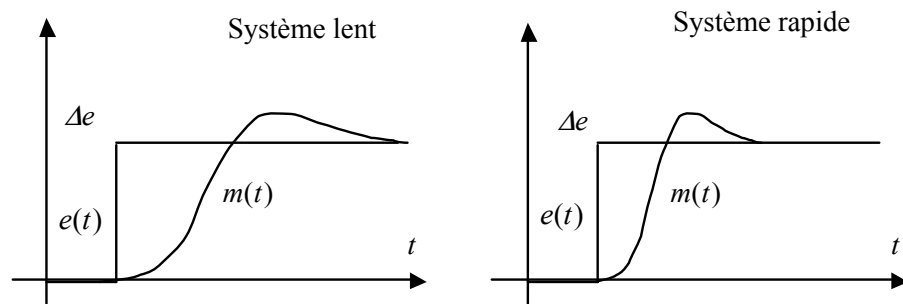


FIGURE 2.13 – Illustration de la rapidité.

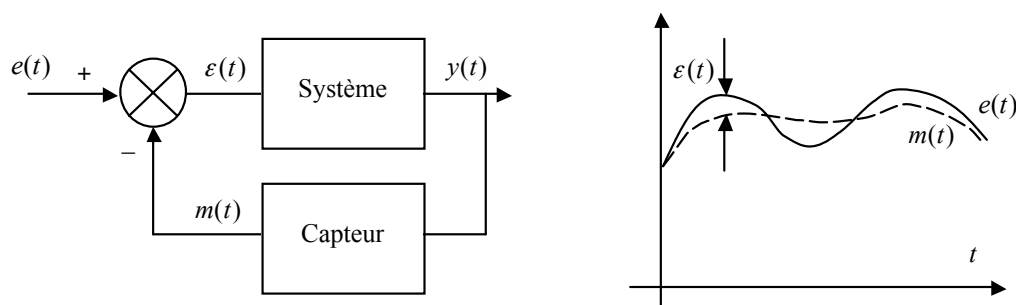


FIGURE 2.14 – Illustration de la précision en régime transitoire.

2.4 Hiérarchisation des systèmes automatiques industriels

La commande de systèmes complexes nécessite la mise en œuvre de stratégies multiples. On a l'habitude de classer les sous-systèmes élémentaires suivant leur fonctionnalité. L'ensemble peut se représenter dans une structure pyramidale :

- NIVEAU 0 : Ce niveau ne fait pas partie du système de commande, il contient les divers équipements et machines contribuant au processus de fabrication.
- NIVEAU 1 : C'est le niveau des systèmes d'asservissements auxiliaires qui n'ont pour objectif que le maintien des sorties à une valeur de consigne fixée. A ce niveau on situe aussi les automatismes qui gèrent le séquençage des cycles de production.
- NIVEAU 2 : C'est le niveau dévolu aux systèmes d'asservissement multivariables destinés à assurer le suivi et la coordination des systèmes du niveau inférieur. C'est à ce niveau que l'on situe les stratégies d'optimisation économique pour une entité élémentaire de production telle qu'un atelier. Les équipements relatifs à ce niveau sont en général regroupés dans la salle de commande ou de conduite.
- NIVEAU 3 : On trouve à ce niveau les fonctionnalités d'optimisation de la marche de l'ensemble des installations. On place au niveau 3 les outils permettant une optimisation économique de la production (par exemple les outils de CFAO : Construction Fabrication Assistées par Ordinateur).
- NIVEAU 4 : Toute entreprise moderne met en œuvre une stratégie d'optimisation

impliquant entre autre une planification des outils de production. Cette fonction est au niveau 4, au sommet de la pyramide.

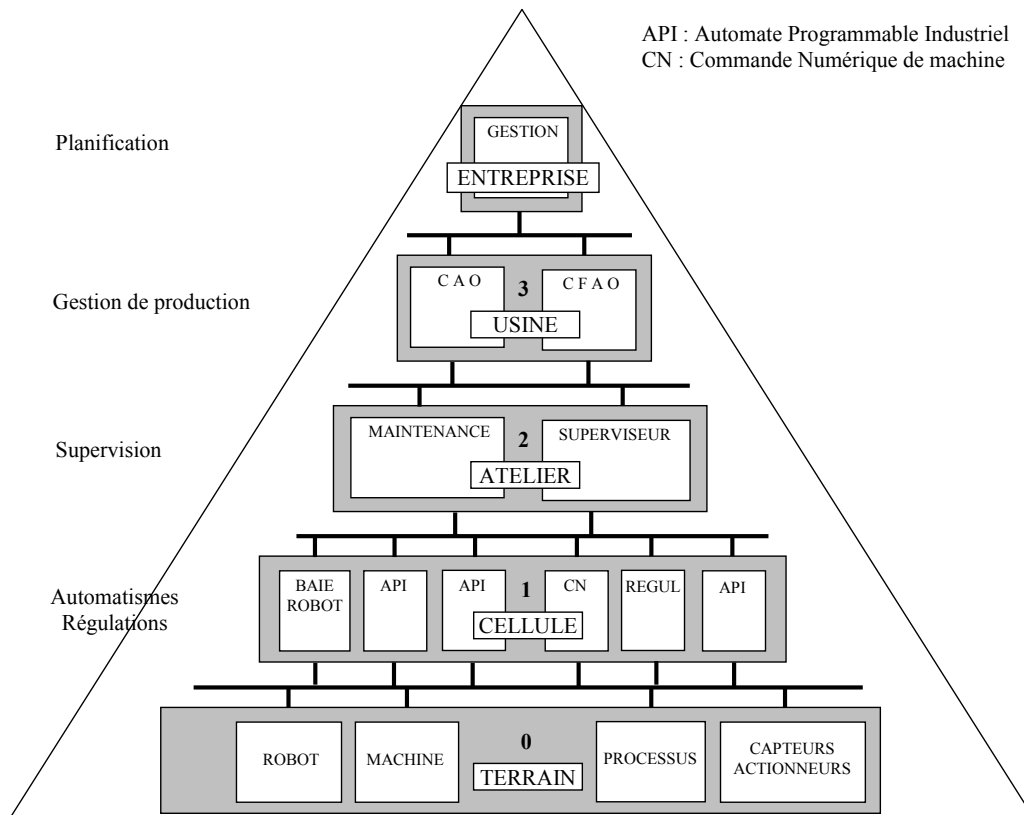


FIGURE 2.15 – Hiérarchisation des systèmes automatiques.

Chapitre 3

Analyse des systèmes asservis à temps continu (stabilité, rapidité, précision)

3.1 Structure générale et boucle fermée

3.1.1 Boucle ouverte - Boucle fermée

Les concepts présentés ici se basent sur une représentation par fonctions de transfert de chaque éléments constitutifs de la boucle d'asservissement. Dans ce polycopié, la variable de Laplace est indiquée par la lettre p .

La Figure 3.1 rappelle la structure d'une chaîne d'asservissement bouclée, constituée d'une chaîne d'action (chaîne directe $G(p)$) et d'une chaîne de réaction (chaîne de retour $\beta(p)$), permettant d'élaborer un signal d'erreur $\varepsilon(t)$, écart entre la grandeur de consigne $e(t)$ et la grandeur de sortie mesurée $m(t)$. La sortie du système est $y(t)$. On parle de retour unitaire si $\beta(p) = 1$ (auquel cas $m(t) = y(t)$), de retour réel si $\beta(p) = \text{cste}$ et de retour complexe pour les autres cas.

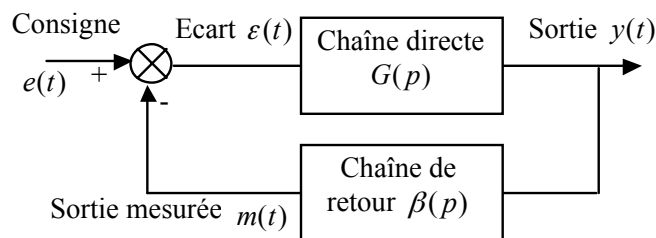


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel d'un asservissement.

3.1.1.1 Définitions

On appelle *fonction de transfert en boucle ouverte* (B.O.) d'une telle chaîne le produit des fonctions de transfert de tous les éléments présents dans la boucle :

$$H(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = G(p)\beta(p). \quad (3.1)$$

On appelle *fonction de transfert en boucle fermée* (B.F.) le rapport $Y(p)/E(p)$, qui se détermine de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - M(p) \\ M(p) &= \beta(p)Y(p) \\ Y(p) &= G(p)\varepsilon(p) \end{aligned} \right\} \rightarrow Y(p) = G(p)(E(p) - \beta(p)Y(p)), \quad (3.2)$$

d'où :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)\beta(p)}. \quad (3.3)$$

3.1.1.2 Prise en compte de perturbations

On considère la structure plus complète donnée en Figure 3.2. $B(p)$ représente une perturbation agissant sur le système (attention au signe du sommateur suivant l'effet additif ou soustractif de la perturbation). La chaîne directe est décomposée en deux fonctions de transfert : $G_1(p)$ située en amont de la perturbation et $G_2(p)$ située en aval.

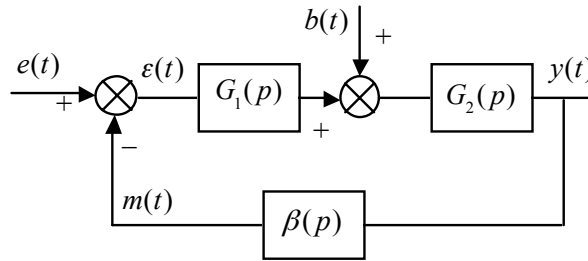


FIGURE 3.2 – Schéma fonctionnel d'un asservissement avec perturbation.

Du fait de la nature linéaire et invariante des dynamiques considérées, le principe de superposition, détaillé dans le cours de "Modélisation", s'applique et nous permet de traiter séparément l'effet de la consigne $e(t)$ à perturbation nulle et l'effet de la perturbation $b(t)$ à consigne nulle.

La fonction de transfert en boucle fermée entre $E(p)$ et $Y(p)$ à perturbation nulle ($B(p) = 0$) s'obtient à partir de l'Equation (3.3) :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p)G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)}. \quad (3.4)$$

Par ailleurs, à consigne nulle ($E(p) = 0$), la fonction de transfert en boucle fermée entre $B(p)$ et $Y(p)$ peut être soit obtenue par calculs directs, soit en redessinant le schéma bloc de la Figure 3.2 en celui de la Figure 3.3.

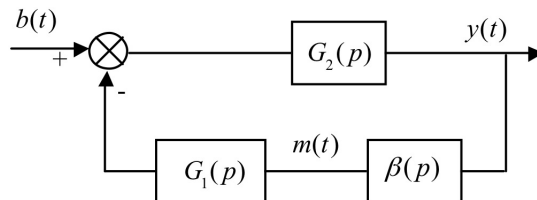


FIGURE 3.3 – Schéma fonctionnel à consigne nulle.

On obtient ainsi :

$$\frac{Y(p)}{B(p)} = \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)}. \quad (3.5)$$

Si la consigne $E(p)$ et la perturbation $B(p)$ coexistent, en vertu du principe de superposition, la sortie est obtenue en sommant (3.4) et (3.5) :

$$Y(p) = \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)} \left(B(p) + G_1(p)E(p) \right). \quad (3.6)$$

3.1.1.3 Pulsation de coupure en boucle ouverte

Comme expliqué dans le cours de “Modélisation”, la *réponse fréquentielle*¹ d’une fonction de transfert $H(p)$ est obtenue pour $p = j\omega$, où $\omega \geq 0$ désigne la pulsation. Comme nous le rappellerons dans ce cours (voir notamment l’Annexe A.2.2), cette réponse fréquentielle peut être représentée de diverses manières (diagramme de Bode, de Nyquist, de Black-Nichols, ...). La réponse fréquentielle de la boucle ouverte s’écrit donc $G(j\omega)\beta(j\omega)$.

On appelle *pulsation de coupure en boucle ouverte* ω_c toute pulsation satisfaisant :

$$|G(j\omega_c)\beta(j\omega_c)| = 1. \quad (3.7)$$

En d’autres termes, une pulsation de coupure correspond à une pulsation pour laquelle le gain en dB de la boucle ouverte s’annule, c’est-à-dire une pulsation pour laquelle le tracé de Bode de la boucle ouverte coupe l’axe 0 dB, ou encore la pulsation à laquelle le lieu de Nyquist de la boucle ouverte coupe le cercle unité (voir Figure 3.4).

L’intervalle de pulsations pour lequel le module du gain harmonique en boucle ouverte est supérieur à 1 en valeur arithmétique définit la *bande passante* du système en boucle ouverte.

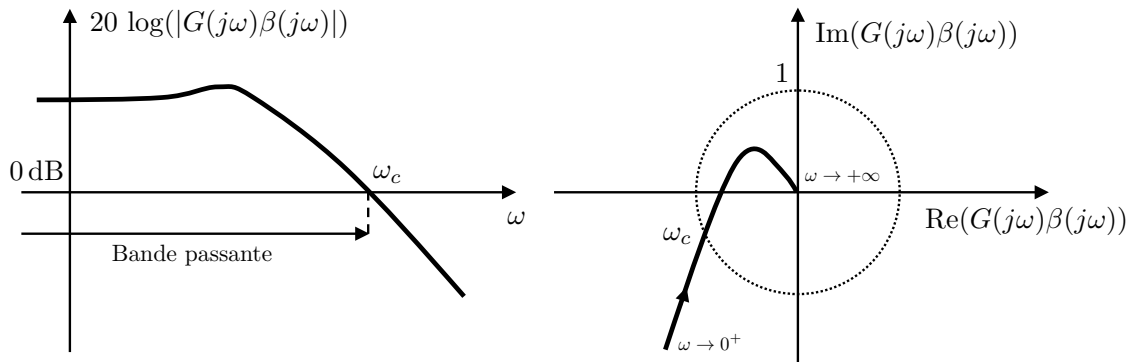


FIGURE 3.4 – Pulsation de coupure et bande passante dans les diagrammes de Bode et de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte (voir Annexe A.2.2 pour quelques rappels sur ces représentations).

1. parfois appelée réponse harmonique.

3.1.2 Tracé approximatif de la réponse fréquentielle en boucle fermée

Soit $G(j\omega)\beta(j\omega)$ la réponse fréquentielle de la boucle ouverte du système. Peut-on en déduire l'allure de la réponse fréquentielle en boucle fermée ?

On déduit de la relation (3.3) l'expression approximative suivante :

- Si $|G(j\omega)\beta(j\omega)| \gg 1$, alors $F(j\omega) \simeq 1/\beta(j\omega)$ (inverse du retour)
- Si $|G(j\omega)\beta(j\omega)| \ll 1$, alors $F(j\omega) \simeq G(j\omega)$ (chaîne directe).

Ainsi, une approximation de la réponse fréquentielle de la boucle fermée $F(j\omega)$ peut être déduite de la chaîne directe et de l'inverse du retour. L'approximation n'est cependant pas bonne au voisinage des points pour lesquels $|G(j\omega)\beta(j\omega)| = 1$, c'est-à-dire à proximité de la pulsation de coupure de la boucle ouverte.

La Figure 3.5 illustre le tracé de la réponse fréquentielle de la chaîne directe et celle de l'inverse du retour dans le plan de Bode (en pointillés). Sur cet exemple, les deux tracés se coupent en deux points A et B . La portion AB correspond aux pulsations pour lesquelles $|G(j\omega)\beta(j\omega)| \geq 1$, donc à la bande passante du système en boucle ouverte. Entre A et B , la B.F. peut donc être approchée par $1/\beta(j\omega)$. À l'inverse, hors de la partie AB , la B.F. peut être approchée par $G(j\omega)$. La courbe en trait continu donne alors une image de la réponse fréquentielle en boucle fermée, qui peut permettre d'en déduire une approximation de la fonction de transfert en boucle fermée.

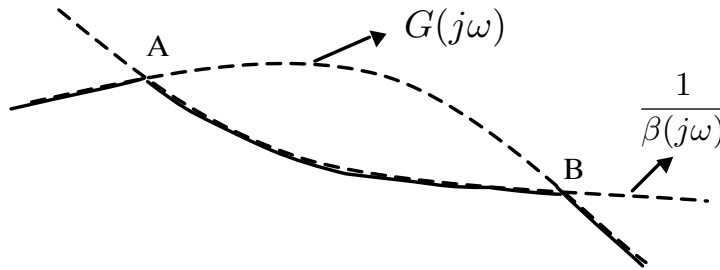


FIGURE 3.5 – Tracé approximatif de la réponse harmonique en boucle fermée.

Remarque : le point A , en particulier pour les systèmes intégrateurs, est souvent rejeté à l'infini à gauche ($\omega = 0$ dans le plan de Bode).

3.2 Stabilité

Un système est dit *stable EBSB* (entrée bornée-sortie bornée) si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument sommable ou, ce qui est équivalent, si sa réponse indicielle est bornée.

Considérant une représentation par fonction de transfert, un système est stable EBSB si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

Dans le cadre d'un système bouclé, la fonction de transfert en B.F. s'écrit (voir Equation (3.3)) :

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)\beta(p)}. \quad (3.8)$$

Supposons que G et β soient des fonctions méromorphes² (ce qui inclut notamment toutes les fonctions de transfert rationnelles ou impliquant des retards). On peut alors montrer que F est elle aussi méromorphe et que ses pôles sont les zéros de $1 + G\beta$. On peut donc énoncer l'équivalence suivante : le système est stable en boucle fermée si et seulement si l'équation caractéristique

$$\text{Num}(1 + G(p)\beta(p)) = 0 \quad \text{n'a pas de racines à partie réelle positive ou nulle.} \quad (3.9)$$

Lorsque cette équation caractéristique est un polynôme d'ordre supérieur à trois et ne fait apparaître aucune racine évidente, le calcul analytique des racines peut s'avérer fastidieux. Pour étudier la stabilité, on utilise alors soit le critère géométrique dit de Nyquist, où l'on raisonne uniquement sur la boucle ouverte pour déterminer la stabilité de la boucle fermée (voir section suivante), soit le critère algébrique dit de Routh (voir le cours de "Modélisation") où l'on raisonne sur l'équation caractéristique précédente sans calculer explicitement ses racines. Rappelons que le critère de Routh n'est applicable que pour des fonctions de transfert rationnelles. Notamment, il ne s'applique pas aux systèmes impliquant des retards et ne définit qu'une information binaire sur la stabilité du système (sans notion de marges de stabilité abordée par la suite).

3.2.1 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist est d'une très grande importance pratique et ceci pour trois raisons essentielles :

- il utilise une représentation graphique de la réponse fréquentielle qui peut être déduite de l'expérience
- il s'applique dans le cas général à une fonction de transfert méromorphe et non nécessairement rationnelle (autorisant ainsi l'étude de systèmes à retards)
- il permet de définir des marges de stabilité qui jouent, comme on le verra, un rôle crucial dans l'analyse des performances du système bouclé.

Ce critère s'appuie sur la condition (3.9) et permet donc de prédire le comportement d'un système bouclé par la seule connaissance de la fonction de transfert en boucle ouverte.

3.2.1.1 Théorème de Cauchy

Le critère de Nyquist fait appel au résultat d'analyse complexe suivant.

Théorème 3.1 (Théorème de Cauchy) *Soit C un contour fermé ne passant par aucune singularité d'une fonction $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la variable complexe $p \in \mathbb{C}$. Si C entoure P pôles et Z zéros de A dans le sens des aiguilles d'une montre, alors l'image de C par l'application A entoure l'origine $N = Z - P$ fois dans le même sens.*

Si l'on prend, par exemple, $Z = 2$ et $P = 3$ (donc $N = -1$), l'image de C par A fait "−1 tour" autour de l'origine dans le sens horaire, soit 1 tour dans le sens trigonométrique (Figure 3.6).

2. Une fonction $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe si tous ses pôles sont isolés (en d'autres termes, ses pôles n'admettent pas de point d'accumulation).

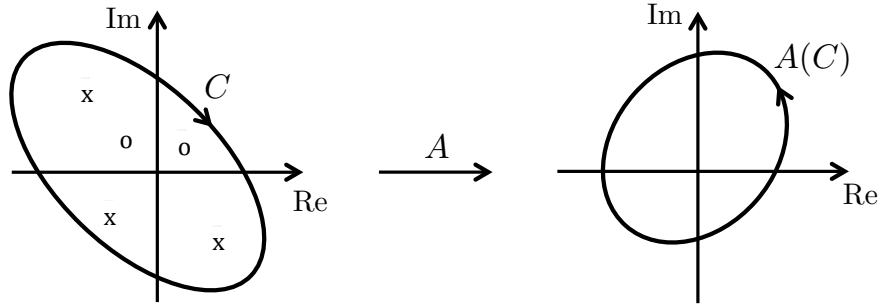


FIGURE 3.6 – Illustration du contour C dans le plan complexe et de son image $A(C)$ par l'application A . Les pôles de A sont indiqués par “x” et ses zéros par “o”.

3.2.1.2 Application à l'étude de la stabilité en boucle fermée

Considérons l'application A définie par $A(p) = 1 + G(p)\beta(p)$ et le contour C dit de Nyquist englobant tout le demi-plan droit et représenté Figure 3.7. Comme on l'a vu en début de section (Condition (3.9)), pour que la boucle fermée soit stable il faut et il suffit que $1 + G(p)\beta(p)$ n'ait pas de zéros ni sur ni à l'intérieur de C (en d'autres termes : $Z = 0$). L'utilisation du théorème de Cauchy suppose ici que C ne passe par aucune singularité de $1 + G(p)\beta(p)$, c'est-à-dire par aucun pôle de la boucle ouverte $G(p)\beta(p)$. Si tel n'est pas le cas, une modification du contour est nécessaire, comme nous le verrons en Section 3.2.1.3. D'après le théorème de Cauchy, l'image de C par $1 + G(p)\beta(p)$ doit entourer l'origine $-P$ fois dans le sens horaire (c'est-à-dire P fois dans le sens trigonométrique), où P désigne le nombre de pôles de $G(p)\beta(p)$ contenus dans C , c'est-à-dire le nombre de pôles instables de $1 + G(p)\beta(p)$, qui est aussi le nombre de pôles instables de la boucle ouverte $G(p)\beta(p)$.

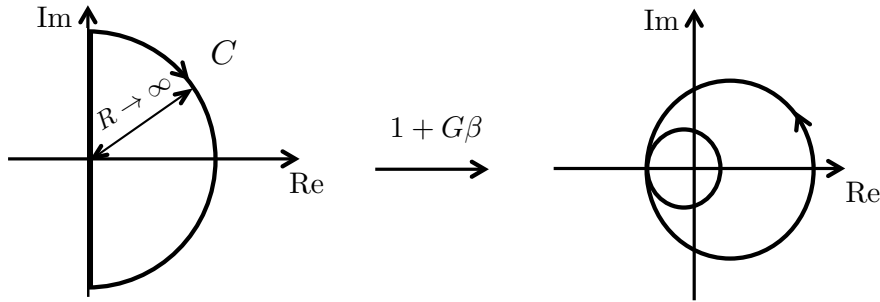


FIGURE 3.7 – Contour et allure de la courbe de Nyquist.

Remarques :

- Si $G(p)\beta(p)$ est stable (stabilité en boucle ouverte), alors $P = 0$ et l'image de C par $1 + G\beta$ ne doit pas entourer l'origine.
- Le nombre de tours de l'image de C par $1 + G\beta$ autour de l'origine est égal au nombre de tours de son image par $G\beta$ autour du point -1 . Ce point -1 dans le plan complexe est appelé *point critique*. Dans la suite, nous étudierons désormais l'image du contour C par l'application $G\beta$ et nous étudierons le nombre de tours autour du point -1 .

- Les cas où la fonction de transfert en boucle fermée a un ou plusieurs pôles sur l'axe imaginaire (en d'autres termes, $1 + G\beta$ a un ou plusieurs zéros sur l'axe imaginaire) correspondent à des systèmes bouclés se comportant comme des intégrateurs ou des oscillateurs. Ils ne sont donc pas stables EBSB. Ces cas de figure se produisent lorsque le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte passe par le point critique.

Exemple 3.2 (Système stable en boucle ouverte ($P = 0$)) Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$G(p)\beta(p) = \frac{K}{(p+a)(p+b)(p+c)}, \quad \text{avec } a, b, c, K > 0. \quad (3.10)$$

L'allure du lieu de Nyquist correspondant est représentée en Figure 3.8.

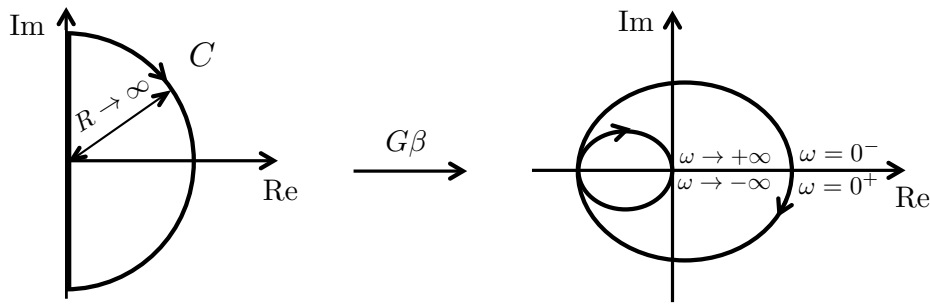


FIGURE 3.8 – Contour et allure de la courbe de Nyquist.

- L'image de la demi-droite $]0; +\infty[$ est le tracé de la réponse fréquentielle en boucle ouverte dans le plan de Nyquist, décrit dans le sens des ω croissants. Elle peut se déduire directement du diagramme de Bode de la boucle ouverte $G(p)\beta(p)$.
- L'image de la demi-droite $]-\infty; 0[$ est symétrique de la précédente par rapport à l'axe réel. En effet :

$$G(j\omega)\beta(j\omega) = \int_0^\infty h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \quad (3.11)$$

où h désigne la réponse impulsionnelle de $G(p)\beta(p)$. On a donc :

$$G(j\omega)\beta(j\omega) = \int_0^\infty h(\tau)[\cos(-\omega\tau) + j\sin(-\omega\tau)]d\tau. \quad (3.12)$$

On en déduit que

$$G(-j\omega)\beta(-j\omega) = \int_0^\infty h(\tau)[\cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau)]d\tau. \quad (3.13)$$

Soit $G(-j\omega)\beta(-j\omega) = \overline{G(j\omega)\beta(j\omega)}$.

- L'image du demi-cercle à l'infini est réduite à un point (en général l'origine) si le système est physiquement réalisable donc passe-bas.

3.2.1.3 Cas de pôles de la boucle ouverte sur l'axe imaginaire

Dans le cas où la fonction de transfert en boucle ouverte possède un ou plusieurs pôles sur l'axe imaginaire, le contour C considéré ci-dessus n'est plus éligible pour le théorème de Cauchy car il passe par des singularités de $G\beta$. Il faut donc le modifier afin de contourner ces singularités. Nous traitons ce cas au travers d'un exemple dans lequel la fonction de transfert en boucle ouverte comporte α intégrations (soit α pôles à l'origine). α est alors appelée la *classe* du système. La fonction de transfert s'écrit alors

$$G(p)\beta(p) = \frac{1}{p^\alpha} H_0(p), \quad (3.14)$$

où $H_0(p)$ désigne une fonction de transfert telle que $H_0(0) = K_0 > 0$. Afin de contourner l'origine, le contour C est modifié comme indiqué en Figure 3.9. Ce contour ne contient pas de pôles instables ($P = 0$). Soit C_ε le demi-cercle de rayon ε (voir Figure 3.9.c) :

$$C_\varepsilon = \{p \in \mathbb{C} : p = \varepsilon e^{j\theta}, \theta \in [-\pi/2; \pi/2]\}. \quad (3.15)$$

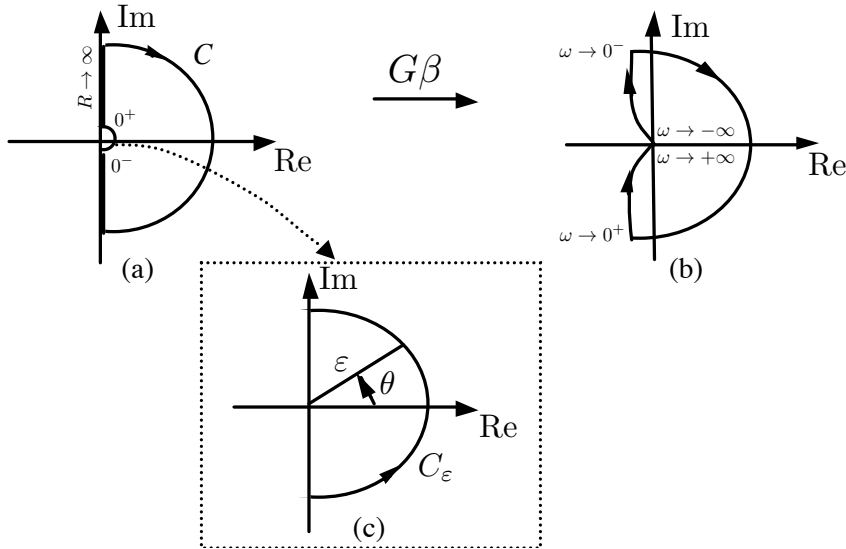


FIGURE 3.9 – Contour et allure de la courbe de Nyquist dans le cas où $G(p)\beta(p)$ possède un pôle à l'origine.

- L'image de la demi-droite $]0; +\infty[$ est le tracé de la réponse fréquentielle en boucle ouverte dans le plan de Nyquist, décrit dans le sens des ω croissants.
- L'image de la demi-droite $] - \infty; 0[$ est symétrique de la précédente par rapport à l'axe réel, comme vu précédemment.
- L'image du demi-cercle C_ε en zéro ($\varepsilon \rightarrow 0$) est composée de α demi-cercles à l'infini décrits dans le sens des aiguilles d'une montre ($\alpha = 1$ demi-cercle sur la Figure 3.9.b). En effet, au voisinage de $p = 0$, la fonction de transfert en boucle ouverte vérifie $G(p)\beta(p) \simeq K_0/p^\alpha$. Pour $p = \varepsilon e^{j\theta}$, on a donc $G(p)\beta(p) \simeq K_0 e^{-j\alpha\theta}/\varepsilon^\alpha$. Lorsque θ évolue de $-\pi/2$ à $\pi/2$, l'argument de $G(p)\beta(p)$ évolue donc de $\alpha\pi/2$ à $-\alpha\pi/2$, ce

qui correspond bien à α demi-cercles dans le sens horaire³. En outre, son module K_0/ε^α tend vers l'infini lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Comme précédemment, l'image du demi-cercle à l'infini est réduite à un point si le système est physiquement réalisable donc passe-bas.

3.2.1.4 Énoncé du critère de Nyquist

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le critère de Nyquist.

Théorème 3.3 (Critère de Nyquist) *Un système bouclé, de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)\beta(p)$ est stable EBSB si et seulement si le lieu de Nyquist de $G(p)\beta(p)$, convenablement complété et décrit dans le sens des ω croissants,*

- 1) *ne passe pas par le point critique -1*
- 2) *fait, autour du point -1 , dans le sens trigonométrique, un nombre de tours égal au nombre de pôles de $G(p)\beta(p)$ à partie réelle **strictement positive**.*

3.2.1.5 Exemples

Exemple 3.4 *Soit la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :*

$$G(p)\beta(p) = \frac{K}{p(1-2p)}. \quad (3.16)$$

Le diagramme de Bode de cette fonction de transfert est donné en Figure 3.10.

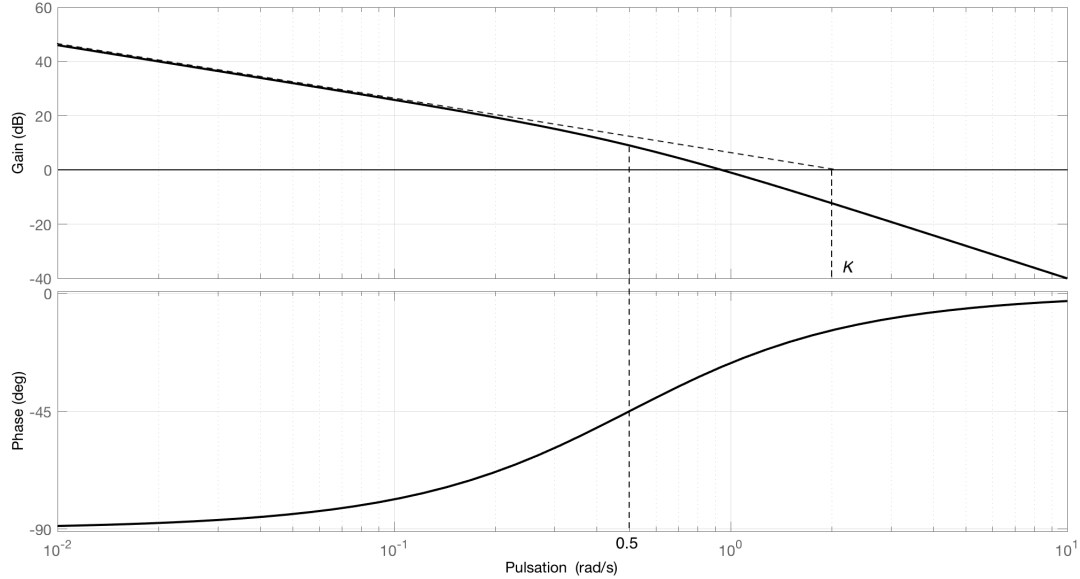


FIGURE 3.10 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (3.16).

3. Notons que ce raisonnement reste valable pour $K_0 < 0$. En effet, dans ce cas la boucle ouverte est approchée par $G(p)\beta(p) \simeq K_0 e^{-j\alpha\theta}/\varepsilon^\alpha = |K_0| e^{j\pi} e^{-j\alpha\theta}/\varepsilon^\alpha$ au voisinage de $p = 0$. Lorsque θ évolue de $-\pi/2$ à $\pi/2$, l'argument de $G(p)\beta(p)$ évolue donc de $\pi + \alpha\pi/2$ à $\pi - \alpha\pi/2$, ce qui correspond là encore à α demi-cercles dans le sens horaire.

Notons que, du fait de la présence d'un intégrateur pur (le système est de classe 1), le comportement en basse fréquence est assimilable à une asymptote de -20 dB/décade . Cette asymptote (K/p) coupe l'axe 0 dB à la pulsation $\omega = K$. A la pulsation de brisure $\omega = 0,5 \text{ rad.s}^{-1}$, le tracé asymptotique du gain passe à une pente de -40 dB/décade , tandis que celui de la phase passe de -90° à 0° du fait du pôle positif $p = 0,5$ de la fonction de transfert. La pulsation de coupure de ce système est $\omega_c \simeq 0,95 \text{ rad.s}^{-1}$.

De ce diagramme de Bode, on déduit le lieu de Nyquist donné par la Figure 3.11. En effet, lorsque $\omega \rightarrow 0^+$, le gain est infini et la phase est de -90° , ce qui se traduit par une branche infinie verticale. Lorsque ω augmente, la phase croît progressivement vers 0° tandis que le gain décroît vers zéro ($-\infty \text{ en dB}$), ce qui explique que le lieu de Nyquist approche l'origine avec une asymptote horizontale. Le tracé pour $\omega \in]-\infty; 0]$ s'obtient, comme on l'a vu en Section 3.2.1.2, par symétrie par rapport à l'axe réel. La présence de branches infinies est due, comme on l'a vu, à la présence d'un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte. En suivant le raisonnement de la Section 3.2.1.3, ces branches infinies se "referment" par un demi-cercle dans le sens horaire, ce qui complète le lieu de Nyquist.

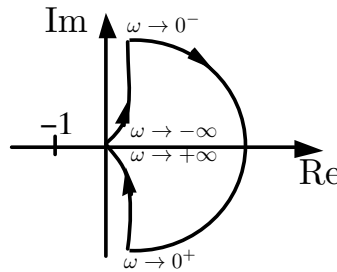


FIGURE 3.11 – Allure de la courbe de Nyquist pour la fonction de transfert en boucle ouverte (3.16).

La fonction de transfert en boucle ouverte possède un pôle à partie réelle strictement positive ($P = 1$). Ce système, qui est instable en boucle ouverte, est également instable en boucle fermée car le lieu de Nyquist n'entoure pas une fois le point critique -1 dans le sens trigonométrique.

Exemple 3.5 Considérons maintenant la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$G(p)\beta(p) = \frac{K(1+p)}{p^2(1+0,1p)}. \quad (3.17)$$

Son diagramme de Bode est donné en Figure 3.12. On constate une première asymptote de -40 dB/décade , correspondant au double intégrateur. Cette asymptote (K/p^2) coupe l'axe 0 dB en $\omega = \sqrt{K}$. Le première brisure intervient en $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et correspond au zéro de la fonction de transfert. La deuxième correspond au pôle et intervient à la pulsation $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

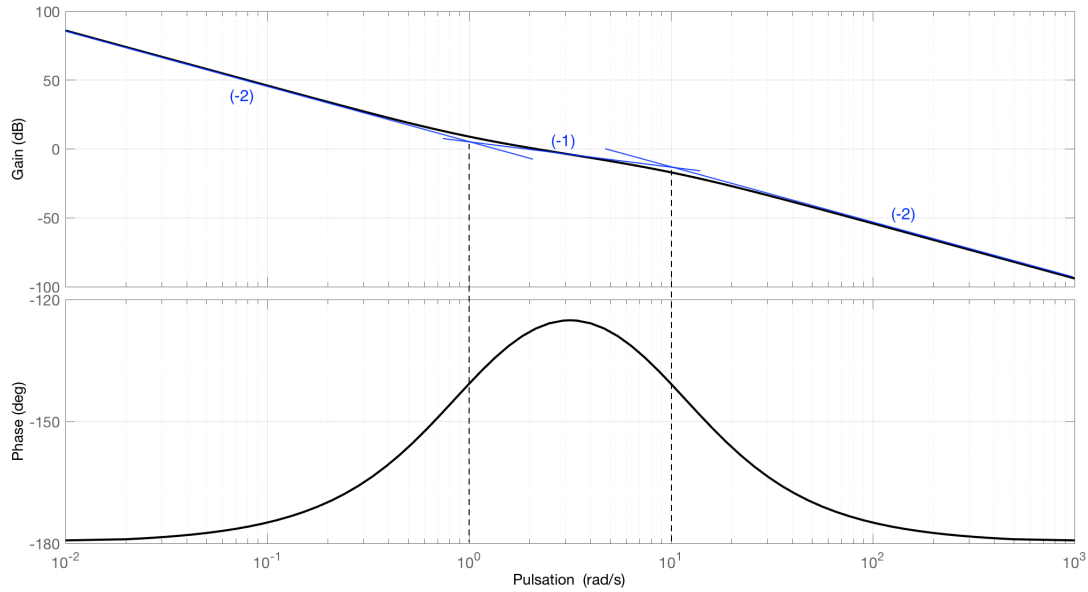


FIGURE 3.12 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (3.17).

Lorsque ω augmente, le gain décroît de manière monotone tandis que la phase augmente d'abord, avant de diminuer. Dans les basses fréquences, le gain est infini et la phase est de -180° , ce qui correspond à une asymptote horizontale dans le plan de Nyquist. La phase évoluant entre -180° et -90° , le lieu de Nyquist se trouvera dans le quartile inférieur gauche du plan complexe. Pour $\omega \rightarrow +\infty$, la phase tend vers -180° et le gain tend vers zéro : le lieu de Nyquist approche donc l'origine avec une asymptote horizontale. En complétant avec le symétrique par rapport à l'axe réel pour $\omega \leq 0$ et en étudiant les branches infinies suivant le raisonnement de la Section 3.2.1.2, on obtient le tracé donné en Figure 3.13.

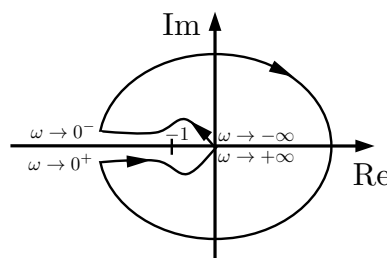


FIGURE 3.13 – Allure de la courbe de Nyquist pour la fonction de transfert en boucle ouverte (3.17).

Nous avons ici $P = 0$ car tous les pôles de la boucle ouverte sont à partie réelle négative ou nulle. Ce système est stable en boucle fermée car le lieu de Nyquist n'entoure pas le point critique -1 .

3.2.1.6 Critère de Nyquist simplifié : critère du revers

Le critère du revers est une version simplifiée du critère de Nyquist, qui n'est cependant **applicable que dans le cas où la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)\beta(p)$ n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive** (il couvre donc les systèmes intégrateurs ou oscillants en boucle ouverte). Il se déduit simplement du critère énoncé plus haut.

Corollaire 3.6 (Critère du revers) *Soit un système tel que sa fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)\beta(p)$ n'ait pas de pôle à partie réelle strictement positive. Un tel système est stable EBSB en boucle fermée si et seulement si, en parcourant le lieu de Nyquist dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique -1 à gauche (Figure 3.14a). Le système est instable en boucle fermée dans le cas où le point -1 est laissé à droite ou si le lieu de Nyquist passe par le point -1 (Figure 3.14b).*

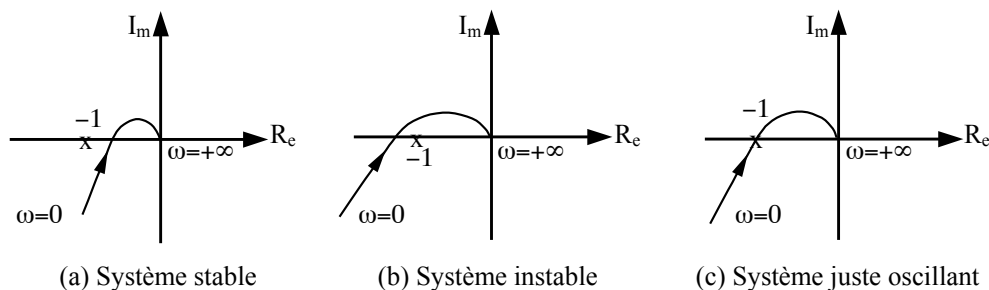


FIGURE 3.14 – Application du critère du revers.

Ce critère est généralement plus simple à utiliser que le critère de Nyquist. En effet, il ne nécessite de tracer le lieu de Nyquist que pour $\omega \in]0; +\infty[$, ce qui s'obtient aisément à partir du diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte. Il n'est donc pas nécessaire de tracer le symétrique par rapport à l'axe réel. De plus, il ne requiert pas d'analyser les branches infinies même dans le cas où la boucle ouverte possède une ou plusieurs intégrations.

3.2.2 Marges de stabilité

Les définitions et concepts ci-dessous ne s'appliquent qu'aux systèmes stables en boucle fermée.

Nous venons de distinguer les systèmes stables des systèmes instables. En pratique, le comportement d'un système strictement stable au sens mathématique n'est pas forcément satisfaisant. En effet, si le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système stable en boucle fermée est trop voisin du point critique, de petites imprécisions sur la valeur des paramètres de sa fonction de transfert risquent d'induire l'instabilité. En outre, comme on le verra, sa réponse en boucle fermée sera très mal amortie.

Les notions de marges présentées ci-dessous interdisent un voisinage immédiat du point -1 . Ces marges représentent donc une "réserve de sécurité", intéressante par exemple pour tenir compte des incertitudes du modèle que l'on utilise par rapport au système physique.

3.2.2.1 Marge de phase – Marge de gain

Interprétation dans le plan de Nyquist

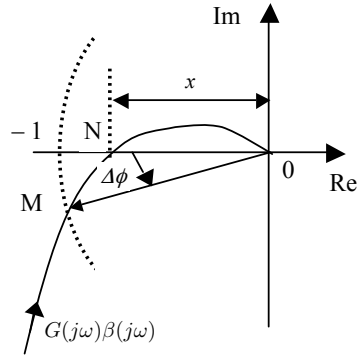


FIGURE 3.15 – Marges de phase et de gain dans le plan de Nyquist.

Le point M est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de la boucle ouverte $G(p)\beta(p)$ avec le cercle centré à l'origine et de rayon unité (Figure 3.15). Le point N est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de $G(p)\beta(p)$ avec le demi-axe réel négatif. On peut alors définir les marges de gain et de phase de la manière suivante :

- La *marge de phase* $\Delta\phi$ est l'angle orienté $(\vec{ON}, \vec{OM})$

$$\Delta\phi = (\vec{ON}, \vec{OM}) \quad (3.18)$$

- La *marge de gain* exprimée en décibels est $\Delta G = 20 \log \frac{1}{x}$:

$$\Delta G = 20 \log \frac{1}{x} \quad \text{où } x = \|\vec{ON}\|. \quad (3.19)$$

Pour les systèmes dont la fonction de transfert en boucle ouverte n'a pas de pôles à partie réelle strictement positive, ces définitions montrent qu'un système est stable EBSB en boucle fermée si et seulement si ses marges de gain et de phase sont strictement positives (critère du revers). Cependant, en pratique, on considère souvent comme marges de sécurité les valeurs suivantes : $\Delta\phi = 45^\circ$ à 60° et $\Delta G = 8$ à 10 dB, délimitant une “zone interdite” représentée Figure 3.16. Ces valeurs restent toutefois indicatives et dépendent fortement de l'application considérée.

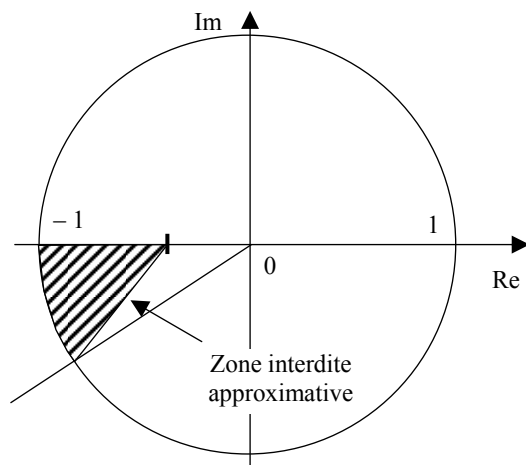


FIGURE 3.16 – Valeurs indicatives des marges de gain et de phase.

Interprétation dans le plan de Bode

Dans un diagramme de Bode, les marges de gain et de phase sont définies comme indiquées Figure 3.17.

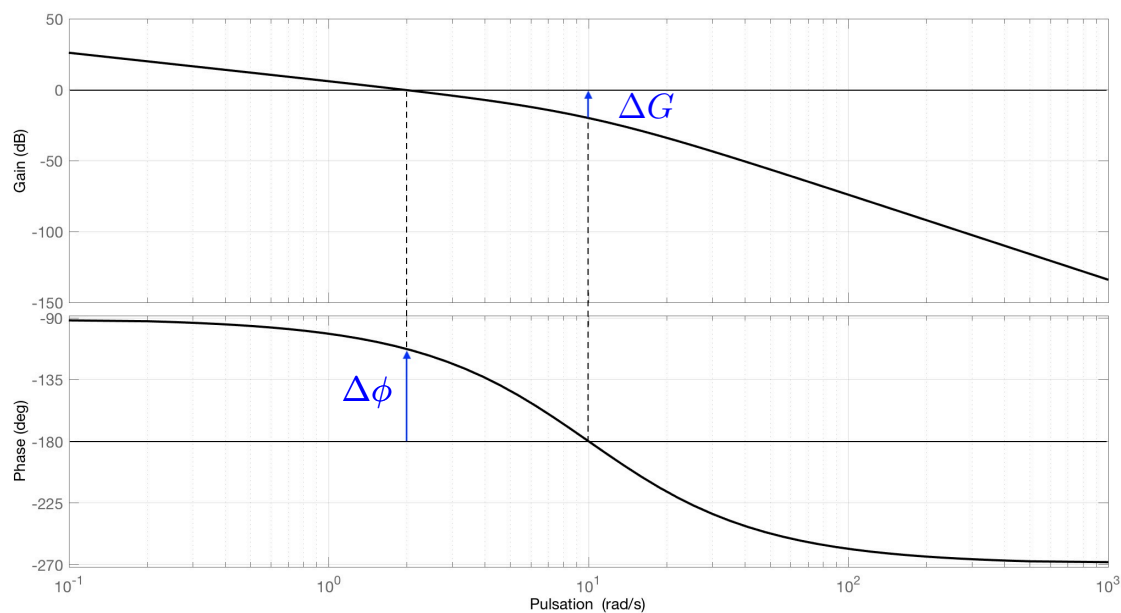


FIGURE 3.17 – Marges de phase et de gain dans le plan de Bode pour

$$G(p)\beta(p) = \frac{2}{p(1+p/10)^2}.$$

- $\Delta\phi = \arg(G(j\omega_c)\beta(j\omega_c)) - (-180^\circ)$, où ω_c désigne la pulsation de coupure de la fonction de transfert en boucle ouverte (c'est-à-dire la pulsation pour laquelle le gain de la boucle ouverte vaut 0 dB : voir Section 3.1.1.3).
- $\Delta G = 0 \text{ dB} - 20 \log(|G(j\omega_\pi)\beta(j\omega_\pi)|)$, où ω_π est la pulsation pour laquelle $\arg(G(j\omega_\pi)\beta(j\omega_\pi)) = -180^\circ$.

Si la courbe de gain coupe l'axe 0 dB en plusieurs points, la marge de phase retenue est la plus faible des valeurs obtenues. Il en va de même pour la marge de gain si la courbe de phase passe plusieurs fois par -180° . Pour la plupart des systèmes physiques (systèmes à déphasage minimal⁴ et de type “passe-bas”), les courbes de module et de phase de la réponse fréquentielle en boucle ouverte ont généralement une allure monotone décroissante. Dans ce cas, les marges de gain et de phase sont définies de manière univoque et la seule considération de marge de phase suffit, le plus souvent, à assurer un amortissement convenable.

Interprétation dans le plan de Black-Nichols

Le plan de Black-Nichols est constitué de la phase (en degrés) de la fonction de transfert en boucle ouverte en abscisse et de son gain (en dB) en ordonnée. Dans un diagramme de Black-Nichols, les marges de gain et phase sont définies comme indiquées Figure 3.18. Les relations précédentes s'appliquent de la même façon.

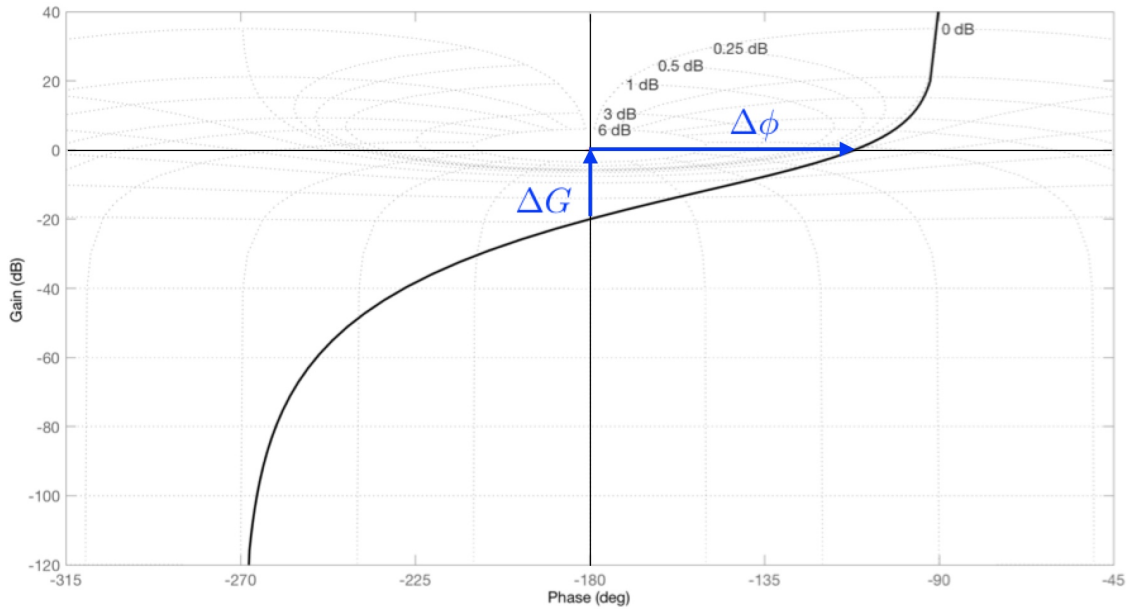


FIGURE 3.18 – Marges de phase et de gain dans le plan de Black-Nichols
pour $G(p)\beta(p) = \frac{2}{p(1+p/10)^2}$.

3.2.2.2 Marge de retard

Considérons un système stable ayant une marge de phase $\Delta\phi$ définie pour une pulsation de coupure ω_c de la fonction de transfert en boucle ouverte, comme illustré Figure 3.19.

4. Un système à déphasage minimal est un système dont la fonction de transfert n'a pas de zéro à partie réelle strictement positive.

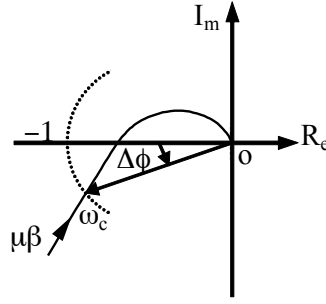


FIGURE 3.19 – Calcul de la marge de retard dans le plan de Nyquist.

L'introduction fictive dans la boucle d'un retard pur τ conduirait à une nouvelle boucle ouverte de fonction de transfert $G(p)\beta(p)e^{-\tau p}$. Sa réponse fréquentielle serait donc $G(j\omega)\beta(j\omega)e^{-j\omega\tau}$. La phase de cette fonction de transfert est donc celle de $G(p)\beta(p)$ abaissée de $\omega\tau$. En particulier, à la pulsation de coupure ω_c le déphasage induit par le retard est de $\omega_c\tau$. Cette chute de phase compromet donc la stabilité lorsqu'elle compense la marge de phase disponible, c'est-à-dire si $\omega_c\tau \geq \Delta\phi$. On définit donc la marge de retard τ_m comme la valeur maximale admissible de retard entraînant juste l'annulation de la marge de phase, c'est-à-dire :

$$\tau_m = \frac{\Delta\phi}{\omega_c} \quad (\Delta\phi \text{ en rad, } \omega_c \text{ en rad.s}^{-1}, \tau_m \text{ en s}). \quad (3.20)$$

Cette notion de marge de retard est ici mise en évidence dans le cas d'un retard pur. Cela aurait pu se faire, de façon similaire, dans le cas d'une dynamique négligée.

3.2.2.3 Marge de module

La marge de module M_m représente la plus petite distance géométrique entre le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)\beta(p)$ et le point -1 , comme indiqué Figure 3.20.

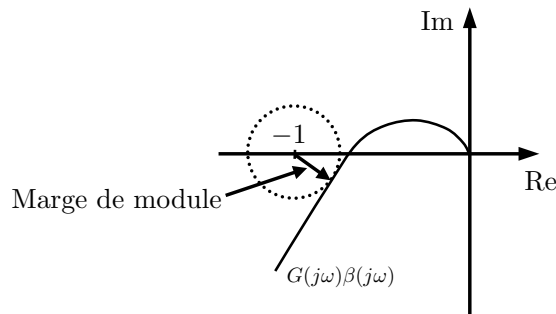


FIGURE 3.20 – Marge de module dans le plan de Nyquist.

Plus précisément, la marge de module est définie comme :

$$M_m = \min_{\omega \in \mathbb{R}^+} |1 + G(j\omega)\beta(j\omega)|. \quad (3.21)$$

A titre indicatif, on impose typiquement une marge de module $M_m > 0,5$.

3.2.2.4 Stabilité conditionnelle

Introduire un gain K dans la boucle (c'est-à-dire considérer la fonction de transfert en boucle ouverte $KG(p)\beta(p)$) engendre une homothétie du lieu de Nyquist (de centre l'origine et de rapport K).

Dans de nombreux cas, il suffit d'affaiblir le gain d'une boucle pour améliorer le degré de stabilité et, inversement, une forte augmentation de ce gain entraîne l'instabilité. Il existe ainsi une condition sur le gain assurant la stabilité (Figure 3.21, exemple 1), le système est alors dit *conditionnellement stable*.

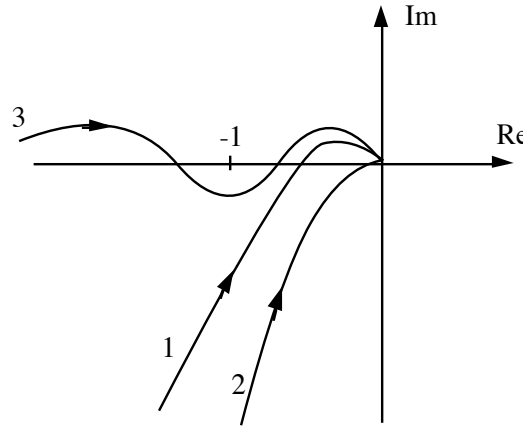


FIGURE 3.21 – Stabilité conditionnelle.

Un autre cas de stabilité conditionnelle est représenté dans l'exemple 3 de la Figure 3.21 : de tels systèmes admettent une plage dans laquelle doit se situer le gain afin de préserver la stabilité. Là encore, on parle de stabilité conditionnelle.

En revanche, certains systèmes sont toujours stables quel que soit le gain (Figure 3.21, Exemple 2) ; c'est notamment le cas des Exemples 3.4 et 3.5 traités précédemment.

3.2.2.5 Relation entre marges de stabilité, amortissement et dépassement de la réponse indicielle

La *réponse indicielle* d'un système désigne sa réponse temporelle en réponse à un échelon d'entrée. Cette réponse indicielle est caractérisée par son *temps du premier maximum* t_m et son *dépassement* :

$$D(\%) = 100 \times \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty} - y(0)} \quad (3.22)$$

où $y_{\max}$ est la valeur maximale de la sortie (atteinte à l'instant t_m), y_{∞} est celle atteinte en régime permanent et $y(0)$ est sa valeur à $t = 0$, comme indiqué par la Figure 3.22. Le dépassement s'exprime en %.

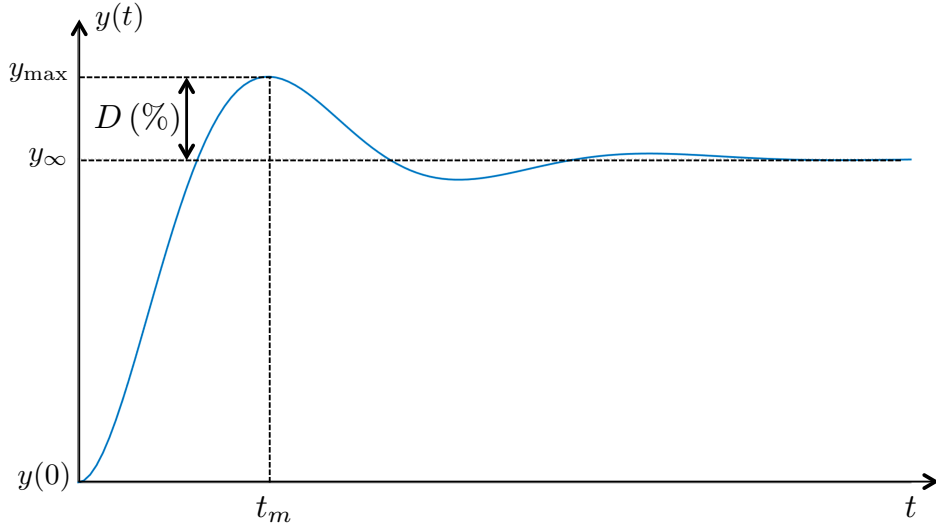


FIGURE 3.22 – Réponse indicielle en boucle fermée, illustration du dépassement et du temps de premier maximum.

Dans le cas où la réponse indicielle ne présente pas de dépassement, la rapidité du système peut être caractérisée par le *temps de réponse à 95 %* t_r , c'est-à-dire le premier instant à partir duquel

$$\left| \frac{y(t) - y_\infty}{y_\infty - y(0)} \right| \leq 0,05, \quad \forall t \geq t_r. \quad (3.23)$$

Dans le cas particulier d'un **système du deuxième ordre sans zéro**, il existe une relation directe entre amortissement et marge de phase, résumée par la Figure 3.23 (qui est également rappelée en Annexe A.9 pour s'y référer plus aisément). Par exemple, un amortissement $\xi = 0,45$ donne lieu à une marge de phase $\Delta\phi$ d'environ 47° , correspondant à un dépassement D d'environ 20% de la réponse indicielle en boucle fermée.

Cependant, dans le cas général (c'est-à-dire pour des systèmes d'ordre plus élevé), on ne peut établir de relation aussi directe entre le dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée et la marge de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Toutefois, dans de nombreux cas, on peut assimiler le comportement d'un système d'ordre élevé à celui d'un deuxième ordre (autour de la pulsation de coupure ω_c). En effet, de nombreux systèmes en boucle ouverte sont de type passe-bas, avec des pentes de -20 dB/décade ou -40 dB/décade au voisinage de ω_c , et une phase comprise entre -180° et 0° . Pour de tels systèmes, on peut donc souvent considérer que cette relation entre marge de phase et amortissement/dépassement reste valable.

Cette approximation n'est valable que dans le cas où le retour β est réel. Dans le cas où $\beta(p)$ est complexe, la marge de phase n'est plus significative de l'amortissement de la réponse indicielle. Une analyse du système en simulation est alors souvent nécessaire.

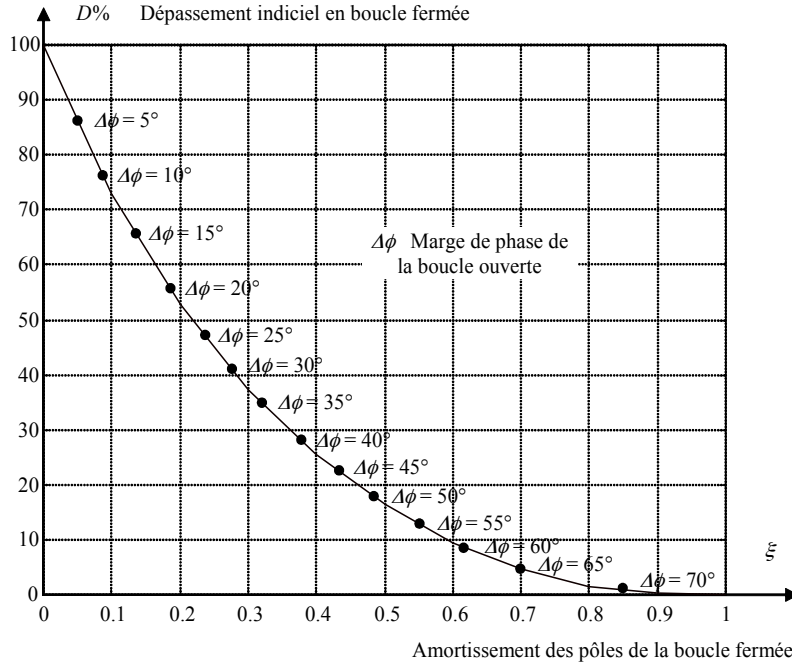


FIGURE 3.23 – Pour les systèmes du deuxième ordre, lien entre : dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée ($D\%$), amortissement des pôles de la boucle fermée (ξ), et marge de phase de la boucle ouverte ($\Delta\phi$).

3.2.2.6 Relation entre rapidité et pulsation de coupure

Par ailleurs, le temps du premier maximum t_m de la réponse indicielle en boucle fermée pour un “bon” amortissement (de 0,4 à 0,7) est donné approximativement par la relation :

$$\omega_c t_m \simeq 3 \quad (3.24)$$

où ω_c désigne la pulsation de coupure en boucle ouverte (pulsation pour laquelle le gain est égal à 1 en module : voir Section 3.1.1.3). Cette dernière relation ne donne qu’une indication approximative de la valeur du produit, la valeur précise dépendant de l’amortissement ξ .

Cette relation se comprend aisément à partir de l’approximation de la réponse fréquentielle en boucle fermée présentée en Section 3.1.2. Pour un retour unitaire, cette approximation est obtenue comme le minimum entre 0 dB et la réponse fréquentielle de la boucle ouverte.

Sous forme standard, la fonction de transfert en boucle fermée s’écrit

$$F(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.25)$$

La Figure 3.24 fait apparaître une brisure à la pulsation de coupure ω_c de la fonction de transfert en boucle ouverte, correspondant donc approximativement à la pulsation propre ω_0 de la fonction de transfert en boucle fermée (voir également les allures de réponse fréquentielle d’un système du deuxième ordre rappelées en Annexe A.5). En d’autres termes, $\omega_c \simeq \omega_0$. Or, pour les systèmes du deuxième ordre sans zéro, une relation directe lie la pulsation propre ω_0 au temps de premier maximum t_m de la réponse indicielle.

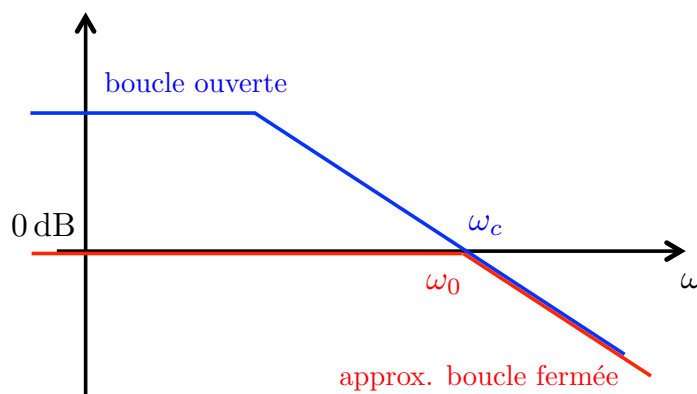


FIGURE 3.24 – Lien entre pulsation de coupure en boucle ouverte ω_c et pulsation propre en boucle fermée ω_0 pour les systèmes du deuxième ordre.

Pour un amortissement ξ donné, cette relation est donnée par :

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (3.26)$$

et est représentée sur la Figure 3.25 (également rappelée en Annexe A.9).

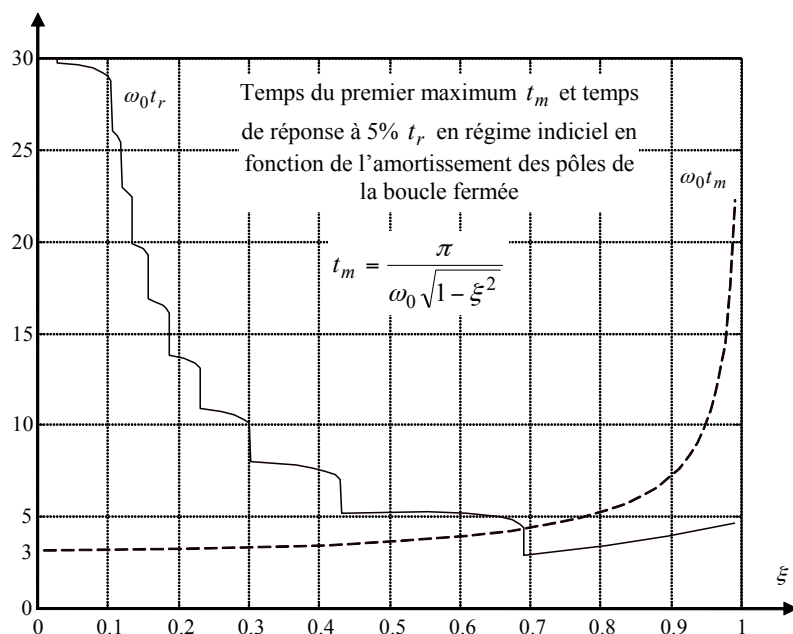


FIGURE 3.25 – Lien entre amortissement ξ , pulsation propre ω_0 et temps de premier maximum t_m pour les systèmes du deuxième ordre sans zéros.

Ainsi, pour un amortissement $\xi \leq 0,7$, on a $\omega_0 t_m \simeq \omega_c t_m \simeq 3$, ce qui justifie l'approximation (3.24).

Là encore, cette relation n'est valable que pour les systèmes du deuxième ordre sans

zéro, mais reste valable pour des systèmes d'ordre plus élevé dont la réponse harmonique peut être assimilée à un deuxième ordre sans zéro autour de ω_c .

3.2.2.7 Relation entre marge de stabilité et résonance harmonique

Une autre façon de caractériser une mesure de la stabilité consiste à analyser la réponse fréquentielle en boucle fermée. Un mauvais amortissement est caractérisé par la présence de pics de résonance. Pour un système dont la fonction de transfert en boucle fermée est du deuxième ordre, on sait relier cette notion de résonance en réponse fréquentielle de la boucle fermée au coefficient d'amortissement ξ des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée par la relation ⁵ :

$$Q(\text{dB}) = -20 \log \left(2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right), \quad (3.27)$$

pour tout $\xi \leq 1/\sqrt{2} \simeq 0,7$ (il n'y a plus résonance à partir de $\xi = 0,7$). Comme on l'a vu en Section 3.2.2.5, pour les systèmes du deuxième ordre, il y a en outre une relation bijective entre amortissement et marge de phase. Ainsi, résonance Q , amortissement ξ et marge de phase $\Delta\phi$ sont étroitement liés pour de tels systèmes, comme le résume la Table 3.26.

Amortissement ξ	Marge de phase $\Delta\phi$	Résonance Q
0,1	12°	12 dB
0,2	22°	8 dB
0,4	43°	2,7 dB
0,6	58°	0,35 dB

FIGURE 3.26 – Pour les systèmes du deuxième ordre, lien entre : amortissement en boucle fermée ξ , marge de phase en boucle ouverte $\Delta\phi$, et résonance Q en boucle fermée.

3.3 Précision

Considérons de nouveau le schéma fonctionnel général rappelé par la Figure 3.27.

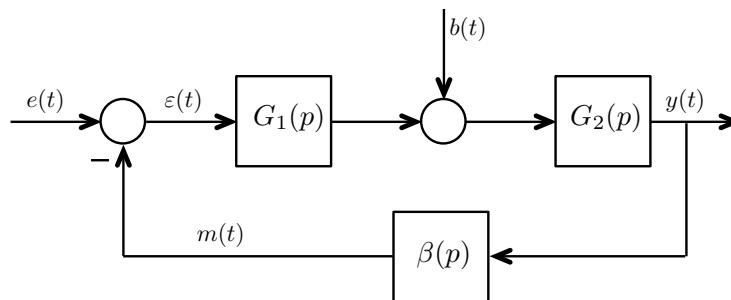


FIGURE 3.27 – Schéma fonctionnel général.

5. Cette relation et une définition plus précise de la résonance sont donnés en Annexe A.5.

On a vu que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $y(t)$ une trajectoire déterminée en général par la consigne $e(t)$.

Outre la stabilité et la rapidité, l'un des critères fondamentaux de la qualité d'un tel système asservi sera donc la précision avec laquelle la loi est suivie, en d'autres termes sa capacité à garantir une faible erreur $\varepsilon(t)$.

Les sources d'erreur sont à la fois les variations de la consigne $e(t)$ et la perturbation $b(t)$. On appliquera le principe de superposition pour sommer ces deux types d'erreurs. L'erreur ε se décompose en une erreur transitoire (ou dynamique) ε_t et une erreur permanente ε_p (voir Section 2.3).

Les spécifications sur l'erreur sont formulées le plus souvent sous l'une des formes suivantes :

- erreur permanente ε_p bornée ou nulle, en réponse à des consignes ou perturbations canoniques (échelon, rampe, sinusoïde).
- erreur transitoire ε_t bornée pour des entrées ayant certaines caractéristiques données.

En vertu du principe de superposition :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_b(t), \quad (3.28)$$

où ε_e désigne l'erreur introduite par la consigne :

$$\varepsilon_e(p) = \frac{1}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)} E(p), \quad (3.29)$$

et ε_b désigne l'erreur introduite par la perturbation :

$$\varepsilon_b(p) = \frac{-G_2(p)\beta(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)} B(p). \quad (3.30)$$

Ces expressions se calculent simplement en envisageant suivant le cas l'un des schémas blocs de la Figure 3.28 (voir Section 3.1.1).

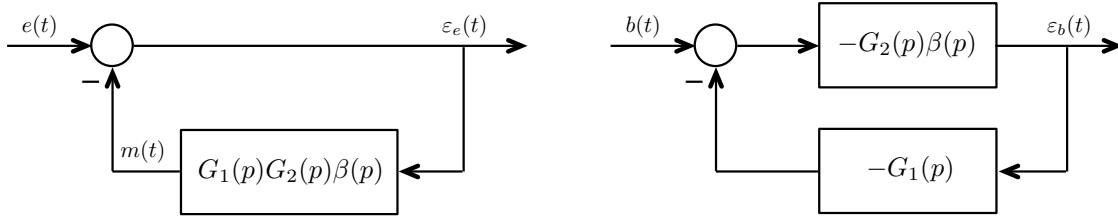


FIGURE 3.28 – Calcul de l'erreur : vis-à-vis de la consigne à perturbation nulle (gauche) et vis-à-vis de la perturbation à consigne nulle (droite).

Remarque : le comparateur utilisé dans le schéma ci-dessus réalise bien une différence, ce qui justifie le signe du retour.

3.3.1 Précision en régime permanent

L'étude de l'erreur permanente se fait souvent en invoquant le théorème de la valeur finale, que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 3.7 (Théorème de la valeur finale en temps continu) Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction causale et localement intégrable et $Y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sa transformée de Laplace. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ existe alors elle est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p). \quad (3.31)$$

3.3.1.1 Précision vis-à-vis de la consigne

Considérons dans un premier temps l'effet d'une consigne générique $E(p)$, en négligeant l'effet de la perturbation ($B(p) = 0$). A partir de la relation (3.29), le théorème de la valeur finale nous permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon_e(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)}. \quad (3.32)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte, c'est-à-dire le nombre d'intégrateurs de $G_1(p)G_2(p)\beta(p)$. Au voisinage de $p = 0$, la fonction de transfert en boucle ouverte peut alors s'écrire :

$$G_1(p)G_2(p)\beta(p) \simeq \frac{K_0}{p^\alpha}, \quad (3.33)$$

où K_0 est une constante. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1 + K_0/p^\alpha} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K_0} E(p). \quad (3.34)$$

Consigne en échelon

Dans le cas d'une consigne en échelon : $E(p) = E_0/p$, où E_0 désigne l'amplitude de l'échelon. On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K_0} E_0. \quad (3.35)$$

Cette erreur permanente est donc nulle si $\alpha \geq 1$, c'est-à-dire si la fonction de transfert en boucle ouverte $G_1(p)G_2(p)\beta(p)$ présente au moins une intégration. En général, $\lim_{p \rightarrow 0} \beta(p)$ est finie, d'où la nécessité pour la chaîne directe $G_1(p)G_2(p)$ de présenter une ou plusieurs intégrations. On peut donc conclure que :

- Un système de classe au moins égale à 1 en boucle ouverte présente une erreur permanente nulle en réponse à un échelon de consigne.
- Si la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 0, l'erreur permanente est égale à :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_e(t) = \frac{E_0}{1 + K_0}, \quad (3.36)$$

où K_0 désigne le gain statique de la boucle ouverte $G_1(p)G_2(p)\beta(p)$. On constate alors que l'erreur permanente est inversement proportionnelle à ce gain.

Consigne en rampe

Dans le cas d'une consigne en rampe : $E(p) = \frac{V_0}{p^2}$, où V_0 désigne le coefficient directeur de la rampe. On a alors par (3.34) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K_0} V_0. \quad (3.37)$$

On peut donc conclure que, pour une consigne en rampe, l'erreur permanente en boucle fermée est :

- nulle si la classe α de la boucle ouverte est d'au moins 2
- égale à V_0/K_0 si la boucle ouverte est de classe 1 (cette erreur permanente est alors appelée *erreur de trainage*)
- infinie si la boucle ouverte est de classe 0.

Consigne sinusoïdale

Appliquons au système une entrée sinusoïdale d'amplitude E_0 et de pulsation Ω :

$$e(t) = E_0 \sin(\Omega t). \quad (3.38)$$

Ici, il n'est **pas possible d'appliquer le théorème de la valeur finale** puisque l'erreur résultante du système va elle aussi être harmonique (et, donc, n'admettra pas de limite lorsque $t \rightarrow \infty$). L'amplitude $\bar{\varepsilon}_e$ de cette erreur en régime permanent peut toutefois être déduite de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle fermée (voir Équation (3.29)) :

$$\bar{\varepsilon}_e = \frac{1}{|1 + G_1(j\Omega)G_2(j\Omega)\beta(j\Omega)|} E_0. \quad (3.39)$$

En effet, le signal d'entrée n'excite le système qu'à la pulsation Ω : l'amplification est donc donnée par la valeur du module de la fonction de transfert (3.29) à la pulsation Ω . Si Ω est dans la bande passante de la boucle ouverte, $|G_1(j\Omega)G_2(j\Omega)\beta(j\Omega)| > 1$, d'où l'approximation :

$$\bar{\varepsilon}_e = \frac{E_0}{|G_1(j\Omega)G_2(j\Omega)\beta(j\Omega)|}. \quad (3.40)$$

L'amplitude de l'erreur permanente est donc inversement proportionnelle au module de la fonction de transfert en boucle ouverte à la pulsation Ω . Afin d'obtenir une précision en régime permanent ε_{max} donnée (c'est-à-dire $|\varepsilon_e(t)| \leq \varepsilon_{max}$ pour tout t suffisamment grand), il est donc nécessaire d'avoir

$$\frac{1}{|G_1(j\Omega)G_2(j\Omega)\beta(j\Omega)|} \leq \frac{\varepsilon_{max}}{E_0}. \quad (3.41)$$

soit encore

$$\boxed{|G_1(j\Omega)G_2(j\Omega)\beta(j\Omega)| \geq \frac{E_0}{\varepsilon_{max}}}. \quad (3.42)$$

L'augmentation de la précision conduit donc à une augmentation du gain de la boucle ouverte sur la plage fréquentielle $[0; \Omega]$, comme représenté sur la Figure 3.29.

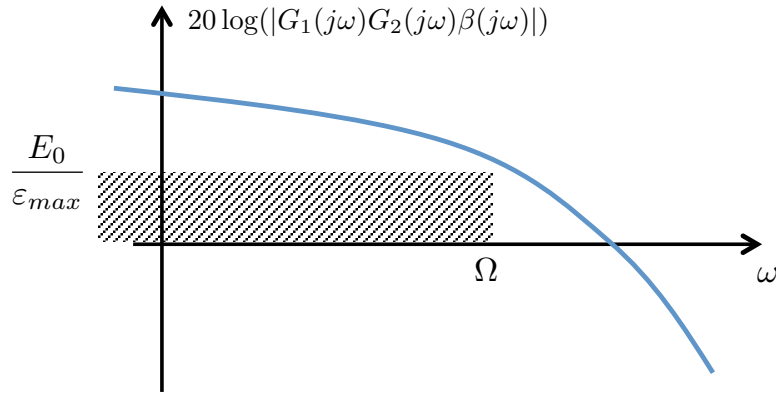


FIGURE 3.29 – Gabarit fréquentiel pour une précision permanente $\varepsilon_{\max}$ en réponse à une consigne sinusoïdale $e(t) = E_0 \sin(\Omega t)$.

3.3.1.2 Précision vis-à-vis de la perturbation

Considérons maintenant une perturbation $B(p)$ générique, en négligeant l'effet de la consigne ($E(p) = 0$). A partir de la relation (3.30), le théorème de la valeur finale nous permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_b(t) = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p G_2(p) \beta(p)}{1 + G_1(p) G_2(p) \beta(p)} B(p). \quad (3.43)$$

Pour une perturbation en échelon d'amplitude B_0 : $B(p) = B_0/p$, on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_b(t) = - \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G_2(p) \beta(p)}{1 + G_1(p) G_2(p) \beta(p)} B_0. \quad (3.44)$$

Ainsi, l'erreur en régime permanent est nulle si et seulement si

$$\lim_{p \rightarrow 0} G_2(p) \beta(p) = 0 \quad \text{ou} \quad G_1(p) \sim_{p \rightarrow 0} \frac{K_1}{p^\alpha}, \quad \alpha \geq 1. \quad (3.45)$$

En général, G_2 et β ne sont pas dérivateurs. La première condition est donc rarement remplie. On retiendra donc qu'un système comportant en boucle ouverte au moins une intégration en **amont du point d'application de la perturbation** (en d'autres termes, G_1 est de classe non nulle), présente une erreur permanente nulle en réponse à un échelon de perturbation.

3.3.1.3 Remarque sur les systèmes de classe 2

Il suffit que $G_1(p)$ soit un système intégrateur pour annuler à la fois les erreurs permanentes ε_e et ε_b . Si $G_2(p)$ comporte une intégration, on peut être conduit à introduire une intégration supplémentaire dans $G_1(p)$ pour annuler l'erreur permanente sur ε_b . On aura alors affaire à un système de classe 2 en boucle ouverte qui, s'il est stable, présentera une réponse indicielle en boucle fermée similaire à celle reproduite Figure 3.30, pour laquelle les deux aires hachurées sont égales.

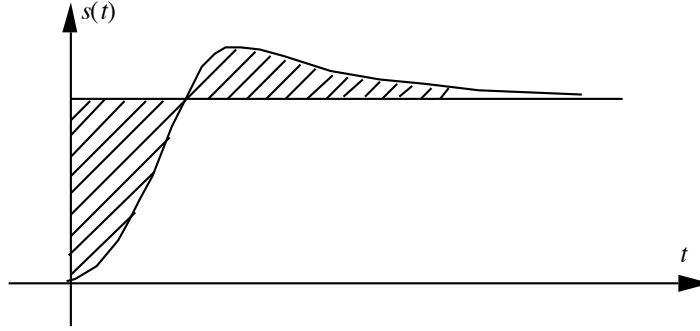


FIGURE 3.30 – Réponse indicielle type en boucle fermée d'un système de classe 2.

En effet, considérons un tel système, représenté par la Figure 3.31.

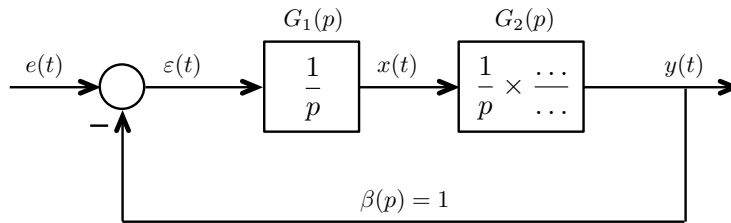


FIGURE 3.31 – Schéma-bloc d'un système de classe 2.

L'évolution du signal $x(t)$ est alors définie par :

$$x(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau = \int_0^t (e(\tau) - y(\tau)) d\tau. \quad (3.46)$$

Si le système est stable, du fait de la présence d'intégrateurs dans la boucle ouverte, on montre facilement⁶ que, en réponse à un échelon de consigne,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad (3.47)$$

On en déduit que

$$\int_0^\infty (e(\tau) - y(\tau)) d\tau = 0, \quad (3.48)$$

et cette intégrale représente l'aire algébrique hachurée dans la Figure 3.31. Ces systèmes, doublement intégrateurs, présentent des inconvénients :

- stabilité conditionnelle (voir Section 3.2.2.4)
- dépassement important en réponse indicielle.

3.3.1.4 Récapitulatif

Le tableau de la Figure 3.32 récapitule les erreurs en régime permanent à prévoir suivant les cas.

6. Par exemple, en appliquant le théorème de la valeur finale à $x(t)$.

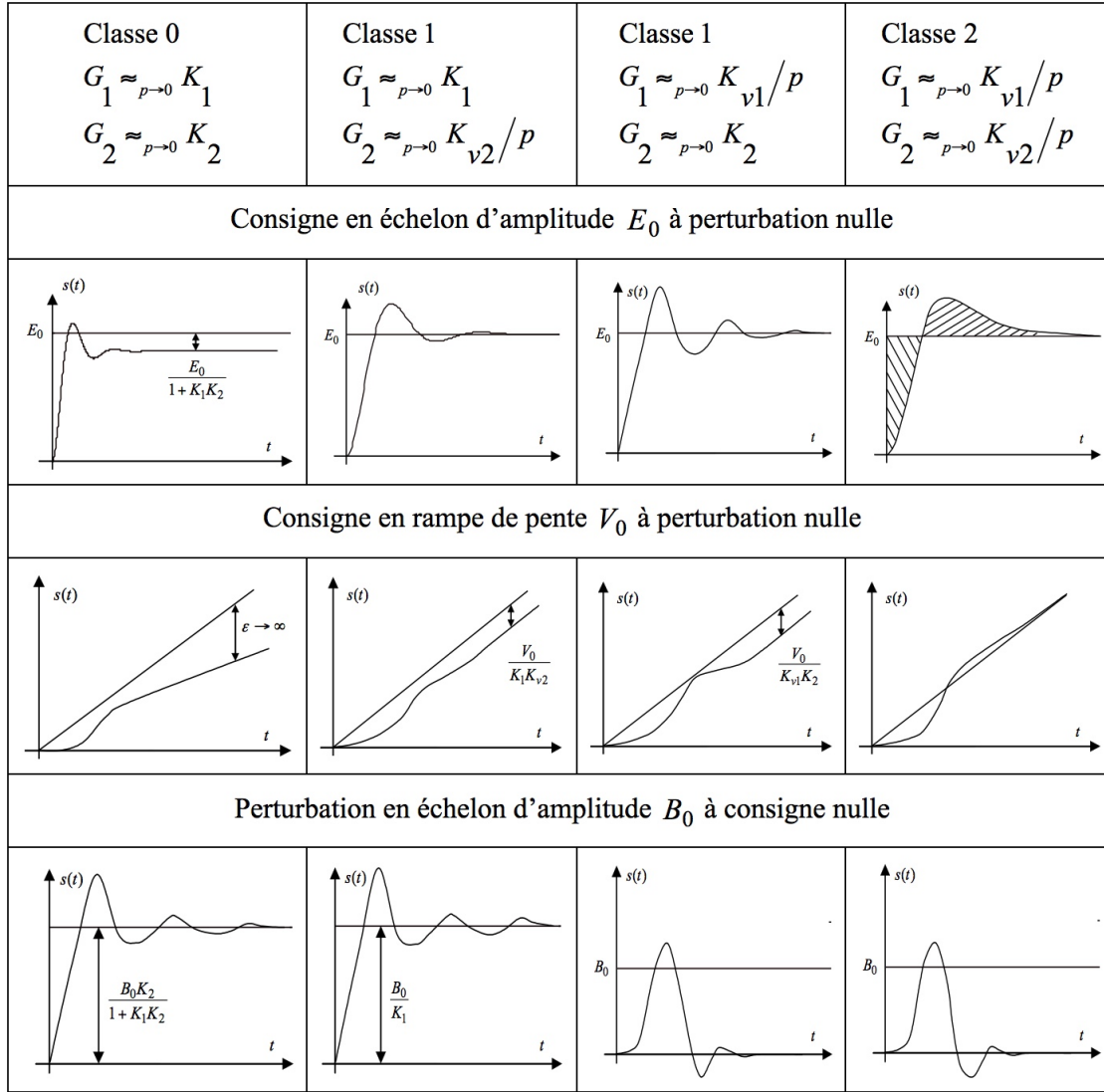


FIGURE 3.32 – Récapitulatif des erreurs permanentes.

3.3.2 Précision transitoire – Méthode de la “sinusoïde équivalente”

On envisage ci-dessous le cas d'un système asservi pour lequel les perturbations sont supposées nulles. Le problème consiste alors à limiter l'erreur dynamique ε_d à une valeur ε_{dmax} donnée. Il s'agit ici de limiter l'erreur à chaque instant, et non plus seulement en régime permanent.

Pour un signal de consigne quelconque, l'expression de l'erreur dynamique est excessivement complexe. Cependant, s'il existe une limitation des signaux de consigne en vitesse et en accélération, il est possible d'obtenir une relation caractérisant la précision exigée. Le signal de consigne est ainsi supposé caractérisé par les contraintes suivantes :

$$\left| \frac{de}{dt}(t) \right| \leq v_M \quad \text{et} \quad \left| \frac{d^2e}{dt^2}(t) \right| \leq \gamma_M, \quad (3.49)$$

où v_M et γ sont des bornes données, caractérisant respectivement la vitesse et l'accélération des signaux de consigne considérés. Parmi tous les signaux satisfaisant ces conditions, le signal sinusoïdal est de loin le plus simple. Nous ferons l'étude en remplaçant le signal quelconque par ce signal sinusoïdal "équivalent", que nous supposerons suffisamment représentatif des signaux considérés.

Soit $e(t) = E_0 \sin(\Omega t)$ ce signal. Les amplitudes de la vitesse et de l'accélération maximales de ce signal sont respectivement données par :

$$v_M = E_0 \Omega \quad \text{et} \quad \gamma_M = E_0 \Omega^2. \quad (3.50)$$

Ces deux équations définissent un signal sinusoïdal qui doit être recopié avec une erreur inférieure à ε_{dmax} . À partir de ces équations, on obtient E_0 et Ω :

$$E_0 = \frac{v_M^2}{\gamma_M} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\gamma_M}{v_M}. \quad (3.51)$$

Comme on l'a vu en Section 3.3.1.1, si Ω est dans la bande passante de la boucle ouverte, l'erreur $\varepsilon_e(t)$ due à une telle entrée $e(t) = E_0 \sin(\Omega t)$ peut être approchée par un signal harmonique dont l'amplitude $\bar{\varepsilon}_e$ est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_e \simeq \frac{E_0}{|G_1(j\Omega)G_2(j\Omega)\beta(j\Omega)|}. \quad (3.52)$$

En remplaçant E_0 et Ω par leurs expressions (3.51), on déduit de (3.42) qu'afin d'obtenir une précision transitoire ε_{dmax} donnée, il est nécessaire d'avoir :

$$\left| G_1\left(j\frac{\gamma_M}{v_M}\right) G_2\left(j\frac{\gamma_M}{v_M}\right) \beta\left(j\frac{\gamma_M}{v_M}\right) \right| \geq \frac{v_M^2}{\varepsilon_{dmax} \gamma_M}. \quad (3.53)$$

L'augmentation de la précision transitoire conduit donc à une augmentation du gain de la boucle ouverte sur la plage fréquentielle $[0; \gamma_M/v_M]$. Notons que cette condition est nécessaire et peut dans certains cas n'être pas suffisante.

3.3.3 Conclusion

D'une manière générale, les erreurs (tant permanentes que transitoires) décroissent lorsque le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte augmente, c'est-à-dire lorsque la bande passante du système augmente.

Chapitre 4

Analyse des systèmes asservis à temps discret (stabilité, rapidité, précision)

Ce chapitre a pour but d'analyser les performances en termes de stabilité, rapidité et précision des systèmes asservis évoluant en temps discret. Les notions abordées sont identiques à celles développées lors du chapitre précédent, mais les outils mathématiques changent pour s'adapter au formalisme de modélisation des systèmes discrets. Comme il a été mentionné au Chapitre 2, une classe très importante des systèmes asservis discrets est constituée des systèmes continus pilotés par ordinateur, pour lesquels le processus continu peut être associé à un convertisseur numérique-analogique (CNA), comme par exemple un bloqueur, et un convertisseur analogique-numérique (CAN), tel qu'un échantillonneur. Un premier paragraphe examine donc ci-dessous la modélisation adaptée à ce type de systèmes. Les paragraphes suivants envisagent la stabilité et la précision des systèmes discrets en général.

4.1 Modélisation des systèmes pilotés par ordinateur

4.1.1 Impact de l'ensemble échantillonneur-bloqueur

Pour étudier l'effet conjugué du CAN et du CNA intervenant dans la structure d'un système asservi piloté par ordinateur, on considère l'ensemble échantillonneur-bloqueur représenté sur la Figure 4.1, où T_e désigne la période d'échantillonnage.

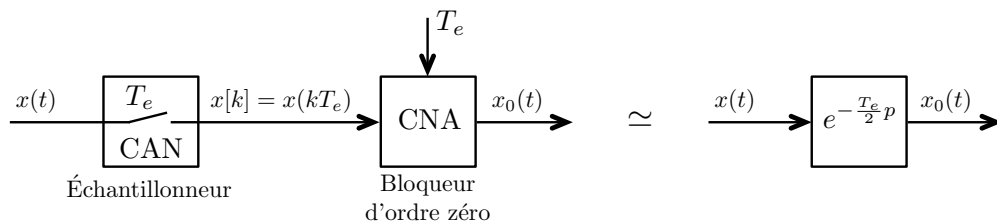


FIGURE 4.1 – Ensemble échantillonneur-bloqueur.

Compte tenu des opérations mises en œuvre visibles sur la réponse temporelle de la Figure 4.2, le signal retardé d'une demi-période d'échantillonnage constitue une bonne approximation continue et invariante du signal échantillonné-bloqué.

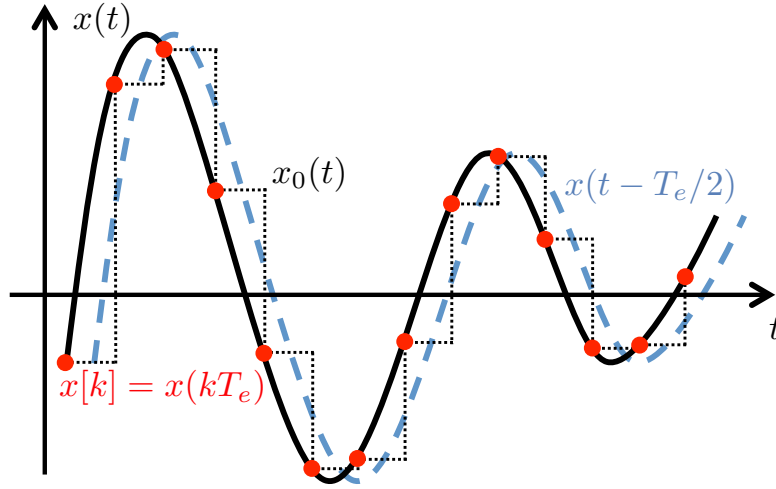


FIGURE 4.2 – Réponse temporelle de l'ensemble échantillonneur-bloqueur.

Les transformées de Laplace du signal d'entrée x et du signal de sortie x_0 de ce bloc équivalent peuvent donc être approchées par la relation suivante :

$$\frac{X_0(p)}{X(p)} \simeq e^{-\frac{T_e}{2}p}, \quad (4.1)$$

où T_e désigne la période d'échantillonnage. On constate dès lors que l'échantillonneur-bloqueur (ensemble CAN + CNA) diminue la stabilité de la boucle, en introduisant un retard pur, c'est à dire un déphasage (voir Section 3.2.2.2). Son impact sur la stabilité globale d'une boucle d'asservissement peut être non négligeable selon le choix de la période d'échantillonnage.

4.1.2 Modèle discret équivalent

Soit un système à temps continu piloté par ordinateur. La séquence des commandes, que l'on peut représenter par une suite de nombres¹ $u[k]$, $k \in \mathbb{N}$, est transformée en commande à temps continu par un convertisseur numérique-analogique (CNA). La sortie du système sera une grandeur continue, mais ne sera perçue par le ordinateur qu'aux instants d'échantillonnage kT_e (en supposant que l'envoi de commande et l'échantillonnage soient synchrones). Ce système se présente alors comme indiqué Figure 4.3.

1. Nous adopterons désormais la convention suivante : un signal à temps discret sera indiqué avec des crochets (par exemple, $y[k]$) pour le différencier plus clairement des signaux à temps continu (par exemple, $y(t)$). Ainsi, $y(kT_e)$ représente la valeur du signal à temps continu y à l'instant $t = kT_e$.

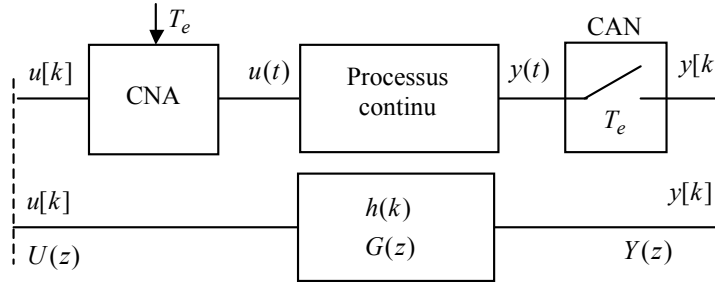


FIGURE 4.3 – Modélisation équivalente d'un processus continu avec son environnement CNA/CAN.

La fonction de transfert $G(z)$ équivalente est obtenue en déterminant la transformation en Z de sa réponse impulsionnelle. On supposera pour effectuer ce calcul que le CNA maintient la commande constante entre deux instants d'échantillonnage (bloqueur d'ordre zéro) :

$$u(t) = u(kT_e), \quad \forall t \in [kT_e; (k+1)T_e[. \quad (4.2)$$

La commande $u(t)$ obtenue à partir de l'impulsion discrète (la réponse impulsionnelle) est représentée Figure 4.4.

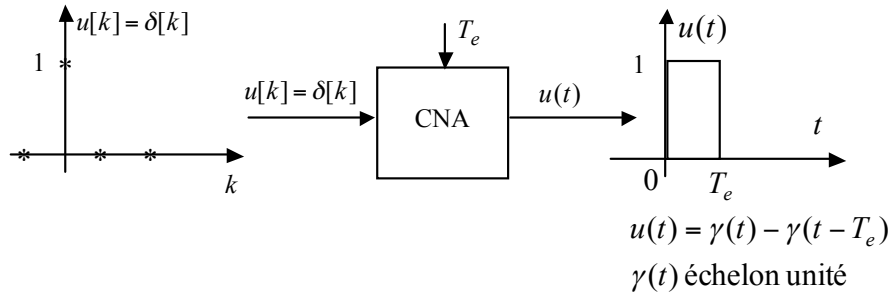


FIGURE 4.4 – Réponse du bloqueur d'ordre zéro à une impulsion de Dirac.

En d'autres termes, la réponse impulsionnelle du CNA est donnée par la différence entre deux échelons décalés : $u(t) = \gamma(t) - \gamma(t - T_e)$ où γ désigne l'échelon unité. Par le principe de superposition, cette commande $u(t)$ appliquée au processus continu produit une sortie $y(t)$ définie comme la somme de deux réponses indicielles décalées :

$$y(t) = y_0(t) - y_0(t - T_e), \quad (4.3)$$

où $y_0(t)$ désigne la **réponse indicielle** du processus continu. L'échantillonnage de cette grandeur à la cadence T_e , par le CAN, fournit enfin la suite $y[k]$, réponse impulsionnelle discrète :

$$y[k] = y(kT_e) = y_0(kT_e) - y_0((k-1)T_e). \quad (4.4)$$

La transformée en Z de $y[k]$ étant, par définition, la fonction de transfert discrète équivalente $G(z)$ recherchée, on obtient :

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z[y_0[k]], \quad (4.5)$$

où $y_0[k] = y_0(kT_e)$. y_0 désignant la réponse indicielle du processus continu, on écrit couramment par abus de langage :

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)}{p} \right] \quad (4.6)$$

où $G(p)$ désigne la fonction de transfert du processus continu.

4.1.3 Application à une structure bouclée

Considérons alors l'asservissement de la Figure 4.5 réalisé à l'aide d'un ordinateur, pour lequel $C(z)$ traduit la fonction de transfert d'un correcteur numérique (implantée de façon pratique sur ordinateur par une équation aux différences), $G(p)$ la fonction de transfert du système continu et $\beta(p)$ la fonction de transfert du capteur.

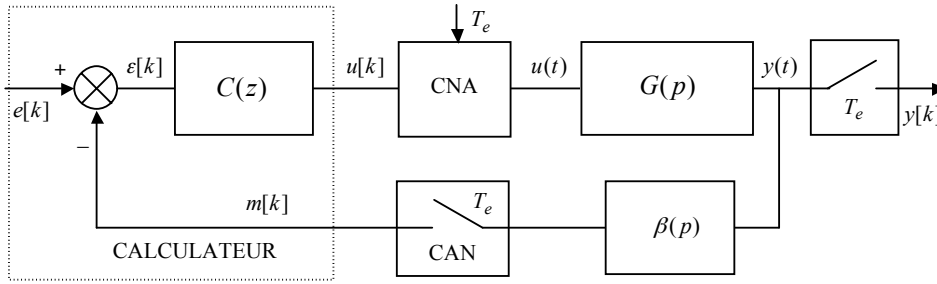


FIGURE 4.5 – Commande numérique d'un système continu piloté par ordinateur.

Posons les notations :

$$Y(z) = Z[y[k]], \quad M(z) = Z[m[k]], \quad (4.7)$$

$$U(z) = Z[u[k]], \quad E(z) = Z[e[k]]. \quad (4.8)$$

Puisque la transformation en Z ne s'applique qu'à des signaux discrets, on considère le signal défini par $y[k] = y(kT_e)$ en supposant la présence d'un CAN fictif en sortie du processus continu. On a alors les relations suivantes (voir Section 4.1.2) :

$$Y(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)}{p} \right] U(z) \quad (4.9)$$

$$M(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)\beta(p)}{p} \right] U(z). \quad (4.10)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est ainsi donnée par :

$$H(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = C(z)(1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)\beta(p)}{p} \right]. \quad (4.11)$$

En posant

$$G_m(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)\beta(p)}{p} \right], \quad (4.12)$$

on obtient ainsi :

$$\boxed{H(z) = C(z)G_m(z).} \quad (4.13)$$

On a de plus la relation :

$$U(z) = C(z)(E(z) - M(z)). \quad (4.14)$$

De (4.9), (4.10) et (4.14), nous déduisons la fonction de transfert de la boucle fermée :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{C(z)(1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(p)}{p}\right]}{1 + C(z)(1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(p)\beta(p)}{p}\right]}. \quad (4.15)$$

Soit, en posant

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(p)}{p}\right] \quad (4.16)$$

la fonction de transfert recherchée :

$$\boxed{F(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G_m(z)}.} \quad (4.17)$$

4.1.4 Cas particulier d'un retour unitaire

Lorsque le retour est unitaire ($\beta(p) = 1$), les expressions précédentes s'écrivent respectivement :

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{\varepsilon(z)} = C(z)G(z)} \quad \text{et} \quad \boxed{F(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)}} \quad (4.18)$$

$$\text{avec } G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(p)}{p}\right]. \quad (4.19)$$

Le système "hybride" de la Figure 4.5, associant continu et discret, peut alors être modélisé aux instants d'échantillonnage par le système complètement discret de la Figure 4.6.

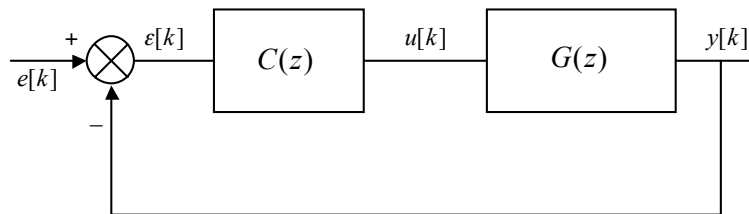


FIGURE 4.6 – Schéma discret équivalent pour un retour unitaire.

4.2 Stabilité

Nous considérons par la suite que le système asservi discret est modélisé comme indiqué Figure 4.7.

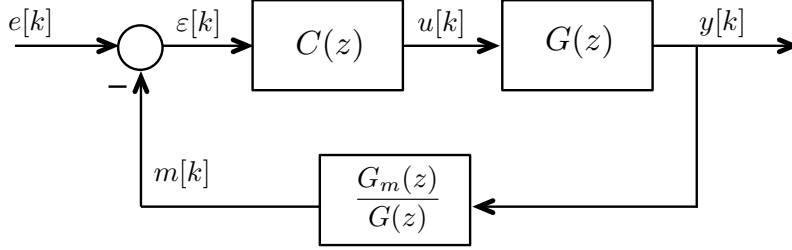


FIGURE 4.7 – Structure simplifiée d'un système asservi discret.

En considérant $m[k]$ comme sortie, ce schéma-bloc peut être réécrit comme un système bouclé avec retour unitaire, comme celui décrit par la Figure 4.8.

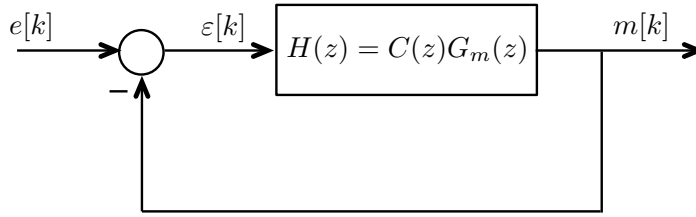


FIGURE 4.8 – Réécriture du système bouclé.

Comme pour les systèmes à temps continu, l'analyse des systèmes asservis à temps discret nécessite tout d'abord d'examiner les performances en termes de stabilité. Le bouclage d'un système modifie ses caractéristiques, en particulier sa stabilité.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$F(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)}, \quad (4.20)$$

où $H(z) = C(z)G_m(z)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte. La stabilité du système bouclé est caractérisée par les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée, c'est-à-dire les zéros de la fonction $1 + H(z)$, qui correspondent aux racines de l'équation caractéristique

$$\text{Numérateur}(1 + H(z)) = 0. \quad (4.21)$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité EBSB est que toutes les racines de cette équation soient strictement contenues dans le cercle unité (c'est-à-dire qu'elles soient de module strictement inférieur à 1).

Il a été montré dans le cours de “Modélisation” que le critère algébrique de Jury permettait de préciser la stabilité EBSB sans avoir à calculer les racines de l’équation caractéristique.

Il existe également des critères permettant de quantifier le “degré” de stabilité d’un système, ces critères sont généralement géométriques, et affinent la notion de stabilité fournie par l’examen des racines de l’équation caractéristique. C’est le cas du critère de Nyquist décrit ci-dessous.

4.2.1 Stabilité des systèmes bouclés

4.2.1.1 Critère de Nyquist

Comme dans le cas continu (voir Section 3.2.1), ce critère se fonde sur le théorème de Cauchy (Théorème 3.1). Considérons donc le système bouclé de la Figure 4.8. On a vu que la condition nécessaire et suffisante de stabilité de la boucle fermée est que sa fonction de transfert $F(z)$ n’ait pas de pôles sur ou à l’extérieur du cercle unité, c’est-à-dire que le numérateur de $1 + H(z)$ ait toutes ses racines à l’intérieur du cercle unité, où $H(z)$ désigne la fonction de transfert en boucle ouverte.

Appliquons le théorème de Cauchy à la fonction complexe $1 + H$ en prenant comme contour C la frontière du domaine de stabilité constituée par le cercle unité orienté dans le sens trigonométrique (Figure 4.9).

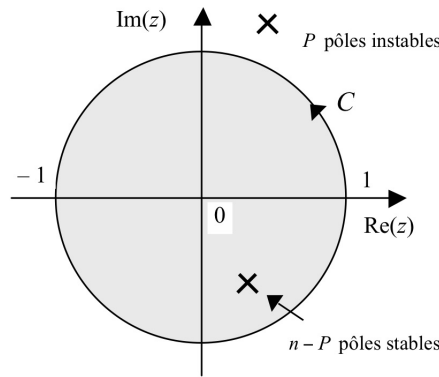


FIGURE 4.9 – Choix du contour C .

Les différences par rapport à la présentation du critère de Nyquist pour les systèmes à temps continu sont dans la forme et le sens de parcours du contour (sens trigonométrique), ainsi que les conclusions recherchées (tous les zéros doivent être à l’intérieur).

Soit $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ avec $d^\circ(D(z)) = n$. Nous supposons ici que $H(z)$ est strictement causale, c’est-à-dire que $d^\circ(N(z)) < d^\circ(D(z))$. Soit P le nombre de pôles instables de $H(z)$ (c’est-à-dire sur ou à l’extérieur du cercle unité). Le nombre de pôles de $H(z)$ à l’intérieur du cercle unité est alors $n - P$.

La fonction de transfert en boucle ouverte étant supposée strictement causale, on a :

$$d^\circ(\text{Numérateur}(1 + H(z))) = n. \quad (4.22)$$

En conséquence, avec les notations ci-dessus :

- la fonction $1 + H(z)$ a n zéros

- les pôles de $1 + H(z)$ sont ceux de $H(z)$, en particulier $n - P$ pôles sont à l'intérieur du cercle unité et P pôles sont sur ou à l'extérieur du cercle unité.

La stabilité du système est assurée si tous les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, c'est-à-dire les zéros de $1 + H(z)$, sont à l'intérieur du cercle unité. Par le théorème de Cauchy, il en sera ainsi si et seulement si l'image de C par l'application $1 + H$ entoure l'origine $n - (n - P) = P$ fois dans le sens trigonométrique.

En conséquence l'image de C par H doit entourer P fois le point -1 dans le sens trigonométrique.

Par ailleurs, l'équation (4.21) ne doit pas avoir de racines sur le cercle unité : cette condition est vérifiée si et seulement si l'image de C par H ne passe pas par le point -1 .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le critère suivant.

Théorème 4.1 (Critère de Nyquist en discret) *Un système discret est stable EBSB en boucle fermée si et seulement si le lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte $H(z)$ lorsque z parcourt le cercle unité ($z = e^{j\nu}$, $\nu \in [-\pi; \pi]$)² dans le sens trigonométrique :*

- ne passe pas par le point critique -1
- entoure le point -1 , dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte situés à l'extérieur du cercle unité.

Remarquons que la construction du lieu de Nyquist nécessite généralement la mise en œuvre de moyens informatiques.

4.2.1.2 Exemple

Considérons le système bouclé décrit par le schéma-bloc de la Figure 4.10.

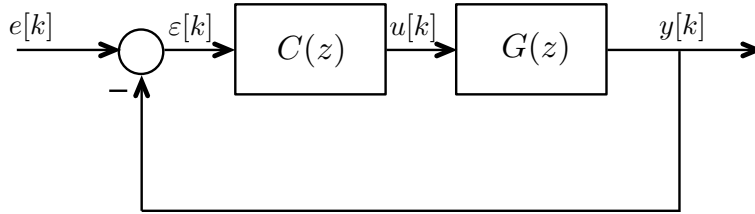


FIGURE 4.10 – Exemple.

Le système discret considéré est donné par

$$G(z) = \frac{1-a}{z-a}, \quad a \in]0; 1[. \quad (4.23)$$

Il est commandé par un simple gain : $C(z) = K > 0$. La fonction de transfert en boucle ouverte est donc

$$H(z) = K \frac{1-a}{z-a}. \quad (4.24)$$

2. Dans le cas d'un système asservi piloté par ordinateur numérique, $\nu = \omega T_e$.

Le diagramme de Nyquist est obtenu en posant $z = e^{j\nu}$ et en faisant varier ν de $-\pi$ à π . On en déduit la réponse fréquentielle :

$$H(e^{j\nu}) = K \frac{1-a}{e^{j\nu}-a} = K \frac{(1-a)(e^{-j\nu}-a)}{1-2a\cos(\nu)+a^2}. \quad (4.25)$$

Soit, en décomposant en partie réelle et partie imaginaire,

$$H(e^{j\nu}) = K \frac{(1-a)(\cos(\nu)-a)}{1-2a\cos(\nu)+a^2} - jK \frac{(1-a)\sin(\nu)}{1-2a\cos(\nu)+a^2}. \quad (4.26)$$

Pour $\nu \in [0; \pi]$, le lieu de Nyquist est alors un demi-cercle de rayon $K/(1+a)$ et de centre $Ka/(1+a)$, comme représenté sur la Figure 4.11. On le complète par symétrie par rapport à l'axe réel pour $\nu \in [-\pi; 0]$ (le raisonnement est similaire à celui fait en Section 3.2.1.2).

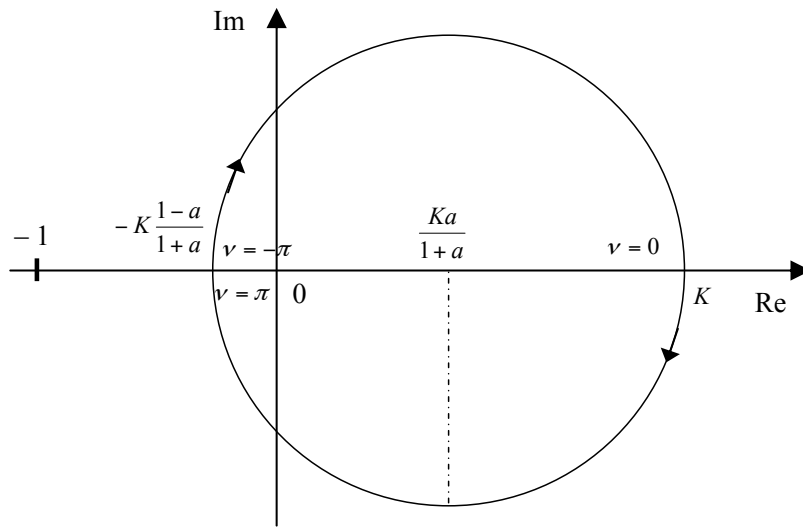


FIGURE 4.11 – Lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte.

La fonction de transfert en boucle ouverte n'ayant pas de pôles à l'extérieur du cercle unité, la condition de stabilité du système bouclé est alors $-K \frac{1-a}{1+a} > -1$, ce qui se traduit par la condition :

$$K < K_{\max} = \frac{1+a}{1-a}. \quad (4.27)$$

4.2.1.3 Cas des systèmes ayant des pôles sur le cercle unité

Si la fonction de transfert en boucle ouverte du système possède des pôles sur le cercle unité, le théorème de Cauchy n'est plus applicable avec le contour C considéré car il passe par des singularités de $1+H(z)$. Le lieu de Nyquist associé subit des discontinuités se traduisant par des branches à l'infini. La fermeture du lieu peut cependant être obtenue en modifiant le contour C . On le complète en fait par des demi-cercles, contournant les singularités dues aux pôles situés sur le cercle unité, de rayon ε aussi petit que l'on veut (Figure 4.12). La variation d'argument lorsque z parcourt chaque demi-cercle est utilisée afin de fermer le lieu sur les branches correspondantes à l'infini pour la singularité concernée.

Remarquons enfin que les pôles concernés doivent être comptabilisés parmi les pôles stables si le demi-cercle les entourant est pris à l'extérieur du cercle unité (comme indiqué sur la Figure 4.12). La convention contraire doit être utilisée si les demi-cercles sont pris à l'intérieur du cercle unité.

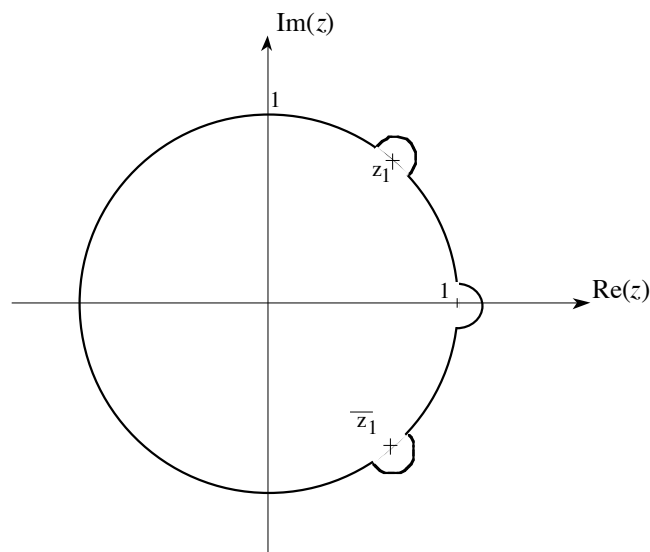


FIGURE 4.12 – Modification du contour C en cas de pôles sur le cercle unité.

Exemple 4.2 Analysons l'exemple de la Figure 4.13. Il s'agit d'un intégrateur pur (continu) piloté numériquement par un gain K .

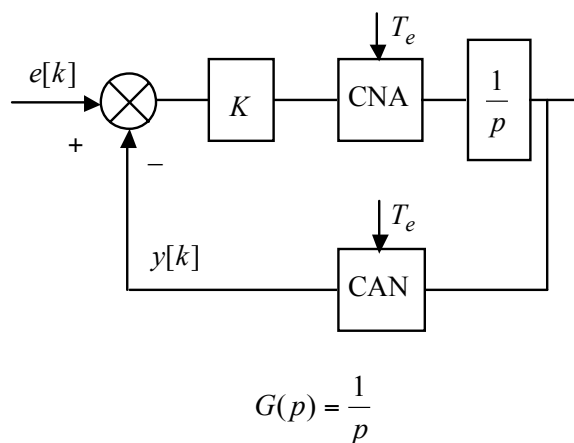


FIGURE 4.13 – Exemple de système à temps continu commandé numériquement.

Calculons tout d'abord le modèle discret équivalent :

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)}{p} \right] = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{1}{p^2} \right]. \quad (4.28)$$

En utilisant les tables de transformée en Z , $G(z) = \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}}$. On obtient ainsi le modèle discret équivalent donné par la Figure 4.14.

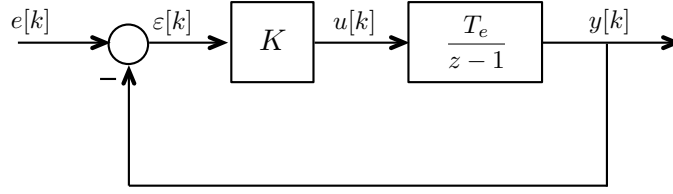
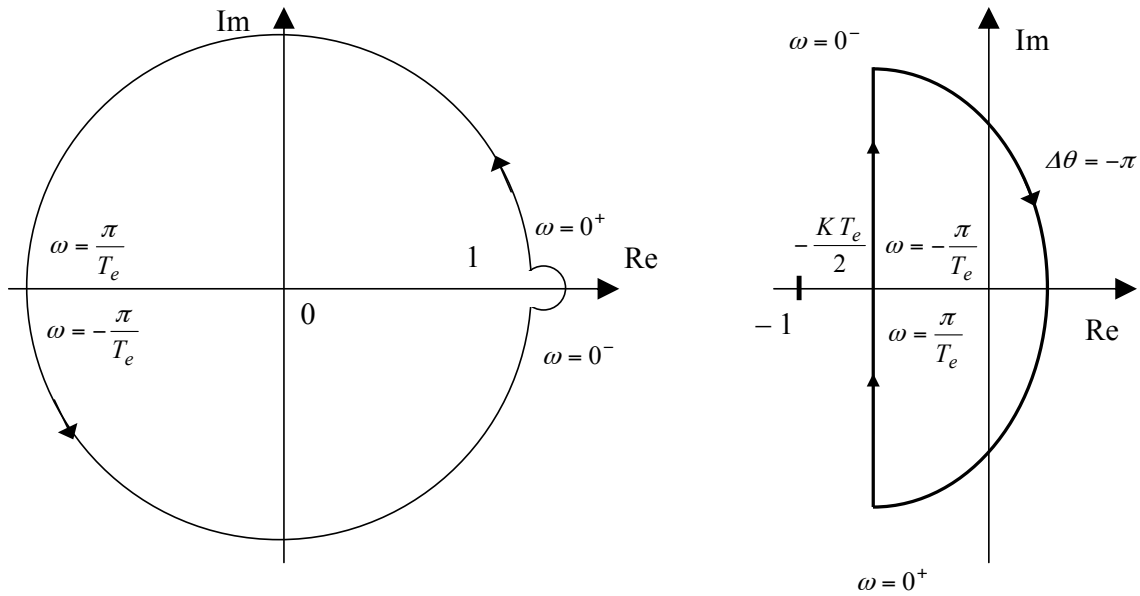


FIGURE 4.14 – Modèle discret équivalent.

Ce système ayant un pôle en $z = 1$, le cercle unité est complété par un demi-cercle contournant ce point par l'extérieur (le pôle en $z = 1$ devra en conséquence être comptabilisé comme pôle stable). Lorsque z parcourt le cercle unité ($z = e^{j\omega T_e}$, $\omega \in [-\pi/T_e; \pi/T_e]$), on obtient le diagramme de Nyquist de la Figure 4.15 pour $K > 0$.

FIGURE 4.15 – Contour C modifié et lieu de Nyquist.

La variation d'argument de $H(z)$ lorsque z parcourt le demi-cercle de rayon ε est $-\pi$. La fermeture du lieu est alors obtenue par un arc de cercle de rayon infini orienté dans le sens horaire, reliant les deux branches.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système étudié ci-dessus ne possédant pas de pôles dans le domaine extérieur, il sera stable en boucle fermée si et seulement si le point -1 n'est pas entouré par le lieu de Nyquist, soit $-KT_e/2 > -1$, ce qui donne la condition de gain :

$$0 < K < \frac{2}{T_e}. \quad (4.29)$$

Notons qu'une période d'échantillonnage T_e plus faible autorise donc l'utilisation d'un gain plus élevé. Toutefois, diminuer systématiquement la période d'échantillonnage T_e risque de conduire à un modèle numériquement mal conditionné.

4.2.2 Utilisation des diagrammes de Bode

Considérons à nouveau la structure décrite par la Figure 4.16.

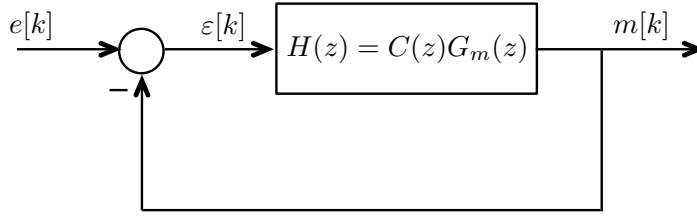


FIGURE 4.16 – Structure simplifiée d'un système asservi discret.

La relation $z = e^{j\nu}$ (ou $z = e^{j\omega T_e}$ dans le cas échantillonné) permet d'utiliser le diagramme de Bode pour analyser la stabilité des systèmes discrets. On représente alors la réponse fréquentielle (module et phase) en boucle ouverte, soit :

$$\begin{cases} 20 \log(|H(z)|) \\ \arg(H(z)) \end{cases} \quad \text{avec } z = e^{j\nu}, \nu \in]0; \pi] \quad \text{ou } z = e^{j\omega T_e}, \omega \in]0; \pi/T_e]. \quad (4.30)$$

Les notions communes aux systèmes continus de marges de gain et de phase, marges de retard et de module (Section 3.2.2) peuvent être appliquées de façon similaire aux systèmes à temps discret. Elles peuvent permettre là aussi de quantifier le degré de stabilité du système bouclé.

Notons que pour un système continu piloté par ordinateur, la notion de marge de retard est très importante au regard de l'effet de l'échantillonneur-bloqueur (assimilable, comme on l'a vu en Section 4.1.1, à un retard de $T_e/2$), ainsi que celui du temps de calcul nécessaire au calcul de la commande à chaque pas d'échantillonnage (qui introduit un retard supplémentaire). Pour se prémunir de l'impact de ces deux effets, on impose ainsi classiquement **une valeur de marge de retard d'au moins deux à trois périodes d'échantillonnage**. Pour s'en convaincre, considérons un système dont la marge de phase est $\Delta\phi = 45^\circ \simeq 0,79 \text{ rad}$. Pour une période d'échantillonnage $T_e = t_m/10$ où t_m désigne le temps de premier maximum de la réponse indicielle en boucle fermée (ce choix sera justifié en Section 6.2.1), l'approximation $\omega_c t_m \simeq 3$ conduit à $\omega_c = 3/(10 T_e)$. Ainsi, une marge de retard convenable est $\tau_m = \Delta\phi/\omega_c = \frac{0,79 \times 10}{3} T_e \simeq 2,6 T_e$.

4.3 Précision

Comme dans le cas continu, parmi les qualités d'un système asservi discret, on peut citer le degré de stabilité, le comportement dynamique du système (temps de réponse, dépassement, amortissement, ...) et la précision. Pour une bonne précision, l'écart (ou erreur) ε doit être le plus faible possible pour un bon suivi de la consigne et une faible influence des perturbations.

Pour les systèmes à temps discret, une source supplémentaire d'imprécision réside dans le fait que l'erreur est élaborée à partir de mesures faisant intervenir des effets de quantification (codage d'une grandeur continue sur un support limité par sa nature numérique). Bien que cet effet supplémentaire ne soit pas abordé explicitement dans ce qui suit, il est bon de le garder à l'esprit lors de la mise en œuvre d'une commande numérique.

On ne s'intéresse ici qu'à la précision en régime permanent. A cette fin, nous rappelons tout d'abord le théorème de la valeur finale en temps discret.

Théorème 4.3 (Théorème de la valeur finale en discret) *Soit $y : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction causale et localement intégrable et $Y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sa transformée en Z . Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} y[k]$ existe alors elle est donnée par :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z). \quad (4.31)$$

4.3.1 Précision vis-à-vis de la consigne

Dans un premier temps, il s'agit de caractériser l'erreur en réponse à des consignes types : échelon ou rampe. L'effet des perturbations sera examiné par la suite (Section 4.3.2). Pour déterminer les effets combinés de la consigne et de la perturbation, nous pourrions invoquer le principe de superposition puisque les systèmes considérés sont supposés linéaires et invariants (par rapport aux perturbations dans le cas discret). Soit donc le système asservi (sans perturbations) de la Figure 4.17.

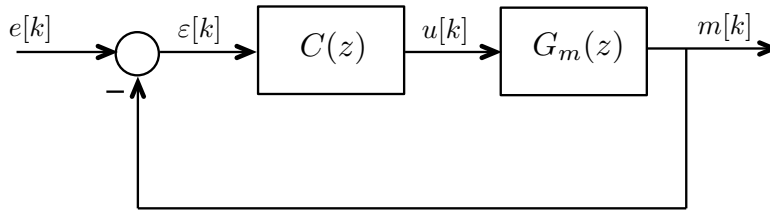


FIGURE 4.17 – Structure d'un système asservi discret (en l'absence de perturbation).

Soit $H(z) = C(z)G_m(z)$. L'erreur due à la consigne est alors :

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + H(z)}. \quad (4.32)$$

Par le théorème de la valeur finale, si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(k)$ existe alors elle est donnée par :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z). \quad (4.33)$$

Supposons que $H(z)$ soit de classe α , c'est-à-dire qu'elle comporte α pôles en $z = 1$:

$$H(z) \sim_{z \rightarrow 1} \frac{K_0}{(1 - z^{-1})^\alpha}. \quad (4.34)$$

On a alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{E(z)}{1 + \frac{K_0}{(1 - z^{-1})^\alpha}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^{\alpha+1} E(z)}{(1 - z^{-1})^\alpha + K_0}. \quad (4.35)$$

4.3.1.1 Cas d'une consigne en échelon

Considérons une consigne en échelon $e[k] = E_0\gamma[k]$, représentée Figure 4.18.

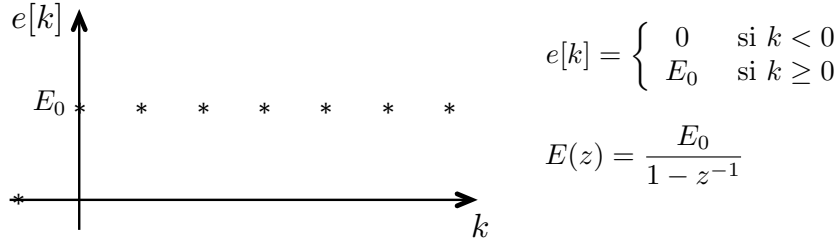


FIGURE 4.18 – Consigne de type échelon.

Sa transformée en Z est $E(z) = \frac{E_0}{1-z^{-1}}$. Au vu de (4.35), l'erreur permanente est

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^\alpha E_0}{(1 - z^{-1})^\alpha + K_0} = \begin{cases} \frac{E_0}{1+K_0} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (4.36)$$

L'allure de la sortie est reproduite Figure 4.19. On s'aperçoit que l'erreur statique en réponse à un échelon de consigne :

- est nulle si la fonction de transfert en boucle ouverte $H(z)$ possède au moins un pôle en $z = 1$ (soit un système au moins de classe 1)
- est d'autant plus faible que le gain statique K_0 de la boucle ouverte est important, si celle-ci ne comporte pas de pôle en $z = 1$ (système de classe 0).

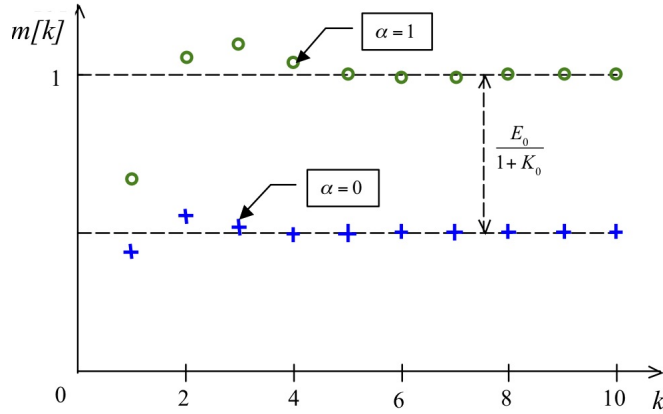


FIGURE 4.19 – Réponse à une consigne en échelon.

4.3.1.2 Cas d'une consigne en rampe

Considérons une consigne en rampe de pente V_0 : $e[k] = V_0 k \gamma[k]$, représentée Figure 4.20.

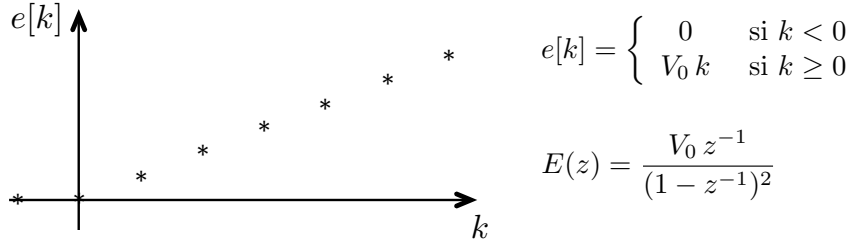


FIGURE 4.20 – Consigne de type rampe.

Par (4.35), l'erreur permanente s'exprime par la relation :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{-1}(1 - z^{-1})^{\alpha-1} V_0}{(1 - z^{-1})^{\alpha} + K_0} = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{V_0}{K_0} & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 2. \end{cases} \quad (4.37)$$

Cette erreur permanente est appelée *erreur de trainage*. On s'aperçoit que cette erreur :

- est nulle si fonction de transfert en boucle ouverte $H(z)$ possède au moins deux intégrations, c'est-à-dire le système est au moins de classe 2
- est constante et d'autant plus faible que le gain statique K_0 de la boucle ouverte est important, lorsque la fonction de transfert en boucle ouverte ne possède qu'une seule intégration
- est infinie si la fonction de transfert en boucle ouverte ne comporte pas d'intégrations (système de classe 0).

L'allure de la sortie est reproduite Figure 4.21.

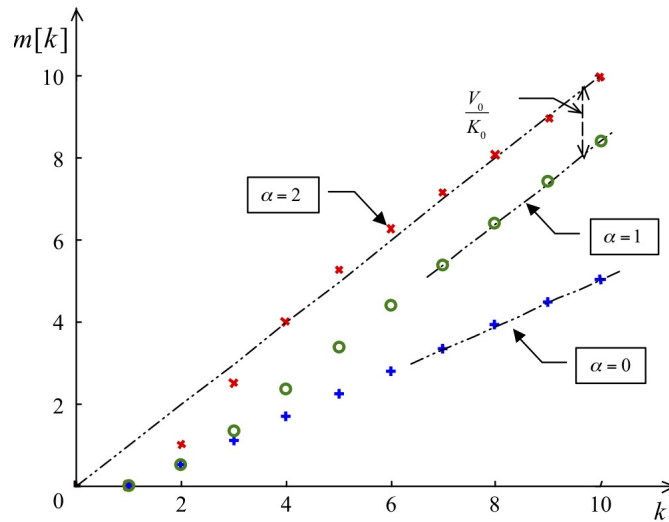


FIGURE 4.21 – Réponse à une consigne en rampe.

En conclusion : La précision en régime permanent est liée au nombre de pôles de $H(z)$ en $z = 1$, soit au nombre d'intégrations présentes dans la fonction de transfert en boucle

ouverte. Remarquons que les intégrations peuvent provenir d'un processus naturellement intégrateur (par exemple pour un processus continu $G(p)$ ayant un pôle en $p = 0$, le calcul de $G(z)$ par la formule (4.6) donne naturellement un pôle de $G(z)$ en $z = 1$), ou bien de la présence de pôles en $z = 1$ dans $C(z)$.

4.3.2 Précision vis-à-vis de perturbations

On ne considère pour traiter l'aspect de la précision en régime permanent vis-à-vis de perturbations que le cas particulier des systèmes continus pilotés par ordinateur. On supposera la perturbation de type analogique, négligeant ainsi les perturbations de type numérique intervenant dans la chaîne : erreurs d'arrondi, pas de quantification des convertisseurs, etc. La structure générale d'un système asservi au moyen d'un ordinateur est celle de la Figure 4.22, dans laquelle nous avons divisé le processus physique $G(p)$ en deux fonctions de transfert : $G_1(p)$ située en amont de la perturbation $b(t)$ et $G_2(p)$ la partie du processus située en aval. Notons que la sortie choisie dans ce schéma est la sortie mesurée $m(t)$: $G_2(p)$ inclut donc la fonction de transfert du capteur.

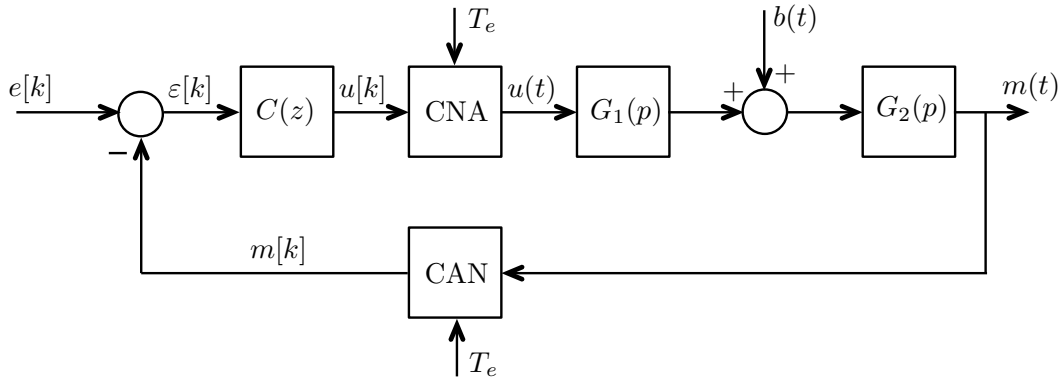


FIGURE 4.22 – Rappel de la structure d'un système asservi piloté par ordinateur.

Le problème de cette structure provient du fait que $b(t)$ est un signal continu, donc **il n'existe pas de fonction de transfert en z entre la perturbation (à temps continu) et la sortie (à temps discret)**. Un autre problème est que la perturbation peut apparaître à un instant quelconque compris entre deux instants d'échantillonnage et $y[k]$ dépend de cet instant : en toute rigueur **le système n'est pas invariant**.

Toutefois, si l'on suppose que la fréquence d'échantillonnage est très supérieure au spectre fréquentiel de la perturbation, on peut considérer que $b(t)$ ne varie que peu entre deux instants d'échantillonnage consécutifs et donc qu'elle n'agit qu'aux instants d'échantillonnage. Moyennant cette hypothèse, la dynamique de la sortie mesurée $m[k]$ est invariante et le principe de superposition s'applique. On peut alors calculer l'erreur due à la perturbation $b(t)$ (à consigne nulle), qui s'ajoutera à celle précédemment calculée et due à la consigne $e[k]$ (à perturbation nulle). Pour cela, observons que

$$M(z) = G(z)U(z) + Z[G_2(p)B(p)] \quad (4.38)$$

$$\varepsilon(z) = -M(z) \quad (4.39)$$

$$U(z) = C(z)\varepsilon(z), \quad (4.40)$$

où $G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G_1(p)G_2(p)}{p} \right]$ d'après ce qui a été vu en Section 4.1.2. D'où :

$$\varepsilon(z) = -C(z)G(z)\varepsilon(z) - Z[G_2(p)B(p)], \quad (4.41)$$

soit :

$$\boxed{\varepsilon(z) = -\frac{Z[G_2(p)B(p)]}{1 + C(z)G(z)}}. \quad (4.42)$$

4.3.2.1 Cas d'une perturbation en échelon

Considérons une perturbation en échelon d'amplitude B_0 : $b(t) = B_0\gamma(t)$, soit $B(p) = B_0/p$. D'après le théorème de la valeur finale, l'erreur permanente s'exprime par la relation :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})\varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{(1 - z^{-1})B_0Z[G_2(p)/p]}{1 + C(z)G(z)}. \quad (4.43)$$

Soit α_2 la classe de la fonction de transfert $G_2(p)$, c'est-à-dire :

$$G_2(p) \sim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2}{p^{\alpha_2}}. \quad (4.44)$$

On a alors :

$$Z \left[\frac{G_2(p)}{p} \right] \sim_{z \rightarrow 1} \frac{K'_2}{(1 - z^{-1})^{\alpha_2+1}}. \quad (4.45)$$

De même, en désignant par α la classe de $C(z)G(z)$:

$$C(z)G(z) \sim_{z \rightarrow 1} \frac{K_0}{(1 - z^{-1})^\alpha}. \quad (4.46)$$

On obtient donc :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{B_0(1 - z^{-1})^{\alpha-\alpha_2}K'_2}{(1 - z^{-1})^\alpha + K_0}}. \quad (4.47)$$

Ainsi, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = 0$ si et seulement si $\alpha > \alpha_2$, soit si la chaîne complète comporte plus d'intégrations que G_2 seule. En d'autres termes, l'erreur permanente est nulle si la chaîne présente au moins une intégration **en amont** de la perturbation, c'est-à-dire soit dans $C(z)$, soit dans $G_1(p)$.

4.3.2.2 Exemple

Considérons un moteur électrique asservi en position, piloté par calculateur selon le schéma de la Figure 4.23. θ représente la position angulaire du moteur, Ω sa vitesse angulaire, et u la commande en tension.

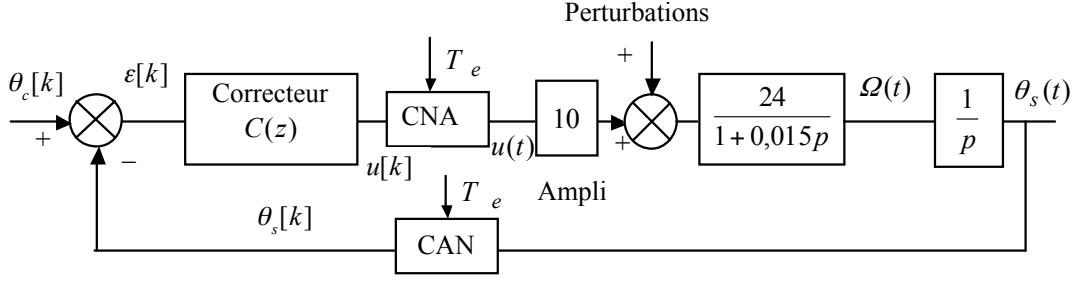


FIGURE 4.23 – Asservissement en position d'un moteur électrique.

La fonction de transfert du système à temps continu est alors :

$$G(p) = \frac{240}{p(1 + 0,015p)}, \quad (4.48)$$

que l'on subdivise selon les notations de la section précédente en

$$G_1(p) = 10 \quad \text{et} \quad G_2(p) = \frac{24}{p(1 + 0,015p)}. \quad (4.49)$$

En prenant comme période d'échantillonnage $T_e = 0,01s$, le calcul de la transformée en Z de l'ensemble {CNA, processus continu, CAN} conduit à :

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(p)}{p} \right] = \frac{0,648z^{-1}(1 + 0,801z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,513z^{-1})}. \quad (4.50)$$

Cette expression peut être obtenue par exemple à partir des tables de transformée en Z , ou par des moyens numériques. Notons que $G(z)$ a un pôle en $z = 1$, traduisant le fait que θ s'obtient de Ω par une intégration. On suppose par ailleurs que $C(z) = K$. Enfin, on note la relation :

$$Z \left[\frac{G_2(p)}{p} \right] = \frac{1}{10} Z \left[\frac{G(p)}{p} \right] = \frac{G(z)}{10(1 - z^{-1})}. \quad (4.51)$$

- En l'absence de perturbation et en réponse à un échelon de consigne ($e(t) = E_0\gamma(t)$, $b(t) = 0$) : le système étant intégrateur, l'erreur permanente est nulle.
- En présence d'une perturbation en échelon et à consigne nulle ($e(t) = 0$, $b(t) = B_0\gamma(t)$) : la théorie précédente permet d'affirmer que l'erreur permanente vis-à-vis de la perturbation n'est pas nulle. Plus précisément, d'après (4.43),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} - \frac{(1 - z^{-1})B_0 Z [G_2(p)/p]}{1 + C(z)G(z)} \quad (4.52)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} - \frac{B_0 G(z)}{10(1 + C(z)G(z))} \quad (4.53)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} - \frac{B_0 \frac{0,648z^{-1}(1+0,801z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0,513z^{-1})}}{10 \left(1 + K \frac{0,648z^{-1}(1+0,801z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0,513z^{-1})} \right)} \quad (4.54)$$

$$= - \frac{B_0}{10K}. \quad (4.55)$$

On peut aussi retrouver ce résultat directement à partir de (4.47) :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon[k] = \lim_{z \rightarrow 1} -\frac{B_0(1 - z^{-1})^{\alpha - \alpha_2} K'_2}{(1 - z^{-1})^\alpha + K_0}, \quad (4.56)$$

où α est la classe de $C(z)G(z)$ ($\alpha = 1$), α_2 est la classe de $G_2(z)$ ($\alpha_2 = 1$), $K_0 = 2, 4 K$ et $K'_2 = 2, 4/10$.

Cette erreur permanente n'est pas nulle car aucune intégration n'est présente en amont de la perturbation. Elle peut toutefois être diminuée à loisir en choisissant un gain K suffisamment grand, mais au détriment de la stabilité.

Chapitre 5

Synthèse des systèmes asservis à temps continu

Les méthodes de correction abordées dans ce chapitre reposent sur des considérations de comportement fréquentiel. Il est fondamental de comprendre que le cahier des charges spécifiant les performances *temporelles* en boucle fermée est traduit par des contraintes sur la réponse *fréquentielle* du système corrigé en boucle ouverte.

La recherche d'un compromis stabilité-rapidité conduit en général à imposer à la boucle fermée un comportement ressemblant (au moins autour de la pulsation de coupure) à celui d'un système du deuxième ordre ayant des pôles complexes conjugués. Le choix de la valeur de l'amortissement ξ est lié au dépassement requis (voir Section 3.2.2.5). C'est pourquoi il est indispensable de bien connaître les relations entre les paramètres et le comportement des systèmes du deuxième ordre pour pouvoir exploiter un cahier des charges.

Le principe général de traduction d'un cahier des charges définissant les performances requises du système final en boucle fermée est le suivant :

- Interprétation du cahier des charges pour obtenir des caractéristiques d'un modèle du deuxième ordre de la boucle fermée qui conviendrait
- Recherche de contraintes fréquentielles sur la boucle ouverte induisant le comportement temporel recherché en boucle fermée.

Rappelons tout d'abord les principaux résultats du Chapitre 3.

Stabilité (voir Section 3.2) :

L'analyse de la stabilité du système bouclé, dans le cas courant d'un système stable en boucle ouverte, s'appuie sur le théorème de Nyquist simplifié (ou critère du revers) : le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des ω croissants doit laisser le point -1 sur la gauche. La distance par rapport au point -1 , exprimée par exemple en termes de marge de phase et de marge de gain, fournit une mesure du degré de stabilité.

On peut associer un critère visuel de la mesure de la stabilité par l'intermédiaire du dépassement en réponse à un échelon de consigne. Pour un système dont la fonction de transfert en boucle fermée est du deuxième ordre sans zéros, on sait relier le dépassement en réponse indicielle de la boucle fermée au coefficient d'amortissement ξ des pôles de la boucle fermée et par la suite à la marge de phase de la boucle ouverte (voir Section 3.2.2.5). A noter que pour un système du deuxième ordre sans zéros, une marge de phase

suffisante implique une bonne marge de gain, la seule notion de marge de phase est donc suffisante.

Une autre façon de caractériser une mesure de la stabilité consiste à analyser la réponse fréquentielle de la boucle fermée. Un mauvais amortissement est caractérisé par la présence de pics de résonance. Pour un système dont la fonction de transfert en boucle fermée est du deuxième ordre sans zéros, on sait relier cette notion de résonance en réponse fréquentielle de la boucle fermée au coefficient d'amortissement ξ des pôles de la boucle fermée (voir Section 3.2.2.7).

Rapidité :

Il a été vu au Chapitre 3 que la bande passante en boucle ouverte permettait d'avoir une prévision de la rapidité en boucle fermée.

On peut en effet qualifier la rapidité d'un système en boucle fermée en observant sa réponse à un échelon de consigne. Pour un système ne présentant pas de dépassement, on peut mesurer le temps d'établissement, mais le dilemme précision-stabilité conduit souvent à un compromis qui entraîne une réponse avec dépassement. Pour un système ayant une telle réponse, on utilise pour critère de rapidité le temps mis pour atteindre le premier maximum, noté t_m .

Dès lors, pour un système du deuxième ordre sans zéros, on peut relier le temps de premier maximum à la bande passante (ou pulsation de coupure à 0 dB) de la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$t_m = \frac{\pi}{\omega_c \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (5.1)$$

Voir Annexe A.9 pour une description plus détaillée de cette relation. On utilise en général la relation approchée :

$$\omega_c t_m \simeq 3, \quad (5.2)$$

valable pour des amortissements corrects ($0,6 < \xi < 1$), et qui reste valable pour un grand nombre de systèmes d'ordre supérieur à 2.

Grâce à cette relation, on peut donc traduire une contrainte de temps de premier maximum d'une réponse indicielle en boucle fermée en contrainte de bande passante sur la boucle ouverte.

Précision :

Pour une erreur nulle en régime permanent (voir Section 3.3.1) :

- par rapport à un échelon de consigne, il faut une intégration dans la boucle ouverte
- par rapport à une rampe de consigne, il faut deux intégrations dans la boucle ouverte
- par rapport à un échelon de perturbation, il faut une intégration dans la boucle ouverte en amont du point d'entrée de la perturbation.

Pour caractériser la précision en régimes transitoire et permanent en réponse à des consignes ou perturbations limitées en vitesse et en accélération, on utilise la méthode de la sinusoïde équivalente (voir Section 3.3.2). Le résultat de cette analyse conduit à une spécification de gain minimum en boucle ouverte pour une certaine bande de fréquence 0 à Ω . Une contrainte similaire est obtenue pour garantir une certaine précision en réponse à des consignes ou perturbations sinusoïdales agissant à la pulsation Ω (voir Section 3.3.1.1). Cette contrainte conduit donc en général à imposer une certaine bande passante à la boucle ouverte, même si en toute rigueur la contrainte sur le gain ne concerne que la bande de fréquence 0 à Ω .

En résumé :

Pour obtenir :

- une bonne **précision**, il faut :
 - en régime permanent, avoir une ou plusieurs intégrations en chaîne directe afin d'annuler les erreurs en régime permanent (contrainte en basses fréquences).
 - en régime transitoire, avoir un gain élevé pour une bande de fréquence jusqu'à une pulsation Ω .
- un bon degré de **stabilité**, il faut :
 - que les marges de gain et/ou de phase définies soient satisfaisantes (contrainte au voisinage de la pulsation de coupure ω_c), donc en général avoir un petit gain.
- une bonne **rapidité**, il faut :
 - que la bande passante en boucle ouverte soit importante, donc en général avoir un grand gain.

Si l'on utilise un diagramme de Bode pour représenter les caractéristiques fréquentielles de la boucle ouverte à corriger, on pourra traduire les contraintes ci-dessus suivant trois zones de fréquences, comme indiqué Figure 5.1.

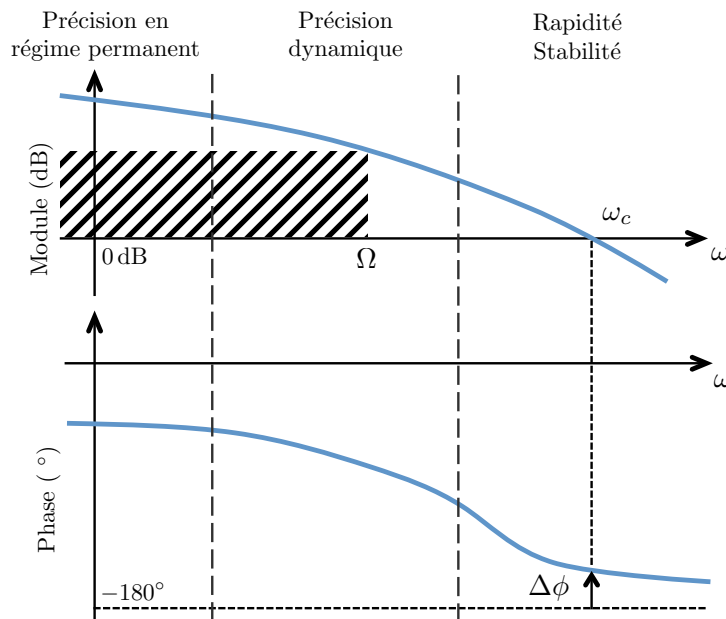


FIGURE 5.1 – Contraintes (gabarits) sur la réponse fréquentielle de la boucle ouverte dans le plan de Bode.

Ce graphique met en évidence les contradictions entre les spécifications concernant la précision/rapidité d'une part et la stabilité d'autre part. En général, une augmentation du gain favorise la précision et la rapidité au détriment de la stabilité.

Les correcteurs ont pour but de délivrer un signal de commande au système de manière à satisfaire les exigences de précision/rapidité et de stabilité. Ils s'insèrent dans un système

bouclé comme représenté Figure 5.2.

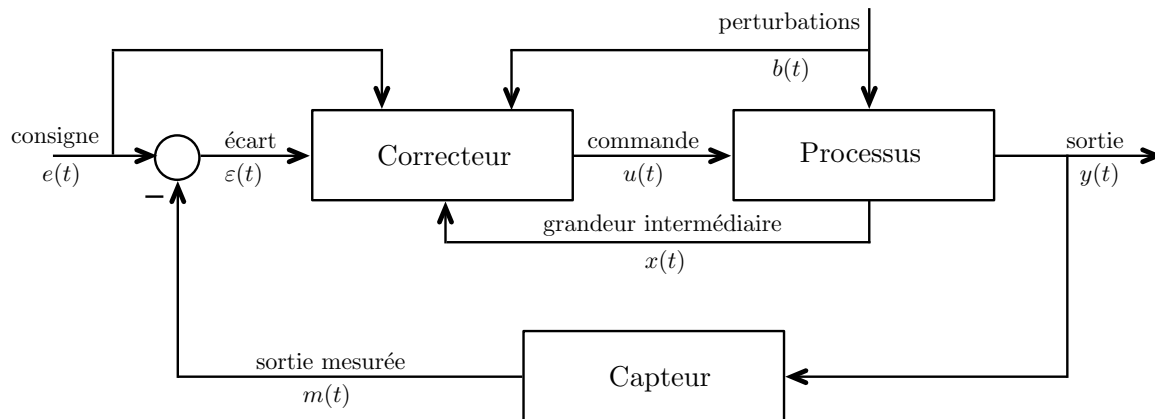


FIGURE 5.2 – Principe d'action d'un correcteur.

La grandeur de commande u peut être fonction de la consigne e , de l'erreur ε , de la perturbation b ou d'une grandeur intermédiaire x . Selon les signaux pris en compte et la nature de la fonction réalisée, on distinguera différents types de correcteurs, que nous détaillons maintenant.

5.1 Correction série

5.1.1 Définition

Ce type de correcteur est inséré dans la chaîne directe en série avec le processus et délivre un signal de commande de la forme $u = f(\varepsilon)$.

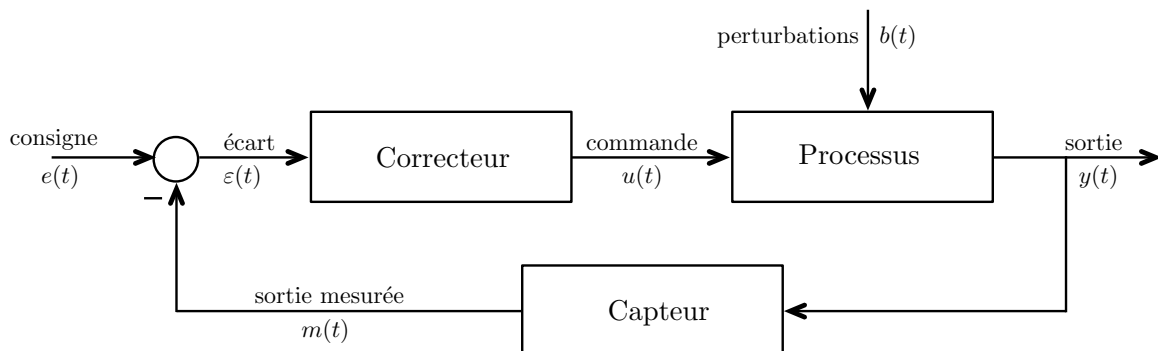


FIGURE 5.3 – Principe d'action d'un correcteur série.

La commande ne prend en compte que le signal d'erreur ε . Parmi les correcteurs série, nous détaillons ci-dessous la correction proportionnelle, la correction par avance de phase et les correcteurs PI et PID.

5.1.2 Correction proportionnelle

5.1.2.1 Fonction de transfert

Comme son nom l'indique, ce type de correcteur consiste à délivrer un signal de commande u proportionnel à la valeur courante de l'erreur ε :

$$u(t) = K\varepsilon(t), \quad \text{soit} \quad U(p) = K\varepsilon(p), \quad \text{et donc} \quad C(p) = K, \quad (5.3)$$

où K désigne le gain de commande ou gain d'action proportionnelle.

5.1.2.2 Aspect temporel

L'impact d'une correction proportionnelle peut être résumé de la manière suivante :

- En régime permanent : diminution de l'erreur. En effet on a vu en Section 3.3.1 que, dans le cas d'un système non intégrateur, l'erreur permanente est d'autant plus faible que le gain K est grand.
- En régime transitoire : augmentation de la bande passante, c'est-à-dire augmentation de la rapidité (souvent au détriment de la stabilité), atténuation de l'effet des perturbations transitoires (voir Section 3.3.2). Ceci est dû au fait qu'une augmentation de gain K correspond à une translation vers le haut de la courbe de module de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan de Bode, ce qui revient dans le cas général à une augmentation de la bande passante et à une diminution de la marge de phase.

Donc, en règle générale, avec une correction proportionnelle, une augmentation de la rapidité et de la précision se fait au détriment de la stabilité.

Les réponses indicielles typiques de la sortie mesurée se caractérisent par les tracés donnés Figure 5.4 dans le cas d'un système non intégrateur en boucle ouverte.

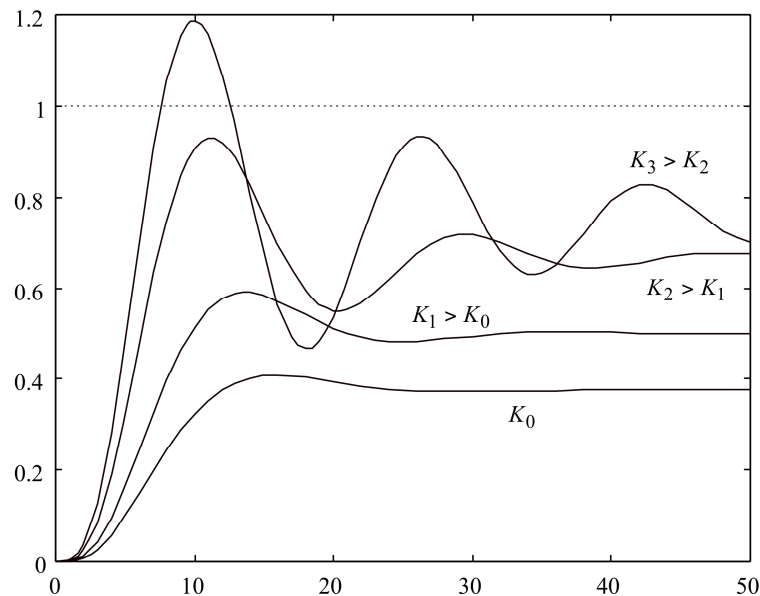


FIGURE 5.4 – Effet typique du gain d'action proportionnelle sur la réponse indicielle du système bouclé.

5.1.2.3 Méthode de réglage dans le plan de Bode

Suivant la valeur de K , l'action proportionnelle permet d'augmenter ou de diminuer le gain de la boucle ouverte. Sur le diagramme de Bode, la courbe de gain est traduite verticalement de $20 \log(K)$ tandis que la courbe de phase reste inchangée.

Si $K > 1$, le gain de la boucle ouverte est augmenté : la courbe de gain est traduite vers le haut. Ceci permet généralement d'améliorer la rapidité du système bouclé (puisque la pulsation de coupure ω_c augmente) ainsi que sa précision, mais tend généralement à diminuer le degré de stabilité (car une augmentation de ω_c tend généralement à diminuer la marge de phase $\Delta\phi$). Les conclusions sont opposées si $K < 1$.

Le réglage de K peut se faire de manière graphique en déterminant, sur le diagramme de Bode du système en boucle ouverte non corrigée, de combien la courbe de gain doit être relevée ou abaissée afin d'obtenir la pulsation de coupure ou la marge de phase désirée. Ceci donne $20 \log(K)$, duquel on déduit aisément la valeur de K .

Envisageons la synthèse d'un correcteur proportionnel sur l'exemple suivant, qui sera repris également lors de l'étude des stratégies de commande développées par la suite.

Exemple 5.1 *Considérons le système asservi de la Figure 5.5.*

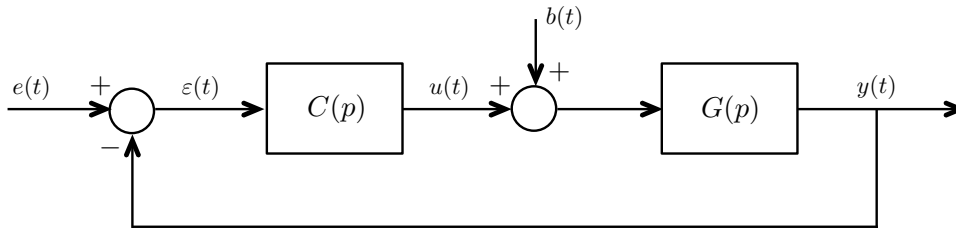


FIGURE 5.5 – Exemple de synthèse d'un correcteur série.

La fonction de transfert du processus est donnée par :

$$G(p) = \frac{K_v}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{100}{p(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{1000})}. \quad (5.4)$$

Le cahier des charges à satisfaire est donné par les spécifications temporelles suivantes :

- dépassement en réponse à un échelon inférieur à 10%
- temps du premier maximum en réponse à un échelon de $t_m = 0,01s$ (correspondant à la constante de temps lente du système)
- erreur permanente nulle en réponse à un échelon de consigne ou de perturbation
- précision transitoire (c'est-à-dire rapport maximal entre l'erreur et la consigne) de 1% à la pulsation $\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

Au vu du Chapitre 3, ce cahier des charges peut se traduire dans le domaine fréquentiel par les spécifications ci-dessous :

- marge de phase en boucle ouverte $\Delta\phi_s \geq 60^\circ$ (voir Annexe A.9)
- pulsation de coupure en boucle ouverte $\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1}$ (par la relation $\omega_c t_m \simeq 3$)
- présence d'une intégration en amont de la perturbation (c'est-à-dire dans le correcteur)

- gain de la boucle ouverte supérieur ou égal à 100, soit 40 dB, à la pulsation $\Omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ (voir Section 3.3.2).

Le diagramme de Bode de la boucle ouverte avec $C(p) = 1$ est donné Figure 5.6 (courbe en trait plein).

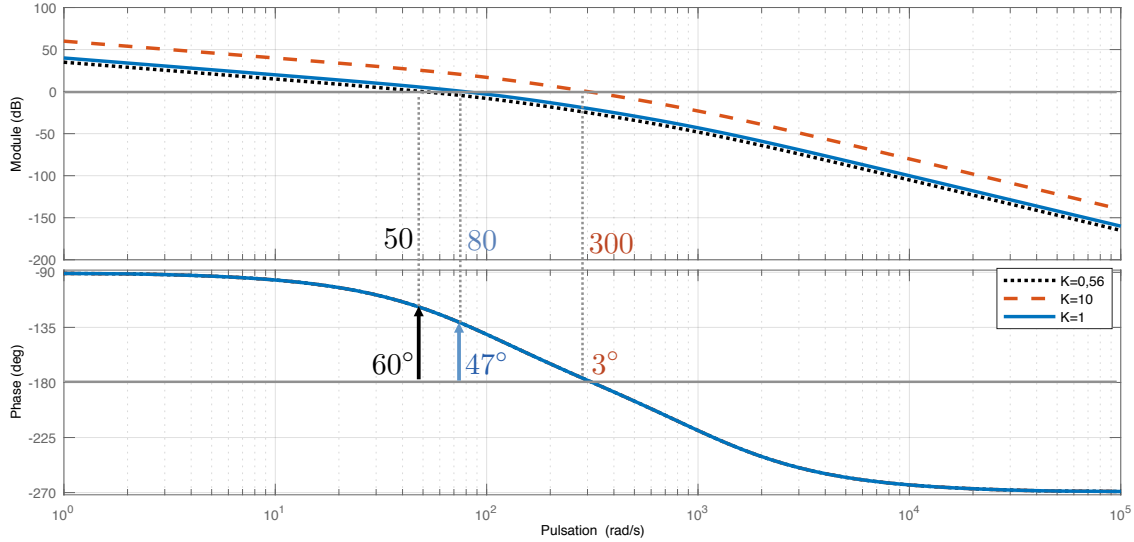


FIGURE 5.6 – Diagramme de Bode en boucle ouverte non corrigée.

A la pulsation de coupure désirée ($\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1}$), la phase est de -177° : le respect de la spécification en termes de rapidité conduirait donc à un système à la limite de stabilité (marge de phase de 3°). En d'autres termes, il est impossible de satisfaire toutes les contraintes du cahier des charges avec une correction proportionnelle.

Nous choisissons donc de satisfaire en priorité la spécification en termes de dépassement (et donc de privilégier la spécification liée à la stabilité). Pour cela, nous constatons que la contribution en phase souhaitée ($\Delta\phi = 60^\circ$) est atteinte à la pulsation $\omega = 50 \text{ rad.s}^{-1}$, pulsation à laquelle le module de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée est d'environ 5 dB. Ainsi, en choisissant K de manière à ce que $20 \log(K) = -5 \text{ dB}$, c'est-à-dire $K = 0,56$, la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée fait apparaître une marge de phase de 60° , comme désiré (Figure 5.6, courbe en pointillés fins). Cependant, la pulsation de coupure est trop faible (50 rad.s^{-1}), ce qui se traduit par un système trop lent en boucle fermée. En outre, la contrainte de précision n'est pas satisfaite puisque le module la boucle ouverte ainsi corrigée est de 15 dB à $\Omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, au lieu des 40 dB requis.

A l'inverse, l'introduction d'un gain $K = 10$ valide les spécifications de rapidité et de précision (cette double validation est particulière au système envisagé), mais le système est à la limite de la stabilité ($\Delta\phi \simeq 3^\circ$) : voir courbe en pointillés larges.

Dans les deux cas, l'erreur permanente en réponse à un échelon de consigne sera bien nulle (car un intégrateur est présent dans la boucle ouverte), mais celle en réponse à un échelon de perturbation sera non nulle (car l'intégrateur est placé en aval de la perturbation). Les réponses en boucle fermée à un échelon de consigne sont données en Figure 5.7 pour chaque correcteur ($K = 1$ en trait plein, $K = 0,56$ en pointillés fins et $K = 10$ en pointillés larges).

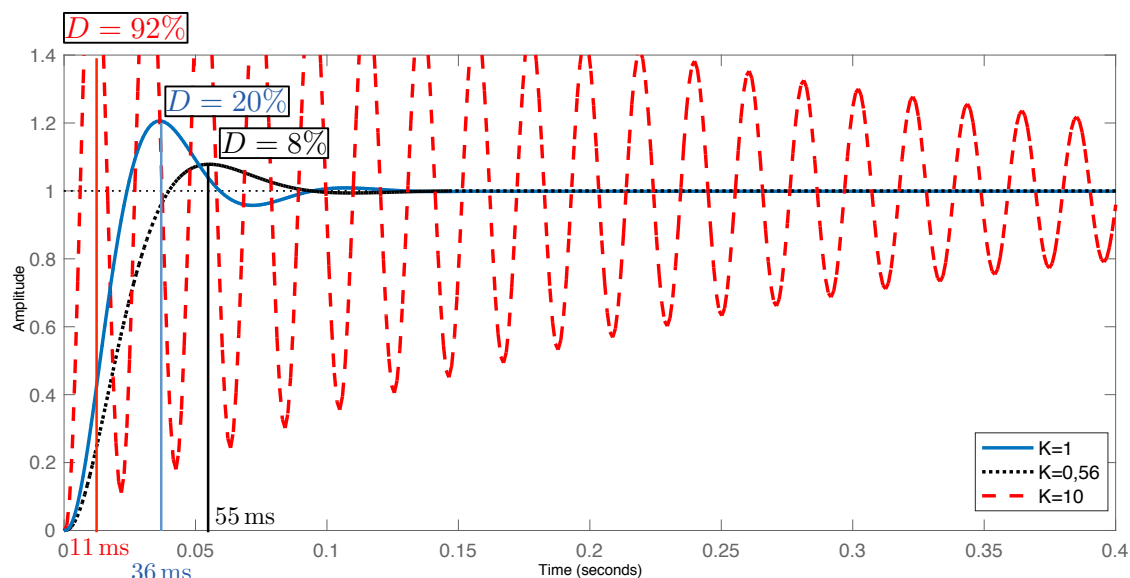


FIGURE 5.7 – Réponse en boucle fermée en réponse à un échelon unitaire de consigne.

Au vu de l'Annexe A.5, ces résultats confirment les prévisions théoriques. En particulier, pour $K = 0,56$, on constate un dépassement d'environ 8% et un temps de premier maximum $t_m \simeq 55$ ms. Notons que la relation $\omega_c t_m = 3$ suggérerait plutôt un temps de premier maximum de 60 ms : cette différence est due au fait que cette relation entre fréquence de coupure de la boucle ouverte et temps de premier maximum n'est exacte que pour les systèmes du deuxième ordre sans zéro (ici, la fonction de transfert en boucle ouverte est du troisième ordre). Pour $K = 10$, la réponse est très mal amortie, ce qui est cohérent avec la marge de phase de 3° anticipée. Ces trois réponses indicielles illustrent bien le compromis stabilité-rapidité. Enfin, notons que toutes ces réponses indicielles présentent une erreur permanente nulle vis-à-vis de la consigne, du fait de la présence d'un intégrateur dans la boucle ouverte.

La réponse à un échelon de perturbation unitaire (à consigne nulle) est donnée en Figure 5.8, en suivant le même code graphique que précédemment. L'erreur est ici $\varepsilon(t) = -y(t)$. On constate qu'aucun des gains proposés ne permet d'annuler l'erreur en régime permanent, ce qui est conforme au fait qu'aucune intégration n'est placée en amont de la perturbation. Conformément à l'analyse effectuée en Section 3.3.1.2, cette erreur permanente est égale à $-1/K$. Ainsi, la précision en régime permanente est d'autant plus grande que le gain K choisi est élevé.

Sur cet exemple, aucune stratégie de commande proportionnelle ne permet de satisfaire le cahier des charges imposé. Le compromis entre stabilité d'une part et rapidité/précision d'autre part ne peut être satisfait ici par une simple action proportionnelle. Des stratégies de commande plus élaborées doivent donc être mises en œuvre.

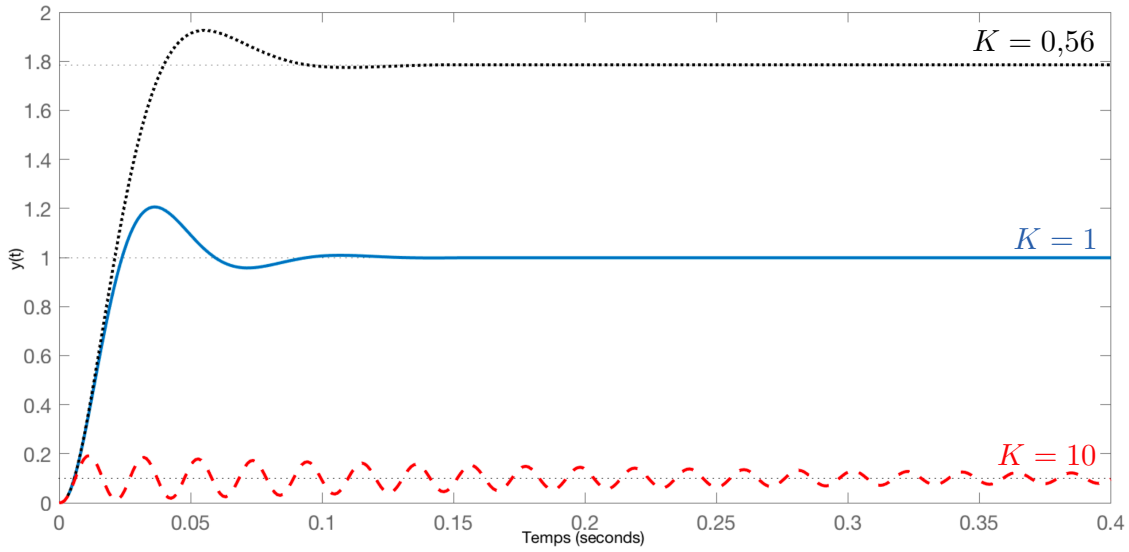


FIGURE 5.8 – Réponse en boucle fermée en réponse à un échelon unitaire de perturbation.

5.1.3 Correction par avance de phase

5.1.3.1 Fonction de transfert

On appelle correcteur par avance de phase un correcteur série de la forme :

$$C(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + aTp}, \quad \text{avec } a \in]0, 1[\text{ et } K, T > 0. \quad (5.5)$$

Le tracé de Bode de ce correcteur est représenté Figure 5.9.

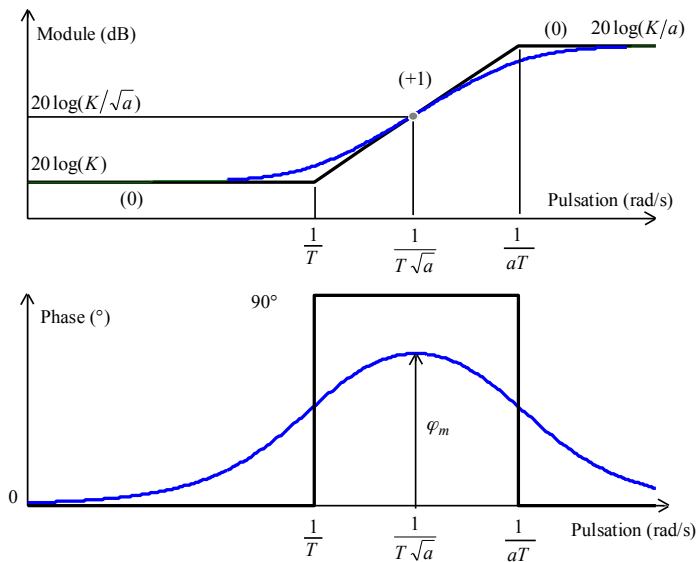


FIGURE 5.9 – Diagramme de Bode du correcteur par avance de phase.

Notons d'abord qu'en échelle logarithmique le point milieu entre les brisures $\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{aT}$ est $\frac{1}{T\sqrt{a}}$, ce qui se retrouve aisément en observant que $\frac{1}{2}(\log(\frac{1}{T}) + \log(\frac{1}{aT})) = \frac{1}{2}\log(\frac{1}{aT^2}) = \log(\frac{1}{T\sqrt{a}})$. A cette pulsation $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$, la contribution en gain du correcteur est

$$20 \log(C(j\omega_m)) = 20 \log \left(K \left| \frac{1 + \frac{j}{\sqrt{a}}}{1 + j\sqrt{a}} \right| \right) = 20 \log \left(K \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{a}}}{\sqrt{1 + a}} \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{a}} \right). \quad (5.6)$$

De plus, en observant que $C(j\omega_m) = |C(j\omega_m)|e^{j\varphi_m}$, on déduit que $\sin(\varphi_m) = \text{Im} \left(\frac{C(j\omega_m)}{|C(j\omega_m)|} \right)$. La phase φ_m apportée par le correcteur en ω_m est donc donnée par

$$\sin(\varphi_m) = \text{Im} \left(\frac{C(j\omega_m)}{|C(j\omega_m)|} \right) = \frac{\sqrt{a}}{K} \text{Im} \left(K \frac{1 + \frac{j}{\sqrt{a}}}{1 + j\sqrt{a}} \right) = \text{Im} \left(\frac{\sqrt{a} + j}{1 + j\sqrt{a}} \right). \quad (5.7)$$

On conclut ainsi que

$$\sin(\varphi_m) = \frac{1 - a}{1 + a}. \quad (5.8)$$

Le correcteur par avance de phase permet donc d'ajouter une phase φ_m , entièrement déterminée par a , à la pulsation $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$. Le tableau de la Figure 5.10 donne des valeurs de φ_m obtenues pour des valeurs typiques de a .

a	1/4	1/6	1/8	1/10	1/12
φ_m	37°	45°	51°	55°	58°

FIGURE 5.10 – Valeurs indicatives de φ_m en fonction du choix de a .

En conclusion, le correcteur par avance de phase :

- apporte, à la pulsation de coupure désirée ω_c , une avance de phase $\varphi_m = \arcsin(\frac{1-a}{1+a})$, si l'on a judicieusement centré le correcteur afin que sa fréquence centrale $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ coïncide avec ω_c , d'où une meilleure stabilité du système corrigé
- augmente la bande passante en apportant, à $\omega_c = \omega_m$, une contribution en gain de $20 \log(K/\sqrt{a})$, d'où une meilleure rapidité du système corrigé.

Notons que ce correcteur possède l'avantage d'être physiquement réalisable par le circuit analogique de la Figure 5.11. On remarquera que la cellule RC seule apporte une atténuation de a aux faibles pulsations, ce qui justifie la présence d'un gain K/a .

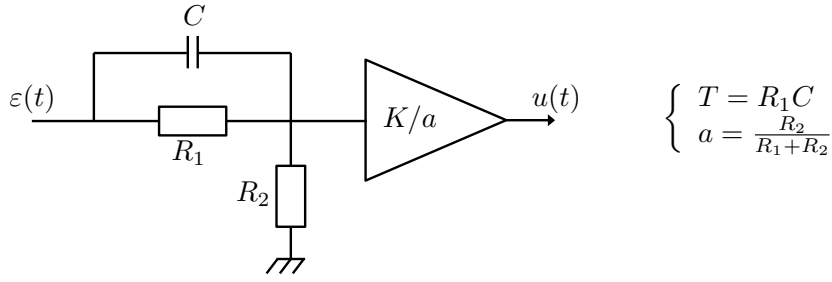


FIGURE 5.11 – Schéma de réalisation du correcteur par avance de phase.

Néanmoins, ce type de correction est de plus en plus implantée de manière numérique, selon la démarche détaillée au Chapitre 6.

5.1.3.2 Méthode de réglage dans le plan de Bode

La démarche générale de réglage d'un tel correcteur consiste à déterminer successivement a , T et K . Envisageons la synthèse de ce type de correcteur sur l'Exemple 5.1.

Exemple 5.2 (suite de l'Exemple 5.1) *Comme on l'a vu, une simple correction proportionnelle ne permet pas de valider toutes les spécifications du cahier des charges, celles-ci nécessitant à la fois une augmentation de la marge de phase et de la pulsation de coupure à 0 dB. Envisageons pour cela la synthèse d'un correcteur par avance de phase. Ce correcteur étant en série avec $G(p)$, il y a addition des courbes de gain et de phase de $C(p)$ donné par l'équation (5.5) avec les précédentes (Figure 5.6 pour $K = 1$) dans le plan de Bode. La méthodologie est alors la suivante.*

Réglage de a : A la pulsation de coupure désirée $\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1}$, la contribution en phase (par rapport à -180°) de la boucle ouverte non corrigée ($C(p) = 1$) est $\Delta\phi_0 \simeq 3^\circ$. L'avance de phase nécessaire que devra apporter le correcteur est alors donnée par la relation :

$$\varphi_m = \Delta\phi_s - \Delta\phi_0 \simeq 57^\circ. \quad (5.9)$$

Soit, compte tenu de la relation (5.8) :

$$a = \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)}, \quad \text{d'où } \boxed{a = 0,08}. \quad (5.10)$$

Attention : la contribution $\Delta\phi_0$ à considérer n'est pas la marge de phase du système non corrigée (ici, environ 50°), mais bien la contribution en phase du système à la pulsation de coupure **désirée**.

Réglage de T : L'apport de phase φ_m doit être ajouté à la pulsation à laquelle sera déterminée la marge de phase du système corrigé, c'est-à-dire à la pulsation de coupure désirée $\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1}$. Pour cela, il faut faire coïncider la pulsation $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$ (correspondant à la contribution en phase maximale du correcteur) à la pulsation de coupure désirée ω_c . En d'autres termes :

$$\omega_c = \frac{1}{T\sqrt{a}} = 300 \text{ rad.s}^{-1}, \quad \text{d'où } \boxed{T = 0,011 \text{ s}}. \quad (5.11)$$

Réglage de K : Les paramètres a et T étant choisis, le réglage du gain K est effectué de sorte que le module de la boucle ouverte corrigée coupe effectivement l'axe 0 dB à la pulsation de coupure désirée $\omega_c = 300\text{ rad.s}^{-1}$. La Figure 5.6 indique qu'en $\omega_c = 300\text{ rad.s}^{-1}$, le système non corrigé présente un gain de -20 dB . Par ailleurs, comme ω_m a été placé de manière à coïncider avec ω_c , la contribution en gain du correcteur en ω_c est $20\log(\frac{K}{\sqrt{a}})$ (voir Equation (5.6)). Sachant que les courbes de gain s'additionnent dans le plan de Bode, K est déterminé par la relation :

$$|C(j\omega_c)|_{dB} + |G(j\omega_c)|_{dB} = 0\text{ dB} \rightarrow 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{a}}\right) = 20\text{ dB}, \quad \text{d'où } \boxed{K = 2,81}. \quad (5.12)$$

La fonction de transfert du correcteur par avance de phase est donc la suivante :

$$C(p) = 2,81 \frac{1 + 0,011p}{1 + 0,00088p}. \quad (5.13)$$

La Figure 5.12 récapitule les tracés dans le plan de Bode des fonctions de transfert de la boucle ouverte initiale $G(p)$ (courbe en pointillés larges), du correcteur $C(p)$ (pointillés fins) et de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée $C(p)G(p)$ (trait plein).

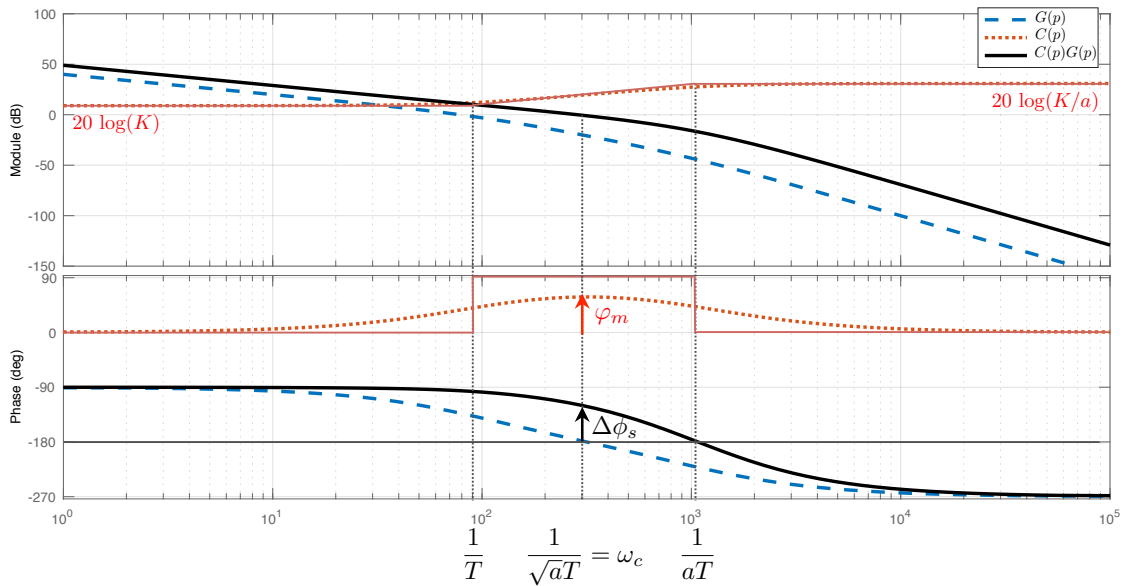


FIGURE 5.12 – Diagramme de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte non corrigée, du correcteur par avance de phase et de la boucle ouverte corrigée.

Les performances espérées en termes de marge de phase (stabilité) et de bande passante (rapidité) sont totalement satisfaites. En revanche, l'objectif de précision n'est pas validé puisque le gain à la pulsation $\Omega = 10\text{ rad.s}^{-1}$ n'est que de 30 dB au lieu des 40 dB imposés. De plus, aucune intégration n'est introduite en amont de perturbation : l'erreur permanente en réponse à un échelon de perturbation sera non nulle. Ce type de correcteur ne permet donc pas de satisfaire toutes les spécifications demandées.

La Figure 5.13 montre la réponse à un échelon de consigne du système en boucle fermée corrigé par le correcteur par avance de phase. On vérifie que les spécifications

dans le domaine temporel (dépassement inférieur à 10% et temps du premier maximum de 10 ms) sont effectivement satisfaites par ce type de correction. A titre de comparaison, la réponse indicielle du système bouclé avec correction proportionnelle est également donnée ($C(p) = 0,56$: voir Exemple 5.1) : seule la spécification en termes de dépassement est respectée dans ce cas.

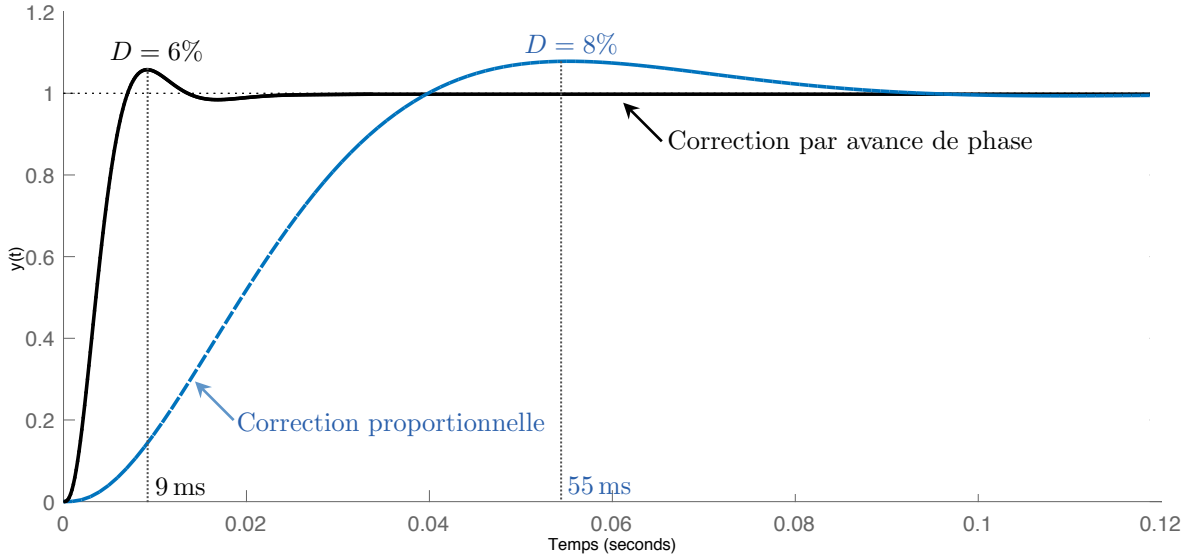


FIGURE 5.13 – Réponse indicielle du système corrigé en boucle fermée.

5.1.3.3 Conclusion

La correction par avance de phase permet de modifier la stabilité, la rapidité et la précision d'un système asservi en fonction de spécifications établies. Selon les cas, lorsqu'elle n'est pas nulle par structure, l'erreur permanente vis-à-vis de la consigne peut être diminuée par cette correction, sans toutefois être complètement annulée. De même, lorsqu'elle n'est pas nulle par structure, l'erreur permanente vis-à-vis des perturbations peut être minimisée, sans toutefois être rigoureusement annulée.

Ce problème d'annulation d'erreur permanente (vis-à-vis de signaux de consigne ou de perturbations) s'inscrit en fait dans une démarche de régulation, pour laquelle on cherche à immuniser le système vis-à-vis de perturbations en régime permanent (et donc également à annuler toute erreur permanente par rapport à la consigne). Pour satisfaire cet objectif, une catégorie particulière de correcteurs s'impose : les correcteurs Proportionnel Intégral (PI) et Proportionnel Intégral Dérivé (PID), comme détaillé dans les sections suivantes.

5.1.4 Correction PI (Proportionnelle Intégrale)

5.1.4.1 Fonction de transfert

Les correcteurs PI sont représentés par une équation de la forme :

$$u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad (5.14)$$

où K est le gain d'action proportionnelle et T_i est une constante de temps, exprimée en secondes, appelée "temps d'action intégrale".

Sa fonction de transfert s'écrit donc :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right). \quad (5.15)$$

5.1.4.2 Aspect temporel

La réponse indicielle d'un correcteur PI se caractérise par l'allure de la Figure 5.14.

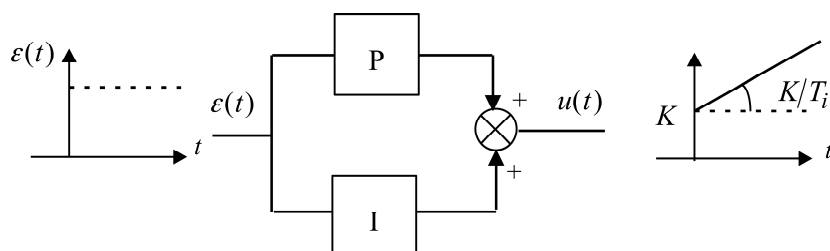


FIGURE 5.14 – Correcteur proportionnel et intégral.

Le rôle d'un tel correcteur est le suivant :

- En régime permanent : élimination de l'erreur finale vis-à-vis d'un échelon de consigne et de perturbation constantes intervenant en aval du correcteur. Ceci est dû à la présence d'un intégrateur en chaîne directe en amont des perturbations (voir Section 3.3.1).
- En régime transitoire : aux hautes fréquences, pour $\omega \gg \frac{1}{T_i}$, comportement identique à une action proportionnelle seule (voir Figure 5.16).

Ce correcteur est généralement employé pour annuler l'erreur permanente en réponse à un échelon de consigne ou de perturbation. La vitesse à laquelle cette erreur permanente est rejetée est directement liée au choix de la constante de temps T_i et se caractérise par une enveloppe de la forme e^{-t/T_i} . Ainsi, **l'erreur permanente est rejetée d'autant plus rapidement que la constante de temps T_i est faible.**

Les réponses indicielles typiques du système bouclé se caractérisent par les tracés donnés Figure 5.15.

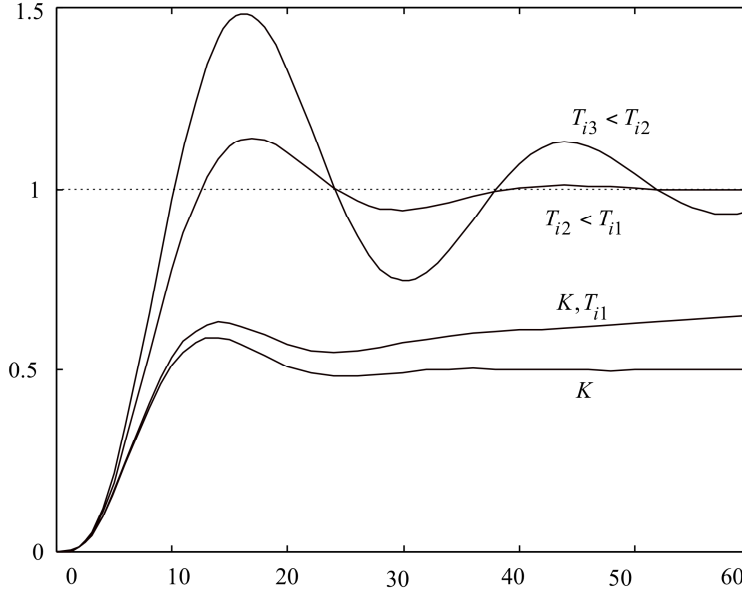


FIGURE 5.15 – Réponses indicielles typiques d'un système corrigé par correcteur PI.

Toutes ces réponses indicielles ont été obtenues avec le même gain K d'action proportionnelle, et sont comparées à celle obtenue avec le régulateur proportionnel de gain K (sans action intégrale).

Le cas $\{K, T_{i1}\}$ représenté Figure 5.15 est le cas typique du système dont l'action intégrale est trop faible (temps d'action intégrale T_i trop grand) : le système répond dans un premier temps à l'action proportionnelle, puis bien plus tard l'action intégrale entraîne l'annulation de l'erreur statique.

A l'inverse, la constante de temps T_{i3} est visiblement trop faible : la trop grande proximité de la brisure $\frac{1}{T_{i3}}$ avec la pulsation de coupure ω_c donne lieu à une marge de phase diminuée, qui conduit à un mauvais amortissement des oscillations transitoires (et donc un dépassement plus important).

Lorsque T_i est choisi correctement (comme c'est le cas pour T_{i2}), la réponse est à la fois suffisamment rapide et correctement amortie. On constate qu'alors T_i est souvent compris entre $t_m/10$ et t_m .

Notons enfin que l'action intégrale peut conduire à une “accumulation” de l'erreur, donnant ainsi lieu à un signal de commande d'amplitude trop importante pour être physiquement réalisée par l'actionneur. Cette problématique peut être contournée par des stratégies dites d’“anti-windup” (anti-emballement) ou en saturant l'action intégrale lorsque la loi de commande dépasse ses valeurs admissibles. Ce dernier point sera traité en temps discret dans la Section 6.5.2.

5.1.4.3 Réponse fréquentielle

En écrivant $C(p) = K \frac{1+T_i p}{T_i p}$, il est aisé de tracer l'allure de la réponse fréquentielle du correcteur PI : voir Figure 5.16. Notons que l'asymptote basse fréquences est $\frac{K}{T_i p}$; elle coupe donc l'axe 0 dB en $\omega = \frac{K}{T_i}$. Sur ce diagramme, on voit clairement que le correcteur PI se comporte comme une action proportionnelle (gain K , phase nulle) pour des pulsations $\omega \gg \frac{1}{T_i}$.

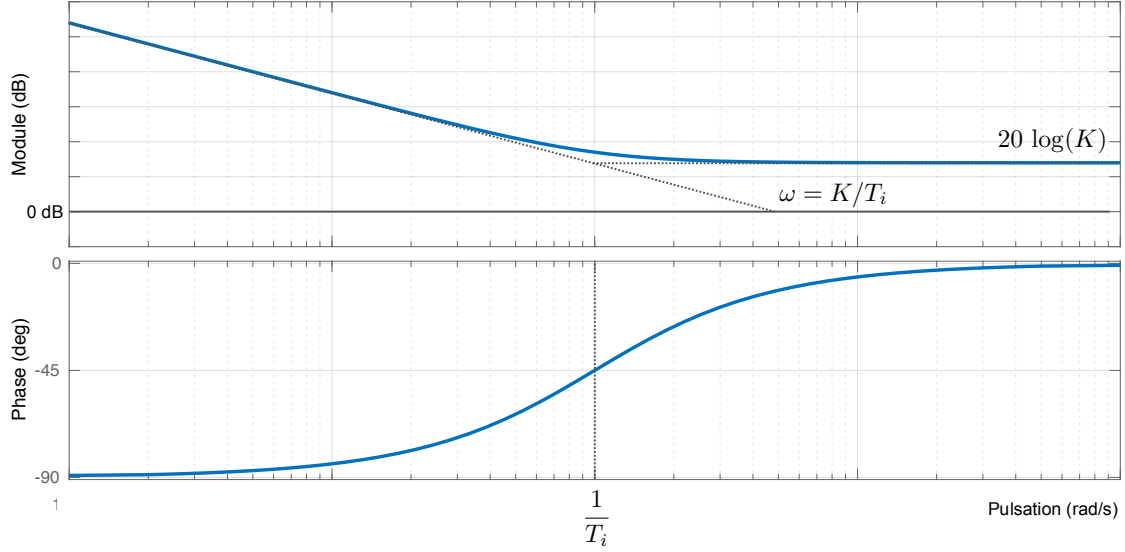


FIGURE 5.16 – Diagramme de Bode d'un correcteur PI.

5.1.4.4 Méthode de réglage dans le plan de Bode

Réglage de T_i : Le régulateur PI a une contribution en phase négative sur toute la plage fréquentielle (voir Figure 5.16). La constante de temps T_i est donc choisie en fonction de la marge de phase $\Delta\phi$ que l'on souhaite imposer à la boucle ouverte corrigée. Soit $G(p)$ la fonction de transfert en boucle ouverte, ω_c la pulsation de coupure imposée par le cahier des charges et $\Delta\phi_0$ la contribution en phase de $G(p)$ à cette pulsation (c'est-à-dire $\Delta\phi_0 = \arg(G(j\omega_c)) + 180^\circ$). T_i est alors choisie de manière à ce que :

$$\Delta\phi_0 + \arg(C(j\omega_c)) = \Delta\phi. \quad (5.16)$$

En observant que $\arg(C(j\omega_c)) = \arctan(T_i \omega_c) - 90^\circ$, ceci conduit à :

$$T_i = \frac{1}{\omega_c} \tan(\Delta\phi - \Delta\phi_0 + 90^\circ). \quad (5.17)$$

Ce réglage n'est possible que si la contribution en phase $\Delta\phi_0$ du système non corrigé à la pulsation de coupure souhaitée ω_c est supérieure à la marge de phase voulue $\Delta\phi$.

Réglage de K : Le gain K est ensuite choisi de manière à assurer un module de 0 dB à la pulsation ω_c . Ceci se traduit par :

$$20 \log(|C(j\omega_c)|) + 20 \log(|G(j\omega_c)|) = 0 \text{ dB}, \quad (5.18)$$

soit encore :

$$20 \log(K) = -20 \log\left(\frac{\sqrt{1 + T_i^2 \omega_c^2}}{T_i \omega_c}\right) - 20 \log(|G(j\omega_c)|). \quad (5.19)$$

Dans le cas où $\omega_c \gg 1/T_i$, le comportement du correcteur en ω_c peut être assimilé au gain statique K et l'expression précédente se simplifie :

$$20 \log(K) \simeq -20 \log(|G(j\omega_c)|). \quad (5.20)$$

5.1.5 Correction PID (Proportionnelle Intégrale Dérivée)

5.1.5.1 Fonction de transfert

Les correcteurs PID possèdent un modèle mathématique représenté par une équation intégral-différentielle linéaire du deuxième ordre de la forme suivante :

$$u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right). \quad (5.21)$$

- K est le gain “d’action proportionnelle”
- T_i est une constante de temps, exprimée en secondes, dite “temps d’action intégrale”
- T_d est une constante de temps, exprimée en secondes, dite “temps d’action dérivée”.

Ce correcteur possédant une action proportionnelle ($K \varepsilon(t)$), intégrale ($\frac{K}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$) et dérivée ($KT_d \frac{d\varepsilon}{dt}(t)$), on appelle ce correcteur à trois actions, “correcteur PID” (Proportionnel, Intégral, Dérivé).

À partir de l’équation différentielle linéaire temporelle ci-dessus, il est possible d’obtenir la fonction de transfert $C(p)$ du correcteur :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right). \quad (5.22)$$

5.1.5.2 Aspect temporel

Ce correcteur agit à la fois sur la précision en régimes permanent et transitoire, sur la rapidité et sur la stabilité. En première approximation : l’action I annule l’erreur permanente, l’action P augmente la précision transitoire et la rapidité, et l’action D tend à stabiliser le système.

La réponse indicielle du PID se caractérise par l’allure de la Figure 5.17. En particulier, l’action dérivée génère une impulsion de Dirac $KT_d \delta(t)$ à $t = 0^+$.

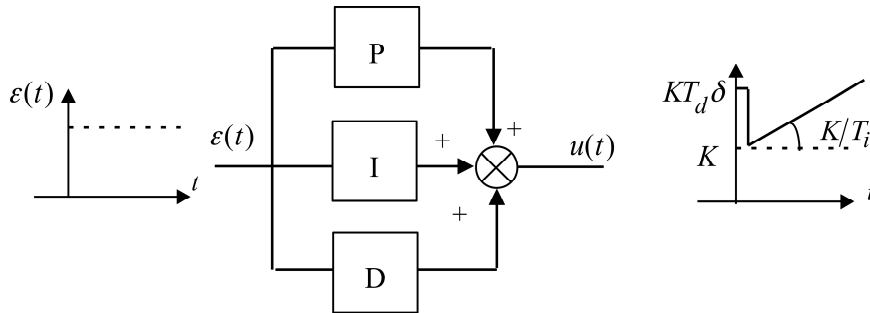


FIGURE 5.17 – Régulateur proportionnel intégral et dérivé.

Voici les principaux effets de ce correcteur :

- En régime permanent : comportement identique à celui du correcteur PI. L’action intégrale permet d’éliminer l’erreur permanente vis-à-vis d’un échelon de consigne ou de perturbation.

- En régime transitoire : grâce à l'action dérivée, il est possible soit d'augmenter la rapidité du système pour un degré de stabilité donné, soit d'augmenter le degré de stabilité du système pour une rapidité fixée. Cette action dérivée va en effet jouer un rôle identique à celui d'un correcteur à avance de phase et permettre d'augmenter la bande passante tout en conservant la marge de phase ou en l'augmentant éventuellement.

Comme pour le correcteur PI, le choix de la constante T_i détermine la vitesse à laquelle l'erreur permanente est rejetée (enveloppe de la forme e^{-t/T_i}).

Les réponses indicielles typiques du système bouclé se caractérisent par les tracés donnés Figure 5.18.

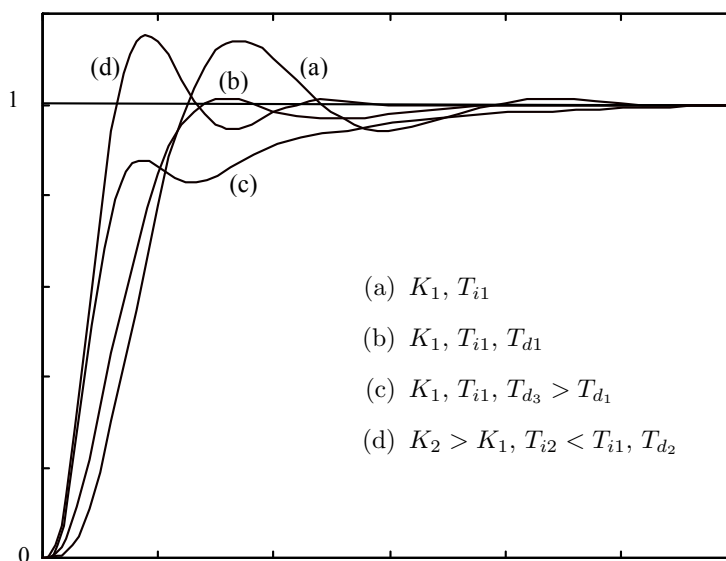


FIGURE 5.18 – Réponses indicielles typiques d'un système corrigé par PID.

Les réponses indicielles proposées ont été obtenues avec trois régulateurs PID différents et sont comparées à celle obtenue avec un régulateur PI (courbe (a)). L'action dérivée permet d'améliorer la stabilité du système pour une rapidité fixée, c'est le cas de la réponse obtenue avec le jeu de paramètres $\{K_1, T_{i1}, T_{d1}\}$ (courbe (b)). Toutefois il est intéressant de noter que trop d'action dérivée peut être nocif, c'est le cas de la réponse obtenue avec $\{K_1, T_{i1}, T_{d3}\}$ (courbe (c)), pour lequel le temps d'action dérivée T_{d3} est trop grand. D'autre part, l'action dérivée peut permettre de diminuer le temps de réponse du système en conservant la même stabilité, c'est le cas pour le jeu de paramètres $\{K_2, T_{i2}, T_{d2}\}$ (courbe (d)), avec $K_2 > K_1$ (pour augmenter la bande passante et donc la rapidité) et $T_{i2} < T_{i1}$ (car on peut se permettre une action intégrale plus rapide si la bande passante est plus élevée).

Comme pour le correcteur PI, l'action intégrale peut conduire à une "accumulation" de l'erreur, pouvant être contournée par des stratégies dites d'"anti-windup" (anti-emballlement) ou en saturant l'action intégrale lorsque la loi de commande dépasse ses valeurs admissibles.

5.1.5.3 Réponse fréquentielle

La fonction de transfert $C(p)$ du correcteur PID peut encore s'écrire :

$$C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K \frac{1 + T_i p + T_i T_d p^2}{T_i p}. \quad (5.23)$$

$C(p)$ possède donc deux zéros qui, suivant le signe du discriminant $\Delta = T_i(T_i - 4T_d)$, sont soit réels, soit complexes conjugués.

— Si $T_i > 4T_d$, il existe deux racines réelles négatives :

$$C(p) = K \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p}, \quad \text{avec} \quad T_1, T_2 = \frac{2T_i T_d}{T_i \pm \sqrt{T_i(T_i - 4T_d)}}. \quad (5.24)$$

Les relations entre les constantes de temps de cette structure factorisée et les constantes de temps d'action intégrale et d'action dérivée du correcteur sont les suivantes :

$$T_i = T_1 + T_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{T_d} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (5.25)$$

Notons que si $T_i \gg T_d$, alors $T_i \simeq T_1$ et $T_d \simeq T_2$, et l'on peut écrire :

$$C(p) \simeq K \frac{(1 + T_i p)(1 + T_d p)}{T_i p}. \quad (5.26)$$

— Si $T_i = 4T_d$, il existe deux racines confondues réelles négatives :

$$C(p) = K \frac{(1 + T p)^2}{T_i p}, \quad \text{avec} \quad T_1 = T_2 = T = \sqrt{T_i T_d}. \quad (5.27)$$

— Si $T_i < 4T_d$, il existe deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative :

$$C(p) = K \frac{1 + 2\xi T p + T^2 p^2}{T_i p}, \quad \text{avec} \quad T^2 = T_i T_d \quad \text{et} \quad \xi^2 = \frac{T_i}{4T_d}. \quad (5.28)$$

Le choix $T_i \gg 4T_d$ est généralement à éviter car il conduit à un rejet des perturbations assez lent (puisque la constante T_i est grande).

Dans le plan de Bode, on obtient les représentations de la Figure 5.19 pour le module et la phase.

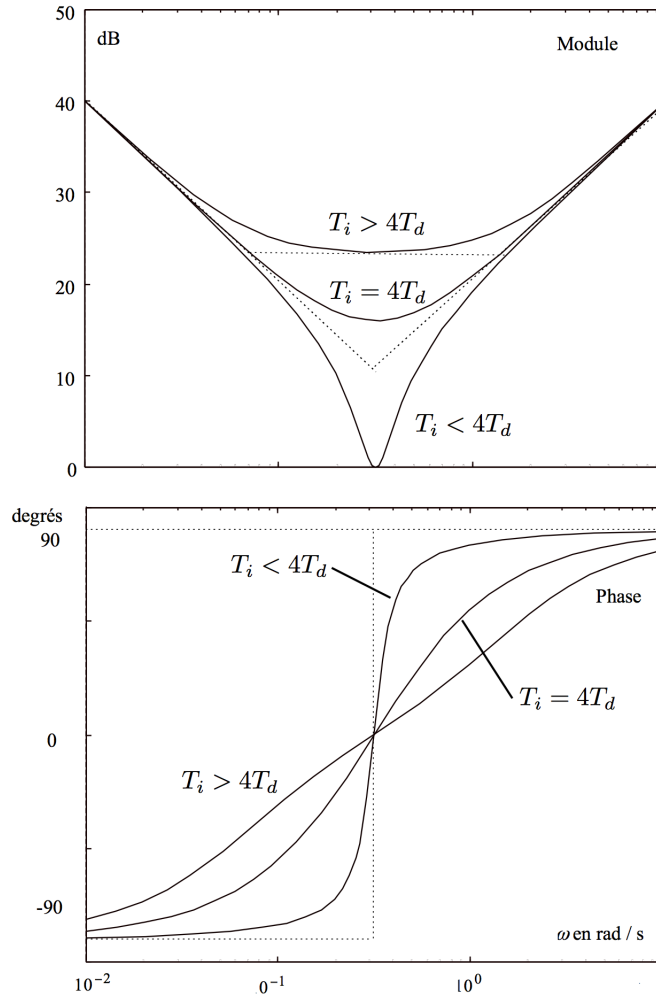


FIGURE 5.19 – Représentations dans le plan de Bode d'un correcteur PID.

5.1.5.4 Réalisation de la dérivée et structure du correcteur

L'action dérivée $T_d p$ n'est pas physiquement réalisable et en pratique on la réalise selon la fonction de transfert suivante :

$$\frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{\alpha} p}, \quad (5.29)$$

le coefficient α étant de l'ordre de 10 à 15 pour que la constante de temps ainsi introduite soit négligeable devant T_d , permettant ainsi de préserver l'effet de l'action dérivée voulu autour de ω_c . Une action dérivée pure ne serait du reste pas souhaitable dans une chaîne de régulation industrielle, par suite de l'amplification des bruits aux hautes fréquences. Elle peut ainsi induire des sollicitations de l'actionneur susceptibles de nuire à sa durée de vie (cas d'une vanne par exemple). Il est donc nécessaire de limiter son action au delà d'une certaine fréquence, ce que réalise la brisure additionnelle en $\omega = \frac{\alpha}{T_d}$ dans la fonction de transfert de la relation (5.29).

5.1.5.5 Méthodes de réglage dans le plan de Bode

De nombreuses stratégies de réglage de correcteur PID existent. L'une d'elles consiste à imposer une relation entre les constantes de temps des actions intégrale et dérivée ($T_i = 4T_d$). Cette méthode est présentée ci-dessous au travers d'un exemple.

Exemple 5.3 (suite de l'Exemple 5.1) La fonction de transfert traitée en Section 5.1.2.3 est la suivante :

$$G(p) = \frac{100}{p(1 + \frac{p}{100})(1 + \frac{p}{1000})}. \quad (5.30)$$

On rappelle les spécifications fréquentielles :

- marge de phase en boucle ouverte $\Delta\phi_s \geq 60^\circ$ (voir Annexe A.9)
- pulsation de coupure en boucle ouverte à 0 dB $\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1}$
- gain de la boucle ouverte supérieur à 40 dB, à la pulsation $\Omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$
- présence d'un intégrateur dans le correcteur.

On rappelle en Figure 5.20 le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée.

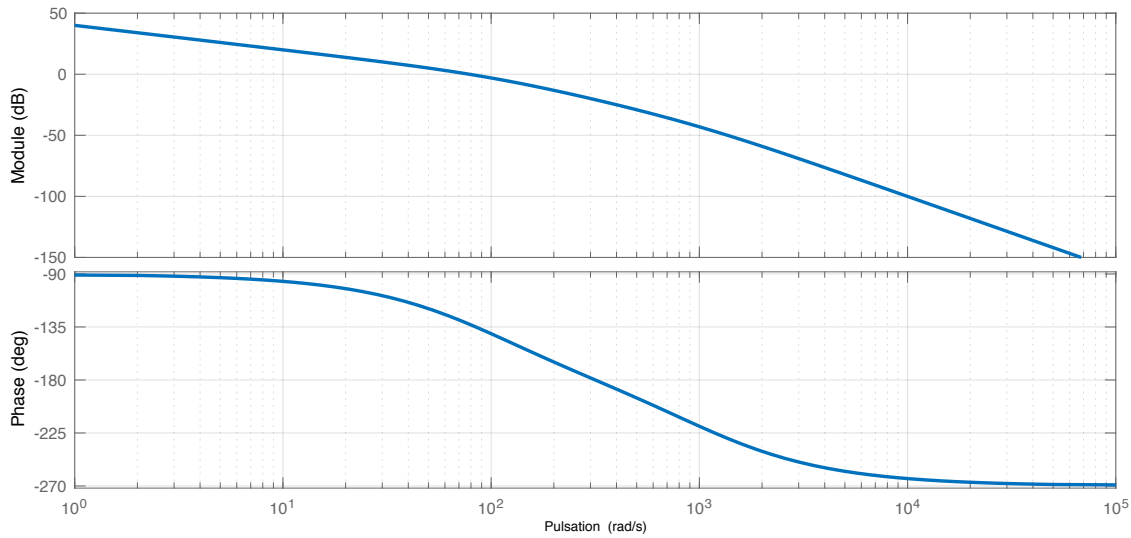


FIGURE 5.20 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte avec $C(p) = 1$.

Comme nous l'avons vu, une correction par avance de phase ne saurait suffire puisqu'un intégrateur est requis dans le correcteur. De plus, la phase étant insuffisante en la pulsation de coupure désirée $\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1}$ (3° au lieu des 60° requis), un apport de phase est nécessaire et une correction PI ne suffirait donc pas non plus (voir Figure 5.16). Cela justifie l'emploi d'un correcteur PID.

La méthode consiste à imposer $T_i = 4T_d$. Comme vu précédemment (voir l'équation (5.27)), le correcteur peut alors s'écrire sous forme factorisée :

$$C(p) = K(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p) = K' \frac{(1 + Tp)^2}{p}, \quad \text{avec } T = \sqrt{T_i T_d} \text{ et } K' = \frac{K}{T_i}. \quad (5.31)$$

Réglage de T : Le réglage de la constante de temps T s'effectue de manière à garantir la marge de phase souhaitée à la pulsation ω_c . Comme il a été vu, la correction doit ajouter 57° de phase à la pulsation ω_c . Or, l'action intégrale va conduire à une chute de phase de 90° sur toute la plage fréquentielle. On veut donc :

$$\arg((1 + j\omega_c T)^2) = 2 \arg(1 + j\omega_c T) = 2 \arctan(\omega_c T) = 147^\circ, \quad (5.32)$$

soit

$$T = \frac{1}{\omega_c} \tan\left(\frac{147}{2}\right) = 11 \text{ ms}. \quad (5.33)$$

Réglage de K' : Le gain K' est ensuite réglé de manière à assurer à la fonction de transfert en boucle ouverte un module de 0 dB en ω_c . La Figure 5.20 indique que le gain de la boucle ouverte non-corrigée à cette pulsation est de -20 dB . On veut donc :

$$20 \log(|C(j\omega_c)|) = 20 \text{ dB}, \quad (5.34)$$

soit :

$$K' \frac{1 + \omega_c^2 T^2}{\omega_c} = 10. \quad (5.35)$$

On obtient ainsi :

$$K' = 250. \quad (5.36)$$

Détermination de K , T_i , T_d : De l'équation (5.31) et du fait que $T_i = 4T_d$, on tire :

$$\boxed{T_d = 5,5 \text{ ms}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_i = 22 \text{ ms}} \quad \text{et} \quad \boxed{K = 5,5}$$

Filtrage de l'action dérivée : L'action dérivée est enfin filtrée selon (5.29) de manière à limiter l'amplification des bruits de mesure et à rendre la fonction de transfert du correcteur causale. Le correcteur s'écrit finalement :

$$\boxed{C(p) = 5,5 \left(1 + \frac{1}{22 \cdot 10^{-3} p} + \frac{5,5 \cdot 10^{-3} p}{1 + 3,7 \cdot 10^{-4} p} \right)} \quad (5.37)$$

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte ainsi corrigée est donné en Figure 5.21 (courbe en trait plein). A titre de comparaison, la réponse fréquentielle de la boucle ouverte non-corrigée est elle aussi reportée (courbe en pointillés).

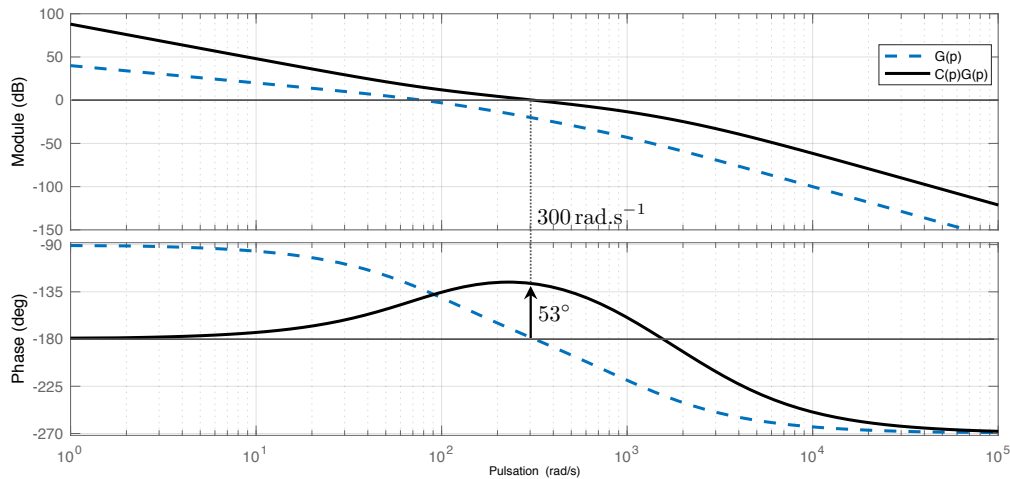


FIGURE 5.21 – Diagramme de Bode des fonctions de transfert de la boucle ouverte (corrigée et non-corrigée).

La spécification fréquentielle en termes de pulsation de coupure est bien respectée. On constate en outre une marge de phase légèrement inférieure à celle voulue (53° au lieu de 60°); ceci est dû au filtrage de l'action dérivée. Un dépassement supérieur à 10% est donc à prévoir. Ceci aurait pu être évité en imposant une marge de phase légèrement supérieure à celle requise, anticipant ainsi l'effet du filtrage de l'action dérivée.

On constate enfin que la spécification sur la précision transitoire (module supérieur à 40 dB pour $\omega \leq 10 \text{ rad.s}^{-1}$) est bien satisfaite. Ceci est dû à l'action intégrale, qui a relevé la courbe de module dans les basses fréquences.

La réponse de la boucle fermée à un échelon de consigne est représentée sur la Figure 5.22. La rapidité du système est conforme au cahier des charges ($t_m = 8 \text{ ms}$). Le dépassement est plus important que prévu ($D = 20\%$). Ceci est dû au fait que le système corrigé possède deux intégrations (voir Section 3.3.1.3).

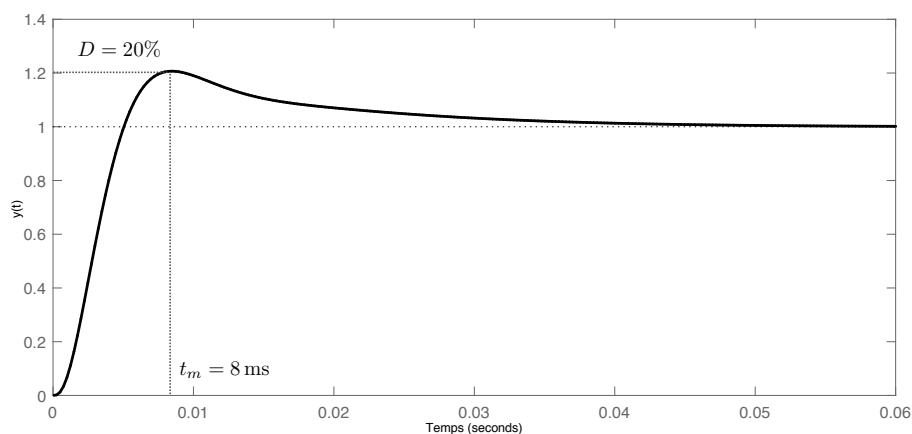


FIGURE 5.22 – Réponse de la fonction de transfert en boucle fermée à un échelon de consigne.

Le comportement temporel ne correspond pas exactement aux performances fréquentielles obtenues. En effet, les correspondances de l'Annexe A.5 ne sont exactes que pour les systèmes du deuxième ordre sans zéro. La fonction de transfert en boucle ouverte corrigée possède quant à elle 4 pôles et 2 zéros, ce qui explique les différences observées. Il conviendrait de réajuster le réglage du correcteur en conséquence.

La réponse à un échelon de perturbation est donnée en Figure 5.23 (à consigne nulle). L'erreur en régime permanent est nulle, grâce à l'action intégrale du correcteur. Le rejet de la perturbation se fait avec une rapidité convenable.

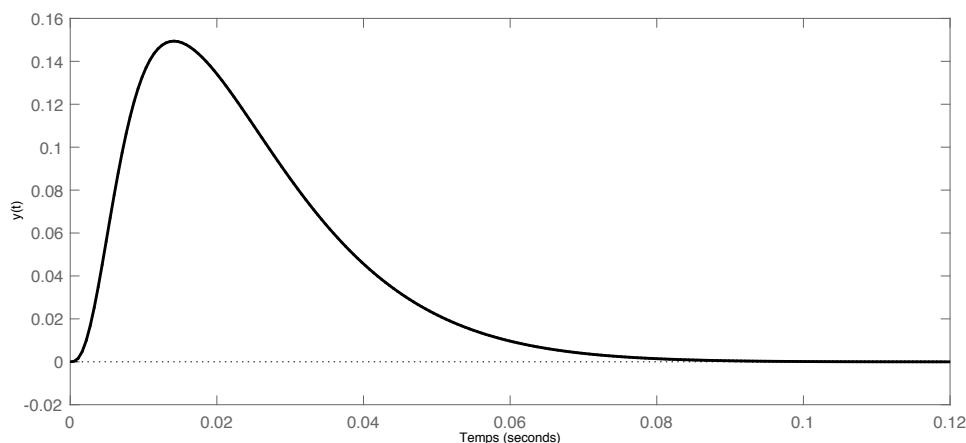


FIGURE 5.23 – Réponse de la fonction de transfert en boucle fermée à un échelon de perturbation.

5.1.5.6 Méthode de Ziegler-Nichols

Dans cette méthode, on détermine les valeurs de K , T_i et T_d de sorte que la réponse indicielle en boucle fermée ait un coefficient d'amortissement tel que $a/b = 0,25$ (voir Figure 5.24). Notons qu'elle ne s'applique qu'à des systèmes stables en boucle ouverte.

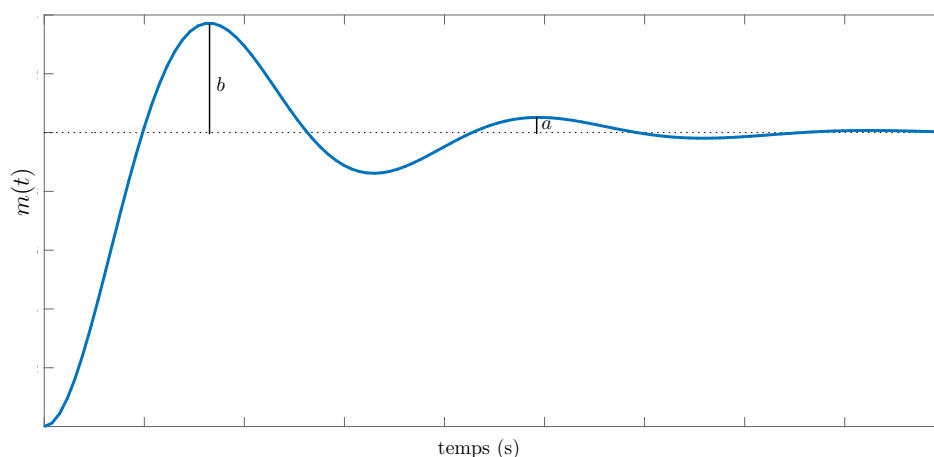


FIGURE 5.24 – Critère de réglage de Ziegler-Nichols.

Pour mettre en œuvre cette méthode on utilise soit la réponse indicielle en boucle ouverte, soit la génération de l'oscillation entretenue en boucle fermée.

Réglage à partir de la réponse indicielle en boucle ouverte

Lorsqu'il est possible de provoquer une perturbation indicielle d'amplitude Δu , on enregistre la réponse du système en boucle ouverte $m(t)$ en sortie du capteur (Figure 5.25).

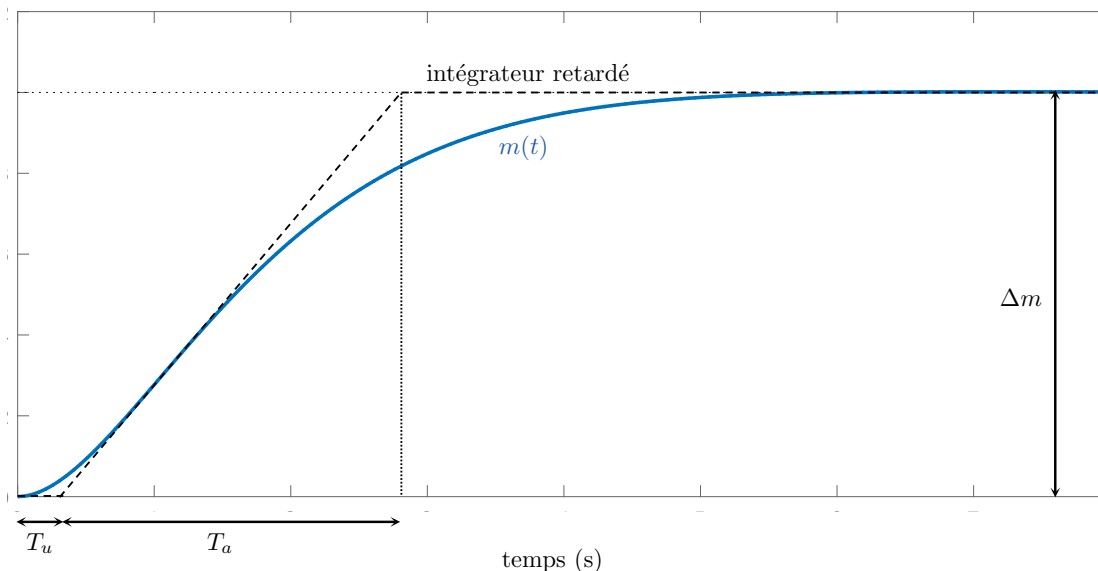


FIGURE 5.25 – Réponse indicielle en boucle ouverte pour la méthode de Ziegler-Nichols.

On note Δm sa valeur en régime permanent. On trace alors la tangente au point d'inflexion et l'on définit la pente P_r et l'instant T_u de démarrage de cette tangente au point d'inflexion. En utilisant les notations de la méthode de Strejc (traitée dans le cours “Modélisation”), on a la relation : $P_r = \frac{\Delta m}{T_a}$, permettant de modéliser le système sous la forme :

$$G(p) = \frac{\lambda}{p} e^{-T_u p}, \quad \text{avec } \lambda \text{ pente normalisée : } \lambda = \frac{P_r}{\Delta u} = \frac{\Delta m}{T_a \Delta u}, \quad (5.38)$$

qui correspond à la réponse en pointillés sur la Figure 5.25. Les valeurs de gains adoptées sont données dans le tableau de la Figure 5.26, selon que l'on travaille avec un correcteur PI ou un correcteur PID.

	K	T_i	T_d
PI	$\frac{0,9}{\lambda T_u} = \frac{0,9 T_a \Delta u}{T_u \Delta m}$	$3,33 T_u$	
PID	$\frac{1,2}{\lambda T_u} = \frac{1,2 T_a \Delta u}{T_u \Delta m}$	$2 T_u$	$0,5 T_i$

FIGURE 5.26 – Choix des paramètres du correcteur PI/PID par la méthode “boucle ouverte” de Ziegler-Nichols.

On peut noter la relation choisie par Ziegler et Nichols : $T_i = 4 T_d$, correspondant à un double zéro réel dans le PID : voir Equation (5.27).

Réglage par génération de l'oscillation entretenue

Cette méthode a l'avantage d'être utilisée avec le système en boucle fermée. *Toutefois, il faut noter qu'il n'est pas toujours possible dans une installation de faire entrer le système en oscillation.*

Les actions intégrale et dérivée sont préalablement annulées et l'action proportionnelle est progressivement augmentée jusqu'au moment où apparaît une oscillation entretenue. On note alors $K_{\max}$ la valeur du gain proportionnel correspondant et T_0 la période des oscillations ainsi obtenues. Selon que l'on choisisse un correcteur PI ou PID, les valeurs des paramètres du correcteur sont données dans le tableau de la Figure 5.27.

	K	T_i	T_d
PI	$0,45 K_{\max}$	$0,84 T_0$	
PID	$0,6 K_{\max}$	$0,5 T_0$	$0,125 T_0$

FIGURE 5.27 – Choix des paramètres du correcteur PI/PID par la méthode “boucle fermée” de Ziegler-Nichols.

Notons qu'il est possible de déterminer le gain $K_{\max}$ et la période T_0 à partir de la réponse fréquentielle du système. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ est en effet la pulsation pour laquelle la phase atteint -180° . $K_{\max}$ est la valeur du gain pour laquelle la courbe de gain passe 0 dB à la pulsation ω_0 ; en d'autres termes $K_{\max}$ est la marge de gain du système. On pourra noter que seules les caractéristiques hautes fréquences du processus (c'est-à-dire au voisinage de ω_0) sont prises en considération pour cette méthode de réglage.

5.1.5.7 Méthode de réglage empirique

Il est également possible de régler manuellement le correcteur PID à partir de la réponse indicielle du système bouclé. Cette méthode empirique ne prétend en aucune sorte conduire à un réglage optimal, mais présente l'indéniable avantage de fournir une méthodologie permettant d'aboutir à un fonctionnement acceptable.

La méthode proposée comporte trois étapes successives, qui à chaque fois nécessitent plusieurs essais, perturbant le fonctionnement normal de l'installation. Il est en effet nécessaire de provoquer des variations indiciaires de consigne ou, si possible, de perturbations. Ces variations autour du régime nominal seront faibles (de l'ordre de 5% à 10%), mais perturberont obligatoirement la sortie du système.

1. On commence par annuler les actions intégrale et dérivée ($T_i = \infty$ et $T_d = 0$) de manière à se ramener à un régulateur proportionnel simple. Cette phase préalable est très couramment utilisée dans la plupart des méthodes de réglage où, pour éviter tout problème d'instabilité de l'installation, on commence par retirer l'action intégrale. On règle alors le gain proportionnel K , en partant de valeurs faibles et en l'augmentant progressivement, de façon à obtenir une réponse indicielle présentant environ 10% à 20% de dépassement (par rapport à la valeur finale et non pas la consigne).

2. On règle T_i , en diminuant progressivement sa valeur jusqu'à obtenir un dépassement du même ordre ou légèrement supérieur (cette fois par rapport à la consigne).
3. On règle T_d , en partant de valeurs faibles et en l'augmentant progressivement de façon à diminuer le dépassement jusqu'à la valeur que l'on s'est imposée.

Les réponses indicielles typiques obtenues à chacune de ces trois étapes sont représentées par la Figure 5.28.

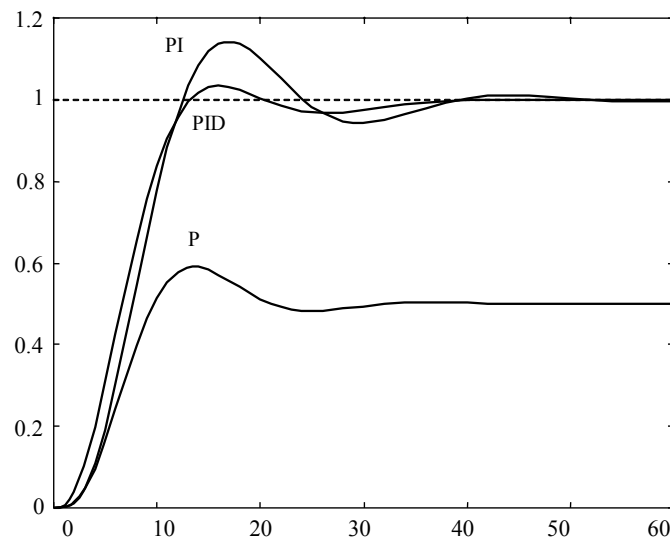


FIGURE 5.28 – Les trois étapes du réglage empirique.

5.2 Correction par anticipation

Ces techniques de correction ne s'utilisent qu'en complément des techniques de correction en boucle fermée. Elles reposent sur l'injection de signaux en boucle ouverte afin de minimiser les transitoires ressentis par la boucle de correction principale, suite à une variation de la consigne ou à une perturbation externe.

5.2.1 Compensation de la consigne

Cette correction utilise le signal de consigne pour élaborer la loi de commande. Le schéma de principe de la compensation de la consigne est donné par la Figure 5.29.

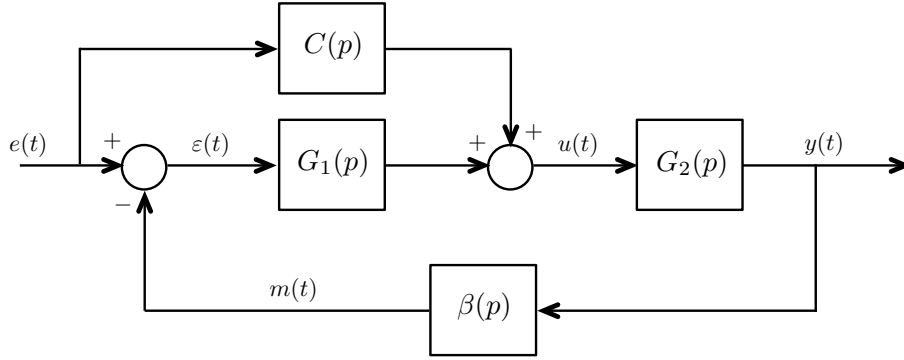


FIGURE 5.29 – Principe d'action d'un correcteur par anticipation sur la consigne.

En raisonnant comme en Section 3.3, on a donc :

$$\varepsilon(p) = E(p) - G_2(p)\beta(p)U(p) \quad (5.39)$$

$$U(p) = C(p)E(p) + G_1(p)\varepsilon(p). \quad (5.40)$$

Ainsi :

$$\frac{\varepsilon(p)}{E(p)} = \frac{1 - G_2(p)\beta(p)C(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)\beta(p)}. \quad (5.41)$$

Afin d'annuler l'erreur vis-à-vis de la consigne, il suffit donc de choisir :

$$C(p) = \frac{1}{G_2(p)\beta(p)} \quad (5.42)$$

On notera que, dans ce cas, le système asservi suit parfaitement la consigne (en régime permanent comme en régime transitoire), sans introduction d'intégration dans la chaîne directe.

Cette correction n'est toutefois réalisable que si la fonction de transfert $1/G_2(p)\beta(p)$:

- est stable (pôles à parties réelles négatives)
- est propre (degré du numérateur inférieur ou égal au degré du dénominateur).

Dans le cas où $1/G_2(p)\beta(p)$ n'est pas propre, on pourra se limiter à la valeur de son gain statique ($C(p) = 1/G_2(0)\beta(0)$) ou ajouter un filtre supplémentaire afin de la rendre causale. La compensation ne sera alors pas parfaite dans le régime transitoire.

5.2.2 Compensation des perturbations

Supposons que la perturbation soit accessible à la mesure. Il est alors possible – du moins théoriquement – d'éliminer l'influence de la perturbation par l'intermédiaire d'un correcteur par anticipation $C(p)$ décrit par le schéma Figure 5.30.

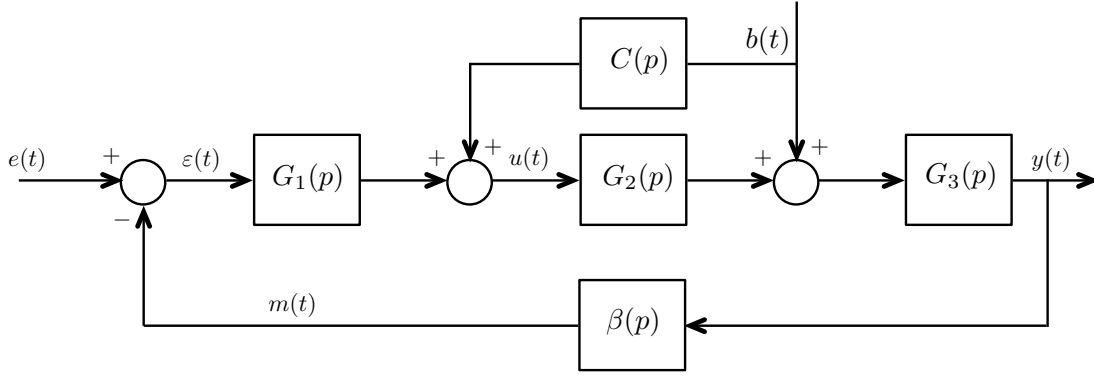


FIGURE 5.30 – Principe d’action d’un correcteur par anticipation sur les perturbations.

En effet, il suffit de choisir :

$$C(p) = -\frac{1}{G_2(p)} \quad (5.43)$$

pour annuler l’effet de la perturbation $b(t)$ sur la sortie.

Ici aussi, cette correction n’est réalisable que si la fonction de transfert $1/G_2(p)$ est stable et propre. Dans le cas où $1/G_2(p)$ n’est pas propre, on pourra (comme pour la compensation de consigne) se limiter à la valeur de son gain statique ou ajouter un filtre supplémentaire afin de la rendre causale, au prix d’une compensation imparfaite en régime transitoire. Par exemple, si $G_2(p) = K_2/p$, on pourra prendre :

$$C(p) = -\frac{p}{K_2(1 + \tau p)}, \quad (5.44)$$

avec τ inférieure aux constantes de temps principales de $G_2(p)$.

Notons enfin que cette correction requiert la mesure de la perturbation, ce qui constitue une contrainte forte en pratique.

5.3 Correction cascade

5.3.1 Structure et intérêt

La correction cascade est une structure de commande importante qui s’avère nécessaire lorsqu’une architecture à boucle unique ne permet pas d’assurer le degré de performance désiré ou lorsque la régulation d’une grandeur intermédiaire est nécessaire. Elle consiste à effectuer plusieurs corrections suivant des boucles imbriquées. Le schéma bloc d’une telle correction est représenté par la Figure 5.31 pour une structure à deux boucles faisant apparaître une boucle externe (qu’on peut appeler aussi “boucle principale”) et une boucle interne (qu’on peut appeler aussi “boucle secondaire”).

La sortie $u_1(t)$ du correcteur de la boucle principale sert à piloter la consigne du correcteur de la boucle secondaire : les deux correcteurs sont donc dits en “cascade”.

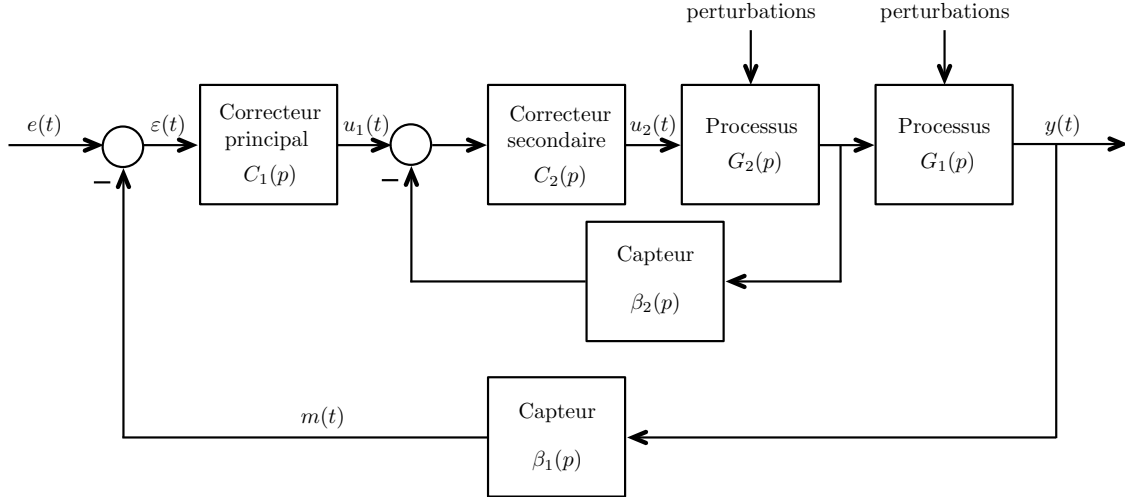


FIGURE 5.31 – Structure asservie à deux boucles ou correction “cascade”.

5.3.1.1 Augmentation de la rapidité

Le premier avantage de cette correction à deux boucles est qu'elle rend **le régime transitoire plus rapide**. En effet, le déphasage de la boucle ouverte principale est réduit par le bouclage secondaire, ce qui permet d'accroître la rapidité du système réglé.

Illustrons cet avantage sur un exemple simple, tel que décrit par la Figure 5.32.

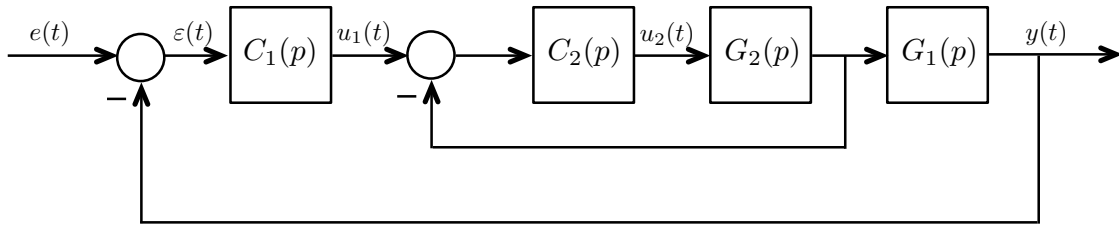


FIGURE 5.32 – Exemple de correction cascade.

Dans ce système, la fonction de transfert $G_2(p)$ est supposée être du premier ordre :

$$G_2(p) = \frac{K_2}{1 + T_2 p}, \quad (5.45)$$

avec $K_2 > 0$ et $T_2 > 0$. En posant $G'_2(p) = \frac{C_2(p)G_2(p)}{1 + C_2(p)G_2(p)}$, ce système peut être simplifié comme sur la Figure 5.33.

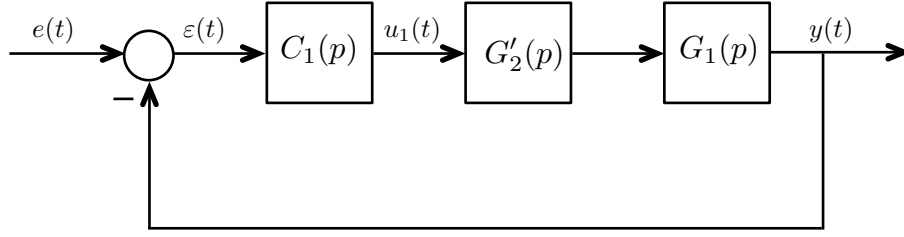


FIGURE 5.33 – Simplification du schéma-bloc.

Si l'on choisit $C_2(p)$ comme un correcteur PI, c'est-à-dire $C_2(p) = K(1 + \frac{1}{T_i p})$, la fonction de transfert $G'_2(p)$ s'écrit :

$$G'_2(p) = \frac{KK_2(1 + T_i p)}{T_i p(1 + T_2 p) + KK_2(1 + T_i p)}. \quad (5.46)$$

En choisissant $T_i = T_2$, pour faciliter les calculs sur cet exemple, on obtient :

$$G'_2(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_2}{KK_2}p}. \quad (5.47)$$

La nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte de la boucle externe qui devra être réglée par le correcteur $C_1(p)$ est alors :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{T_2}{KK_2}p} G_1(p), \quad (5.48)$$

alors qu'avec une boucle unique nous aurions comme fonction de transfert à régler :

$$H'(p) = \frac{K_2}{1 + T_2 p} G_1(p), \quad (5.49)$$

Si le correcteur PI est réglé de telle façon que $KK_2/T_2 \gg \omega_{c1}$, où ω_{c1} désigne la pulsation de coupure souhaitée pour la boucle externe, alors on peut approcher la relation précédente par $H(p) \simeq G_1(p)$. Ainsi, le correcteur principal $C_1(p)$ ne règle que $G_1(p)$. La correction en cascade est ainsi fondée sur la différence de rapidité entre les deux boucles, cette différence fournira en particulier les règles de synthèse d'une régulation cascade.

Cette synthèse attire les remarques suivantes :

- Le déphasage de la boucle externe est réduit dans le cas de la correction cascade. En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte se limite à la fonction $G_1(p)$ alors qu'en l'absence de la boucle interne la fonction de transfert en boucle ouverte serait $G_1(p)G_2(p)$. Dans ce deuxième cas, la fonction $G_2(p)$ étant en général passe bas, le déphasage en boucle ouverte ($G_1(p)G_2(p)$) serait en conséquence plus important.
- La fonction de transfert obtenue par la correction cascade correspond donc à un système plus rapide. Le déphasage de la boucle externe étant réduit par la présence de la boucle interne, il est alors possible d'augmenter la pulsation de coupure ω_{c1} et donc d'augmenter en conséquence la rapidité du système bouclé.
- La constante de temps de la boucle interne est divisée par KK_2 , confirmant ainsi que le régime transitoire d'une telle correction sera plus rapide que celui d'une correction à boucle unique.

5.3.1.2 Réduction de l'impact des perturbations

Considérons une correction en cascade telle que décrite par la Figure 5.34.

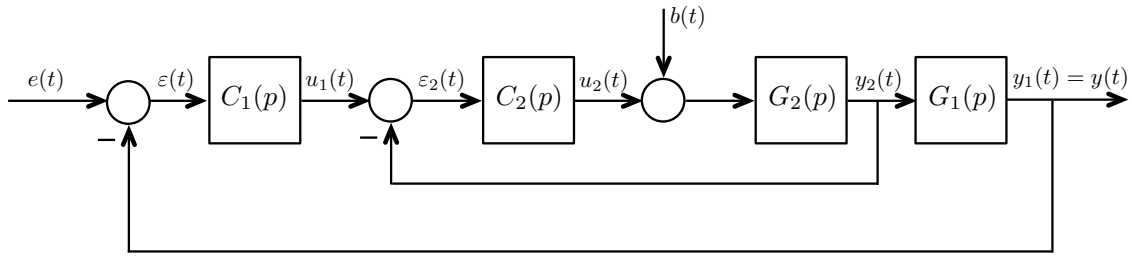


FIGURE 5.34 – Exemple de régulation cascade.

L'effet de la perturbation $b(t)$ intervenant sur la partie interne $G_2(p)$ du processus est d'autant plus réduit que la boucle secondaire est rapide vis-à-vis de la boucle principale.

Dans le cas d'une structure unique, le correcteur $C_1(p)$ est sensible à la sortie du système, la fonction $G_1(p)$ étant en général passe-bas l'effet de la perturbation sur y_1 est en retard comparativement à l'effet sur y_2 . En effet, dans une correction à boucle unique, la compensation des perturbations intervient par action du correcteur principal $C_1(p)$ sur la grandeur réglante $u_1(t)$. Ce correcteur réagit aux variations de l'écart $\varepsilon(t)$, c'est-à-dire aux variations de la sortie du système $y_1(t)$. Ainsi, selon ce principe, la compensation des perturbations ne peut commencer à intervenir que lorsque l'influence de la perturbation sur la sortie est déjà importante.

Dans le cas d'une structure cascade, le régulateur $C_2(p)$ de la boucle interne est sensible à y_2 . En conséquence, pour une perturbation intervenant sur la boucle secondaire, le correcteur $C_2(p)$ a tendance à compenser son effet dès qu'elle apparaît dans la sortie intermédiaire y_2 , sans attendre qu'elles aient une influence notable sur la sortie d'intérêt y_1 . Ainsi l'effet de la perturbation peut être réduit directement par la boucle interne (par ailleurs caractérisée par une dynamique plus rapide que celle de la boucle externe) avant que son effet sur la boucle externe ne soit important.

En résumé, une perturbation est aussitôt prise en compte par la boucle secondaire et son effet sur la boucle principale est ainsi réduit notablement. Pour voir cela, supposons qu'une perturbation $b(t)$ en échelon intervienne à l'entrée de $G_2(p)$, comme décrit par la Figure 5.34. Une réponse typique à cet échelon de perturbation est représentée par la Figure 5.35¹.

1. B.P. : boucle principale, B.S. : boucle secondaire.

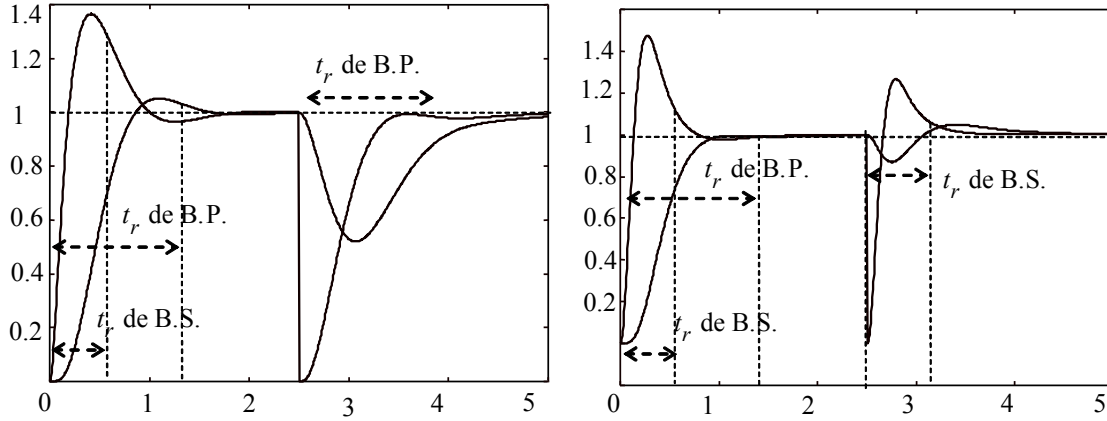


FIGURE 5.35 – Comparaison d’une correction à boucle unique (à gauche) et d’une correction cascade (à droite) en réponse à un échelon de perturbation interne.

L’influence de la perturbation sur la sortie est donc réduite et l’on doit noter que plus la boucle secondaire est rapide vis-à-vis de la boucle principale, plus l’effet des perturbations est négligeable en sortie principale.

Toutefois si la perturbation $b(t)$ intervient en aval de la boucle secondaire, c’est-à-dire après $G_2(p)$, l’influence de la perturbation n’est pas modifiée par la boucle secondaire. On dit que la grandeur intermédiaire y_2 qui a permis de réaliser le bouclage secondaire est une variable “incomplète”.

5.3.1.3 Réguler une variable intermédiaire

Une autre façon d’envisager la correction cascade est de considérer que la grandeur intermédiaire $y_2(t)$ est asservie sur la grandeur $u_1(t) = y_2^*(t)$, sortie du correcteur de la boucle externe : voir Figure 5.36.

Notamment, lors d’un régime transitoire important au niveau de la boucle principale entraînant la saturation de la grandeur $y_2^*(t)$, la grandeur intermédiaire $y_2(t)$ est de ce fait réglée avec comme consigne la valeur de saturation de $y_2^*(t)$. Cette dernière propriété permet non seulement de régler $y_2(t)$, mais aussi de lui imposer une valeur maximale. On conçoit ainsi un dispositif de limitation de la grandeur intermédiaire au cours de transitoires importants.

Ce type de structure est, par exemple, particulièrement utilisée pour la commande de machines électriques pour différentes applications comme dans le transport. Par exemple pour le cas de machines électriques utilisées pour la traction, la structure de commande est organisée autour d’une boucle interne en courant et d’une boucle externe en vitesse. La limitation de la consigne interne (en pratique la consigne de courant) permettra de limiter le courant et donc l’accélération à une valeur maximale prescrite. De nombreux autres cas d’applications dans le domaine de l’actionnement électrique existent.

5.3.2 Règles de synthèse

Comme exposé précédemment, la régulation cascade est fondée sur la différence de rapidité des différentes boucles. A chaque niveau de régulation, le déphasage en boucle

ouverte est réduit par la boucle interne de niveau immédiatement inférieur. En résumé, ceci permet :

- l'accélération des régimes transitoires
- l'atténuation de l'effet des non linéarités
- la réduction de l'effet des perturbations, d'autant plus qu'elles interviennent dans une boucle plus interne.

Au regard de ces remarques, on peut déduire la règle de synthèse suivante : élargir la bande passante avec le degré de profondeur des boucles, de manière à ce que le temps de réponse de chaque boucle soit négligeable devant celui de la boucle de niveau immédiatement supérieur. Pour cela, on adopte en général un facteur 10 entre les pulsations de coupure de 2 boucles contiguës :

$$\omega_{c(i+1)} \geq 10 \omega_{ci} \quad (5.50)$$

Les Figures 5.36 et 5.37 illustrent le principe de synthèse de la régulation cascade. Les deux correcteurs $C_1(p)$ et $C_2(p)$ peuvent être calculés indépendamment en considérant le schéma de la Figure 5.37.a pour le calcul du régulateur $C_2(p)$ de la boucle interne et le schéma de la Figure 5.37.b pour le calcul du régulateur $C_1(p)$ de la boucle externe. Pour cette boucle, en supposant que les dynamiques aient été choisies selon les règles précédentes, la fonction de transfert de la boucle interne fermée peut être approchée par un simple gain $\frac{Y_2(p)}{Y_2^*(p)} \simeq \frac{1}{\beta_2(0)}$ (inverse du retour : voir Section 3.1.2).

Le choix des pulsations de coupure de chaque boucle est effectué :

- en partant des performances souhaitées pour la boucle interne et le choix de ω_{c2}
- en respectant la règle $\omega_{ci+1} \geq 10 \omega_{ci}$ entre deux boucles consécutives.

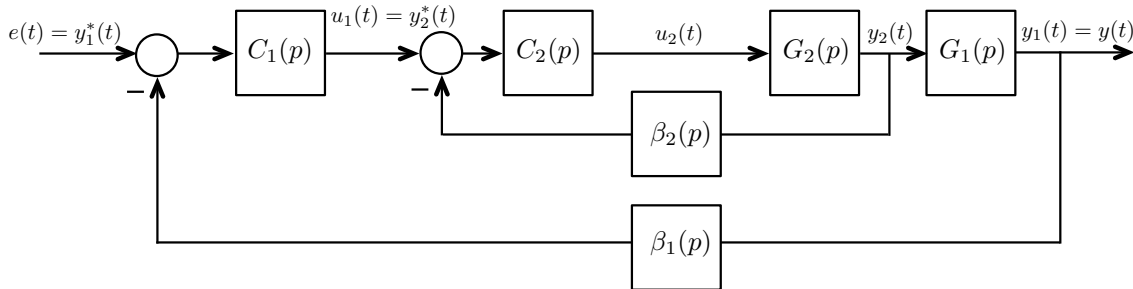


FIGURE 5.36 – Structure de commande en cascade.

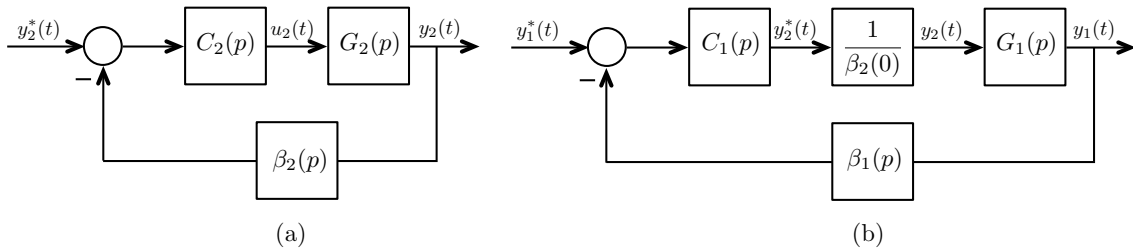


FIGURE 5.37 – Principe de synthèse des régulateurs pour une structure cascade.

5.4 Conclusions

Les **correcteurs série** modifient à la fois la stabilité, la rapidité et la précision vis-à-vis de la consigne et des perturbations. Ce mode de correction est le plus utilisé.

Les **correcteurs par anticipation** (feedforward dans la littérature anglo-saxonne), lorsqu'ils sont réalisables, ne modifient pas la stabilité de la boucle et compensent soit l'erreur due à la consigne, soit l'effet d'une perturbation. Ils ne peuvent donc s'utiliser qu'en complément d'une correction série. Dans un cas complexe (plusieurs perturbations dont certaines non mesurables), la mise en œuvre de ces correcteurs peut être lourde et imparfaite.

Une structure de **correction cascade** permet d'augmenter la rapidité du système tout en diminuant l'impact des perturbations. Ce type de correction peut se généraliser à un nombre quelconque de boucles utilisant diverses grandeurs intermédiaires accessibles sur le procédé. La bande passante des variables utilisées est, en général, de plus en plus faible au fur et à mesure que l'on s'écarte de la boucle interne.

Chapitre 6

Transposition numérique de correcteurs à temps continu

La correction des systèmes par ordinateur numérique peut être mise en place selon le schéma de la Figure 6.1.

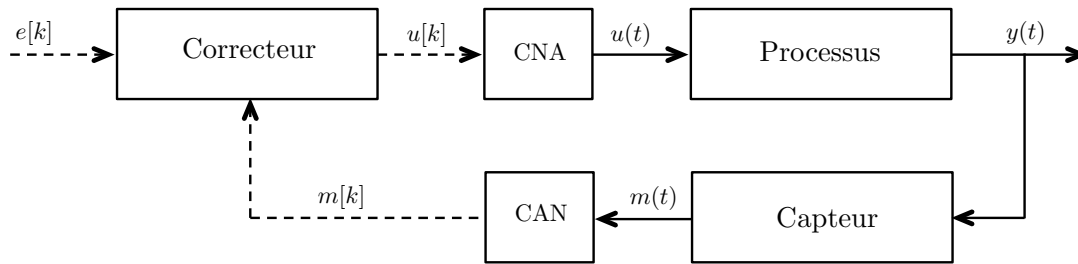


FIGURE 6.1 – Schéma fonctionnel d'un asservissement numérique.

L'utilisation d'un ordinateur nécessite l'implantation d'un algorithme de correction. Cet algorithme, en général récursif, peut être synthétisé directement, en utilisant les méthodes de synthèse en z , ou par transposition du continu en discret.

Dans le cas de corrections simples, du type de celles présentées dans le Chapitre 5, la seconde méthode est le plus souvent utilisée car elle conserve aux paramètres de l'algorithme une signification physique. Ce chapitre se focalise donc sur cette seconde approche.

6.1 Structure d'un système asservi par ordinateur numérique

Le schéma fonctionnel d'un système asservi par ordinateur numérique est donné en Figure 6.2.

La sortie mesurée $m(t)$ est convertie par un convertisseur analogique numérique (CAN) à la cadence T_e , appelée période d'échantillonnage.

Le signal à temps discret $m[k]$ ainsi obtenu est ensuite comparé à la consigne $e[k]$. Le correcteur numérique $C(z)$ élabore la loi de commande $u[k]$ à partir de cet écart $\varepsilon[k]$.

Ce signal de commande à temps discret est ensuite converti en temps continu par un convertisseur numérique-analogique (CNA), par exemple un bloqueur d'ordre zéro (BOZ), et appliqué au système physique (temps continu) au moyen d'actionneurs.

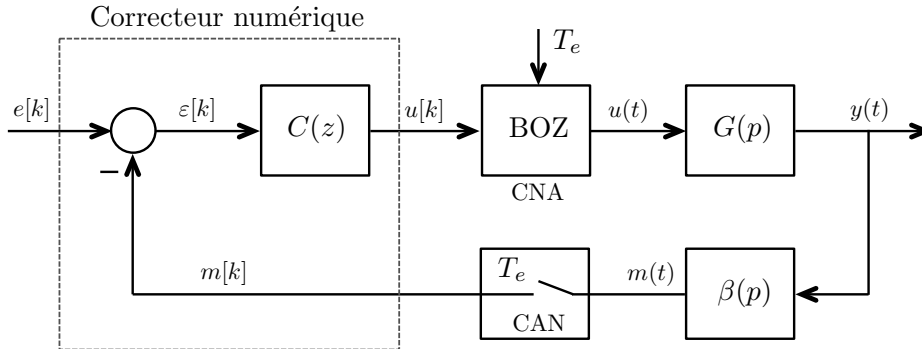


FIGURE 6.2 – Schéma fonctionnel d'une correction numérique.

6.2 Choix de la période d'échantillonnage

6.2.1 Critères temporels

Une bonne correction nécessite de pouvoir détecter rapidement toute modification de l'écart entre la sortie mesurée $m[k]$ et la consigne $e[k]$. Il est donc nécessaire que le correcteur soit cadencé à une fréquence suffisamment élevée par rapport à la rapidité que l'on souhaite imposer au système. Pour cela, une dizaine de points minimum est requise avant le temps de premier maximum t_m , comme décrit par la Figure 6.3.

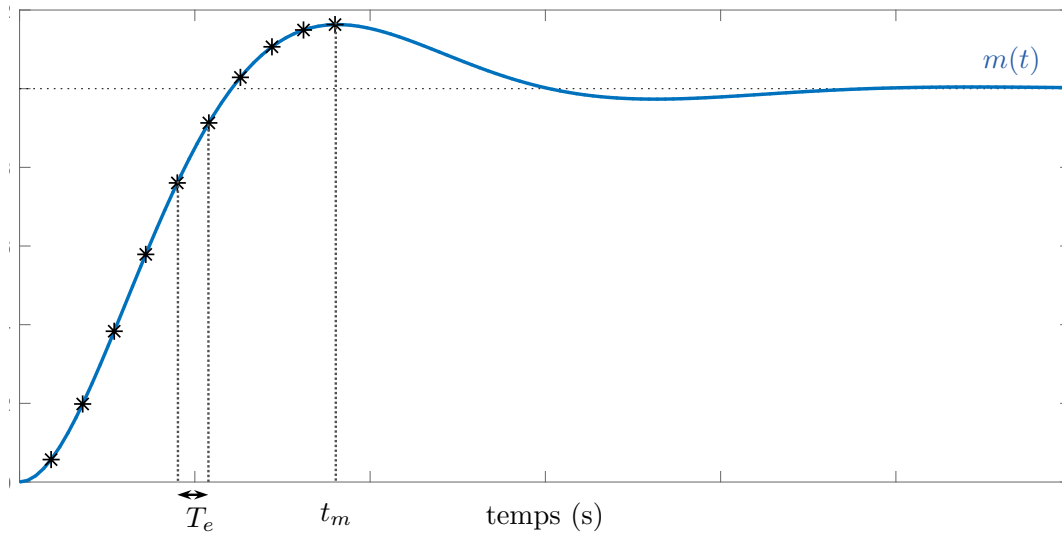


FIGURE 6.3 – Critère temporel pour le choix de la période d'échantillonnage T_e .

A l'inverse, une cadence d'échantillonnage trop élevée est non seulement inutile, mais peut également conduire à des problèmes d'arrondis numériques.

Un choix indicatif pour la période d'échantillonnage est ainsi :

$$\boxed{\frac{t_m}{30} \leq T_e \leq \frac{t_m}{10}} \quad (6.1)$$

6.2.2 Critères fréquentiels

Le choix de la période d'échantillonnage T_e peut également être effectué à partir de considérations fréquentielles. Il a été vu en Section 4.1.1 que l'effet de l'ensemble échantillonneur-bloqueur peut être assimilé à un retard pur de valeur $T_e/2$, dont on connaît le caractère potentiellement déstabilisant. Ceci conduit en effet à une diminution de la phase de $\omega_c T_e/2$ à la pulsation de coupure ω_c souhaitée. Afin de ne pas dégrader la marge de phase de plus d'une tolérance $\Delta\phi_{\max}$ donnée, on imposera donc $\omega_c T_e/2 \leq \Delta\phi_{\max}$, soit ¹ :

$$T_e \leq \frac{2\Delta\phi_{\max}}{\omega_c}. \quad (6.2)$$

Ainsi, une chute de marge de phase tolérable $\Delta\phi_{\max} = 8^\circ$ conduira à $T_e \leq \frac{16\pi}{180\omega_c}$. En utilisant la relation $\omega_c t_m \simeq 3$, on retrouve :

$$T_e \leq \frac{t_m}{10}. \quad (6.3)$$

6.3 Approximation numérique des fonctions à temps continu

6.3.1 Transformation d'Euler ou méthode des rectangles

Cette méthode correspond à une démarche classique en analyse numérique pour approcher numériquement la dérivée ou l'intégrale d'une fonction continue.

La méthode consiste à approcher numériquement une dérivée $s(t) = \frac{dy(t)}{dt}$. Il existe pour cela de nombreuses méthodes, dont la plus simple est l'approximation aux différences retard, "backward difference". Soit T_e la période d'échantillonnage. En posant $y[k] = y(kT_e)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est possible de donner à l'instant kT_e l'approximation suivante :

$$s[k] = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT_e} \simeq \frac{y[k] - y[k-1]}{T_e}, \quad (6.4)$$

comme représenté sur la Figure 6.4.

1. Attention à la conversion d'unités radians/degrés.

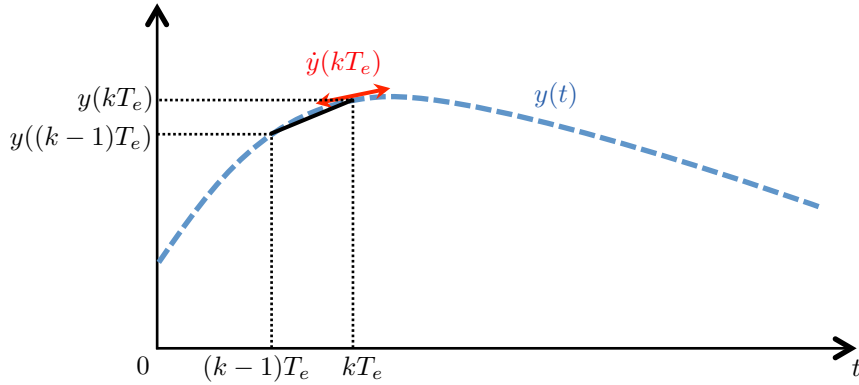


FIGURE 6.4 – Transformation d'Euler ou méthode aux différences retard.

L'équation (6.4) est une équation dite “aux différences”. Comme elle ne fait intervenir pour le calcul de la sortie $s[k]$ qu'une combinaison linéaire des entrées (en nombre fini) aux instants précédents et présent, cette équation est dite “équation aux différences non récursive”.

La transformation d'Euler permet également l'approximation d'une intégrale par la “méthode des rectangles”. Soit :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (6.5)$$

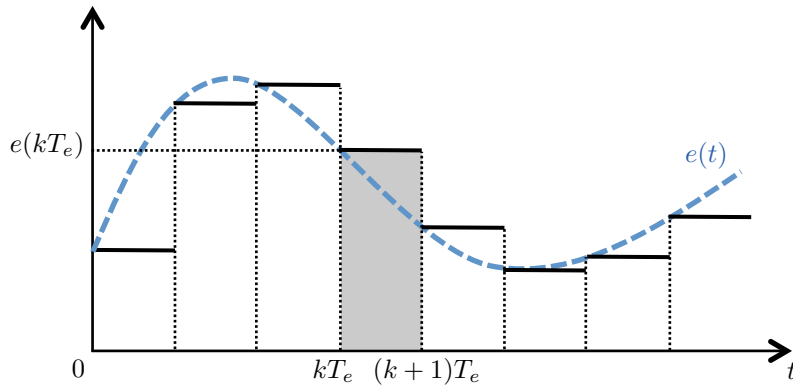


FIGURE 6.5 – Transformation d'Euler ou méthode des rectangles.

Posons $e[k] = e(kT_e)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'aire du rectangle grisé de la Figure 6.5 étant égale à $T_e e(kT_e)$, il est possible d'écrire à l'instant kT_e :

$$s[k] = s[k-1] + T_e e[k]. \quad (6.6)$$

Cette équation aux différences est dite “récursive”, car elle fait intervenir pour le calcul de la sortie $s[k]$ une combinaison linéaire des entrées aux instants précédents et présent

et des sorties aux instants précédents. La transformée en Z appliquée aux équations (6.4) et (6.6) fournit respectivement

$$\boxed{\frac{S(z)}{Y(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{T_e}{1 - z^{-1}}}. \quad (6.7)$$

Avec cette méthode, les approximations en temps discret de la dérivée p et de l'intégration $\frac{1}{p}$ continues sont donc données par $\frac{1-z^{-1}}{T_e}$ et $\frac{T_e}{1-z^{-1}}$, respectivement.

6.3.2 Transformation bilinéaire ou méthode des trapèzes

Cette méthode, appelée “Tustin” dans la littérature anglo-saxonne, est une technique très utilisée en simulation numérique. La transformation est issue de l'approximation numérique d'une intégrale par la méthode des trapèzes. Soit :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (6.8)$$

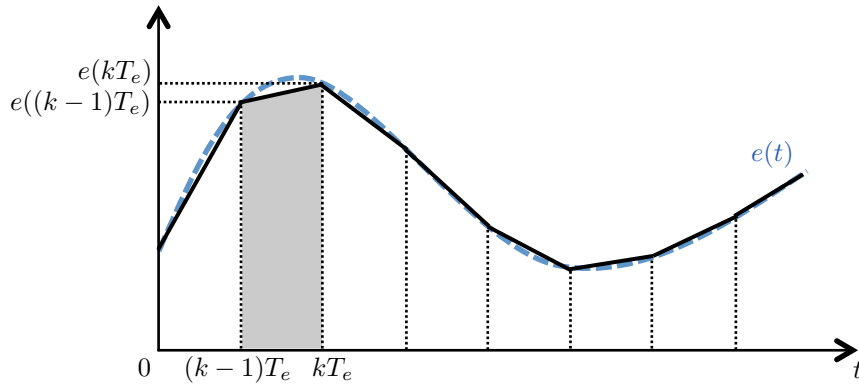


FIGURE 6.6 – Transformation bilinéaire ou méthode des trapèzes.

L'aire du trapèze grisé de la Figure 6.6 étant donnée par $\frac{T_e}{2}(e(kT_e) + e((k-1)T_e))$, il est possible d'écrire à l'instant kT_e :

$$s[k] = s[k-1] + \frac{T_e}{2}(e[k] + e[k-1]). \quad (6.9)$$

Cette équation aux différences est aussi récursive, car la sortie $s[k]$ est une combinaison linéaire des entrées aux instants précédents et présent et de la sortie à l'instant précédent. En appliquant la transformée en Z , on obtient :

$$\boxed{\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{T_e}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}}. \quad (6.10)$$

Avec cette méthode, l'intégration continue $\frac{1}{p}$ est donc cette fois approchée par $\frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$.

6.4 Méthodes de transposition

Il est possible de déterminer une fonction de transfert réalisant une approximation numérique d'un correcteur analogique $C(p)$ en remplaçant la variable p par une expression en z . Ces techniques, dites de transposition, sont bien connues en traitement numérique du signal.

6.4.1 Méthode des rectangles arrière ou transformation d'Euler

Au vu de l'équation (6.7), cette méthode consiste à remplacer l'opérateur dérivée p par son approximation d'Euler dans l'expression de la fonction de transfert $C(p)$ du correcteur, soit :

$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e}. \quad (6.11)$$

6.4.2 Méthode des trapèzes ou transformation bilinéaire

Cette méthode consiste à exploiter l'équation (6.10) et ainsi à remplacer la variable p par son approximation par la méthode des trapèzes, soit :

$$p \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (6.12)$$

6.4.3 Méthode de transposition directe (matched transform)

On peut aussi envisager une technique de transposition directe, en appliquant la correspondance $z = e^{pT_e}$ (voir Section 4.2.2) aux pôles p_i et aux zéros z_i de la fonction de transfert $C(p)$:

- chaque pôle p_i (réel ou complexe) est transformé en un pôle $e^{p_i T_e}$ de la fonction de transfert $C(z)$
- chaque zéro z_i de $C(p)$ est transformé de la même façon
- afin de préserver les caractéristiques statiques, on règle le gain du correcteur $C(z)$ en imposant :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1 - z^{-1}}{T_e} \right)^\alpha C(z) = \lim_{p \rightarrow 0} p^\alpha C(p), \quad (6.13)$$

où α désigne la classe de $C(p)$, c'est-à-dire le nombre de ses intégrateurs purs.

Ainsi, si la fonction de transfert du correcteur en temps continu s'écrit

$$C(p) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 - p/z_i)}{p^\alpha \prod_{j=1}^n (1 - p/p_j)}, \quad (6.14)$$

où $z_i, p_j \in \mathbb{R}^*$ désignent respectivement les zéros et les pôles **non nuls** de la fonction de transfert $C(p)$, le correcteur discrétisé par transposition directe s'écrit :

$$C(z) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (1 - e^{z_i T_e} z^{-1})}{(1 - z^{-1})^\alpha \prod_{j=1}^n (1 - e^{p_j T_e} z^{-1})} \quad (6.15)$$

où K' est la solution de l'équation :

$$K' \frac{\prod_{i=1}^m (1 - e^{z_i T_e})}{T_e^\alpha \prod_{j=1}^n (1 - e^{p_j T_e})} = K \quad (6.16)$$

6.4.4 Exemple

Exemple 6.1 *Considérons le correcteur suivant :*

$$C(p) = \frac{3(1 + 2p)^2}{p}. \quad (6.17)$$

Notons qu'il s'agit d'un correcteur de type PID pour lequel le réglage des constantes de temps des actions intégrale et dérivée serait tel que $T_i = 4T_d$. Considérons comme période d'échantillonnage $T_e = 0,5$ s. Sa transposition par chacune des méthodes proposées ci-dessous s'effectue de la manière suivante :

— transformation d'Euler : en remplaçant p par l'expression (6.11) :

$$C_{Euler}(z) = \frac{3(1 + 4(1 - z^{-1}))^2}{2(1 - z^{-1})}. \quad (6.18)$$

— transformation bilinéaire : en remplaçant p par l'expression (6.12) :

$$C_{bilinéaire}(z) = \frac{3(9 - 7z^{-1})^2}{4(1 - z^{-2})}. \quad (6.19)$$

— transposition directe : en utilisant la correspondance $z = e^{pT_e}$, $C(z)$ doit avoir un zéro double en $z = e^{-T_e/2} = e^{-0,25} \simeq 0,78$ et un pôle simple en $z = 1$, soit :

$$C_{direct}(z) = K' \frac{(1 - 0,78 z^{-1})^2}{1 - z^{-1}}. \quad (6.20)$$

Le gain K' est calculé de manière à préserver le comportement statique. Le correcteur étant de classe 1 :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{-1}}{T_e} C_{direct}(z) = \lim_{p \rightarrow 0} p C(p) \quad \Leftrightarrow \quad K' = \frac{3}{2(1 - 0,78)^2} \simeq 31. \quad (6.21)$$

D'où finalement :

$$C_{direct}(z) = \frac{31(1 - 0,78 z^{-1})^2}{1 - z^{-1}}. \quad (6.22)$$

Sur la Figure 6.7 sont représentées les réponses fréquentielles du correcteur original et de ses trois discrétisations.

Pour des pulsations inférieures à 30 rad.s^{-1} , le gain du correcteur est modérément impacté par la discrétisation, quelle que soit la méthode employée. La phase est toutefois sérieusement impactée par les méthodes d'Euler et de transposition directe. Par exemple, si la pulsation de coupure du système à commander était de 1 rad.s^{-1} , la discrétisation conduirait à une chute de marge de phase 9° pour la discrétisation d'Euler et de 12° pour la méthode de transposition directe : ceci pourrait se traduire par un dépassement plus important que prévu. La transformée bilinéaire fournit quant à elle des performances acceptables en termes de phase, mais conduit à un gain infini à la pulsation limite $\omega = \pi/T_e \simeq 6,28 \text{ rad.s}^{-1}$. Ce phénomène est dû à la présence d'une action dérivée dans le correcteur étudié (son numérateur est de degré plus élevé que son dénominateur), pour laquelle la transformation bilinéaire n'est pas adaptée.

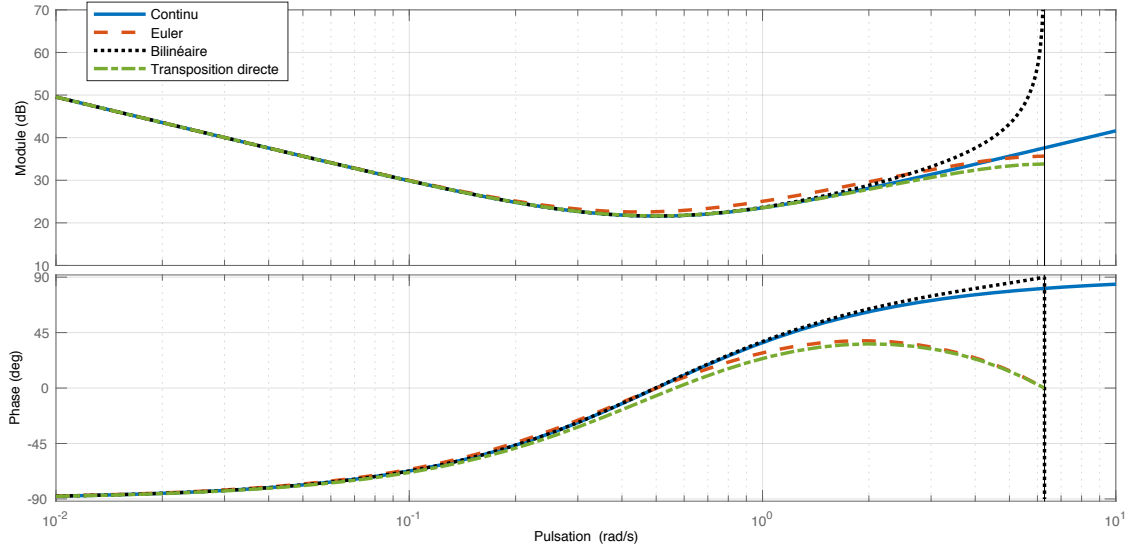


FIGURE 6.7 – Comparaison fréquentielle entre différentes méthodes de discrétisation.

6.5 Mise en œuvre

Cette section décrit les méthodes de mise en œuvre pratique d'un correcteur numérique. Elle considère d'abord un correcteur générique, puis se focalise sur les correcteurs PID.

6.5.1 Cas général

6.5.1.1 Algorithme de commande

Soit $C(z)$ la fonction de transfert d'un correcteur numérique que l'on souhaite implanter sur un ordinateur à des fins expérimentales ou industrielles. La mise en œuvre de cette correction nécessite tout d'abord d'exprimer la loi de commande à délivrer à chaque pas d'échantillonnage. Pour cela, supposons que $C(z)$ s'écrive comme :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}. \quad (6.23)$$

Notons que le coefficient du terme de plus bas degré du dénominateur a été normalisé à 1. La relation temporelle liant la commande u à l'écart ε s'exprime alors récursivement comme :

$$u[k] = -b_1 u[k-1] - \dots - b_n u[k-n] + a_0 \varepsilon[k] + a_1 \varepsilon[k-1] + \dots + a_n \varepsilon[k-n]. \quad (6.24)$$

Cette équation aux différences peut être implémentée sur le ordinateur et permet de calculer la commande $u[k]$ au temps courant à partir des valeurs passées de la commande et de l'écart et de la valeur courante de l'écart.

En pratique, les actionneurs utilisés n'acceptent que des valeurs de commande limitées en amplitude : $|u[k]| \leq u_{\max}$, où $u_{\max} > 0$ est la valeur limite de l'amplitude de commande acceptable. Afin de rester dans ces valeurs admissibles, il est parfois nécessaire de saturer la loi de commande. Ceci conduit à l'organigramme de la Figure 6.8. En cas de saturation de la commande, le système n'est toutefois plus linéaire et des dégradations de performances sont à prévoir.

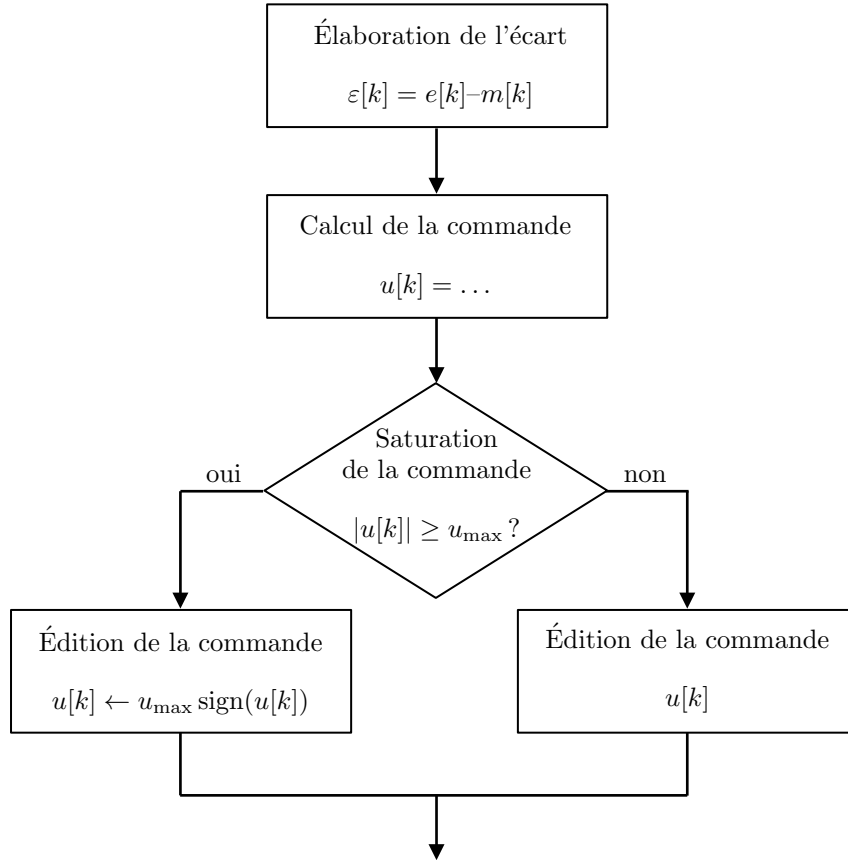


FIGURE 6.8 – Organigramme d'implémentation numérique d'une loi de commande.

6.5.1.2 Temps de calcul et quantification

L'algorithme de calcul de la commande $u[k]$ nécessite un certain temps de calcul T_c . Ce temps de calcul T_c vient s'ajouter au retard apporté par les opérations d'échantillonnage et de blocage. D'après les observations faites en Section 4.1.1, le retard total équivalent τ peut donc être évalué par :

$$\frac{T_e}{2} \leq \tau \simeq \frac{T_e}{2} + T_c \leq \frac{3T_e}{2}. \quad (6.25)$$

En outre, la représentation d'une grandeur réelle sur un support numérique conduit à un effet de quantification et donc à une imprécision numérique. Le codage des mesures et des valeurs de commande se fait en effet en représentation entière, ce qui limite la précision de l'approximation du signal analogique par sa représentation numérique (notamment en termes de nombre de bits utilisés pour le codage).

6.5.2 Cas du correcteur PID

6.5.2.1 Approximations du dérivateur numérique

L'opération de dérivation $s(t) = \frac{de}{dt}(t)$ n'est pas réalisable physiquement (car non causale). Elle peut toutefois être approchée numériquement par des algorithmes suivants :

- à 2 points (Euler) : $s[k] = \frac{1}{T_e}(e[k] - e[k-1])$
- à 2 points séparés de 2 périodes d'échantillonnage : $s[k] = \frac{1}{2T_e}(e[k] - e[k-2])$
- à 4 points : $s[k] = \frac{1}{10T_e}(2e[k] + e[k-1] - e[k-3] - 2e[k-4])$
- ...

Il s'agit donc d'équations aux différences non récursives. Ces algorithmes sont en fait les équations aux différences relatives à des dérivateurs numériques. Le nombre de points utilisés pour le calcul de la dérivée peut être augmenté au delà de 4, suivant les performances souhaitées.

Les trois dérivateurs numériques ci-dessus sont illustrés par la Figure 6.9.

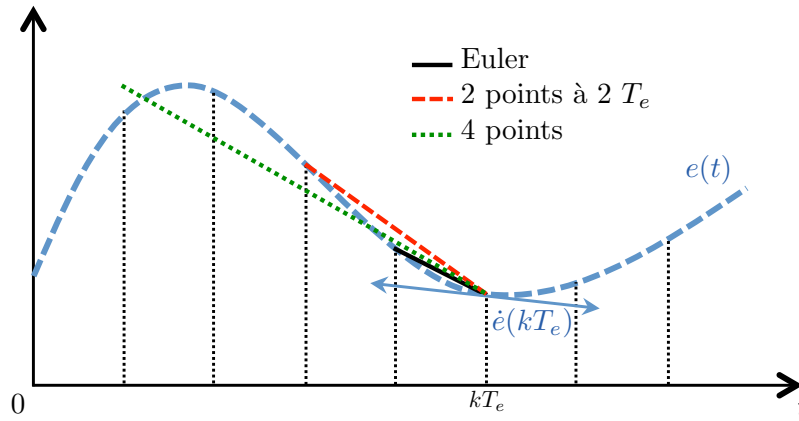


FIGURE 6.9 – Dérivations numériques.

En utilisant la transformée en Z , chacun de ces dérivateurs peut être représenté par une fonction de transfert :

- à 2 points (Euler) : $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1-z^{-1}}{T_e}$
- à 2 points séparés de 2 périodes d'échantillonnage : $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1-z^{-2}}{2T_e}$
- à 4 points : $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{2+z^{-1}-z^{-3}-2z^{-4}}{10T_e}$.

Comme toute fonction de transfert en z , la réponse fréquentielle des dérivateurs numériques peut être étudiée à partir de leurs diagrammes de Bode (voir Section 4.2.2). Les courbes de la Figure 6.10 représentent les module et phase de chacun des dérivateurs considérés.

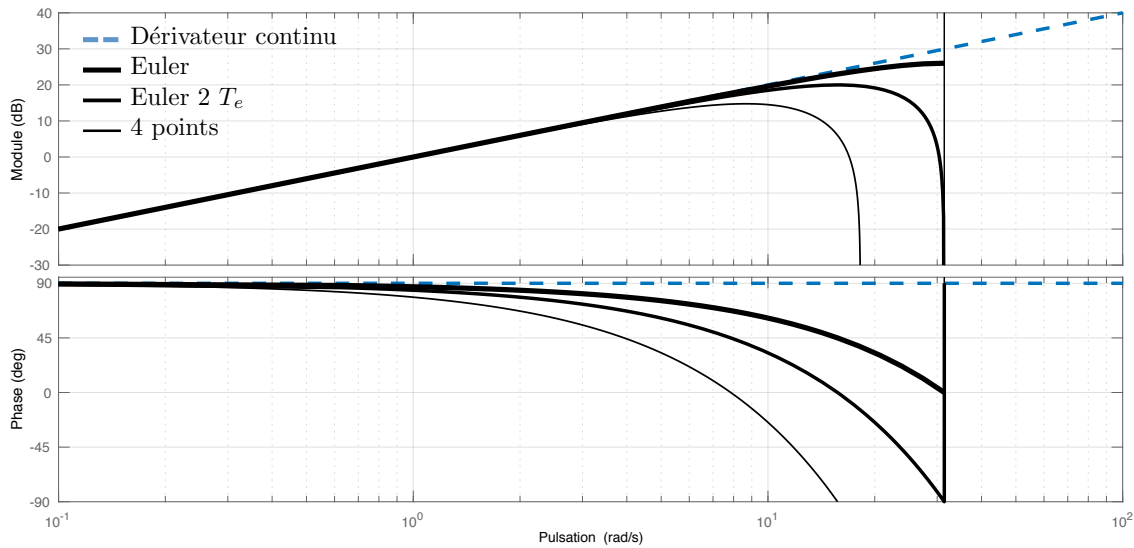


FIGURE 6.10 – Réponse fréquentielle de dérivateurs numériques.

Les réponses fréquentielles mettent en évidence une limitation de la bande de fréquence pour le dérivateur numérique, c'est-à-dire l'association d'une opération de dérivation et de filtrage. Ces courbes indiquent que l'atténuation de gain dans les hautes fréquences est d'autant plus forte que l'ordre du dérivateur est élevé : cette propriété peut s'avérer intéressante lorsque les signaux à dériver sont bruités.

On notera que l'ajout d'un filtre de l'action dérivée, nécessaire pour la réalisation du correcteur PID continu (Section 5.1.5.4), est ici inutile de par l'action de filtrage intrinsèque du dérivateur numérique.

6.5.2.2 Réponses fréquentielles d'un correcteur PID analogique et numérique

Nous analysons ici l'effet de la discrétisation sur la réponse fréquentielle du correcteur PID.

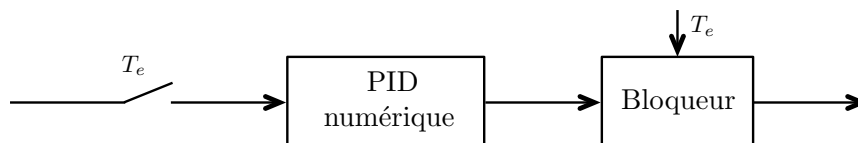


FIGURE 6.11 – Schéma équivalent du correcteur numérique.

Considérons pour effectuer cette comparaison un correcteur PID numérique obtenu par discrétisation d'un correcteur PID analogique, dont les paramètres de réglage sont $K = 1$, $T_i = 1$ s et $T_d = 0,25$ s, en utilisant l'approximation des rectangles avec comme période d'échantillonnage $T_e = 0,1$ s.

Les courbes données en Figure 6.12 sont représentatives de la réponse en fréquence de l'ensemble {échantillonneur + algorithme + bloqueur d'ordre zéro}.

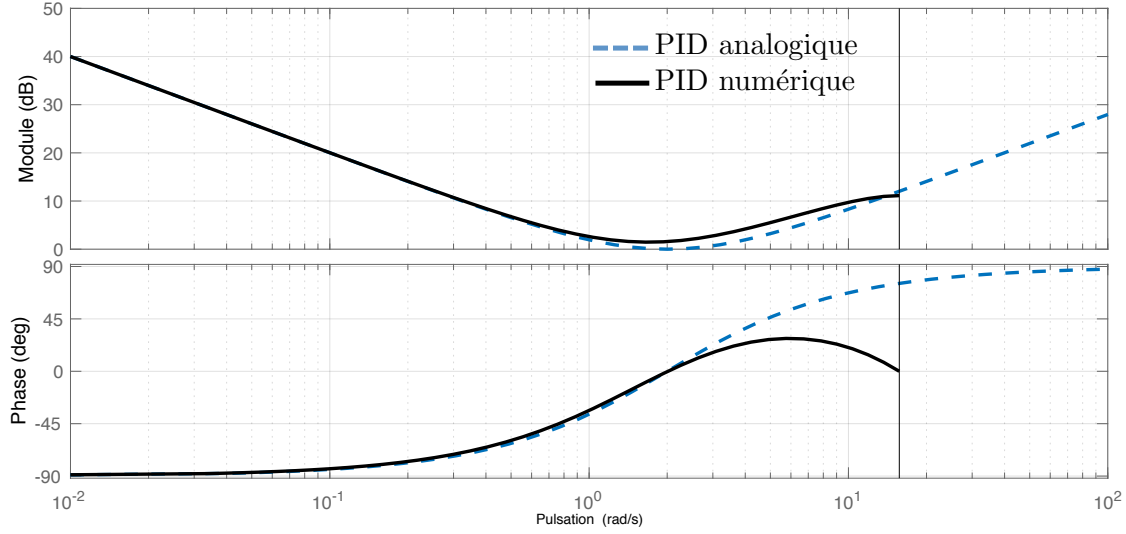


FIGURE 6.12 – Réponse fréquentielle du correcteur PID analogique et de sa réalisation numérique.

L'effet des convertisseurs CAN-CNA et de la discrétisation du correcteur PID conduit ainsi à une modification du gain (ce qui peut notamment avoir un effet sur la pulsation de coupure du système corrigé et donc sur la rapidité) et à un abaissement de la phase (qui peut conduire à une chute de la marge de phase du système corrigé et donc à une réponse moins bien amortie). Ces effets sont d'autant plus réduits que la cadence d'échantillonnage est rapide.

6.5.3 Algorithme de commande

Il s'agit ici d'approcher au mieux la fonction du correcteur PID analogique :

$$u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon}{dt}(t) \right). \quad (6.26)$$

La commande numérique, élaborée à l'instant kT_e à partir de l'écart ε , se décompose en :

— une action proportionnelle :

$$u_p[k] = K\varepsilon[k] \quad (6.27)$$

— une action intégrale, qui peut être réalisée par :

$$u_i[k] = K \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=1}^k \varepsilon[j], \quad (6.28)$$

correspondant à une intégration par la méthode des rectangles (voir Section 6.3.1).

On note que u_i peut aussi s'écrire sous forme récursive :

$$u_i[k] = u_i[k-1] + K \frac{T_e}{T_i} \varepsilon[k]. \quad (6.29)$$

— une action dérivée :

$$u_d[k] = K \frac{T_d}{T_e} (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]) \quad (6.30)$$

ou encore

$$u_d[k] = K \frac{T_d}{10 T_e} (2\varepsilon[k] + \varepsilon[k-1] - \varepsilon[k-3] - 2\varepsilon[k-4]), \quad (6.31)$$

ou tout dérivateur numérique d'ordre supérieur (voir Section 6.5.2.1).

Cet algorithme de commande est représenté par la Figure 6.13.

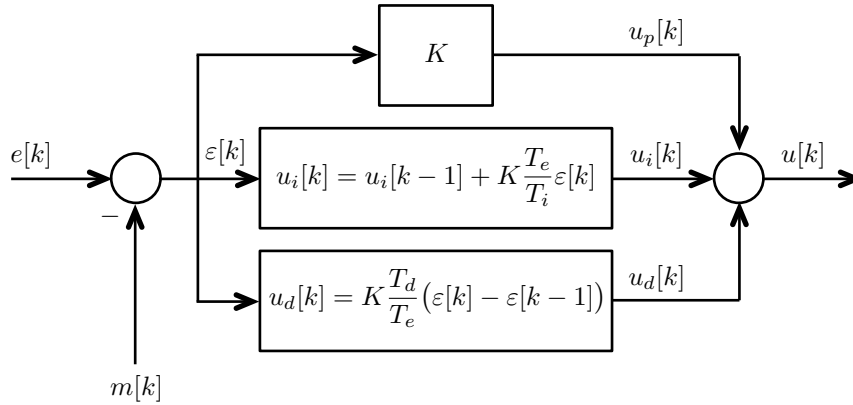


FIGURE 6.13 – Structure parallèle du correcteur PID numérique.

De par sa nature cumulative, l'action intégrale peut donner lieu à des valeurs de commande élevées (notamment en cas de bruits de mesure) qu'il convient de limiter pour rester dans des valeurs acceptables par l'actionneur. A cette fin, une méthode simple (transparente du point de vue temps de calcul) consiste à geler l'action intégrale lorsque $u[k]$ atteint la valeur maximale de commande admissible $u_{\max}$ (c'est-à-dire lorsque $|u[k]| \geq u_{\max}$). Notons toutefois que cette saturation impose des dynamiques non-linéaires, qui peuvent compromettre les performances du système bouclé. L'algorithme correspondant sous forme parallèle est alors représenté par l'organigramme de la Figure 6.14.

On notera :

- la simplicité de la version numérique par rapport au dispositif non linéaire qu'il faudrait réaliser dans le cas d'une implantation analogique du correcteur PID
- l'intérêt d'une représentation sous forme parallèle et sous forme récursive de l'action intégrale afin d'avoir accès aux trois actions, et notamment à $u_i[k-1]$.

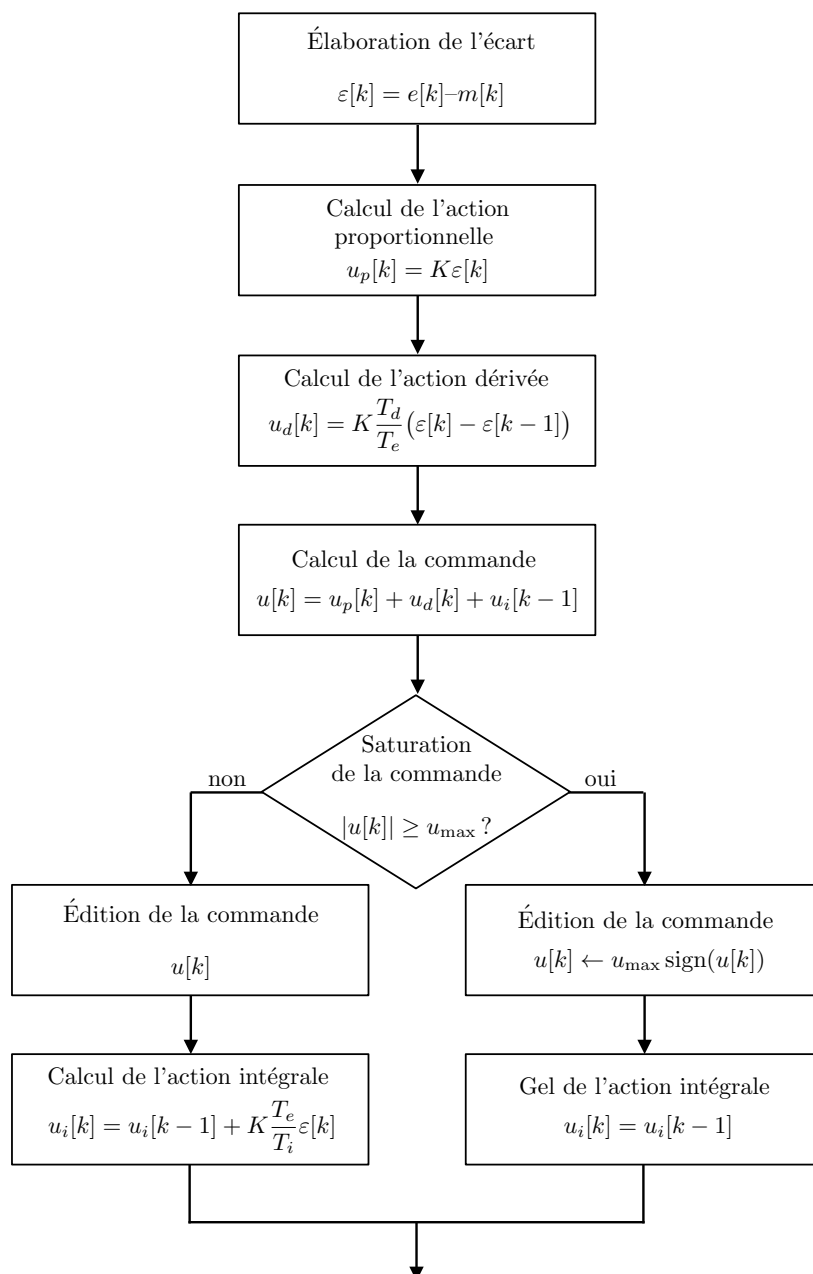


FIGURE 6.14 – Organigramme du régulateur PID numérique.

6.6 Exemple

Soit à trouver un correcteur capable d'assurer les performances suivantes au système de la Figure 6.15 :

- dépassement : $D \leq 20\%$
- temps du premier maximum : $t_m \leq 3 \text{ s}$.

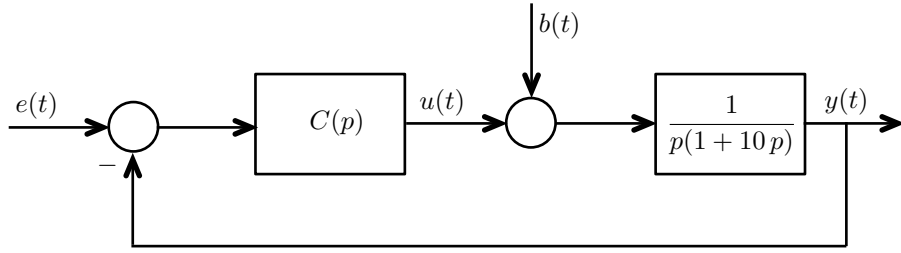


FIGURE 6.15 – Schéma-bloc considéré.

On cherche à obtenir pour la boucle fermée un comportement équivalent à un système du deuxième ordre. Par l'abaque de l'Annexe A.9, la contrainte de dépassement impose une marge de phase d'environ 45° , correspondant à un amortissement $\xi = 0,5$. La relation $\omega_c t_m \simeq 3$ conduit à une pulsation de coupure souhaitée en $\omega_c = 1 \text{ rad.s}^{-1}$.

Le tracé du diagramme de Bode de la boucle ouverte non-corrigée, donné en Figure 6.16, indique une contribution en phase de 5° à la pulsation de coupure désirée $\omega_c = 1 \text{ rad.s}^{-1}$. Une correction proportionnelle ne permet donc pas de satisfaire le cahier des charges.

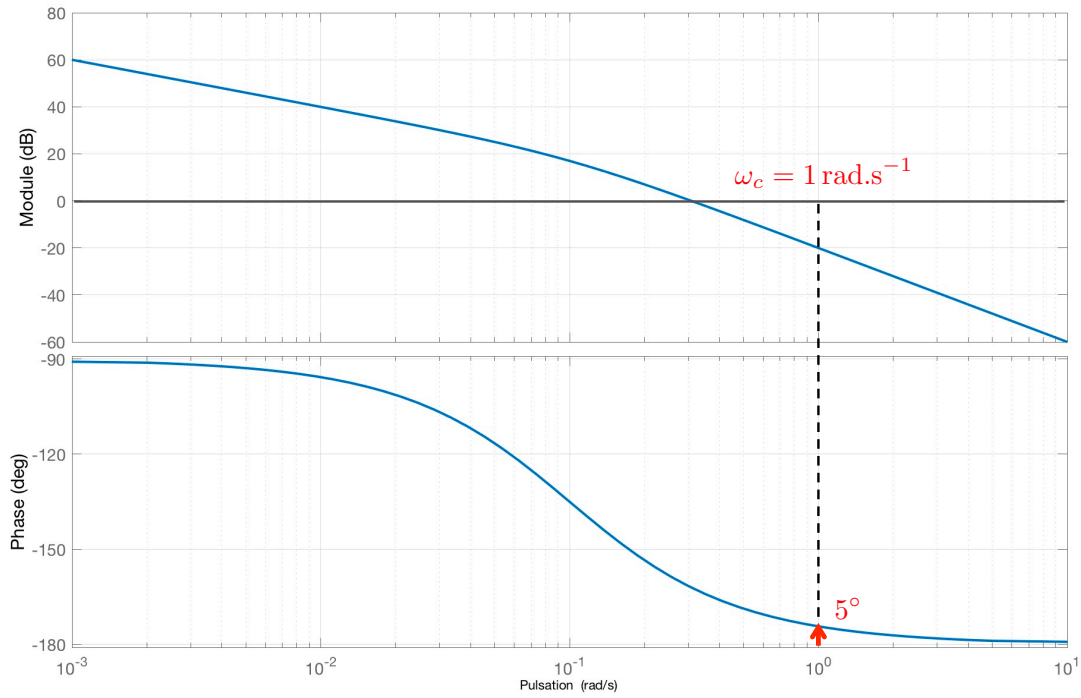


FIGURE 6.16 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Nous optons donc pour un correcteur par avance de phase (voir Section 5.1.3) :

$$C(p) = K \frac{1 + Tp}{1 + aTp}, \quad a < 1. \quad (6.32)$$

La phase à ajouter en $\omega_c = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ est $\varphi_m = \Delta\phi - 5^\circ = 40^\circ$. Le paramètre a doit donc être choisi comme

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} \simeq 0,22. \quad (6.33)$$

La constante de temps T est choisie de manière à ce que l'augmentation de phase ait bien lieu en ω_c , soit :

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_c \rightarrow T \simeq 2,14 \text{ s}. \quad (6.34)$$

Le gain K est réglé de manière à ce que la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée ait un module de 0 dB en ω_c . A cette pulsation, le module de la boucle ouverte non corrigée est de -20 dB. Or, le module du correcteur en ω_c en dB est de $20 \log(K/\sqrt{a})$. Il faut donc :

$$20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{a}}\right) = 20 \rightarrow K = 10\sqrt{a} \simeq 4,7. \quad (6.35)$$

On obtient ainsi :

$$C(p) = \frac{4,7(1 + 2,14p)}{1 + 0,47p}. \quad (6.36)$$

La réponse fréquentielle de la fonction de transfert de la boucle ouverte corrigée est représentée sur la Figure 6.17. On note que les critères fréquentiels sont respectés.

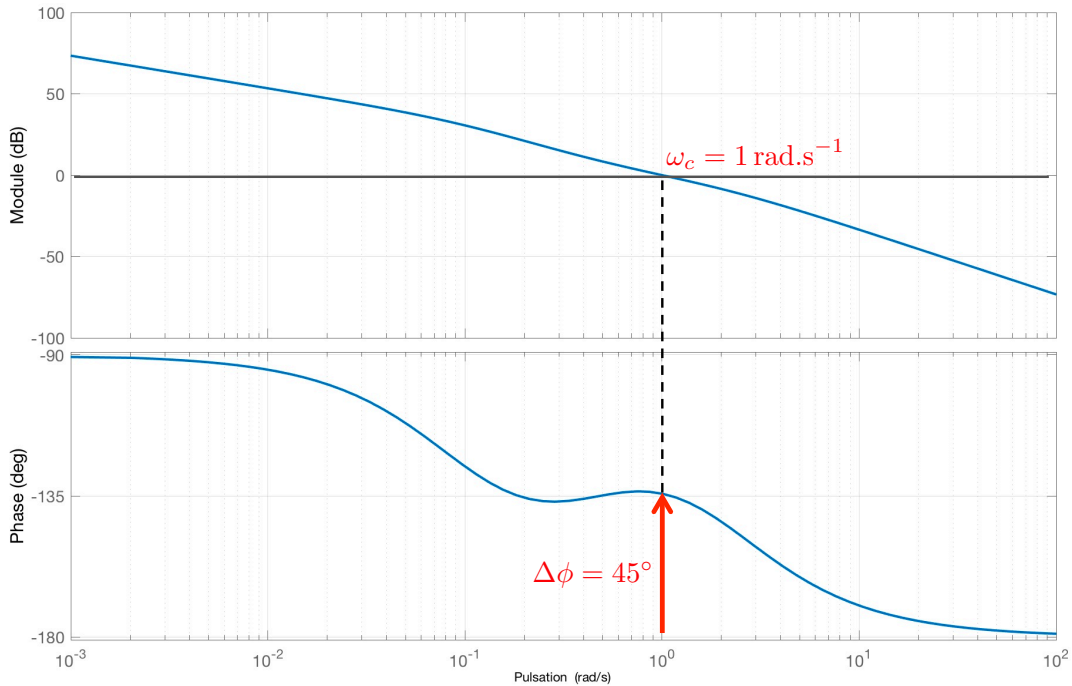


FIGURE 6.17 – Diagramme de Bode du système corrigé en boucle ouverte.

La réponse indicielle du système bouclé, avec correction et pour $C(p) = 1$, est donnée en Figure 6.18. Le temps de premier maximum est bien celui désiré. Le dépassement est plus

important que prévu (30%) : une marge de phase plus importante serait donc souhaitable. Rappelons que la correspondance entre dépassement de la réponse indicielle en boucle fermée et marge de phase de la boucle ouverte, telle que donnée dans l'abaque de l'Annexe A.9, n'est rigoureusement valable que pour les systèmes du deuxième ordre sans zéro ; ici, la boucle ouverte corrigée est du troisième ordre avec un zéro, ce qui explique les disparités observées.

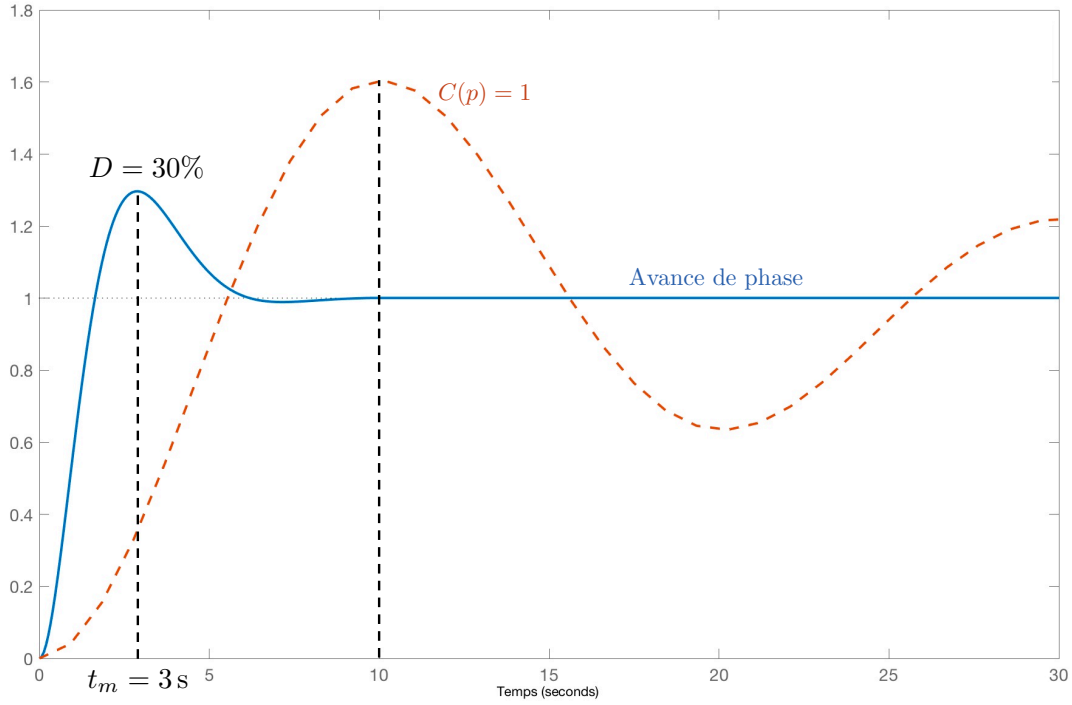


FIGURE 6.18 – Réponse indicielle du système en boucle fermée.

Nous allons maintenant discrétiser ce correcteur en vue d'une implantation sur calculateur. Nous devons tout d'abord choisir une période d'échantillonnage T_e . L'effet de l'échantillonneur-bloqueur peut être assimilé à un retard de $T_e/2$. Afin de garantir une chute de marge de phase inférieure à 5° , on souhaitera donc que $\omega_c T_e/2 \leq 5^\circ$ soit (en prenant garde à la conversion d'unités) : $T_e = 0,17$ s.

$C(p)$ possède un pôle en $-2,13$ et un zéro en $-0,47$. Par la méthode de transposition directe, le correcteur discrétisé $C(z)$ prend la forme :

$$C(z) = K' \frac{1 - e^{-0,47 \times 0,17} z^{-1}}{1 - e^{-2,13 \times 0,17} z^{-1}} \simeq K' \frac{1 - 0,92 z^{-1}}{1 - 0,7 z^{-1}}. \quad (6.37)$$

Pour assurer des gains statiques identiques à $C(p)$ et $C(z)$, la classe du correcteur étant $\alpha = 0$, il faut :

$$\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = \lim_{p \rightarrow 0} C(p), \quad (6.38)$$

soit :

$$K' = 4,7 \times \frac{1 - 0,7}{1 - 0,92} \simeq 17,6. \quad (6.39)$$

Le correcteur discrétisé a donc pour expression :

$$C(z) = 17,6 \times \frac{1 - 0,92 z^{-1}}{1 - 0,7 z^{-1}}. \quad (6.40)$$

Cette fonction de transfert peut être convertie en une équation aux différences pour l'implémentation informatique, en utilisant le fait que $C(z) = U(z)/\varepsilon(z)$:

$$(1 - 0,7 z^{-1})U(z) = 17,6 (1 - 0,92 z^{-1})\varepsilon(z), \quad (6.41)$$

ce qui donne la relation réursive :

$$u[k] = 0,7 u[k-1] + 17,6 \varepsilon[k] - 16,19 \varepsilon[k-1]. \quad (6.42)$$

L'algorithme d'implémentation de ce correcteur est décrit par l'organigramme de la Figure 6.19 en prenant en compte le fait que l'actionneur utilisé impose des tensions de commande comprises entre -10 V et $+10$ V ($u_{\max} = 10$ V).

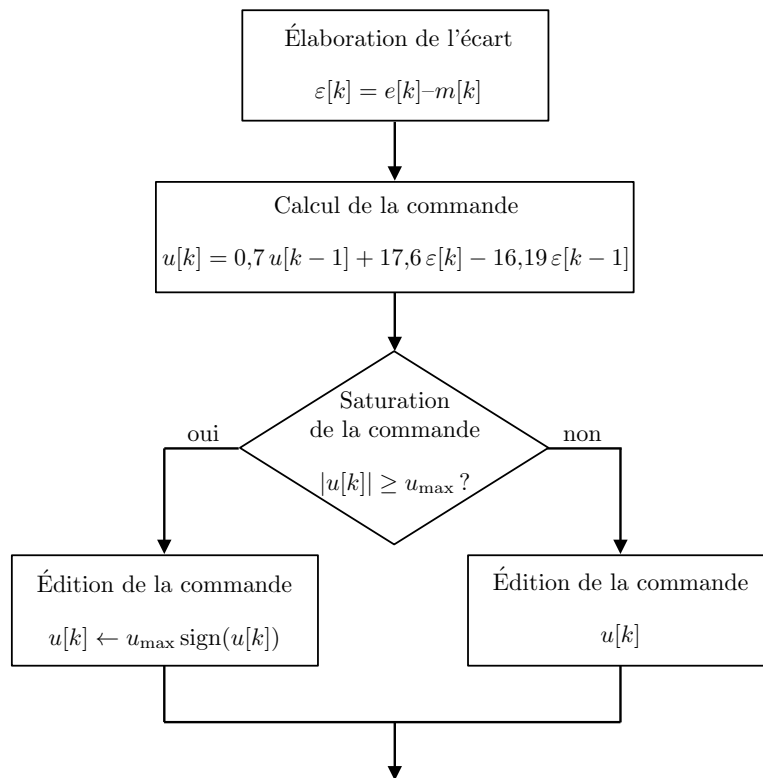


FIGURE 6.19 – Organigramme d'implémentation de la loi de commande.

Les résultats d'une simulation en réponse indicielle avec ce correcteur numérique sont donnés en Figure 6.20. A titre de comparaison, la réponse indicielle avec correcteur analogique est également représentée. La rapidité du système est correcte et pratiquement inchangée par la discrétisation ($t_m = 3$ s). Le dépassement est cependant trop important ($D = 37\%$) et s'est dégradé du fait de la discrétisation du correcteur (influence des convertisseurs CAN et CNA), ce qui est conforme à la chute de marge de phase de -5° anticipée. Cette diminution de la marge de phase due à la discrétisation aurait dû être prise en compte lors de réglage du correcteur continu $C(p)$, en imposant une marge de phase plus importante (par exemple $\Delta\phi = 55^\circ$).

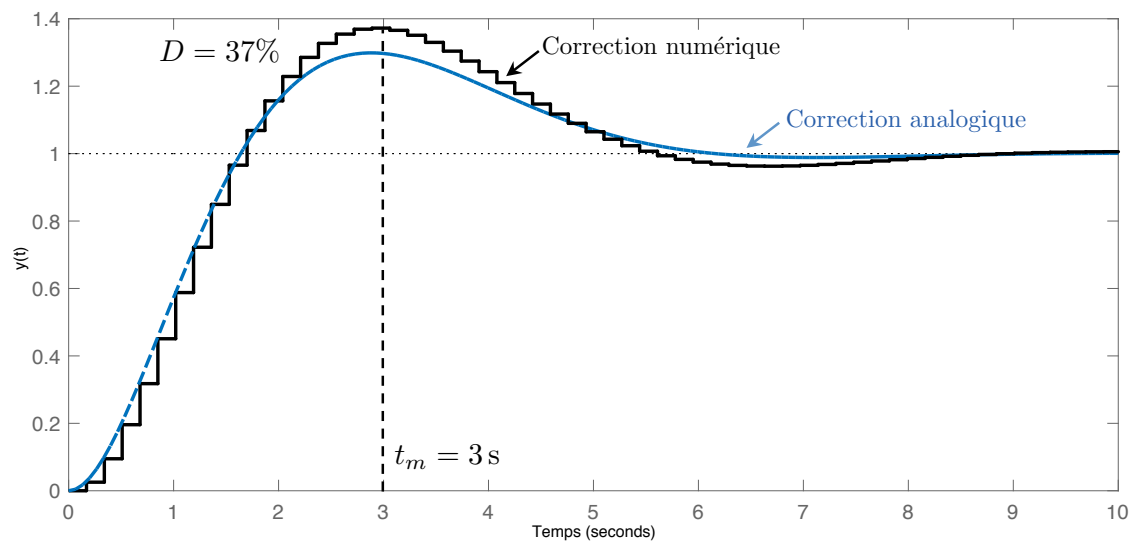


FIGURE 6.20 – Réponses indicielles du système corrigé en boucle fermée.

Chapitre 7

Commande par retour d'état

7.1 Rappels sur la représentation d'état

Les systèmes ont été étudiés jusqu'à présent à partir de leur fonction de transfert, c'est-à-dire d'une représentation externe liant l'entrée et la sortie. Cette représentation trouve toutefois très vite ses limites en présence de non-linéarités ou de non-stationnarité des systèmes. Il s'avère alors intéressant de prendre en considération ce que l'on appelle l'état du système afin d'en obtenir une représentation dite "interne". Plus riche que la représentation par fonction de transfert, la représentation d'état présente aussi de l'intérêt pour les systèmes linéaires invariants.

Le premier paragraphe ci-dessous récapitule pour les systèmes continus et discrets la notion d'état définie en détail dans le cours de Modélisation. Les paragraphes suivants examinent les propriétés de commandabilité et d'observabilité des systèmes continus et discrets représentés par variables d'état. Nous abordons ensuite les techniques de commande par retour d'état. Le Chapitre 8 présente enfin des techniques de synthèse d'observateur et de commande par retour d'état estimé.

7.1.1 Représentation interne : notion d'état

L'état du système est une grandeur vectorielle $x(t)$ définie à tout instant $t \geq 0$ et qui représente l'ensemble des informations et des énergies stockées par celui-ci à l'instant t .

La sortie est, quant à elle, une grandeur d'intérêt qui s'exprime à tout instant comme une fonction de l'état et de l'entrée : la connaissance de l'état $x(t)$ et de l'entrée $u(t)$ à un instant t permet de déterminer la valeur $y(t)$ de la sortie à cet instant.

Ainsi, connaissant l'état d'un système à un instant t_0 et les entrées u appliquées au système entre les instants t_0 et t , il est possible de connaître l'état $x(t)$ (et donc la sortie $y(t)$) à l'instant t .

7.1.2 Equations d'état et de mesure

7.1.2.1 Systèmes continus

Tout système régi par une équation différentielle d'ordre n soumise à une entrée $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)). \quad (7.1)$$

Le vecteur $x(t)$ est appelé *vecteur d'état*. Il possède n composantes appelées *variables d'état*. A chaque instant t , la dérivée du vecteur d'état dépend donc exclusivement de l'instant t considéré, de la valeur de l'état à l'instant courant et de l'entrée appliquée à cet instant t . Cette relation est appelée *équation d'état*.

L'*équation de mesure* (ou d'observation) prend la forme :

$$y(t) = h(t, x(t), u(t)). \quad (7.2)$$

Le vecteur des mesures ou des observations $y(t)$ possède l composantes.

Pour un système mono-entrée, on a $m = 1$. De même, pour un système mono-sortie, $l = 1$. Lorsque $m = l = 1$, le système est dit monovariable.

Lorsque le système est linéaire, c'est-à-dire lorsque les fonctions f et h sont linéaires en $x(t)$ et $u(t)$ (principe de superposition des causes et des effets), les équations d'état et de mesure prennent la forme particulière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (7.3)$$

dans laquelle :

- $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la *matrice d'évolution*
- $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la *matrice de commande*
- $C(t) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ est la *matrice d'observation*
- $D(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ est la *matrice de transmission directe*.

Remarquons dès maintenant que la représentation d'état n'est pas unique et qu'en toute rigueur, on devrait parler d'une représentation d'état (voir Section 7.1.6 plus bas).

Lorsque de plus le système est invariant (c'est-à-dire que les coefficients intervenant dans les équations sont constants), les équations d'état et de mesure prennent la forme particulière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (7.4)$$

La résolution des équations d'état pour un système linéaire consiste pour la première de ces relations (Equation (7.3)) à étudier le régime libre puis à envisager une solution particulière pour l'équation avec second membre (régime forcé). La solution générale est alors la suivante :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (7.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \quad (7.6)$$

$\Phi(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée *matrice de transition* du système.

Dans le cas d'un système linéaire invariant (Equation (7.4)), cette matrice de transition est donnée par le calcul d'une exponentielle matricielle :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad (7.7)$$

pouvant se calculer par différentes méthodes dont la plus connue est la méthode d'interpolation de Sylvester (voir cours de Modélisation). On peut également utiliser la transformée de Laplace :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}((pI - A)^{-1}). \quad (7.8)$$

L'état à l'instant t se calcule alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (7.9)$$

L'équation d'état d'un système linéaire invariant peut donc se résoudre explicitement à partir de l'état initial $x(t_0)$ et de l'entrée u appliquée sur $[t_0; t]$.

7.1.2.2 Systèmes discrets

Considérons les équations (7.5)-(7.6) donnant l'évolution de l'état et de la sortie d'un système linéaire (7.3) entre deux instants t_0 et t . Cette équation est valable pour tout couple d'instants $t \geq t_0$. Supposons alors qu'entre deux instants t_k et t_{k+1} , l'entrée $u(t)$ appliquée au système soit constante et égale à $u(t_k)$. L'évolution de l'état du système entre ces deux instants peut alors s'exprimer par :

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)u(t_k)d\tau \quad (7.10)$$

$$y(t_k) = C(t_k)x(t_k) + D(t_k)u(t_k). \quad (7.11)$$

On peut alors définir deux matrices (potentiellement dépendantes de k) : $F[k] = \Phi(t_{k+1}, t_k)$ et $G[k] = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)d\tau$. Lorsque les instants t_k sont multiples d'une période d'échantillonnage T_e ($t_k = kT_e$), et qu'entre deux instants d'échantillonnage consécutifs l'entrée appliquée au système est constante (cas des systèmes continus pilotés par calculateur), l'évolution de l'état de ce système est régie par une *équation d'état à temps discret* :

$$\begin{cases} x[k+1] &= F[k]x[k] + G[k]u[k] \\ y[k] &= C[k]x[k] + D[k]u[k], \end{cases} \quad (7.12)$$

où $x[k] = x(kT_e)$, $u[k] = u(kT_e)$, $C[k] = C(kT_e)$ et $D[k] = D(kT_e)$. Cette représentation constitue le modèle discret du système continu d'équation d'état (7.3) piloté par une entrée $u(t) = u(kT_e)$ pour tout $t \in [kT_e; (k+1)T_e]$. On notera que les matrices de sortie C et D restent celles du modèle d'état continu calculées aux instants d'échantillonnage.

Lorsque de plus le système est invariant (Equation (7.4)), les équations d'état et de mesure discrètes deviennent :

$$\begin{cases} x[k+1] &= Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k], \end{cases} \quad (7.13)$$

avec les matrices constantes :

$$F = e^{AT_e} \quad \text{et} \quad G = \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{A((k+1)T_e-\tau)} B d\tau = \int_0^{T_e} e^{A\theta} B d\theta, \quad (7.14)$$

où la dernière expression de G est obtenue en opérant le changement de variable $\theta = (k+1)T_e - \tau$.

De manière analogue au cas continu, l'équation (7.13) peut être résolue de manière explicite. Pour tout $k_0 \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq k_0$, on a en effet :

$$\begin{cases} x[k] &= F^{k-k_0}x[k_0] + \sum_{i=k_0}^{k-1} F^{k-1-i}Gu[i] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k]. \end{cases} \quad (7.15)$$

7.1.3 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Les modèles décrivant les systèmes physiques font souvent intervenir des équations différentielles non linéaires. Pour utiliser les méthodes développées dans ce cours, il convient de linéariser ces équations autour d'un point d'équilibre pour aboutir à une représentation par fonction de transfert ou à une représentation d'état linéaire à temps continu (7.4) ou à temps discret (7.13).

Dans le cas des systèmes décrits par une représentation d'état, cette approche a été détaillée dans le cours de Modélisation ; nous la rappelons ici brièvement dans le cas de systèmes à temps continu.¹

Soit une équation d'état non-linéaire invariante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (7.16)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)), \quad (7.17)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^l$. Étant donnée une entrée constante $u^* \in \mathbb{R}^m$, on désigne par *point d'équilibre* tout état $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x^*, u^*) = 0. \quad (7.18)$$

Suivant la complexité de f , cette équation peut être résolue analytiquement ou nécessiter la mise en œuvre de moyens numériques. Soit $y^* = h(x^*, u^*)$. Considérons le changement de variable $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*$, $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*$ et $\tilde{y}(t) = y(t) - y^*$. Le *linéarisé tangent* du système (7.16),(7.17) autour de la configuration d'équilibre (x^*, u^*) s'écrit alors :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) \tilde{u}(t) \quad (7.19)$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*, u^*) \tilde{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial u}(x^*, u^*) \tilde{u}(t). \quad (7.20)$$

1. La linéarisation des systèmes à temps discret s'effectue exactement de la même façon puisque les dérivées partielles calculées ci-après le sont par rapport à l'état et l'entrée et non par rapport au temps.

Ce système linéarisé s'écrit donc sous la forme (7.4), avec

$$\begin{aligned}
 A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(x^*, u^*)} & B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{(x^*, u^*)} \\
 C = \frac{\partial h}{\partial x}(x^*, u^*) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(x^*, u^*)} & D = \frac{\partial h}{\partial u}(x^*, u^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_l}{\partial u_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial h_l}{\partial u_m} \end{pmatrix}_{(x^*, u^*)}
 \end{aligned}$$

Dans de nombreuses applications, le linéarisé tangent donne une représentation relativement fidèle du système non-linéaire original pour des petites variations autour de la configuration d'équilibre (c'est-à-dire pour $\tilde{x}(t)$ et $\tilde{u}(t)$ "suffisamment petits").

Par ailleurs, **si le linéarisé tangent est invariant** (et seulement dans ce cas), on peut énoncer des résultats concernant la stabilité du linéarisé tangent, et faire le lien avec la stabilité du point d'équilibre par rapport auquel il est calculé :

- pour les systèmes continus : le linéarisé tangent est asymptotiquement stable - c'est-à-dire que lorsque l'entrée $u(t)$ est identiquement nulle, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ quel que soit l'état initial $x(t_0)$ - *si et seulement si* toutes les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle strictement négative
- pour les systèmes discrets : le linéarisé tangent est asymptotiquement stable - c'est-à-dire que lorsque l'entrée $u[k]$ est identiquement nulle, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x[k] = 0$ quel que soit l'état initial $x[k_0]$ - *si et seulement si* toutes les valeurs propres de la matrice F ont un module strictement inférieur à 1
- dans les deux cas : si le linéarisé tangent est asymptotiquement stable alors le point d'équilibre correspondant au linéarisé tangent est asymptotiquement stable pour le système non linéaire - c'est-à-dire que lorsque l'entrée est constante égale à sa valeur au point d'équilibre, si l'état est déplacé dans un voisinage de sa valeur à l'équilibre, il reste dans un voisinage de cette valeur et tend asymptotiquement vers celle-ci.

7.1.4 Passage état-transfert

Les systèmes linéaires et invariants peuvent aussi être caractérisés par une représentation externe qui prend la forme d'une matrice de transfert (ou fonction de transfert si le système est monovariable) reliant l'entrée à la sortie :

- pour les systèmes continus : $Y(p) = H(p)U(p)$
- pour les systèmes discrets : $Y(z) = H(z)U(z)$.

Une question que l'on peut se poser est celui du passage d'une représentation interne :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k], \end{cases} \quad (7.21)$$

à la représentation externe $H(p)$ ou $H(z)$. Ce passage est réalisé, dans le cas des systèmes linéaires et invariants considéré ici, en appliquant la transformée de Laplace ou la transformée en Z aux équations d'état et de mesure. Dans le cas continu, on peut écrire :

$$\begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p), \end{cases} \quad (7.22)$$

dont on peut déduire $X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p)$ et donc $Y(p) = C(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p)$. On obtient ainsi :

$$\boxed{H(p) = C(pI - A)^{-1}B + D} \quad (7.23)$$

Notons que cette expression montre que le dénominateur de la fonction de transfert liant $Y(p)$ à $U(p)$ dans le cas monovarié (ou de toutes les fonctions de transfert composant la matrice de transfert dans le cas d'un système multi-entrée ou multi-sortie) est égal à $\det(pI - A)$, soit le polynôme caractéristique de A . En d'autres termes, **les pôles de $H(p)$ sont nécessairement des valeurs propres de A** (la réciproque n'est pas vraie : il peut y avoir des simplifications lorsque le numérateur et le dénominateur de $H(p)$ ont des racines communes).

De la même manière, en temps discret :

$$\begin{cases} zX(z) = FX(z) + GU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z), \end{cases} \quad (7.24)$$

d'où l'on déduit $X(z) = (zI - F)^{-1}GU(z)$ et ainsi :

$$\boxed{H(z) = C(zI - F)^{-1}G + D} \quad (7.25)$$

Là encore, **les pôles de $H(z)$ sont nécessairement des valeurs propres de F** .

Notons que, dans les deux cas, des méthodes systématiques et récursives de calcul de la matrice $(pI - A)^{-1}$ ou $(zI - F)^{-1}$ existent, telles que l'algorithme de Leverrier-Souriau.

On a vu que le système est asymptotiquement stable dans le cas continu (resp. dans le cas discret) si et seulement si les valeurs propres de A (resp. de F) ont une partie réelle strictement négative (resp. un module strictement inférieur à 1). Dans ce cas les pôles de $H(p)$ ou $H(z)$ vérifient donc la même propriété, qui est une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit stable EBSB. En d'autres termes, **stabilité asymptotique $\Rightarrow$ stabilité EBSB** (mais la réciproque n'est pas vraie).

7.1.5 Passage transfert-état (cas monovariante)

Considérons un système monovariante (c'est-à-dire $m = l = 1$), d'ordre n , linéaire et invariant représenté par une fonction de transfert $H(p)$ ou $H(z)$. Si ce système est physiquement réalisable, il est nécessairement causal, c'est-à-dire que le degré de son numérateur est inférieur ou égal au degré de son dénominateur. Dans ce cas, la fonction de transfert peut s'écrire :

$$H(p) = d_0 + \frac{N(p)}{D(p)} = d_0 + \frac{b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1}}{a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n}, \quad (7.26)$$

ou, dans le cas discret,

$$H(z) = d_0 + \frac{N(z)}{D(z)} = d_0 + \frac{g_0 + g_1z + \dots + g_{n-1}z^{n-1}}{f_0 + f_1z + \dots + f_{n-1}z^{n-1} + z^n}, \quad (7.27)$$

Notons que le coefficient du terme de plus haut degré du dénominateur est normalisé à 1, ce qui peut se faire sans perte de généralité en divisant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par le coefficient du terme de plus haut degré.

Le fait d'extraire le terme constant d_0 permet de faire apparaître une fonction rationnelle strictement causale (c'est-à-dire que le degré de son numérateur est strictement inférieur à celui de son dénominateur). Notons que, dans le cas où la fonction de transfert $H(p)$ (ou $H(z)$) est elle-même strictement causale, on a $d_0 = 0$.

Parmi toutes les formes de passage transfert-état, nous présentons ci-dessous deux formes particulièrement intéressantes.

7.1.5.1 Forme compagnon pour la commande

La démarche consiste, à partir de la fonction de transfert $H(p)$ (resp. $H(z)$), à choisir la première composante $x_1(t)$ (resp. $x_1[k]$) du vecteur d'état $x(t)$ (resp. $x[k]$) de façon à écrire :

$$U(p) = D(p)X_1(p) = (a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1} + p^n) X_1(p) \quad (7.28)$$

$$Y(p) = N(p)X_1(p) + d_0U(p) = (b_0 + b_1p + \dots + b_{n-1}p^{n-1}) X_1(p) + d_0U(p), \quad (7.29)$$

ou, dans le cas discret,

$$U(z) = D(z)X_1(z) = (f_0 + f_1z + \dots + f_{n-1}z^{n-1} + z^n) X_1(z) \quad (7.30)$$

$$Y(z) = N(z)X_1(z) + d_0U(z) = (g_0 + g_1z + \dots + g_{n-1}z^{n-1}) X_1(z) + d_0U(z). \quad (7.31)$$

En définissant, dans le cas continu, les variables d'état $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t) = \dot{x}_2(t)$, ..., $x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t)$, on obtient ainsi la *forme compagne pour la commande* :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (7.32)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix} x(t) + d_0 u(t). \quad (7.33)$$

De la même manière, dans le cas discret, en définissant $x_2[k] = x_1[k+1]$, $x_3[k] = x_2[k+1]$, ..., $x_n[k] = x_{n-1}[k+1]$, on obtient :

$$x[k+1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -f_0 & -f_1 & \dots & \dots & \dots & -f_{n-1} \end{pmatrix} x[k] + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u[k] \quad (7.34)$$

$$y[k] = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \dots & g_{n-1} \end{pmatrix} x[k] + d_0 u[k]. \quad (7.35)$$

La terminologie “forme compagne pour la commande” se justifie par la forme appelée “compagne” de la matrice A et par le fait que la matrice de commande B est particulièrement simple sous cette forme. Comme nous le verrons en Section 7.4.1.2, cette forme permet en outre de simplifier les calculs nécessaires pour une commande par retour d'état.

7.1.5.2 Forme compagne pour l'observation

La démarche consiste ici à diviser $N(p)$ et $D(p)$ (resp. $N(z)$ et $D(z)$) par p^n (resp. z^n) puis à regrouper dans le domaine temporel les variables d'état de façon à constituer

une autre forme compagnon :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u(t) \quad (7.36)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + d_0 u(t). \quad (7.37)$$

De même, dans le cas discret :

$$x[k+1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -f_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & -f_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -f_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & -f_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix} x[k] + \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} \end{pmatrix} u[k] \quad (7.38)$$

$$y[k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} x[k] + d_0 u[k]. \quad (7.39)$$

Sous cette forme, c'est maintenant la matrice d'observation C qui s'exprime de manière particulièrement simple, ce qui explique l'appellation "forme compagnon pour l'observation". Cette représentation est particulièrement adaptée à la mise en œuvre d'observateurs (voir Chapitre 8).

7.1.5.3 Dualité des deux formes compagnons

On peut remarquer que dans les formes compagnons pour la commande et pour l'observation, les matrices ont des structures analogues. Plus exactement, si l'on désigne par A_c, B_c, C_c et par A_o, B_o, C_o les matrices de la représentation d'état sous forme compagnon pour la commande et pour l'observation respectivement, on a les relations suivantes :

$$A_o = A_c^T \quad B_o = C_c^T \quad C_o = B_c^T. \quad (7.40)$$

On dit ainsi que ces deux formes sont "duales".

7.1.6 Changement de base dans l'espace d'état

Comme il a été mentionné précédemment, la représentation d'état d'un système n'est pas unique, que celui-ci soit continu ou discret. Seules les entrées appliquées au système

et les sorties sont les mêmes grandeurs physiques quelle que soit la représentation d'état considérée.

Il existe ainsi une infinité de représentations internes d'un système qui dépendent du vecteur d'état choisi. Ceci peut se vérifier en effectuant un changement de base dans l'espace d'état.

Considérons le cas d'un système à temps continu (le raisonnement serait le même pour un système à temps discret), d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$, donné par l'équation d'état (7.4). Considérons un nouvel état $\tilde{x}(t)$ défini comme une combinaison linéaire des variables d'état originelles :

$$x(t) = T\tilde{x}(t), \quad (7.41)$$

où $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante inversible. On a alors :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}(Ax(t) + Bu(t)) = T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t). \quad (7.42)$$

Et la sortie s'exprime par :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) = CT\tilde{x}(t) + Du(t). \quad (7.43)$$

Ainsi, dans la nouvelle base, la dynamique du système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t), \end{cases} \quad \text{avec } \tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \text{ et } \tilde{C} = CT. \quad (7.44)$$

La représentation externe entrée-sortie s'exprime alors par (voir Equation (7.23))² :

$$H(p) = \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D \quad (7.45)$$

$$= CT(pI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D \quad (7.46)$$

$$= C(T(pI - T^{-1}AT)T^{-1})^{-1}B + D \quad (7.47)$$

$$= C(pI - A)^{-1}B + D. \quad (7.48)$$

Le changement de base n'a bien évidemment pas modifié cette représentation externe du système. Ainsi, la même relation entrée-sortie peut être représentée par une infinité de représentations d'état, suivant les variables d'état choisies.

7.2 Commandabilité des systèmes

7.2.1 Définitions générales

Dans le cas où l'entrée u est un signal de commande, il est intéressant d'étudier la propriété suivante.

Définition 7.1 (Commandabilité)

- Un système est dit **commandable** entre $x_I \in \mathbb{R}^n$ et $x_F \in \mathbb{R}^n$ si l'on peut trouver une commande u qui permette de transiter de l'état initial x_I à l'état final x_F en temps fini.

2. On rappelle que, pour deux matrices inversibles A et B , $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Un système est dit **totalelement commandable** s'il est commandable entre tout $x_I \in \mathbb{R}^n$ et tout $x_F \in \mathbb{R}^n$.
- Un système est dit **partiellement commandable** s'il n'est commandable qu'entre des x_I et x_F particuliers.

La notion de commandabilité est illustrée par l'exemple intuitif ci-dessous.

Exemple 7.2 Considérons le système monovarié de dimension $n = 2$ défini par l'équation d'état à temps continu :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t). \quad (7.49)$$

Il est clair que la variable d'état x_1 , qui est régie par $\dot{x}_1(t) = a_1x_1(t) + a_3x_2(t) + b_1u(t)$, est commandable par $u(t)$ si $b_1 \neq 0$. L'évolution de la variable x_2 est donnée quant à elle par $\dot{x}_2(t) = a_2x_2(t)$: elle est donc autonome et ne dépend ni du signal de commande u ni de la variable d'état commandable x_1 . Elle n'est donc pas commandable. Ce système est donc partiellement commandable si $b_1 \neq 0$. En particulier, il est commandable entre tout $x_I = (x_{1I}, 0)^T$ et tout $x_F = (x_{1F}, 0)^T$, avec $x_{1I}, x_{1F} \in \mathbb{R}$. Pour $b_1 = 0$, ce système n'est pas commandable car il est insensible à la commande u .

7.2.2 Critère de commandabilité des systèmes linéaires et invariants à temps continu

Le résultat suivant fournit un critère algébrique de la commandabilité des systèmes linéaires invariants à temps continu.

Théorème 7.3 (Critère de Kalman pour la commandabilité, en temps continu)

Le système régi par l'équation d'état $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$, est totalelement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $Q_c \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ définie par

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

est de rang n (on rappelle que le rang d'une matrice est le nombre de ses lignes - ou colonnes - linéairement indépendantes).

La démonstration de ce résultat n'est pas donnée ici. Elle résulte essentiellement du théorème de Cayley-Hamilton, qui permet ici d'exprimer le sous-espace vectoriel atteignable par la commande u en fonction des seules matrices intervenant dans la matrice Q_c .

Notons que ce critère de commandabilité n'implique que les matrices A et B . La commandabilité d'un système est donc indépendante du choix de la sortie considérée (et donc des matrices C et D).

Notons également que la matrice Q_c possède n lignes et nm colonnes. Elle est donc au plus de rang n . Ainsi, le système est totalelement commandable si la matrice de commandabilité Q_c est de rang plein. Dans le cas d'un système à une seule entrée ($m = 1$), la matrice Q_c est carrée de taille n ; elle est donc de rang plein si et seulement si

$$\det(Q_c) \neq 0. \quad (7.51)$$

7.2.3 Critère de commandabilité des systèmes linéaires et invariants à temps discret

Comme dans le cas des modèles à temps continu, on peut faire appel au critère suivant pour analyser la commandabilité des systèmes à temps discret, s'ils sont linéaires et invariants.

Théorème 7.4 (Critère de Kalman pour la commandabilité en temps discret)

Le système régi par l'équation d'état $x[k+1] = Fx[k] + Gu[k]$, avec $x[k] \in \mathbb{R}^n$ et $u[k] \in \mathbb{R}^m$, est totalement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité $Q_c \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ définie par

$$Q_c = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \quad (7.52)$$

est de rang n .

Ce résultat peut être démontré de la manière suivante. Soient deux états quelconques x_I, x_F et l'instant initial $k = 0$ tel que $x[0] = x_I$. Comme on l'a vu (Equation (7.15)), en appliquant récursivement la relation (7.13) on obtient :

$$x[k] = F^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i} G u[i] \quad (7.53)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_+$. Du fait de la définition de la matrice de commandabilité $Q_c \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ (voir Equation (7.52)), on obtient :

$$x[n] - F^n x[0] = \begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[0] \end{pmatrix} = Q_c \begin{pmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[0] \end{pmatrix}. \quad (7.54)$$

Pour qu'on puisse déterminer les commandes $u[0], \dots, u[n-1]$ telles que $x[n] = x_F$ quel que soit $x[0] = x_I$, il faut et il suffit que la matrice de commandabilité Q_c soit de rang n .

Par ailleurs, si cette condition n'est pas remplie, il ne sert à rien de chercher à atteindre l'état final pour une valeur de k supérieure à n car une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton est que F^n et toutes les puissances de F d'ordre supérieur à n s'expriment linéairement en fonction des n matrices $I, F, \dots, F^{n-1}$. Ainsi étendre la matrice de commandabilité en lui ajoutant des matrices $F^k G, k > n-1$, ne change pas son rang.

Là encore, dans le cas où le système n'a qu'une seule entrée ($m = 1$), une condition nécessaire et suffisante pour la commandabilité totale est que $\det(Q_c) \neq 0$.

7.2.4 Représentation des systèmes partiellement commandables

Cette section traite des systèmes partiellement commandables, c'est-à-dire des systèmes pour lesquels

$$\text{rang}(Q_c) = q, \quad \text{avec } q < n. \quad (7.55)$$

7.2.4.1 Structure canonique

Cette notion est abordée ici dans le cas d'un système à temps continu ; elle pourrait être conduite exactement de la même façon pour un système à temps discret. Nous allons chercher une base de l'espace d'état dans laquelle l'équation d'état permet de scinder le vecteur d'état en une partie de dimension q totalement commandable et une partie de dimension $n - q$ non commandable. Une telle décomposition permet d'identifier les états commandables et les états non commandables.

Choisissons donc une base du sous-espace vectoriel constituée de q colonnes linéairement indépendantes de Q_c (ou, plus généralement, de q combinaisons linéaires de ces mêmes colonnes indépendantes entre elles). Soit $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ la matrice construite à partir de ces q vecteurs colonnes.

Construisons la matrice de changement de base $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obtenue en complétant le bloc T_1 par un bloc $T_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-q)}$ de manière à ce que

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

soit une matrice carrée inversible. Considérons alors le changement de variable $x(t) = T\tilde{x}(t)$. Nous avons vu en Section 7.1.6 que, dans cette nouvelle base, les équations d'état et de mesure du système sont :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (7.57)$$

$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t), \quad (7.58)$$

avec $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$ et $\tilde{C} = CT$. Avec ce choix particulier de matrice de passage T , on peut montrer que les matrices $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ ainsi obtenues s'écrivent sous la forme suivante :

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{array} \right], \quad (7.59)$$

où $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\tilde{A}_{12} \in \mathbb{R}^{q \times (n-q)}$, $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$ et $\tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{q \times m}$. Cette structure correspond à un partitionnement du vecteur d'état $\tilde{x}$ en deux sous-vecteurs $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^q$ et $\tilde{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-q}$ représentant respectivement la partie commandable et la partie non commandable de l'état. Les équations développées à la suite de ce partitionnement sont en effet :

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1(t) + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2(t) + \tilde{B}_1u(t) \quad (7.60)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2(t). \quad (7.61)$$

La dynamique de $\tilde{x}_2$ est tout à fait autonome : elle n'est influencée ni par u ni par $\tilde{x}_1$ et ne pourra donc être modifiée de manière à atteindre un état final arbitraire. À l'inverse, on peut montrer que la paire $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ est totalement commandable : le comportement de $\tilde{x}_1$ peut donc être modifié à loisir par un choix judicieux de u .

Cette analyse indique en outre que **le nombre de variables d'état commandables est égal au rang de la matrice de commandabilité Q_c .**

Exemple 7.5 *Le système de l'Exemple 7.2 considéré plus haut est un premier exemple*

déjà écrit sous cette forme. Considérons à présent le système décrit par les équations :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (7.62)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t). \quad (7.63)$$

Ce système est d'ordre $n = 4$. Afin d'en étudier la commandabilité, calculons sa matrice de commandabilité :

$$Q_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.64)$$

La colonne c_2 est égale à la colonne c_4 et la colonne c_3 est l'opposée de la colonne c_2 . Les colonnes c_1 et c_2 sont par contre linéairement indépendantes. Ainsi, $q = \text{rang}(Q_c) = 2$. On peut donc choisir T_1 comme les colonnes c_1 et c_2 :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.65)$$

On peut ensuite compléter ce bloc par 2 colonnes rendant la matrice de passage inversible :

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \quad (7.66)$$

On vérifie que $\det(T) = 1$: la matrice T est donc bien inversible. On pose alors $x(t) = T\tilde{x}(t)$. Les matrices de la représentation d'état dans cette nouvelle base s'écrivent :

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right), \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.67)$$

$$\tilde{C} = CT = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad (7.68)$$

où l'on note les blocs de zéros caractéristiques de cette structure dans $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$. Dans cette nouvelle base, les deux premières variables d'état sont commandables tandis que les deux dernières ne le sont pas.

7.2.4.2 Fonction de transfert associée

En se fondant toujours sur une approche continue et à partir de la structure canonique décrite plus haut, on peut déterminer la représentation externe du système comme cela a été fait en Section 7.1.4 :

$$H(p) = \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D = [\tilde{C}_1 \mid \tilde{C}_2] \left[\begin{array}{c|c} pI - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & pI - \tilde{A}_{22} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{array} \right] + D. \quad (7.69)$$

En utilisant la nature triangulaire par blocs de la matrice à inverser, on obtient :

$$H(p) = [\tilde{C}_1 \mid \tilde{C}_2] \left[\begin{array}{c|c} (pI - \tilde{A}_{11})^{-1} & M_{12} \\ \hline 0 & (pI - \tilde{A}_{22})^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{array} \right] + D, \quad (7.70)$$

forme dans laquelle le calcul de la matrice M_{12} est inutile puisque celle-ci n'apparaît pas dans le résultat final :

$$\boxed{H(p) = \tilde{C}_1(pI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 + D} \quad (7.71)$$

On note sur cette forme que le degré en p de la matrice de transfert est réduit à q au lieu de n a priori (car $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$). **La fonction (ou la matrice) de transfert ne traduit donc que l'évolution de la partie commandable de l'état.**

7.3 Observabilité des systèmes

7.3.1 Définitions générales

Une notion duale de la commandabilité est celle de l'observabilité.

Définition 7.6 (Observabilité)

- Une variable d'état x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, est dite **observable** si l'observation de la sortie y sur un intervalle de temps fini $[t_0; t_1]$, $t_1 > t_0$, permet de déterminer la valeur de $x_i(t_0)$.
- Un système est dit **totalelement observable** si toutes ses variables d'état sont observables.
- Un système est dit **partiellement observable** si seules certaines de ses variables d'état sont observables.

La propriété d'observabilité est illustrée par l'exemple intuitif ci-dessous.

Exemple 7.7 *Considérons le système de dimension $n = 2$ à temps continu représenté par :*

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t) \quad (7.72)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t). \quad (7.73)$$

La sortie étant la variable d'état x_1 , celle-ci est clairement observable. A l'inverse, x_2 n'a aucune influence sur y (puisque $\dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t) + b_1 u(t)$ ne dépend pas de x_2) : la connaissance de cette sortie ne permettra donc pas de reconstituer x_2 . Le système est donc seulement partiellement observable.

7.3.2 Critère d'observabilité des systèmes linéaires et invariants à temps continu

L'observabilité peut être étudiée au moyen du critère suivant.

Théorème 7.8 (Critère de Kalman pour l'observabilité en temps continu) *Le système continu*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.74)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (7.75)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^l$, est totalement observable si et seulement si la matrice d'observabilité $Q_o \in \mathbb{R}^{ln \times n}$ définie par

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nl \times n} \quad (7.76)$$

est de rang n .

La preuve de ce résultat n'est pas reportée ici.

L'observabilité ne dépend donc que des matrices A et C : la manière dont l'entrée u impacte la dynamique n'a ici aucune importance.

Dans le cas où la sortie est scalaire ($l = 1$), Q_o est une matrice carrée de taille n et son rang est plein si et seulement si son déterminant est non nul.

Exemple 7.9 *Considérons un système représenté par des équations d'état et de mesure*

sous forme compagnon pour l'observation (voir Section 7.1.5.2) :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -b_0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -b_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} u(t) \quad (7.77)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) + d_0 u(t). \quad (7.78)$$

Le calcul de la matrice d'observabilité Q_o conduit à :

$$Q_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & 0 & 1 & * \\ \vdots & & & & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 1 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (7.79)$$

qui est clairement de rang n . Ainsi, la forme compagnon pour l'observation représente des systèmes totalement observables par les sorties.

7.3.3 Critère d'observabilité des systèmes linéaires et invariants à temps discret

De la même manière, pour les systèmes linéaires invariants à temps discret, nous avons le critère algébrique suivant.

Théorème 7.10 (Critère de Kalman pour l'observabilité des systèmes discrets)

Le système à temps discret

$$x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \quad (7.80)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k], \quad (7.81)$$

avec $x[k] \in \mathbb{R}^n$, $u[k] \in \mathbb{R}^m$ et $y[k] \in \mathbb{R}^l$, est totalement observable si et seulement si la matrice d'observabilité $Q_o \in \mathbb{R}^{ln \times n}$ définie par

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

est de rang n .

Ce résultat peut être démontré de la manière suivante. Comme on l'a vu (Equation (7.15)), en appliquant récursivement la relation (7.13) on a que $x[k] = F^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-1-i} G u[i]$ pour tout $k \in \mathbb{N}_+$. On tire alors de (7.81) que :

$$y[k] = C F^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} C F^{k-1-i} G u[i] + D u[k]. \quad (7.83)$$

Du fait de la définition de la matrice d'observabilité $Q_o \in \mathbb{R}^{nl \times n}$ (voir Equation (7.82)), on peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{pmatrix} = Q_o x[0] + \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CG & D & \ddots & & \vdots \\ CFG & CG & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ CF^{n-2}G & CF^{n-3}G & \dots & CG & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u[0] \\ u[1] \\ u[2] \\ \vdots \\ u[n-1] \end{pmatrix}. \quad (7.84)$$

Ainsi, l'état initial $x[0]$ peut être déterminé de manière univoque à partir des n premières valeurs de l'entrée et de la sortie si la matrice Q_o est de rang plein.

Par ailleurs, si cette condition n'est pas remplie, il ne sert à rien là non plus de chercher à déterminer $x[0]$ en considérant des valeurs supplémentaires de $y[k]$ pour $k > n-1$ puisque du fait du théorème de Cayley-Hamilton, ajouter à la matrice d'observabilité des matrices supplémentaires $CF^k, k > n-1$ ne change pas son rang.

7.3.4 Représentation des systèmes partiellement observables

Cette notion est abordée ici encore dans le cas d'un système à temps continu ; elle pourrait se définir de même pour un système à temps discret. Lorsque la matrice Q_o n'est pas de rang plein, le système n'est pas totalement observable, et seule une partie du vecteur d'état est reconstituible à partir des observations.

Si donc $\text{rang}(Q_o) = r < n$, on peut montrer (comme dans le cas de la structure canonique pour la commandabilité : voir Section 7.2.4) qu'il existe une base de l'espace d'état dans laquelle le système admet la représentation canonique suivante :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \hline \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{array} \right] \tilde{x}(t) + \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{array} \right] u(t) \quad (7.85)$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{C}_1 & 0 \end{array} \right] \tilde{x}(t) + D u(t). \quad (7.86)$$

La structure canonique ainsi obtenue induit un découpage du vecteur d'état en deux parties :

- $\tilde{x}_1$, de dimension r , qui représente la partie totalement observable de $\tilde{x}$
- $\tilde{x}_2$, de dimension $n - r$, qui représente la partie non-observable de $\tilde{x}$.

En effet, la sortie s'écrit ici $y(t) = \tilde{C}_1 \tilde{x}_1(t)$. Mais cette variable $\tilde{x}_1$ n'est pas influencée par $\tilde{x}_2$ (car $\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}_{11} \tilde{x}_1(t) + \tilde{B}_1 u(t)$). La sortie y est donc insensible au comportement de $\tilde{x}_2$.

Le changement de base $x(t) = T\tilde{x}(t)$ est ici déterminé de la manière suivante. On construit T^{-1} (et non pas T) en deux blocs :

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} (T^{-1})_1 \\ (T^{-1})_2 \end{bmatrix}. \quad (7.87)$$

Le premier bloc $(T^{-1})_1$, de taille $r \times n$, est obtenu en choisissant r lignes indépendantes de la matrice Q_o (ou r combinaisons linéaires de ces r lignes indépendantes entre elles). Il est complété par le bloc $(T^{-1})_2$ pour que l'ensemble soit une matrice carrée inversible. La représentation (7.85)-(7.86) s'obtient alors avec $\tilde{A} = T^{-1}AT$, $\tilde{B} = T^{-1}B$ et $\tilde{C} = CT$.

Exemple 7.11 *Le système de l'exemple 7.7 considéré plus haut est déjà écrit sous cette forme.*

De la même façon que pour la structure canonique pour la commande, on peut calculer la matrice de transfert à partir des équations (7.85)-(7.86). Le résultat montre qu'elle ne dépend que des matrices $\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1$ (et D) liées à la seule partie observable. Ainsi **la fonction (ou la matrice) de transfert ne traduit que l'évolution de la partie observable de l'état.**

7.4 Commande par retour d'état des systèmes monovari- riables invariants

Nous allons développer ici un type de commande particulier fréquemment utilisé pour piloter les systèmes linéaires et invariants : la commande par retour d'état. Cette commande est abordée dans le cas d'un système à temps continu, mais pourrait s'envisager de même pour un système à temps discret.

Considérons un système linéaire invariant décrit par son équation d'état et de mesure (nous supposons ici, pour simplifier, que la matrice de transmission directe D est nulle) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.88)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (7.89)$$

Nous considérons de plus ici que le système est monovarié ($u(t), y(t) \in \mathbb{R}$) et de dimension n ($x(t) \in \mathbb{R}^n$).

Le principe de la commande par retour d'état consiste à élaborer une commande u susceptible de modifier les valeurs propres du système et, par conséquent, ses pôles. Cette commande se fait par rebouclage sur les composantes du vecteur d'état :

$$u(t) = -Lx(t) + k_c e(t), \quad (7.90)$$

où e désigne le signal de consigne. Les paramètres à régler sont donc le vecteur $L \in \mathbb{R}^n$ et le gain $k_c \in \mathbb{R}$. Le schéma de principe de ce bouclage est représenté sur la Figure 7.1.

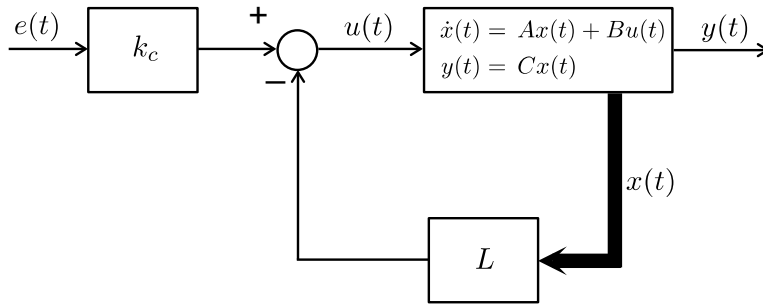


FIGURE 7.1 – Principe de la commande par retour d'état.

En remplaçant (7.90) dans (7.88), le système bouclé s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Bk_c e(t) \quad (7.91)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (7.92)$$

Les valeurs propres en boucle fermée sont donc les solutions de l'équation caractéristique de $A - BL$:

$$\det(pI - (A - BL)) = 0. \quad (7.93)$$

La matrice L permet donc de déplacer les valeurs propres du système en des positions privilégiées qui assurent un comportement temporel convenable. Nous verrons qu'en outre le gain k_c permet, dans certains cas, d'annuler l'erreur permanente pour une entrée constante.

7.4.1 Commande par retour d'état des systèmes totalement commandables

7.4.1.1 Cas général

Dans le cas où le système (7.88) est totalement commandable, la matrice L permet d'affecter toutes les valeurs propres en boucle fermée, comme l'assure le théorème de Wonham.

Théorème 7.12 (Théorème de Wonham) *Si le système (7.88) est totalement commandable alors, pour toutes valeurs propres souhaitées $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ où chaque λ_i est soit réelle soit complexe conjuguée d'une autre valeur propre λ_j , il existe une matrice L tel que*

$$\text{spectre}(A - BL) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \quad (7.94)$$

Il existe diverses méthodes pour calculer cette matrice (ici un vecteur ligne) L . L'une d'entre elles est la **formule d'Ackermann**. Soit Q_c la matrice de commandabilité de (7.88) (voir Equation (7.50)) ; dans le cas présent, on sait que $Q_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (car le système est monovarié et d'ordre n) et que $\text{rang}(Q_c) = n$ (car le système est totalement commandable). En particulier, Q_c est inversible. Soit $P(p)$ le polynôme caractéristique que

l'on souhaite imposer au système bouclé à partir du cahier des charges, c'est-à-dire le polynôme de degré n dont les racines sont les λ_i spécifiées. Selon la formule d'Ackermann, un vecteur ligne L permettant d'imposer que le spectre de $A - BL$ soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est alors donné par :

$$L = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) Q_c^{-1} P(A) \quad (7.95)$$

Cette formule a l'avantage d'être simple mais requiert le calcul des n premières puissances de la matrice A ainsi que de l'inverse de la matrice de commandabilité Q_c . Elle peut poser des problèmes de conditionnement numérique, notamment pour des systèmes de grande dimension. On lui préférera donc en général d'autres méthodes numériques, telles que celles disponibles dans des logiciels de calculs scientifiques³.

Le gain k_c est généralement réglé de manière à annuler l'erreur permanente en réponse à un échelon de consigne. Ce gain k_c ne modifie pas la dynamique du système en boucle fermée (puisque'il ne modifie pas les valeurs propres du système bouclé), mais permet d'ajuster son gain statique.

Pour cela, considérons un échelon de consigne $e(t) = E_0 \gamma(t)$ et observons que si le système bouclé est stable⁴, l'état $x(t)$ convergera vers une valeur x_∞ constante, ce qui garantit que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$. Ainsi, en régime permanent, le système bouclé devient

$$0 = (A - BL)x_\infty + Bk_c E_0 \quad (7.96)$$

$$y_\infty = Cx_\infty. \quad (7.97)$$

La valeur de la sortie en régime permanent est donc

$$y_\infty = -C(A - BL)^{-1} Bk_c E_0. \quad (7.98)$$

Afin de garantir une erreur permanente nulle, il faut assurer que la sortie tende vers la consigne, c'est-à-dire $y_\infty = E_0$, ce que permet le choix :

$$k_c = -\frac{1}{C(A - BL)^{-1} B} \quad (7.99)$$

Il est à noter que cette approche ne permet pas d'annuler l'erreur permanente vis-à-vis d'une perturbation.

La commande par retour d'état peut ainsi être résumée par les étapes suivantes :

1. Traduction du cahier des charges afin de déterminer les valeurs propres λ_i souhaitées pour le système bouclé
2. Choix de la matrice L de manière à ce que les valeurs propres de $A - BL$ soient les λ_i choisies
3. Réglage du gain k_c de manière à annuler l'erreur en régime permanent en réponse à un échelon de consigne.

3. Voir par exemple la fonction `place` de Matlab.

4. Le choix du vecteur L le garantit, à moins que l'une des valeurs propres λ_i choisies soit à partie réelle positive...

7.4.1.2 Cas d'un système sous forme compagnon pour la commande

L'écriture du système (7.91)-(7.92) sous forme compagnon pour la commande (voir Section 7.1.5.1) permet généralement de simplifier la détermination du vecteur ligne L . Le système s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (7.100)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix} x(t). \quad (7.101)$$

Il est aisé de vérifier que la matrice de commandabilité Q_c de ce système est de rang plein.

La matrice $A - BL$ s'écrit alors simplement sous la forme suivante :

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -(a_0 + \ell_1) & -(a_1 + \ell_2) & \dots & \dots & \dots & -(a_{n-1} + \ell_n) \end{pmatrix}. \quad (7.102)$$

Son polynôme caractéristique est donc :

$$\det(pI - (A - BL)) = (a_0 + \ell_1) + (a_1 + \ell_2)p + \dots + (a_{n-1} + \ell_n)p^{n-1} + p^n. \quad (7.103)$$

Si $P(p)$ désigne le polynôme caractéristique souhaitée (c'est-à-dire celui dont les racines sont les $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ déduites du cahiers des charges), il suffit alors d'effectuer une identification terme à terme, permettant d'imposer⁵ :

$$(a_0 + \ell_1) + (a_1 + \ell_2)p + \dots + (a_{n-1} + \ell_n)p^{n-1} + p^n = P(p), \quad (7.104)$$

pour déterminer les gains ℓ_i du vecteur ligne $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \dots \ \ell_n)$.

Le gain k_c est ensuite réglé de la même manière qu'au paragraphe précédent.

7.4.1.3 Remarque sur les systèmes à temps discret

La commande par retour d'état en temps discret des systèmes monovariabiles totalement commandables s'effectue en suivant les mêmes étapes et raisonnements que pour les

5. Le coefficient du terme de plus haut degré de $P(p)$ doit être normalisé à 1 pour que cette identification soit possible.

systèmes à temps continu. Cette étude ne sera donc pas détaillée ici. Deux spécificités méritent toutefois d'être soulignées, dans le cas d'une commande échantillonnée.

On peut noter tout d'abord que le choix des valeurs propres de la boucle fermée peut être contraint par la période d'échantillonnage T_e choisie. En particulier, il serait illusoire d'imposer à la boucle fermée une valeur propre correspondant à une constante de temps inférieure à T_e ; la dynamique correspondante serait en effet trop rapide pour être perçue par le modèle à temps discret.

Par ailleurs, en cohérence avec la relation $F = e^{AT_e}$, les valeurs propres μ_i à imposer au système à temps discret peuvent être déduites des valeurs propres λ_i que l'on souhaiterait imposer avec une commande en temps continu par la relation :

$$\mu_i = e^{\lambda_i T_e}. \quad (7.105)$$

7.4.1.4 Exemples

Exemple 7.13 *Considérons le modèle linéaire simplifié d'un moteur à courant continu décrit par la fonction de transfert :*

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{p(p+a)}, \quad (7.106)$$

où y représente la mesure de la position angulaire et u la commande appliquée au moteur. Choisissons des variables d'état ayant un sens physique, comme l'indique le schéma bloc de la Figure 7.2 : x_1 représente la position angulaire et x_2 la vitesse angulaire.

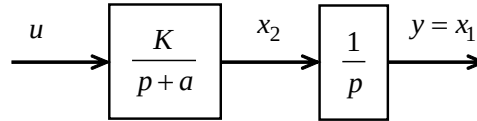


FIGURE 7.2 – Schéma bloc du système considéré.

Avec ce choix, nous avons : $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ et $\dot{x}_2(t) = -a x_2(t) + K u(t)$. Le système peut donc s'écrire selon la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} u(t) \quad (7.107)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t). \quad (7.108)$$

Considérons la commande par retour d'état :

$$u(t) = - \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix} x(t) + k_c e(t), \quad (7.109)$$

où e désigne le signal de consigne. Le système bouclé s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K\ell_1 & -(a + K\ell_2) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ k_c K \end{pmatrix} e(t). \quad (7.110)$$

Le comportement temporel de ce système du deuxième ordre est parfaitement connu en fonction du coefficient d'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0 . En particulier, les spécifications du cahier des charges en termes de stabilité et de rapidité nous permettent de déterminer les valeurs de ξ et ω_0 souhaitées (voir Annexe A.9), desquelles on détermine aisément les gains ℓ_1 et ℓ_2 . Par exemple, un amortissement $\xi = 0,45$, correspondant à un dépassement $D = 20\%$, et une pulsation propre $\omega_0 = 350 \text{ rad.s}^{-1}$, correspondant à un temps de premier maximum $t_m = 10 \text{ ms}$ en réponse à un échelon de consigne, conduiront au choix :

$$\ell_1 = \frac{\omega_0^2}{K} = \frac{350^2}{K} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \frac{2\xi\omega_0 - a}{K} = \frac{315 - a}{K}. \quad (7.111)$$

Pour déterminer le gain k_c , on peut observer que pour une entrée $e(t) = E_0$ constante, l'équation (7.110) s'écrit, en régime permanent :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K\ell_1 & -(a + K\ell_2) \end{pmatrix} x_\infty + \begin{pmatrix} 0 \\ k_c K \end{pmatrix} E_0. \quad (7.112)$$

d'où on déduit $x_{2\infty} = 0$ et $x_{1\infty} = k_c E_0 / \ell_1$. Le choix $k_c = \ell_1$ permet donc de garantir une erreur permanente nulle en réponse à un échelon de consigne.

Exemple 7.14 Reprenons l'exemple, déjà introduit au Chapitre 5, dont la fonction de transfert du système en boucle ouverte sans correction est donnée par :

$$H(p) = \frac{100}{p \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{1000}\right)}. \quad (7.113)$$

On souhaite désormais concevoir une commande par retour d'état de façon à valider les spécifications suivantes, en réponse à un échelon de consigne :

- dépassement inférieur à 10%
- temps du premier maximum de 10 ms (correspondant à la constante de temps lente du système)
- erreur permanente nulle.

Pour un comportement de type deuxième ordre équivalent, les deux premières spécifications du cahier des charges peuvent se traduire dans le domaine fréquentiel par (voir Annexe A.9) :

- un coefficient d'amortissement $\xi = 0,6$
- une pulsation propre $\omega_0 = 390 \text{ rad.s}^{-1}$.

Les contraintes sur l'amortissement et la pulsation propre se traduisent par deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -234 \pm 312j. \quad (7.114)$$

La troisième valeur propre de la boucle fermée est choisie de sorte qu'elle n'influence pas le comportement fixé par le deuxième ordre. Pour cela, on la place suffisamment loin de ω_0 , par exemple à environ une décade d'écart :

$$\lambda_3 = -3000. \quad (7.115)$$

En décomposant la fonction de transfert $H(p)$ en 3 blocs et en choisissant les variables d'état conformément au schéma de la figure 7.3, une représentation d'état du système est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & -100 & 100 \\ 0 & 0 & -1000 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} u(t) \quad (7.116)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t). \quad (7.117)$$

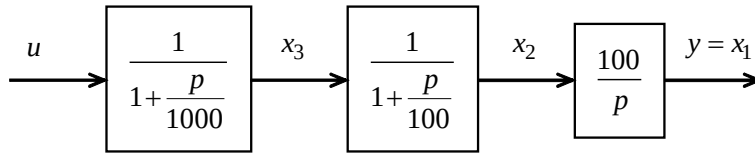


FIGURE 7.3 – Schéma-bloc du système considéré.

Le calcul des matrices de commandabilité et d'observabilité fournit les résultats suivants (voir Equations (7.50) et (7.76)) :

$$Q_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10^7 \\ 0 & 10^5 & -1,1 \cdot 10^8 \\ 10^3 & -10^6 & 10^9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10^2 & 0 \\ 0 & -10^4 & 10^4 \end{pmatrix}. \quad (7.118)$$

Ces deux matrices sont de rang plein : le système est donc totalement commandable et observable.

D'après (7.114)-(7.115), la stratégie de commande par retour d'état plaçant les valeurs propres du système bouclé nécessite le calcul du vecteur ligne $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \ell_3)$ garantissant que :

$$\det(pI - (A - BL)) = (p - \lambda_1)(p - \lambda_2)(p - \lambda_3) = (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)(p - \lambda_3), \quad (7.119)$$

soit

$$\begin{vmatrix} p & -100 & 0 \\ 0 & p + 100 & -100 \\ 1000 \ell_1 & 1000 \ell_2 & p + 1000 + 1000 \ell_3 \end{vmatrix} = (p^2 + 468p + 152 \cdot 10^3)(p + 3000) \quad (7.120)$$

qui s'écrit

$$p^3 + (1,1 + \ell_3) \cdot 10^3 p^2 + (1 + \ell_2 + \ell_3) \cdot 10^5 p + 10^7 \ell_1 = p^3 + 3,468 \cdot 10^3 p^2 + 1,556 \cdot 10^6 p + 4,56 \cdot 10^8. \quad (7.121)$$

Par identification, nous obtenons ainsi :

$$L = \begin{pmatrix} 45,6 & 12,19 & 2,37 \end{pmatrix}. \quad (7.122)$$

La loi de commande à appliquer sera donc $u(t) = -Lx(t) + k_c e(t)$, où $e(t)$ désigne le signal de consigne et k_c est un gain choisi afin de satisfaire la troisième spécification du cahier des charges. Au vu de l'argumentation développée en Section 7.4.1.1 (voir notamment l'équation (7.99)), celui-ci est choisi comme :

$$k_c = -\frac{1}{C(A - BL)^{-1}B} = 45,6. \quad (7.123)$$

La réponse indicielle du système en boucle fermée confirme que le cahier des charges est respecté (voir Figure 7.4).

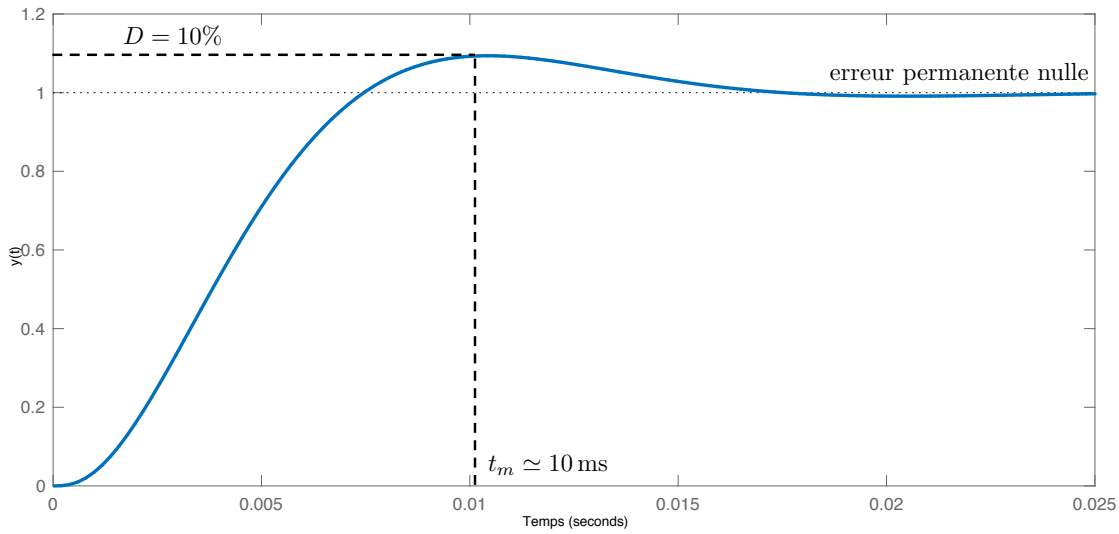


FIGURE 7.4 – Réponse indicielle du système corrigé par une commande par retour d'état.

Exemple 7.15 On considère à présent le modèle mathématique d'un réseau trophique (ensemble de chaînes alimentaires) donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x_1(t)x_2(t) + x_2(t)x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) - x_2(t)x_3(t) + u(t) \end{cases} \quad (7.124)$$

où x_1 représente le prédateur principal (par exemple l'orque), x_2 le prédateur/proie intermédiaire (par exemple le phoque), x_3 la proie finale (par exemple un poisson phytophage), et u représente la nourriture (par exemple des algues). Le temps est normalisé et les variables x_1, x_2, x_3 et u sont des nombres sans dimension de la forme $X_1/X_{10}, X_2/X_{20}, X_3/X_{30}$ et U/U_0 , où X_{10}, X_{20}, X_{30} et U_0 sont respectivement des nombres de prédateurs, prédateurs/proies, proies et une quantité de nourriture fixés et grands (on

peut donc considérer que x_1, x_2, x_3 et u sont des nombres réels comparativement petits, de l'ordre de quelques unités).

Pour une quantité de nourriture $u(t) = u^*$ fixée, le ou les points d'équilibre correspondants sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} 0 &= -x_1^* + x_1^* x_2^* = x_1^* (x_2^* - 1) \\ 0 &= -x_2^* - x_1^* x_2^* + x_2^* x_3^* = x_2^* (-1 - x_1^* + x_3^*) \\ 0 &= -x_3^* - x_2^* x_3^* + u^* = -x_3^* (1 + x_2^*) + u^*. \end{cases} \quad (7.125)$$

Considérons le point d'équilibre :

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{u^* - 2}{2}, 1, \frac{u^*}{2} \right). \quad (7.126)$$

En utilisant les résultats du paragraphe 7.1.3, on obtient les équations du linéarisé tangent autour de ce point d'équilibre :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 + x_2^* & x_1^* & 0 \\ -x_2^* & -1 - x_1^* + x_3^* & x_2^* \\ 0 & -x_3^* & -1 - x_2^* \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}(t). \quad (7.127)$$

Nous travaillons dans ce qui suit autour du point d'équilibre correspondant à $u^* = 3$, pour lequel le linéarisé tangent s'écrit donc :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1,5 & -2 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}(t). \quad (7.128)$$

Les valeurs propres de la matrice A de ce système sont $-0,5 \pm 0,866j$ et -1 . Le système est donc stable. On vérifie aussi qu'il est totalement commandable, en effet la matrice :

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2,5 \end{pmatrix} \quad (7.129)$$

est de rang 3.

En supposant ici que toutes les variables d'état sont mesurables, nous commençons par calculer un retour d'état pour assurer qu'en réponse à un échelon d'amplitude E_0 , la population d'orque tende vers cette même valeur avec un dépassement de 20% et un temps du premier maximum de 10 unités de temps. Ces deux dernières spécifications définissent deux valeurs propres complexes conjuguées d'amortissement $\xi = 0,46$ et de pulsation propre $\omega_0 = 0,354$. La troisième valeur propre est choisie beaucoup plus loin de l'axe imaginaire pour ne pas modifier le comportement transitoire dû aux deux premières, soit par exemple

en -2.

Avec une commande par retour d'état $\tilde{u}(t) = -L\tilde{x}(t) + k_c e(t)$, le système bouclé s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\ell_1 & -1,5 - \ell_2 & -2 - \ell_3 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_c \end{pmatrix} e(t). \quad (7.130)$$

On calcule alors :

$$\det(pI - (A - BL)) = \begin{vmatrix} p & -0,5 & 0 \\ 1 & p & -1 \\ \ell_1 & 1,5 + \ell_2 & p + 2 + \ell_3 \end{vmatrix} \quad (7.131)$$

$$= p^3 + (2 + \ell_3)p^2 + (2 + \ell_2)p + (1 + 0,5\ell_1 + 0,5\ell_3) \quad (7.132)$$

$$= (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)(p + 2) \quad (7.133)$$

d'où on déduit :

$$\begin{cases} \ell_1 = 4\omega_0^2 - 2\xi\omega_0 - 2 \simeq -1,825 \\ \ell_2 = \omega_0^2 + 4\xi\omega_0 - 2 \simeq -1,224 \\ \ell_3 = 2\xi\omega_0 \simeq 0,326. \end{cases} \quad (7.134)$$

Examinons l'effet d'un échelon d'amplitude E_0 appliqué à l'entrée du système bouclé. Le nouveau point d'équilibre est donné par l'équation :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\ell_1 & -1,5 - \ell_2 & -2 - \ell_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^* \\ \tilde{x}_2^* \\ \tilde{x}_3^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_c \end{pmatrix} E_0. \quad (7.135)$$

On a donc $\tilde{x}_2^* = 0$ et $\tilde{x}_1^* = \tilde{x}_3^* = k_c E_0 / (2 + \ell_1 + \ell_3)$. La population de phoques ne change pas, tandis que celles des orques et des poissons augmentent de la même quantité. En particulier, on peut augmenter ces populations d'une quantité égale à E_0 en choisissant :

$$k_c = 2 + \ell_1 + \ell_3 \simeq 0,501. \quad (7.136)$$

La Figure 7.5 montre la réponse des trois populations à un échelon d'amplitude $E_0 = 1$. On constate que le comportement prévu est effectivement obtenu (avec un temps du premier maximum un peu plus important en raison de la présence de la troisième valeur propre).

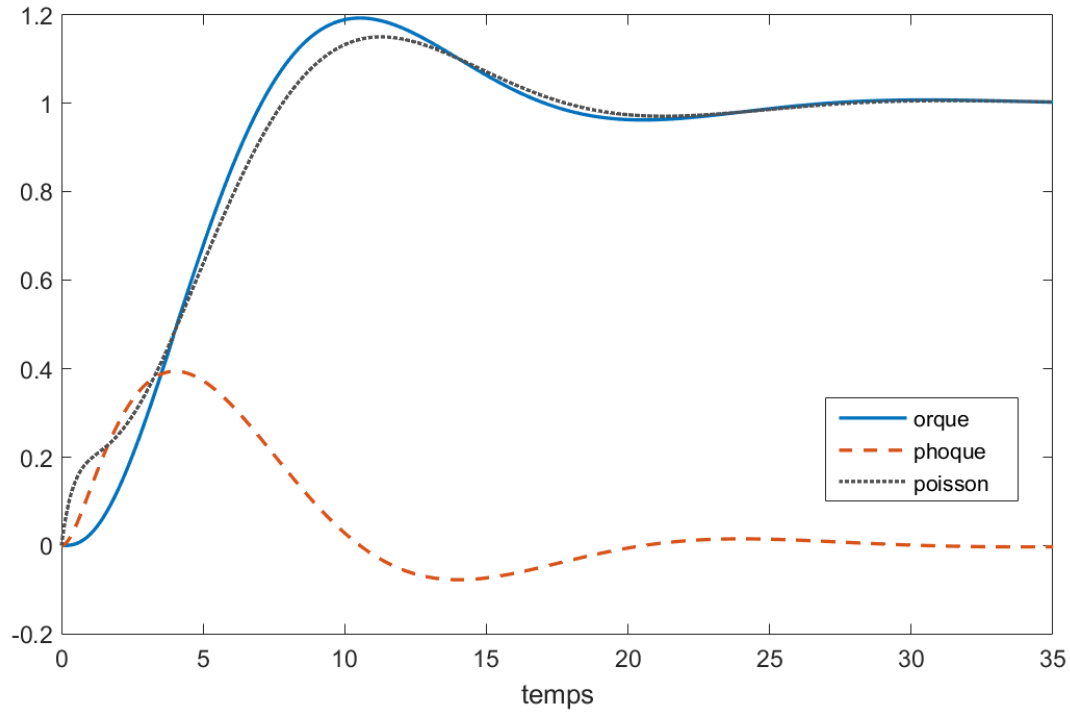


FIGURE 7.5 – Réponses indicielles des trois populations avec une commande par retour d'état.

7.4.2 Commande par retour d'état des systèmes partiellement commandables

Dans la section précédente, la commande par retour d'état permettait de placer arbitrairement toutes les valeurs propres du système en boucle fermée. Ceci n'est possible que dans le cas où le système est totalement commandable, c'est-à-dire si le rang q de la matrice de commandabilité Q_c est égal à la dimension n du système. Dans le cas contraire, c'est-à-dire $q < n$, considérons la structure canonique pour la commandabilité⁶ définie en Section 7.2.4.1 :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ 0 \end{array} \right], \quad (7.137)$$

où $A_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{q \times (n-q)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$ et $B_1 \in \mathbb{R}^q$ (nous ne traitons ici que les systèmes monovariés, donc $m = 1$). Soit la commande par retour d'état :

$$u(t) = - \left[\begin{array}{c|c} L_1 & L_2 \end{array} \right] x(t) + k_c e(t) = -L_1 x_1(t) - L_2 x_2(t) + k_c e(t) \quad (7.138)$$

6. Nous traitons ici le problème pour des systèmes à temps continu, mais les mêmes raisonnements s'appliquent aux systèmes à temps discret.

où $L_1 \in \mathbb{R}^q$ et $L_2 \in \mathbb{R}^{n-q}$. Le système en boucle fermée s'écrit alors

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Bk_c e(t), \quad \text{avec} \quad A - BL = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} - B_1 L_1 & A_{12} - B_1 L_2 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right].$$

Les valeurs propres de la boucle fermée sont donc données par :

$$\det(pI - (A - BL)) = 0, \quad \text{soit :} \quad \det(pI - (A_{11} - B_1 L_1)) \det(pI - A_{22}) = 0. \quad (7.139)$$

Cette expression indique que seules q valeurs propres peuvent être réglées à loisir tandis que l'évolution de la partie x_2 du vecteur d'état (de dimension $n - q$) reste libre : aucune action sur x_2 n'est possible par bouclage.

Ceci n'est pas nécessairement pénalisant sur le système en boucle fermée s'il se trouve que l'état de la partie non commandable x_2 présente déjà des performances correctes sans correction. En revanche, dans le cas où l'un des modes de x_2 est instable, le système ne sera pas stabilisable par bouclage.

Chapitre 8

Observateurs et commande par retour d'état estimé

La mise en œuvre de la commande par retour d'état, traitée au chapitre précédent, nécessite l'accès à toutes les composantes du vecteur d'état. Or, dans la pratique, on ne dispose que des sorties du système, accessibles à la mesure par les capteurs. Cette limitation, liée à la notion d'observabilité qui caractérise la possibilité de reconstruire l'état d'un système uniquement à partir de l'observation de ces sorties, implique souvent le recours à un observateur pour la reconstruction du vecteur d'état.

Ce chapitre vise à aborder ces notions : les observateurs sont présentés dans le paragraphe 8.1 tandis que l'association d'un retour d'état et d'un observateur, et les propriétés qui en résultent, font l'objet du paragraphe 8.2.

8.1 Synthèse d'observateur

Etant donné un système dynamique totalement observable, on appelle *observateur* ou encore *reconstructeur d'état* un nouveau système dont le rôle est d'estimer à chaque instant le vecteur d'état du système initial à partir de ses grandeurs mesurées (entrées et sorties en général). Ces observateurs peuvent ainsi être vus comme des “capteurs logiciels”. Ils sont très utiles pour estimer une variable d'état dont la mesure serait trop complexe ou trop coûteuse (comme par exemple les sondes de biomasse pour des applications en bioréacteurs). Ils sont également utilisés pour rendre possible un retour d'état, malgré ce manque de mesures.

8.1.1 Observateur à mémoire finie

Nous présentons en guise d'introduction un premier type d'observateur qui convient aux systèmes à temps discret. On ne le présente en outre dans ce qui suit que dans le cas monovariable. Considérons un système totalement observable d'ordre n , décrit par la représentation d'état à temps discret :

$$x[k+1] = Fx[k] + Gu[k] \quad (8.1)$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k], \quad (8.2)$$

où l'entrée $u[k]$ et la sortie $y[k]$ sont deux grandeurs scalaires. Nous avons vu en Section 7.3.3 que, par la définition même de la matrice d'observabilité $Q_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$, définie en

Equation (7.82), les n premières valeurs de la sortie s'expriment en fonction de l'état initial $x[0]$ et des n premières valeurs de l'entrée par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{pmatrix} = Q_o x[0] + R \begin{pmatrix} u[0] \\ u[1] \\ \vdots \\ u[n-1] \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

où la matrice $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie comme

$$R = \begin{pmatrix} D & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ CG & D & \ddots & & \vdots \\ CFG & CG & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ CF^{n-2}G & CF^{n-3}G & \cdots & CG & D \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Par translation d'indice temporel, on a donc, pour tout entier $k \geq n$,

$$\begin{pmatrix} y[k-n] \\ y[k-n+1] \\ \vdots \\ y[k-1] \end{pmatrix} = Q_o x[k-n] + R \begin{pmatrix} u[k-n] \\ u[k-n+1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Le système étant totalement observable et monovariable, la matrice d'observabilité Q_o est une matrice carrée, de taille n , inversible (voir Section 7.3.3). On peut donc inverser la relation précédente pour obtenir :

$$x[k-n] = Q_o^{-1} \begin{pmatrix} y[k-n] \\ y[k-n+1] \\ \vdots \\ y[k-1] \end{pmatrix} - Q_o^{-1} R \begin{pmatrix} u[k-n] \\ u[k-n+1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Par ailleurs, en appliquant récursivement (8.1) à partir de la condition initiale $x[k-n]$, on peut montrer que

$$x[k] = F^n x[k-n] + \sum_{i=k-n}^{k-1} F^{k-1-i} G u[i] = F^n x[k-n] + Q_c \begin{pmatrix} u[k-1] \\ u[k-2] \\ \vdots \\ u[k-n] \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

où $Q_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ désigne la matrice de commandabilité du système (voir Section 7.2.3). Notons $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de permutation :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

En combinant (8.6) et (8.7), on obtient alors :

$$x[k] = F^n Q_o^{-1} \begin{pmatrix} y[k-n] \\ y[k-n+1] \\ \vdots \\ y[k-1] \end{pmatrix} + (Q_c P - F^n Q_o^{-1} R) \begin{pmatrix} u[k-n] \\ u[k-n+1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq n. \quad (8.9)$$

L'état courant $x[k]$ s'exprime donc finalement en fonction des n observations antérieures de l'entrée et de la sortie, ce qui nous permet de définir l'observateur dynamique suivant :

$$\hat{x}[k] = F^n Q_o^{-1} \begin{pmatrix} y[k-n] \\ y[k-n+1] \\ \vdots \\ y[k-1] \end{pmatrix} + (Q_c P - F^n Q_o^{-1} R) \begin{pmatrix} u[k-n] \\ u[k-n+1] \\ \vdots \\ u[k-1] \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 0, \quad (8.10)$$

où $\hat{x}[k]$ désigne l'estimée de l'état, obtenue à partir de la seule connaissance de la sortie y et de l'entrée u .

Notons que ces observateurs produisent une valeur exacte de l'état ($\hat{x}[k] = x[k]$) si les matrices F , G , C et D définissant la dynamique du système (8.1) sont connues précisément.

8.1.2 Observateur dynamique

Nous nous focalisons ici sur les systèmes à temps continu, bien que les méthodes présentées s'adaptent directement aux systèmes à temps discret. Considérons donc le système¹ décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.11)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (8.12)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^l$. On propose une structure dynamique d'observateur sous la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)), \quad \text{où} \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \quad (8.13)$$

1. Nous supposons pour simplifier que la matrice de transmission directe D est nulle.

$K \in \mathbb{R}^{n \times l}$ désignant une matrice de gains à déterminer. Il s'agit ainsi d'une simulation du système observé, corrigée par l'écart constaté entre la sortie mesurée y et la sortie estimée $\hat{y}$. On peut reformuler l'expression précédente comme une équation d'état standard :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t). \quad (8.14)$$

L'entrée u et la sortie y du système définissent ainsi les entrées de l'observateur, qui apparaît lui-même comme un système dynamique d'ordre n . Tout le problème de la reconstruction de l'état réside dans le choix d'un gain matriciel K tel que l'erreur d'estimation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ converge vers 0 malgré une valeur initiale non nulle : $\hat{x}(0) \neq x(0)$. En soustrayant (8.11) à (8.14), on obtient que la dynamique de cette erreur d'estimation $\tilde{x}$ est régie par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - KC)\tilde{x}(t). \quad (8.15)$$

Il apparaît ainsi clairement que la propriété de convergence requise équivaut à la stabilité du système (8.15) ou, de manière équivalente, de l'observateur (8.14).

Par conséquent, l'observateur dynamique du système linéaire dont la représentation d'état est caractérisée par le triplet matriciel (A, B, C) est défini par l'équation d'état (8.14), où K est choisie de manière à ce que $A - KC$ ne possède que des valeurs propres à parties réelles strictement négatives. On peut montrer que cette matrice K existe si et seulement si la paire (A, C) est totalement observable (ce qui peut être vu comme une propriété duale du Théorème 7.12).

Dans le cas monovariable, la détermination de K répond à une problématique analogue à celle du placement des valeurs propres par retour d'état (Section 7.4). Elle s'effectue donc en suivant le même type de démarche². Nous illustrons cela dans l'exemple suivant.

En pratique, le choix des valeurs propres à imposer à la matrice $A - KC$ (et donc des valeurs propres de l'observateur) sera avant tout dicté par la rapidité avec laquelle l'estimation de l'état doit être effectuée. La plupart des applications requièrent que cette estimation soit effectuée le plus rapidement possible. Toutefois, un observateur trop rapide risque d'être incompatible avec une implantation numérique. A titre indicatif, on pourra généralement opter pour une rapidité de l'observateur au moins deux à trois fois plus grande que celle du système à observer.

Exemple 8.1 (suite de l'Exemple 7.14) Reprenons le système de l'Exemple 7.14, dont la représentation d'état est :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & -100 & 100 \\ 0 & 0 & -1000 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} u(t) \quad (8.16)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t). \quad (8.17)$$

Nous avons vu que ce système est totalement observable. On se propose ici de créer un observateur permettant d'estimer l'état de ce système, à partir de la seule connaissance de

2. dont on peut noter qu'elle est particulièrement simple lorsque le système est représenté sous sa forme compagnon pour l'observation (voir Section 7.1.5.2).

l'entrée $u(t)$ et de la sortie $y(t)$. Cette estimée $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ peut être obtenue par l'observateur donné par l'équation (8.14), à savoir :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t). \quad (8.18)$$

La paire (A, C) étant totalement observable, les valeurs propres de $A - KC$ peuvent être placées arbitrairement par un choix judicieux de la matrice de gains K . Le choix de ces valeurs propres détermine les performances de l'observateur (voir les abaques de l'Annexe A.9). Par exemple, on peut choisir d'imposer un amortissement $\xi = 0,7$, afin de limiter le dépassement de l'erreur d'observation en régime transitoire. En outre, afin de garantir une réponse suffisamment rapide de l'observateur par rapport à la dynamique du système³, on pourra choisir la pulsation propre correspondant à ces valeurs propres de façon que la dynamique ainsi obtenue soit plus rapide que la dynamique choisie lors du calcul du retour d'état, soit par exemple $\omega_0 = 2,5 \times 390 \text{ rad.s}^{-1}$. Un choix possible consiste ainsi à imposer les valeurs propres suivantes à la matrice $A - KC$:

$$\lambda_{1,2} = -\omega_0 \xi \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \lambda_3 = -\omega_0. \quad (8.19)$$

En posant $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)^T$, cette matrice s'écrit :

$$A - KC = \begin{pmatrix} -k_1 & 100 & 0 \\ -k_2 & -100 & 100 \\ -k_3 & 0 & -1000 \end{pmatrix}. \quad (8.20)$$

D'après ce qui précède, la matrice K est déterminée de façon que son polynôme caractéristique s'écrivent :

$$\det(pI - (A - KC)) = (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)(p + \omega_0), \quad (8.21)$$

soit

$$\begin{vmatrix} p + k_1 & -100 & 0 \\ k_2 & p + 100 & -100 \\ k_3 & 0 & p + 1000 \end{vmatrix} \quad (8.22)$$

$$= p^3 + (k_1 + 1,1 \cdot 10^3)p^2 + (1,1 \cdot 10^3 k_1 + 10^2 k_2 + 10^5)p + (10^5 k_1 + 10^5 k_2 + 10^4 k_3)$$

$$= p^3 + (2\xi + 1)\omega_0 p^2 + (2\xi + 1)\omega_0^2 p + \omega_0^3.$$

Par identification, nous obtenons ainsi :

$$\begin{cases} k_1 = (2\xi + 1)\omega_0 - 1100 = 1,240 \cdot 10^3 \\ k_2 = \frac{(2\xi + 1)\omega_0^2}{100} - 11k_1 - 1000 = 8,175 \cdot 10^3 \\ k_3 = \frac{\omega_0^3}{10^4} - 10k_1 - 10k_2 = -1,464 \cdot 10^3. \end{cases} \quad (8.23)$$

3. et en tenant compte du fait que l'observateur fonctionnera sur le système en boucle fermée, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

Afin d'évaluer la performance de cet observateur, le système est soumis à une entrée sinusoïdale $u(t) = \sin(200t)$. Le système étant instable (l'une des valeurs propres de A est nulle), l'état va tendre vers l'infini : le système n'est donc simulé que sur un horizon temporel restreint. La Figure 8.1 indique que, après une phase transitoire, les états estimés⁴ $\hat{x}_2$ et $\hat{x}_3$ convergent vers les états réels x_2 et x_3 . Notons que cette erreur d'observation transitoire est due à la condition initiale $\hat{x}(0) = 0$ choisie pour l'observateur : l'état n'étant pas entièrement accessible à la mesure il n'est pas possible de l'initialiser à la valeur de l'état initial réel $x(0)$, ici égale à $(0,2 \ 0 \ 0)^T$. Si tel avait été le cas, l'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ aurait été nulle à chaque instant, comme le montre l'équation (8.15).

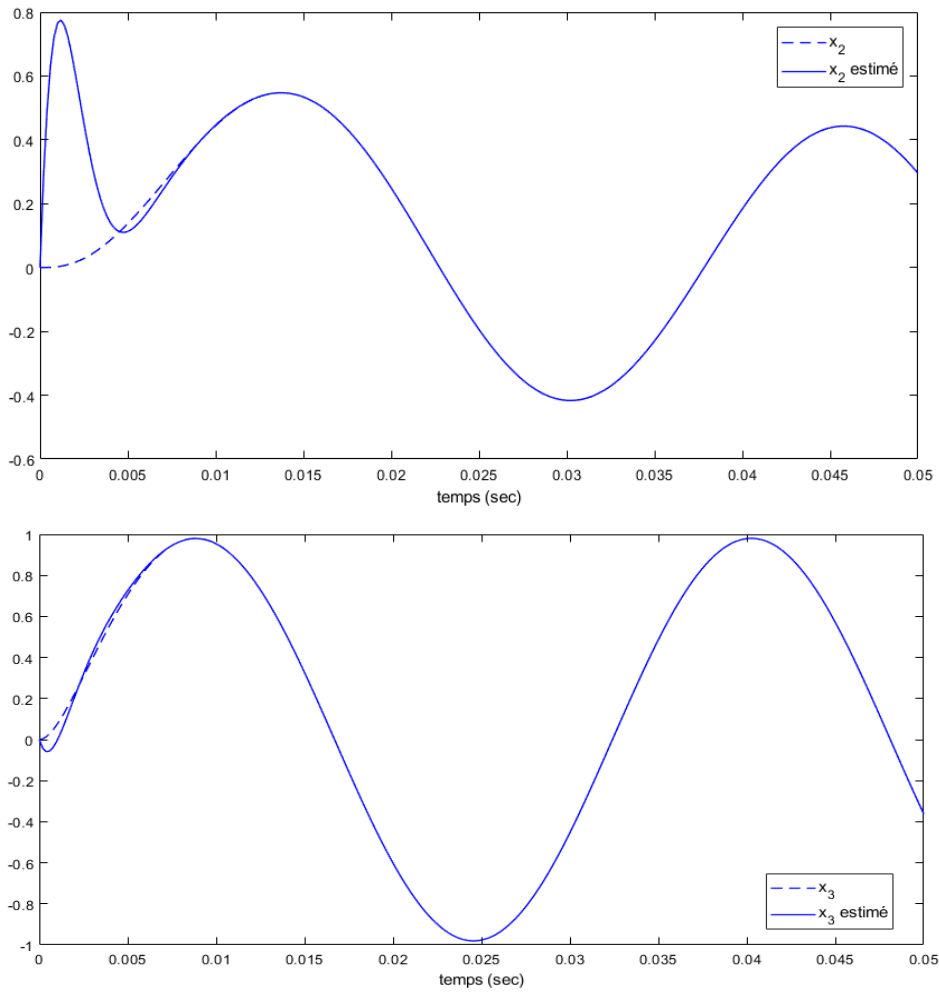


FIGURE 8.1 – Evolution temporelle des états non accessibles à la mesure x_2 et x_3 (en pointillés) et de leurs estimées $\hat{x}_2$ et $\hat{x}_3$ (en trait plein).

4. La variable d'état x_1 étant accessible à la mesure, il n'est pas nécessaire d'utiliser son estimée, à moins que la mesure soit de trop mauvaise qualité.

8.2 Commande par retour d'état estimé

La réalisation d'une commande par retour d'état, que nous avons abordée en Section 7.4, exige que tout l'état du système à commander soit accessible à la mesure. Or bien souvent il n'est pas directement mesuré, ou seulement de manière partielle. Dans ces conditions, la commande comprend deux éléments : une reconstruction de l'état à l'aide d'un observateur à partir des mesures disponibles, et un retour sur l'état estimé. Dans la loi de commande effective, on remplace donc l'état réel par son estimation. Le problème est alors de savoir si cette approximation affecte les performances de la boucle fermée.

8.2.1 Principe de séparation

Là encore, nous présentons les développements dans le cadre des systèmes à temps continu, mais la méthodologie s'adapte directement aux systèmes à temps discret. Considérons donc un système continu d'ordre n , totalement commandable et observable, caractérisé par sa représentation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.24)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (8.25)$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^l$ est la sortie mesurée. Une loi de commande de ce système par retour d'état estimé s'exprime sous la forme (voir Section 7.4) :

$$u(t) = -L\hat{x}(t) + k_c e(t), \quad (8.26)$$

où $\hat{x}(t)$ représente l'état estimé par l'observateur développé dans la section précédente :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)). \quad (8.27)$$

Les gains matriciels $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ du retour d'état et $K \in \mathbb{R}^{n \times l}$ de l'observateur sont supposés tels que $A - BL$ et $A - KC$ n'aient que des valeurs propres à parties réelles strictement négatives. Comme dans le cas du retour d'état, la nouvelle entrée e est un signal annexe destiné à permettre soit un suivi de consigne, soit un rejet de perturbation.

Les quatre équations précédentes traduisent le comportement dynamique du processus pour les deux premières, et celui de son correcteur pour les deux dernières. La représentation d'état du système en boucle fermée s'en déduit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BL \\ KC & A - BL - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_c \\ Bk_c \end{bmatrix} e(t) \quad (8.28)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Soit $\tilde{x} = \hat{x} - x$ l'erreur d'estimation et considérons le changement de variable suivant :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{soit :} \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (8.30)$$

Dans cette nouvelle base, la représentation d'état de la boucle fermée s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BL & -BL \\ 0 & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_c \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (8.31)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}. \quad (8.32)$$

L'examen de cette dernière expression appelle plusieurs commentaires :

- La matrice d'état du système global (processus + correcteur) est triangulaire supérieure par blocs, les blocs diagonaux étant par hypothèse des matrices stables. On en déduit que le système en boucle fermée est stable. De surcroît, ses valeurs propres sont connues : ce sont celles qui auraient résulté d'un retour d'état standard (état directement mesuré et non estimé), à savoir les valeurs propres de $A - BL$, complétées par celles de l'observateur, à savoir les valeurs propres de $A - KC$.
- L'état du système global apparaît directement décomposé suivant la commandabilité, révélant que l'erreur d'estimation $\tilde{x}$ n'est pas commandable par e alors même que l'état x du processus l'est. De fait, l'erreur d'observation $\tilde{x}$ évolue suivant une dynamique autonome. En particulier, si $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{x}(t)$ reste nulle à tout instant, et le système évolue suivant l'équation $\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Bk_ce(t)$ **qui est exactement celle qu'on obtiendrait avec une commande par retour d'état**.
- Dans le cas monovariable ($m = l = 1$), en posant $A_c = A - BL$ et $A_o = A - KC$, la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit (voir Section 7.1.4) :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI - A_c & BL \\ 0 & pI - A_o \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Bk_c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.33)$$

En exploitant sa structure triangulaire par blocs, on peut remarquer que

$$\begin{bmatrix} pI - A_c & BL \\ 0 & pI - A_o \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (pI - A_c)^{-1} & * \\ 0 & (pI - A_o)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (8.34)$$

où $*$ indique un terme qu'il n'est pas ici nécessaire de calculer. On obtient ainsi :

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = C(pI - (A - BL))^{-1} Bk_c. \quad (8.35)$$

Cette fonction de transfert est exactement celle correspondant à un retour d'état standard (sans reconstruction préalable) : voir Section 7.4. En d'autres termes, **la relation entrée-sortie d'un système commandé par retour d'état estimé est la même que celle du système commandé par un retour d'état** (qui

supposerait, lui, que tout l'état soit disponible à la mesure).⁵

En pratique, la dynamique pourra toutefois être affectée par la reconstruction de l'état par l'observateur puisque, sans mesure de tout l'état, il est généralement impossible d'initialiser l'état de l'observateur $\hat{x}(0)$ à la valeur réelle de l'état $x(0)$; cette différence de conditions initiales ($\tilde{x}(0) \neq 0$) conduira à un comportement transitoire différent de celui obtenu par une commande par retour d'état.

De façon similaire, l'apparition d'une perturbation (non mesurée) provoquera inévitablement une erreur de reconstruction puisqu'alors l'évolution de $x(t)$ et celle de $\hat{x}(t)$ deviennent différentes. C'est pour cette raison qu'il est important que l'observateur ait une dynamique suffisamment rapide, pour limiter l'effet de cette perturbation et ramener rapidement à 0 l'erreur de reconstruction quand elle disparaît.

On appelle classiquement principe (ou encore théorème) de séparation l'énoncé des propriétés du retour d'état estimé ainsi mises en évidence. Il peut se formuler comme suit :

Principe de séparation : Une commande par retour d'état estimé (8.26)-(8.27) engendre une boucle fermée dont les valeurs propres sont celles de la boucle fermée sans reconstruction, complétées par les valeurs propres de l'observateur, lesquelles sont non-commandables par l'entrée e . La fonction de transfert entre l'entrée et la sortie de la boucle fermée est strictement la même avec et sans reconstruction.

8.2.2 Correcteur équivalent

L'ensemble constitué de l'observateur et du retour d'état obtenu à partir de l'état estimé équivaut à un correcteur global de type retour dynamique à partir de la sortie du processus. Ce correcteur a pour entrée la sortie mesurée y et la consigne e , et délivre comme sortie le signal de commande u . En reportant (8.26) dans (8.27), la représentation d'état de ce correcteur équivalent peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC - BL)\hat{x}(t) + \begin{pmatrix} Bk_c & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

$$u(t) = -L\hat{x}(t) + k_c e(t). \quad (8.37)$$

La structure de commande générée par un retour d'état estimé peut ainsi être représentée par le schéma fonctionnel de la Figure 8.2.

5. Cette propriété est évidemment cohérente avec celle mise en évidence dans le précédent item, où nous avons souligné que l'erreur de reconstruction $\tilde{x}$ est non commandable par l'entrée.

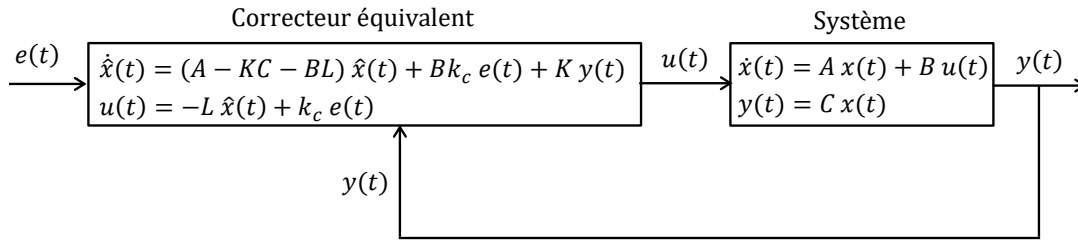


FIGURE 8.2 – Schéma d'une commande par retour d'état estimé.

En appliquant la transformée de Laplace aux équations (8.24) et (8.25) du système d'une part, (8.36) et (8.37) du correcteur d'autre part, on obtient respectivement :

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1} B U(p) = G(p) U(p) \quad (8.38)$$

et

$$U(p) = -L(pI - A + KC + BL)^{-1} K Y(p) \quad (8.39)$$

$$+ (k_c - L(pI - A + KC + BL)^{-1} B k_c) E(p) \quad (8.40)$$

$$= -K_1(p) Y(p) + K_2(p) E(p), \quad (8.41)$$

relations qui permettent de redessiner la Figure 8.2 sous la forme de la Figure 8.3 ; on en déduit que l'association du retour d'état et de l'observateur crée une boucle de contre-réaction dont la fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit ⁶ :

$$H(p) = K_1(p) G(p). \quad (8.42)$$

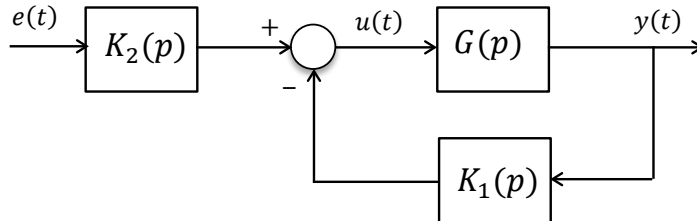


FIGURE 8.3 – Mise en évidence de la fonction de transfert en boucle ouverte d'une commande par retour d'état estimé.

La mise en évidence de cette fonction de transfert permet notamment, en traçant son diagramme de Bode, de déterminer les marges de gain et de phase de la boucle. On veillera, notamment lors du choix des valeurs propres de l'observateur, à assurer des marges de stabilité suffisantes (typiquement au moins 10 dB et 30° à 40°), tout en notant que dans ce type de commande, il n'y a pas de corrélation entre la marge de phase et le dépassement de la réponse indicielle.

6. La fonction de transfert $K_2(p)$ est en dehors de la boucle, donc n'intervient pas dans l'expression du transfert en boucle ouverte.

8.2.3 Exemples

Exemple 8.2 (Suite de l'Exemple 7.14) Reprenons une nouvelle fois le système étudié dans l'Exemple 7.14 :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & -100 & 100 \\ 0 & 0 & -1000 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{pmatrix} u(t) \quad (8.43)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t). \quad (8.44)$$

Nous avons vu que ce système est à la fois totalement observable et totalement commandable. Nous avons calculé, dans l'Exemple 7.14, une commande par retour d'état

$$u(t) = -Lx(t) + k_c e(t), \quad \text{avec } L = (45,6 \quad 12,19 \quad 2,37), \quad k_c = 45,6 \quad (8.45)$$

qui permet de garantir les performances suivantes, en réponse à un échelon de consigne :

- dépassement inférieur à 10%
- temps du premier maximum de 10 ms (correspondant à la constante de temps lente du système)
- erreur permanente nulle.

Nous avons également vu, dans l'Exemple 8.1, qu'un observateur de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t) \quad (8.46)$$

permet d'estimer l'état entier, à partir de la seule connaissance de la sortie $y(t)$ et de la commande appliquée $u(t)$. La matrice K a été calculée en choisissant pour l'observateur une dynamique 2,5 fois plus rapide que celle choisie pour calculer le retour d'état :

$$K = \begin{pmatrix} 1,240.10^3 \\ 8,175.10^3 \\ -1,464.10^3 \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

Il s'agit ici de combiner ces deux approches afin de mettre en œuvre une commande par retour d'état estimé.

Avec les gains donnés dans (8.45) et (8.47), la commande par retour d'état estimé équivaut au correcteur équivalent suivant (voir équations (8.36)-(8.37)) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - KC - BL)\hat{x}(t) + \begin{pmatrix} Bk_c & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (8.48)$$

$$u(t) = -L\hat{x}(t) + k_c e(t). \quad (8.49)$$

Le diagramme de Bode du transfert en boucle ouverte $K_1(p)G(p)$ (cf (8.42)) est donné sur la Figure 8.4.

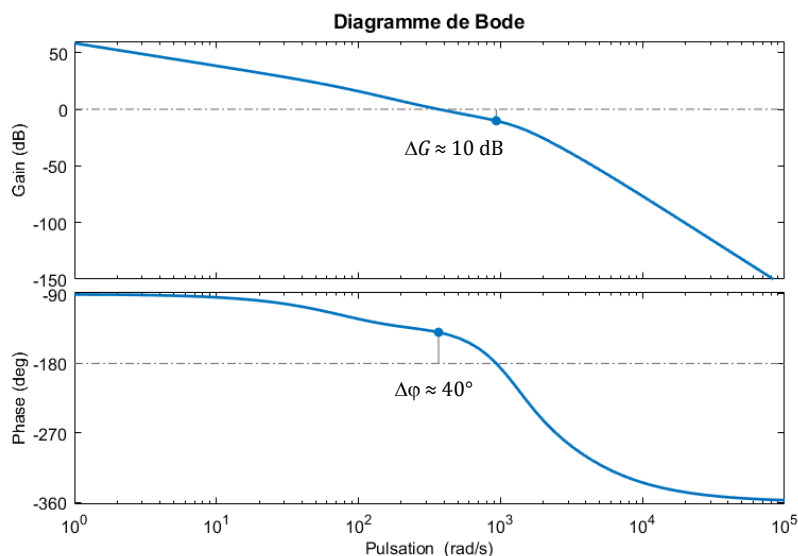


FIGURE 8.4 – Diagramme de Bode du transfert en boucle ouverte.

On constate des marges de stabilité de l'ordre de 10 dB et 40° : ces valeurs valident le choix effectué pour la dynamique de l'observateur, par rapport à celle choisie lors du calcul du retour d'état.

La réponse indicielle du système ainsi corrigé est confrontée à celle obtenue en commande par retour d'état sur la Figure 8.5 : pour faire cet essai, nous avons supposé que l'état initial du système est $x(0) = (0 \ 0 \ 0)^T$ et celui de l'observateur $\hat{x}(0) = (0 \ 1 \ 0)^T$.

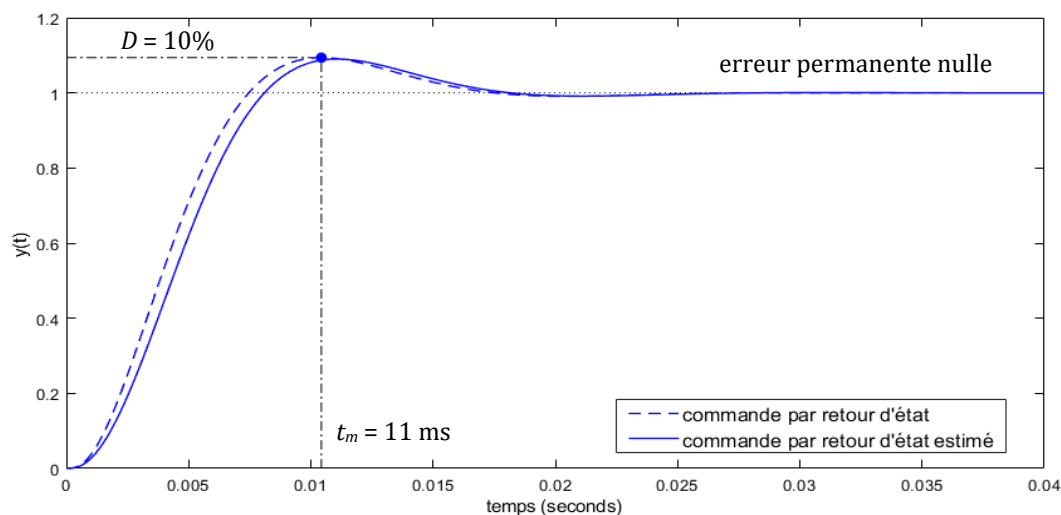


FIGURE 8.5 – Réponse indicielle avec commande par retour d'état estimé.

On constate que, si les performances globales sont préservées, se dispenser de la mesure

des variables d'état x_2 et x_3 se fait ici au prix d'une réponse légèrement moins rapide. Rappelons que dans le cas où l'état initial du système et celui de l'observateur sont égaux, les réponses obtenues sont identiques.

Exemple 8.3 (Suite de l'Exemple 7.15) Considérons à nouveau le système étudié dans l'Exemple 7.15. Nous avons vu que le modèle linéarisé autour du point d'équilibre correspondant à $u^* = 3$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1,5 & -2 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}(t), \quad (8.50)$$

pour lequel nous avons calculé une commande par retour d'état :

$$\tilde{u}(t) = -L \tilde{x}(t) + k_c e(t), \quad \text{avec } L = \begin{pmatrix} -1,825 & -1,224 & 0,326 \end{pmatrix}, \quad k_c = 0,501. \quad (8.51)$$

Nous allons supposer ici que seule la quantité de poisson $y = x_3$ est mesurable. L'équation de sortie du linéarisé tangent s'écrit donc :

$$\tilde{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}(t). \quad (8.52)$$

On vérifie tout d'abord que ce système est totalement observable, en effet la matrice :

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1,5 & -2 \\ 1,5 & 3 & 2,5 \end{pmatrix} \quad (8.53)$$

est de rang 3. L'observateur permettant de reconstituer les variables d'état du modèle linéarisé s'écrit :

$$\dot{\hat{\tilde{x}}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1,5 & -2 \end{pmatrix} \hat{\tilde{x}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{u}(t) + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} (y(t) - \hat{\tilde{x}}_3(t)). \quad (8.54)$$

Nous choisissons pour l'observateur deux valeurs propres complexes conjuguées d'amortissement $\xi = 0,7$ et de pulsation propre égale à 2,5 fois celle choisie lors du calcul du retour d'état, soit $\omega_1 = 0,885$, complétée par une troisième en -2 . On calcule alors :

$$\det(pI - (A - KC)) = \begin{vmatrix} p & -0,5 & k_1 \\ 1 & p & -1 + k_2 \\ 0 & 1,5 & p + 2 + k_3 \end{vmatrix} \quad (8.55)$$

$$= p^3 + (2 + k_3)p^2 + (2 - 1,5k_2)p + (1 + 1,5k_1 + 0,5k_3) \quad (8.56)$$

$$= (p^2 + 2\xi\omega_1 p + \omega_1^2)(p + 2) \quad (8.57)$$

d'où on déduit

$$\begin{cases} k_1 = \frac{2\omega_1^2 - \xi\omega_1 - 1}{1,5} \simeq -0,0362 \\ k_2 = \frac{-\omega_1^2 - 4\xi\omega_1 + 2}{1,5} \simeq -0,8394 \\ k_3 = 2\xi\omega_1 \simeq 1,2384. \end{cases} \quad (8.58)$$

La commande appliquée est donc :

$$\tilde{u}(t) = - \begin{pmatrix} -1,825 & -1,224 & 0,326 \end{pmatrix} \hat{x}(t) + 0,501 e(t). \quad (8.59)$$

La Figure 8.6 montre le diagramme de Bode de la boucle ouverte, calculée dans les mêmes conditions que dans l'exemple précédent : on mesure des marges de gain et de phase satisfaisantes, qui valident les choix effectués pour l'observateur.

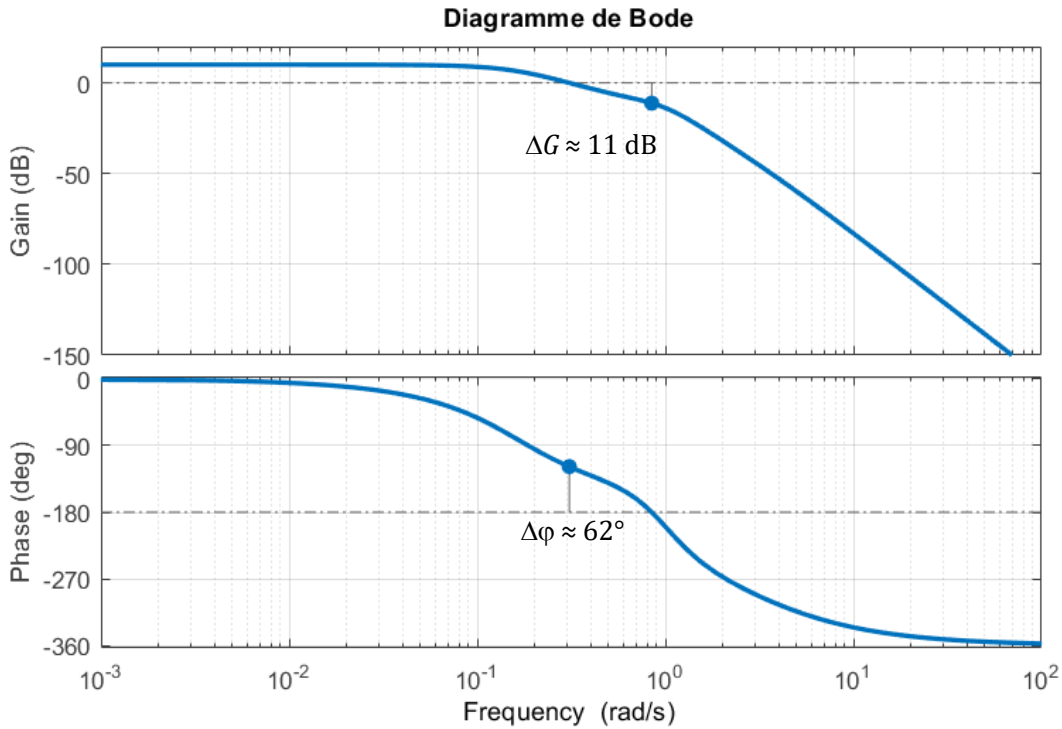


FIGURE 8.6 – Diagramme de Bode du transfert en boucle ouverte.

Afin de tester cette commande, nous supposons que la mesure de la quantité de poisson n'est effectuée qu'à chaque instant multiple d'une période d'échantillonnage $T_e = 0,5$ unité de temps (soit un vingtième du temps du premier maximum), et que la commande $u(t)$ appliquée est constante entre deux instants d'échantillonnage. On doit donc utiliser un correcteur en temps discret, qui peut s'obtenir en discrétisant les équations de l'observateur

par la transformée d'Euler, ce qui conduit à :

$$\hat{\hat{x}}[k+1] = (I + T_e (A - KC)) \hat{\hat{x}}[k] + BT_e \tilde{u}[k] + KT_e (\tilde{y}[k] - C \hat{\hat{x}}[k]) \quad (8.60)$$

$$\tilde{u}[k] = -L \hat{\hat{x}}[k] + k_c e[k]. \quad (8.61)$$

Le schéma du système non linéaire en boucle fermée correspondant est donné sur la figure 8.7 : on notera en particulier que l'observateur et la commande travaillent sur les variables d'écart par rapport aux valeurs à l'équilibre.

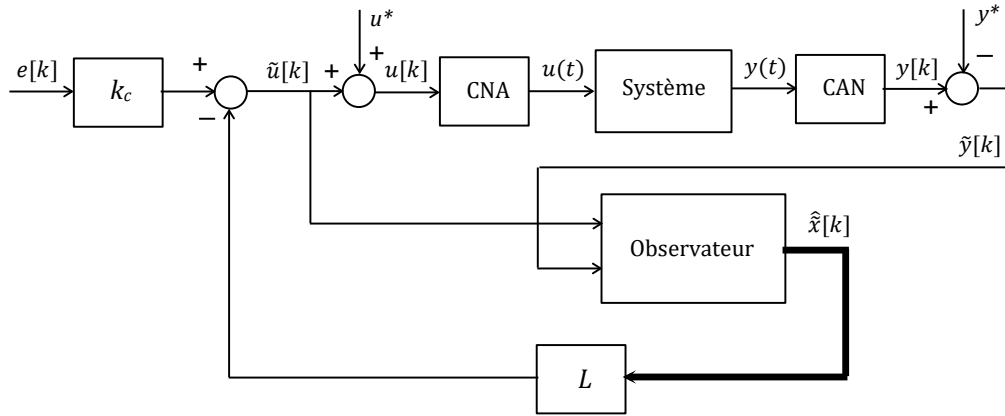


FIGURE 8.7 – Schéma-bloc du système non linéaire.

Enfin la réponse à un échelon de consigne unité de la quantité d'orques et de son estimée apparaît sur la Figure 8.8 (en supposant qu'à l'instant initial, les variables d'état du système et de l'observateur sont égales à leurs valeurs à l'équilibre). On retrouve en effet l'absence d'erreur en régime permanent, un dépassement de l'ordre de 20% et un temps du premier maximum de l'ordre de 10 unités de temps. La différence entre la quantité réelle et son estimée provient d'une part de l'échantillonnage, d'autre part que la commande est appliquée sur le système non linéaire et non sur le linéarisé. Néanmoins les réponses obtenues sont très proches, et également très voisines de celle obtenue au Chapitre 7 avec la commande par retour d'état.

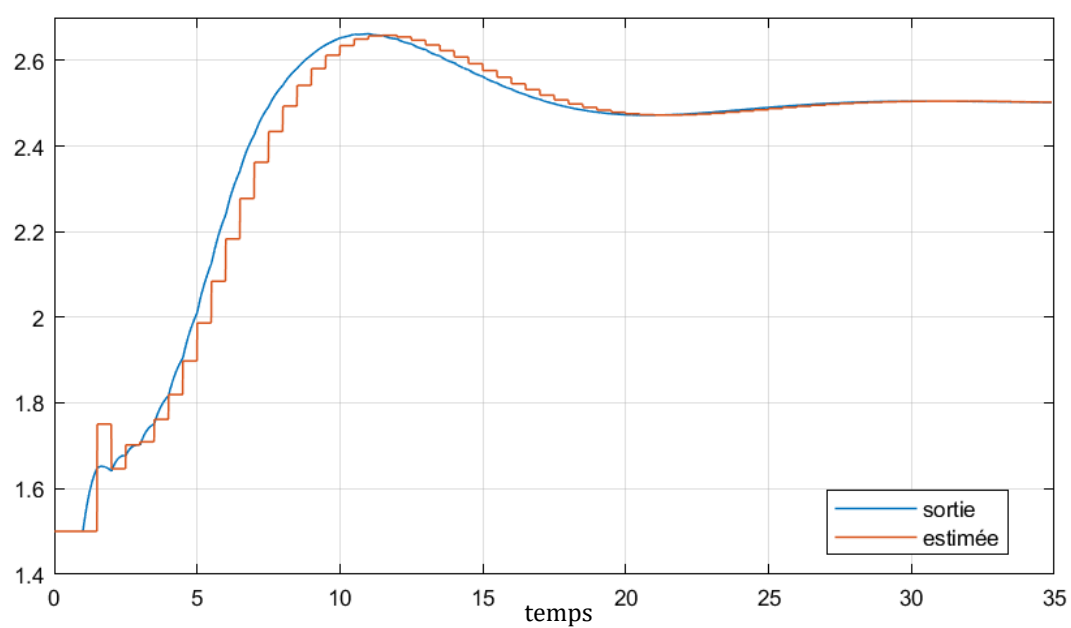


FIGURE 8.8 – Réponse indicielle de la sortie du système non linéaire et de son estimée.

Bibliographie

Les ouvrages suivants sont suggérés pour approfondir les concepts abordés dans ce polycopié :

1. J.J. D'Azzo & C.H. Houpis. *Linear Control System. Analysis and Design*, 3ème éd., Mc Graw-Hill, 1988.
 2. P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard, F. Rotella et I. Zambettakis. *Analyse et régulation des processus industriels. Tome 1. Régulation continue, Tome 2. Régulation numérique*, Éditions Technip, 1993.
 3. J.B. Deluche. *Automatique. De la théorie aux applications industrielles. Tome 2 : Systèmes continus*, Edipol, 2000.
 4. J.M. Flaus. *La régulation industrielle*. Hermès, 1994.
 5. G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7ème éd., Ed. Pearson Publishing Company, 2014.
 6. B. Friedland. *Control system design*, Mc Graw-Hill, 1986.
 7. P. de Larminat. *Automatique. Commande des systèmes linéaires*, Hermès, 1996.
 8. L. Maret. *Régulation automatique*, Presses Polytechniques Romandes, 1987.
 9. K. Ogata. *Modern Control Engineering*, 5ème éd., Ed. Pearson Education International, 2009.
 10. A. Rachid. *Systèmes de régulation*, Masson, 1996.
 11. M. Zelazny, F. Giri et T. Bennani. *Systèmes asservis : commande et régulation*, Eyrolles, 1993.
-

Annexe A

Réponses transitoires et harmoniques de systèmes types continus

A.1 Influence des pôles sur le régime transitoire

L'objectif de ce paragraphe est l'analyse qualitative de l'influence de l'emplacement des pôles du système bouclé sur son comportement temporel. Seul le cas particulier de l'analyse de la réponse temporelle d'un système ne possédant que des pôles simples, réels ou complexes conjugués, est évoqué ci-dessous. On s'intéresse de plus à la réponse libre du système : l'entrée est nulle et la réponse temporelle ne fait intervenir que les termes liés aux pôles de la fonction de transfert en boucle fermée.

A.1.1 En temps continu

Soit un système à temps continu représenté par sa fonction de transfert en boucle fermée $F(p) = Y(p)/E(p)$ et dont la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$F(p) = \sum_i \frac{a_i}{1 - \frac{p}{p_i}} + \sum_i \frac{b_i}{1 + \frac{2\xi_i}{\omega_i} p + \frac{p^2}{\omega_i^2}}. \quad (\text{A.1})$$

Chaque terme élémentaire fournira alors une contribution dans la réponse temporelle de la manière suivante :

- **Contribution des pôles réels :** La contribution due à un pôle réel simple p_i est une réponse exponentielle, à croissance ou décroissance plus ou moins rapide selon la valeur de p_i :

$$\begin{aligned} e^{p_i t} &\rightarrow 0 & \text{si } p_i < 0 \\ e^{p_i t} &= 1 & \text{si } p_i = 0 \\ e^{p_i t} &\rightarrow \infty & \text{si } p_i > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

- **Contribution des pôles complexes conjugués :**

Les pôles complexes $p_i = -\omega_i(\xi_i - j\sqrt{1-\xi_i^2})$ et $\bar{p}_i = -\omega_i(\xi_i + j\sqrt{1-\xi_i^2})$ vont toujours par paire (Figure A.1). On notera les relations suivantes :

$$\omega_i = |p_i| \quad (\text{A.3})$$

$$\xi_i = \sin(\varphi_i). \quad (\text{A.4})$$

Le lieu des pôles à amortissement constant se caractérise donc par un angle φ_i constant, et se traduit par une demi-droite dans le plan complexe (Figure A.1).

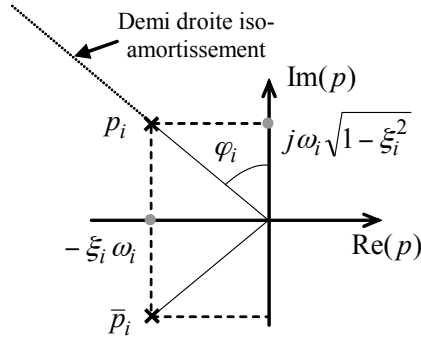


FIGURE A.1 – Pôles complexes conjugués.

Ces pôles fournissent une contribution dans la réponse temporelle se traduisant par des oscillations de pulsation ω_i à l'intérieur d'une enveloppe $\pm e^{-\omega_i \xi_i t}$, de la forme $e^{-\omega_i \xi_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$. On retrouve donc bien une enveloppe convergente si les pôles sont à partie réelle strictement négative, constante si les pôles sont à partie réelle nulle, et divergente si les pôles sont à partie réelle positive.

L'ensemble de ces contributions se traduit graphiquement par la Figure A.2 représentant le plan complexe et les différents emplacements polaires.

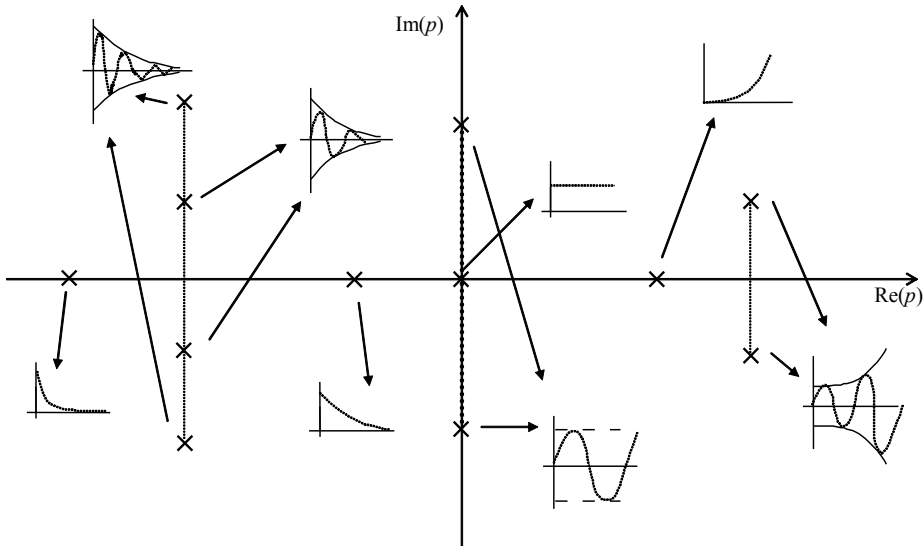


FIGURE A.2 – Comportement transitoire en fonction de l'implantation des pôles de la boucle fermée.

A.1.2 En temps discret

Soit un système discret représenté par sa fonction de transfert en z :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}. \quad (\text{A.5})$$

Appliquons-lui un échelon unité $u[k] = \gamma[k]$, soit $U(z) = z/(z-1)$. On obtient la sortie

$$Y(z) = \frac{zN(z)}{(z-1)D(z)}. \quad (\text{A.6})$$

En supposant que la fonction de transfert $G(z)$ possède un nombre n de pôles réels simples p_r et un nombre m de paires de pôles complexes conjugués $p_i, \bar{p}_i = \alpha_i \pm j\beta_i$, le calcul de la réponse de ce système aux instants d'échantillonnage conduit au résultat suivant :

$$y[k] = \frac{N(1)}{D(1)} + \sum_{r=1}^n \frac{N(p_r)}{(p_r-1)D'(p_r)} p_r^k + 2 \sum_{i=1}^m \left| \frac{N(p_i)}{(p_i-1)D'(p_i)} \right| |p_i|^k \cos(k\theta_i + \varphi_i), \quad (\text{A.7})$$

où l'on a posé :

$$\theta_i = \arg(p_i) = \arctan(\beta_i/\alpha_i) \quad (\text{A.8})$$

$$\varphi_i = \arg(N(p_i)) - \arg(N(p_i-1)) - \arg(D'(p_i)). \quad (\text{A.9})$$

Cette expression se décompose en trois termes :

— **Régime permanent** : $N(1)/D(1)$.

On le retrouve facilement en appliquant le théorème de la valeur finale (rappelé en Théorème 4.3) :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(k) = \lim_{|z| \rightarrow 1} (z-1)Y(z) = \lim_{|z| \rightarrow 1} \frac{zN(z)}{D(z)} = \frac{N(1)}{D(1)}. \quad (\text{A.10})$$

- **Contribution des pôles réels** : La contribution due à un pôle réel simple p_r est une suite de termes exponentiels $c_r p_r^k$, qui tend vers zéro si $|p_r| < 1$ et tend vers l'infini si $|p_r| > 1$.
- **Contribution des pôles complexes conjugués** : Ces termes donnent naissance à un régime oscillant qui converge vers zéro si $|p_i| < 1$ (oscillations amorties) et diverge si $|p_i| > 1$ (oscillations non-amorties).

Ces contributions sont traduites graphiquement par la Figure A.3 représentant le plan complexe et les différents emplacements polaires.

La relation (A.7) montre, entre autres choses, que le régime transitoire, pondéré par p_r^k (respectivement $|p_i|^k$), sera d'autant plus rapide que les pôles seront plus proches de l'origine.

Cette relation montre également que la réponse indicielle provoquée par un pôle réel négatif ($p_r < 0$) est alternée, positive à l'échantillon k si k est pair et négative pour k impair, comme illustré sur la Figure A.3. Ce comportement peut être néfaste pour un système physique, par exemple dans le cas des systèmes mécaniques, en raison de l'oscillation au pas de commande. On montre par ailleurs qu'un système physique échantillonné à pas constant ne peut conduire à ce comportement. L'existence de pôles réels négatifs ne peut provenir que d'une commande numérique.

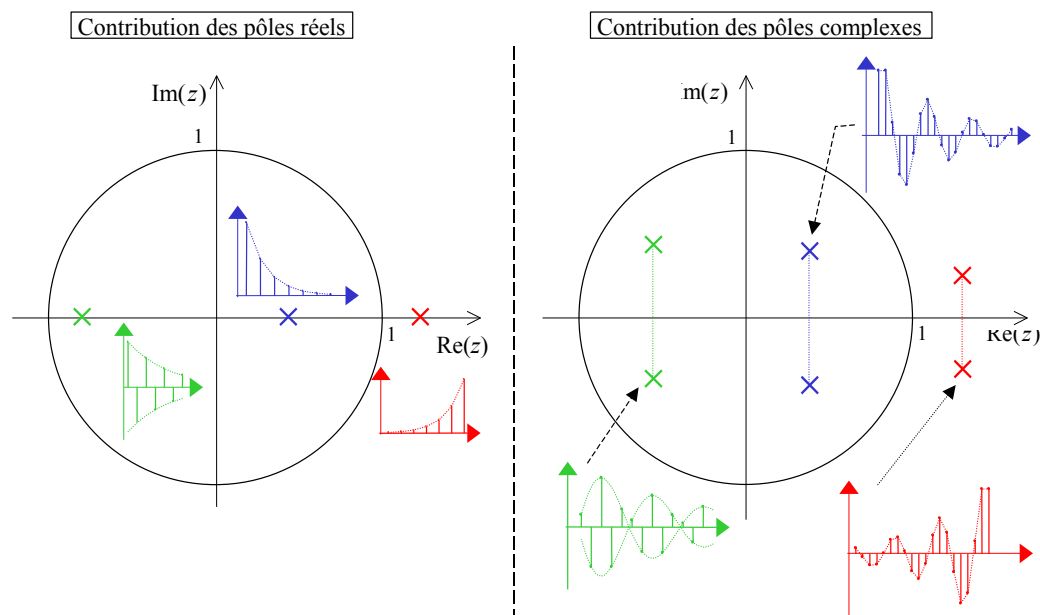


FIGURE A.3 – Contribution des pôles en fonction de leur emplacement.

Des pôles complexes à partie réelle négative combinent le comportement précédent et un régime sinusoïdal dû à la nature complexe du pôle.

Toutefois, contrairement aux pôles réels, les pôles complexes à partie réelle négative peuvent trouver leur origine dans l'échantillonnage d'un système à temps continu ayant des pôles complexes.

Identifier un système physique stable, c'est déterminer sa représentation, par exemple sous forme de fonction de transfert. On procède en général en deux étapes :

- écriture des lois physiques régissant l'évolution du système afin de définir une structure,
- détermination expérimentale des paramètres intervenant dans la structure précédente, à partir de réponses transitoires et harmoniques.

Il est donc nécessaire de connaître *a priori* les réponses transitoires et harmoniques de quelques fonctions de transfert typiques. Les paragraphes suivants précisent ces réponses dans le cas de systèmes continus du premier ordre, premier ordre généralisé, deuxième ordre, instables ou à déphasage non minimal, et à retard.

A.2 Rappel de concepts temporels et fréquentiels

A.2.1 Définitions générales relatives à la réponse indicielle

Le signal de sortie en réponse à un échelon d'entrée est appelé réponse indicielle. Suivant sa forme, on définit des paramètres caractéristiques.

A.2.1.1 Temps d'établissement

Si la réponse s à un échelon unité tend vers une valeur finie, on peut noter que cette valeur finale K qualifie le gain statique. Pour qualifier la durée du régime transitoire, on introduit le temps d'établissement à 5% t_e comme le temps à partir duquel :

$$\left| \frac{s(t) - K}{K} \right| \leq 5\%, \quad \forall t \geq t_e. \quad (\text{A.11})$$

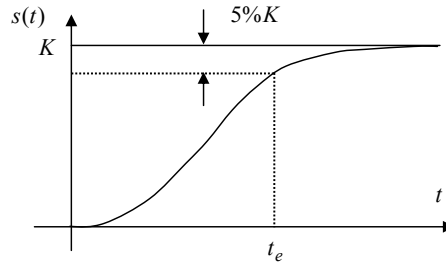


FIGURE A.4 – Réponse indicielle et temps d'établissement.

A.2.1.2 Dépassement

Si la réponse à un échelon unité est telle que temporairement elle dépasse sa valeur finale K , on introduit les valeurs suivantes pour qualifier le régime transitoire, en se référant à la Figure A.5. Le dépassement D est égal au rapport :

$$D = \frac{d}{K} = \frac{s_{\max} - K}{K}. \quad (\text{A.12})$$

On l'exprime en % de K . Une réponse indicielle sans dépassement sera dite apériodique.

t_m est défini comme l'instant du premier maximum, c'est-à-dire $s(t_m) = s_{\max}$.

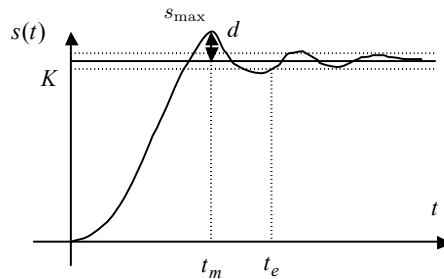


FIGURE A.5 – Réponse indicielle et dépassement.

A.2.2 Réponses harmoniques : les différents diagrammes

On appelle “diagramme” la représentation graphique de la réponse harmonique $H(j\omega)$.

A.2.2.1 Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist structure la réponse harmonique sous la forme $H(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$. Dans le plan complexe, à ω donné, $H(j\omega)$ est représenté par un point. Lorsque ω varie, ce point décrit une courbe que l'on oriente dans le sens des ω croissants. Un exemple d'un tel diagramme est donné en Figure A.6. Notons que ce diagramme se déduit aisément du diagramme de Bode, que nous rappelons ci-après.

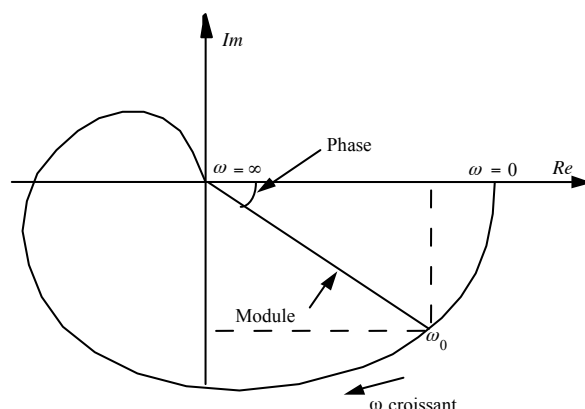


FIGURE A.6 – Exemple de diagramme de Nyquist.

A.2.2.2 Diagramme de Bode

Deux tracés figurent dans ce diagramme : le module (ou gain) $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ et la phase $\arg(H(j\omega))$. Ils sont représentés en échelle “semi-log”, c’est-à-dire en fonction de $\log_{10}(\omega)$. Le gain s’exprime en décibels (dB). La phase est exprimée en degrés ou en radians. Un tel diagramme est représenté sur la Figure A.7.

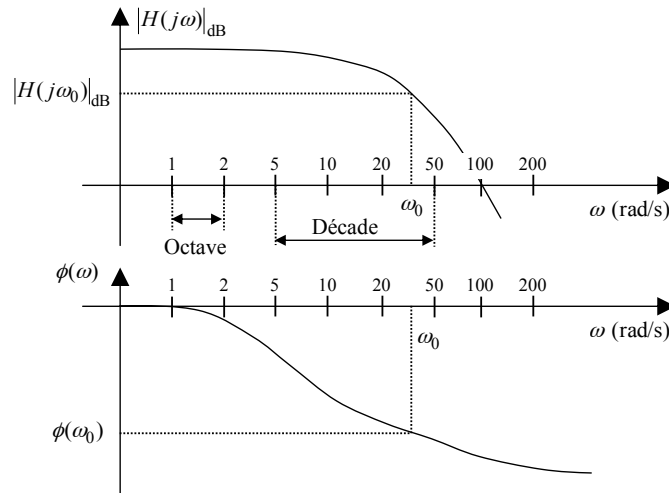


FIGURE A.7 – Exemple de diagramme de Bode.

Une octave correspond à un doublement de la pulsation ω , tandis qu'une décade correspond à un facteur 10.

A.2.2.3 Diagramme de Black-Nichols

Cette courbe représente le module de $H(j\omega)$, exprimé en dB , en fonction de la phase $\arg(H(j\omega))$, comme représenté sur la Figure A.8.

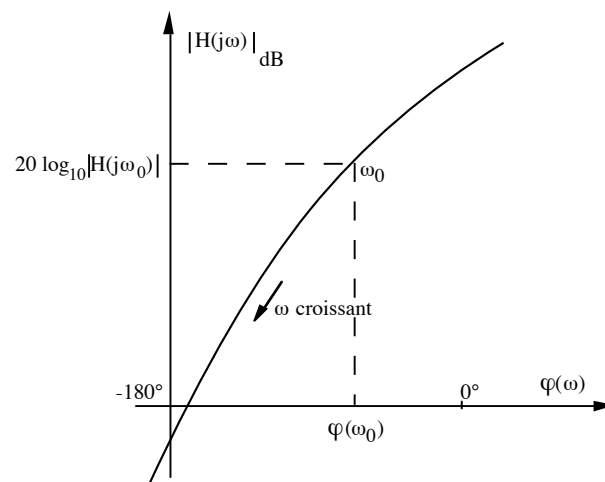
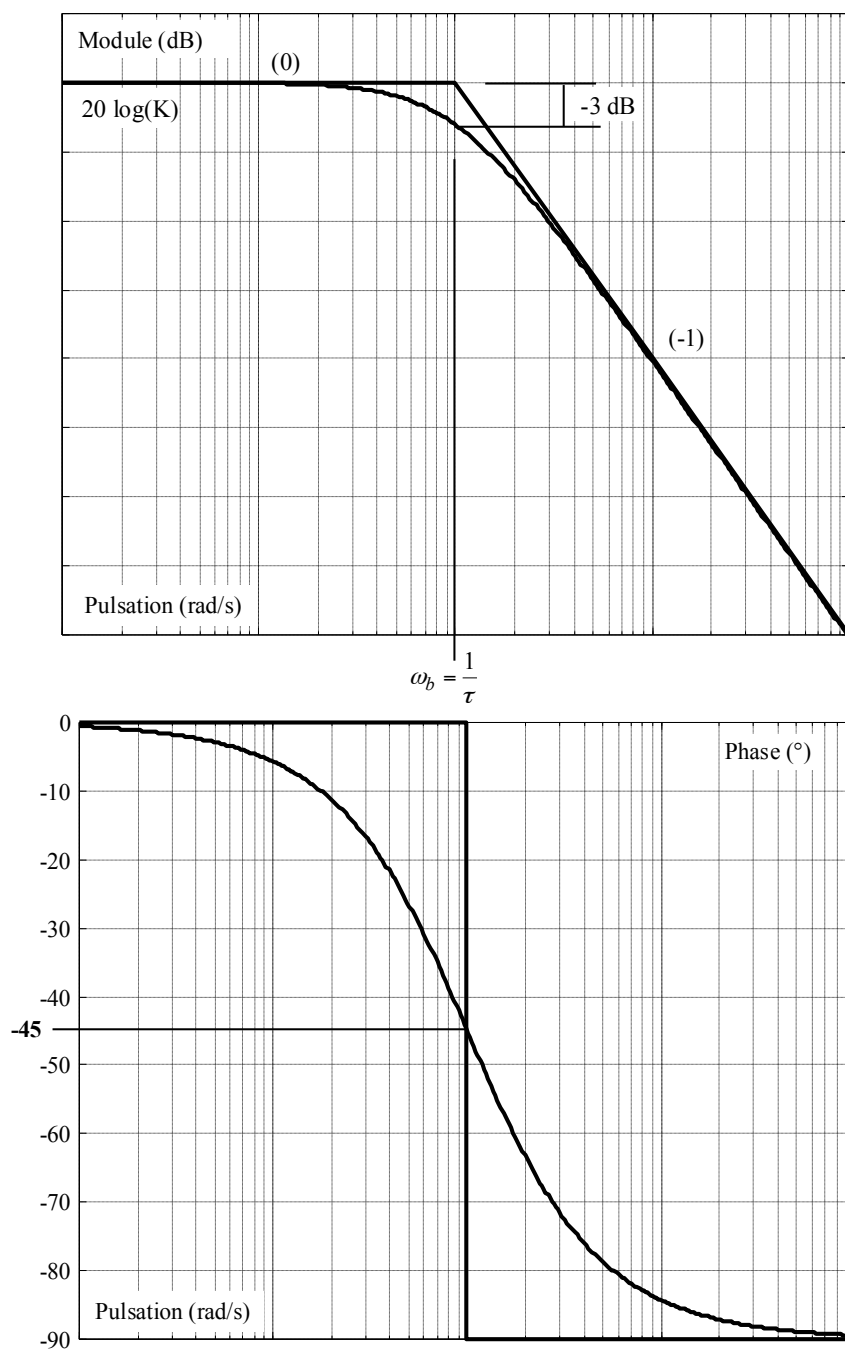


FIGURE A.8 – Exemple de diagramme de Black-Nichols.

A.3 Systèmes du premier ordre

- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, avec $K, \tau > 0$
- Caractéristiques fréquentielles :
 - Gain statique : $\lim_{p \rightarrow 0} H(p) = K$
 - Constante de temps : τ (en secondes)
 - Pulsation de brisure : $\omega_b = 1/\tau$ (en rad.s^{-1})
- Diagramme de Bode :



— Calcul de la phase : $\arg(H(j\omega)) = -\arctan(\omega\tau)$

Pulsation	$\omega_b/4$	$\omega_b/2$	ω_b	$2\omega_b$	$4\omega_b$
Phase	-14°	$-26,5^\circ$	-45°	$-63,5^\circ$	-76°

— Diagrammes de Nyquist et de Black-Nichols :

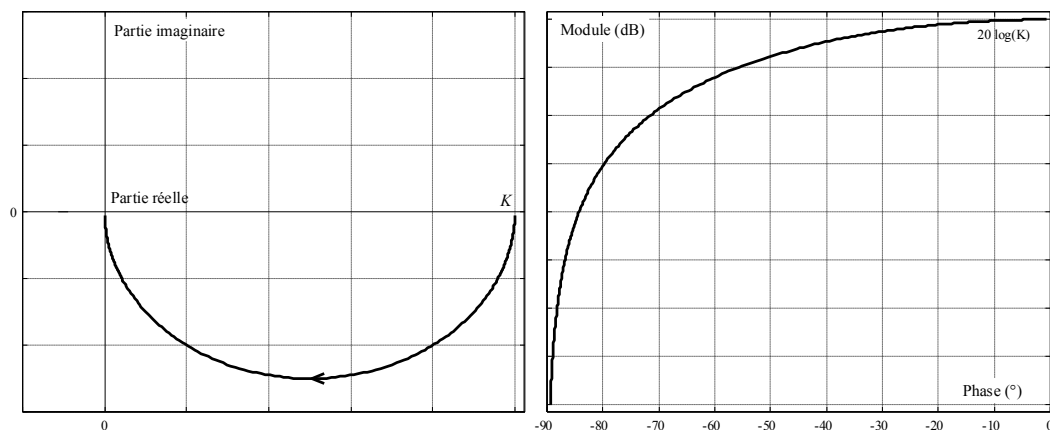


FIGURE A.9 – Diagrammes de Nyquist et de Black-Nichols d'un système du 1^{er} ordre.

— Réponse indicielle : $s(t) = KE(1 - e^{-t/\tau})$; pas de dépassement, temps d'établissement $t_e = 3\tau$, pente non-nulle à $t = 0^+$.

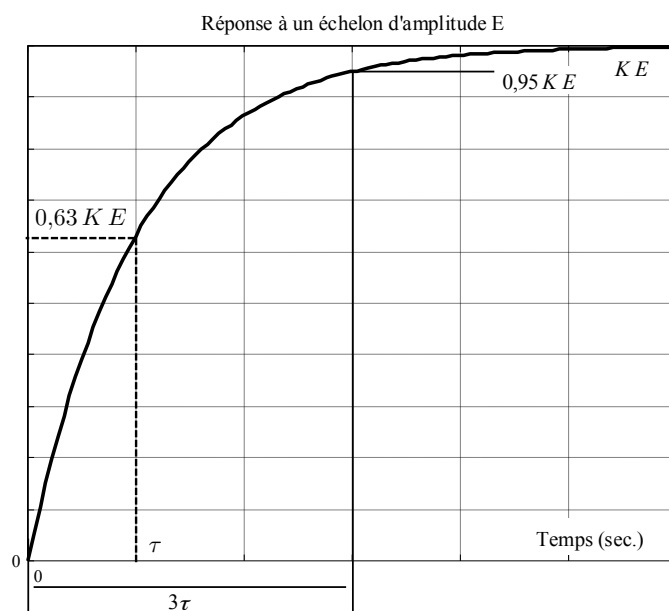
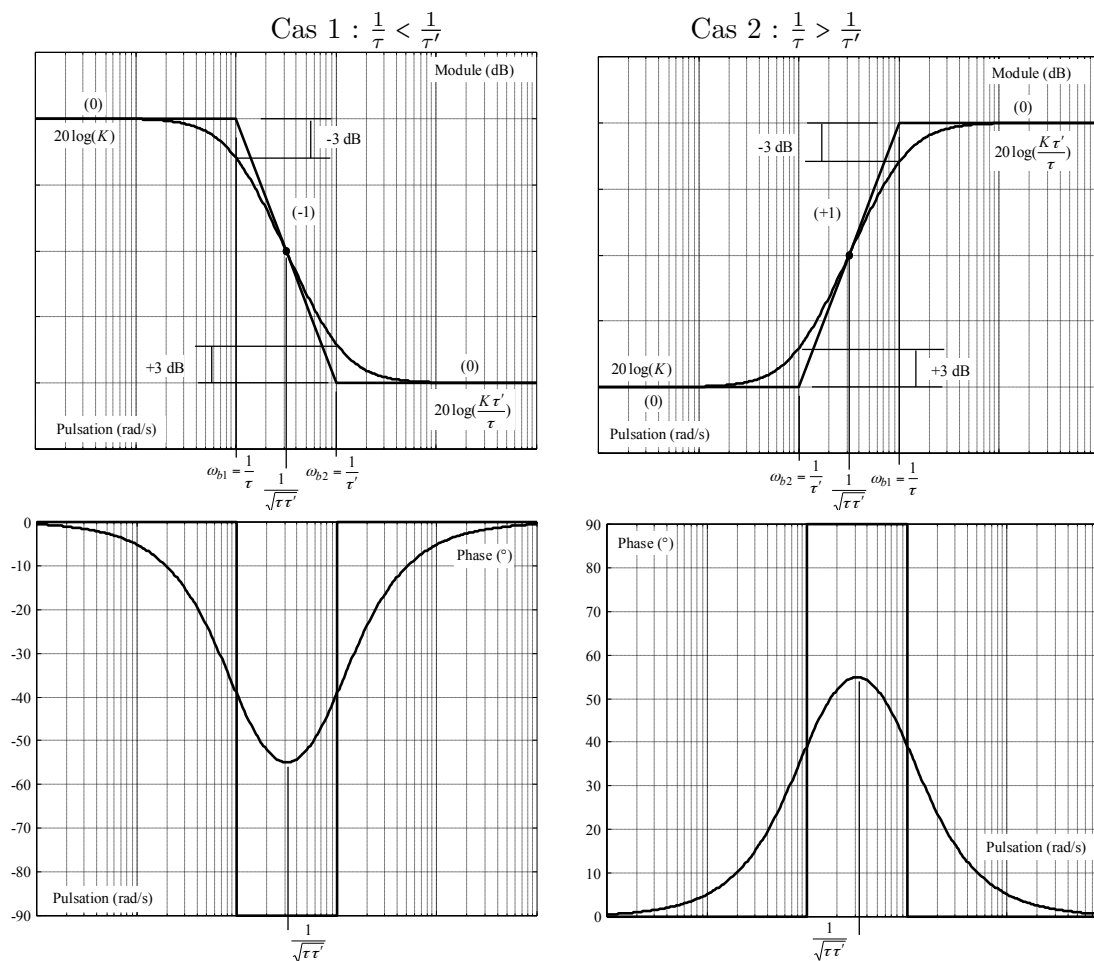


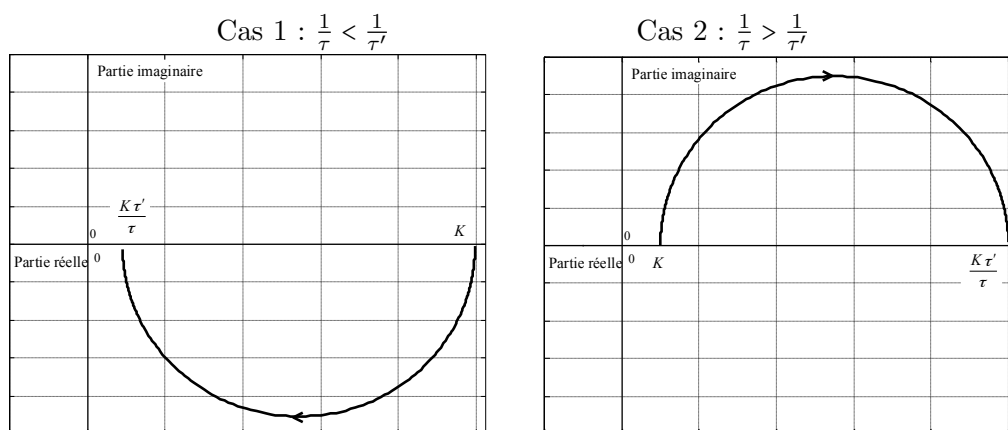
FIGURE A.10 – Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre.

A.4 Systèmes du premier ordre généralisé

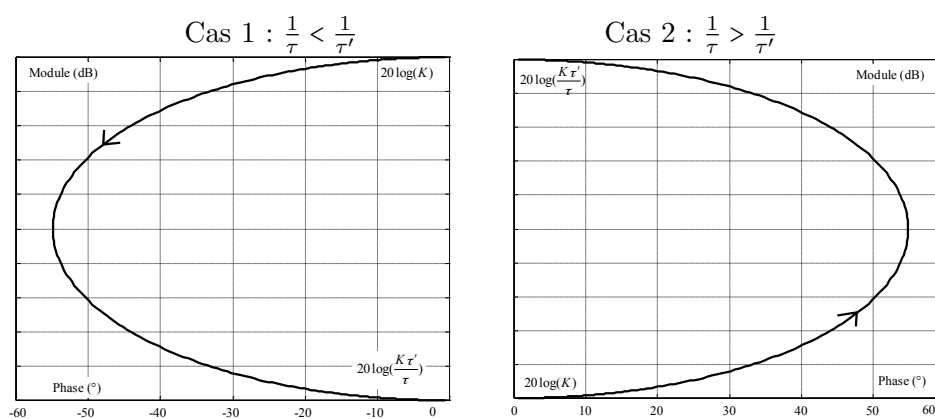
- Fonction de transfert : $H(p) = K \frac{1+\tau'p}{1+\tau p}$, avec $K, \tau, \tau' > 0$
- Caractéristiques fréquentielles :
 - Gain statique : $\lim_{p \rightarrow 0} H(p) = K$
 - Constantes de temps : τ et τ'
 - Pulsations de brisure : $\omega_{b1} = 1/\tau$ (pôle) et $\omega_{b2} = 1/\tau'$ (zéro)
- Diagramme de Bode :



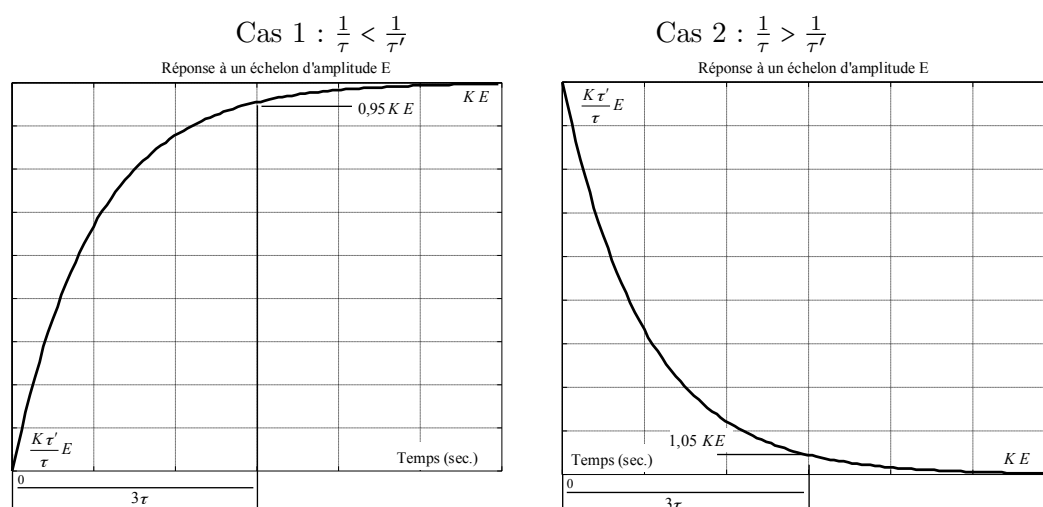
— Diagramme de Nyquist :



— Diagramme de Black-Nichols :



— Réponse indicielle : $s(t) = KE\frac{\tau'}{\tau} + KE\frac{\tau-\tau'}{\tau}(1 - e^{-t/\tau})$. Pente non-nulle à $t = 0^+$, pas de dépassement.



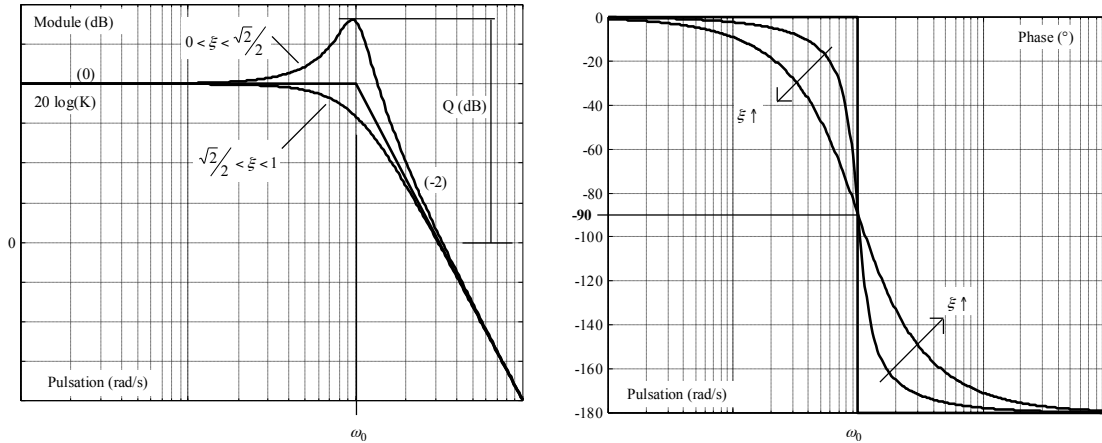
A.5 Systèmes du deuxième ordre

Seuls sont considérés ici les systèmes du deuxième ordre possédant deux pôles complexes conjugués, caractérisés par un coefficient d'amortissement ξ strictement inférieur à 1. Les systèmes du deuxième ordre ayant des pôles réels sont à traiter comme deux systèmes du premier ordre en cascade (voir Annexe A.3).

- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$, avec $K, \omega_0, \xi > 0$
- Caractéristiques fréquentielles :
 - Gain statique : $\lim_{p \rightarrow 0} H(p) = K$
 - Pulsation propre : ω_0 (en rad.s^{-1})
 - Coefficient d'amortissement : $\xi \in]0; 1[$
- Diagramme de Bode : deux cas sont à considérer¹.
 - Si $\xi \in]0; \sqrt{2}/2[$: il y a résonance à la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ et de facteur de résonance :

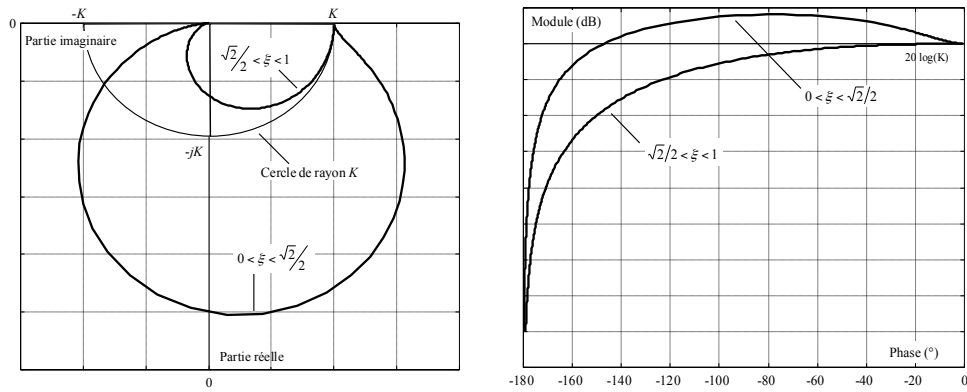
$$Q(\text{dB}) = 20 \log \left(\frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right) \quad (\text{A.13})$$

- Si $\xi \in [\sqrt{2}/2; 1[$, il n'y a pas de résonance.



1. $\xi = 0$ correspond à un transfert oscillateur pur, se traduisant dans le plan de Bode par une résonance infinie pour le module et un tracé réel de la phase confondu avec le tracé asymptotique.

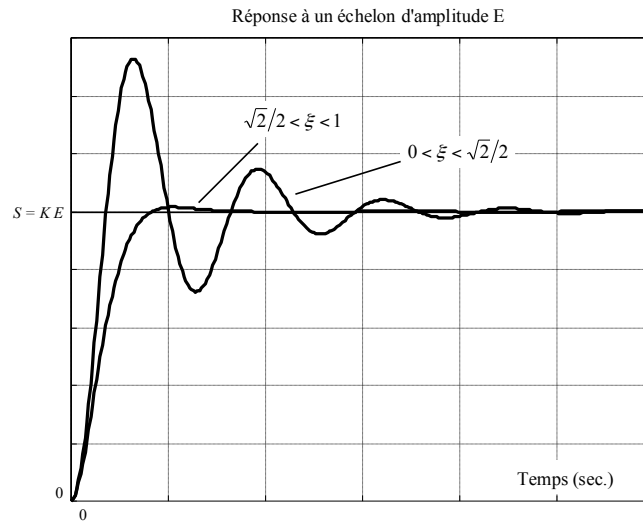
— Diagrammes de Nyquist et de Black-Nichols :



— Réponse indicielle :

$$s(t) = KE \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} - \alpha) \right) \quad (\text{A.14})$$

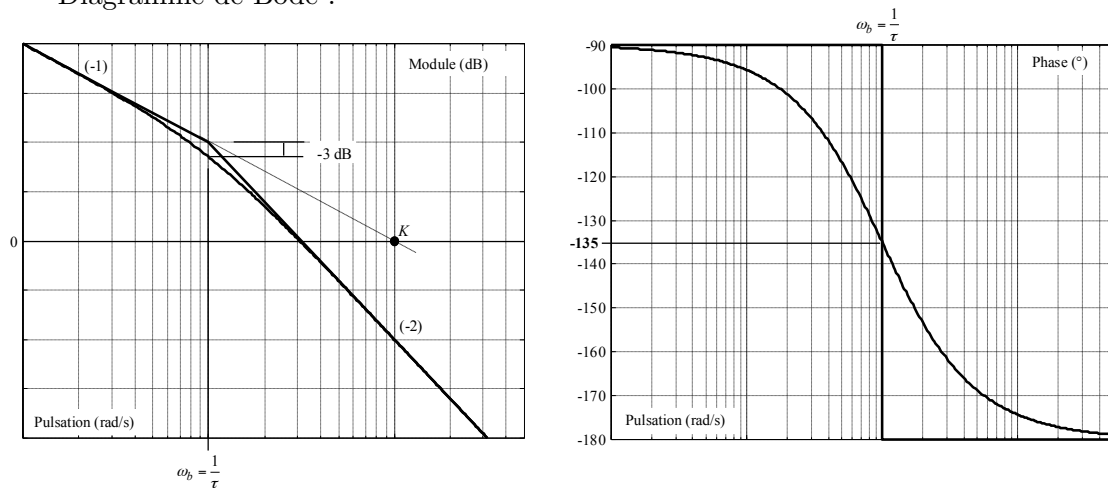
avec $\tan(\alpha) = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$. Pente nulle à $t = 0^+$, temps du premier maximum et temps d'établissement donnés en Annexe A.9.



Dépassement : $D(\%) = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$, ne dépend que de ξ (voir aussi Annexe A.9).

A.6 Systèmes du premier ordre + intégrateur

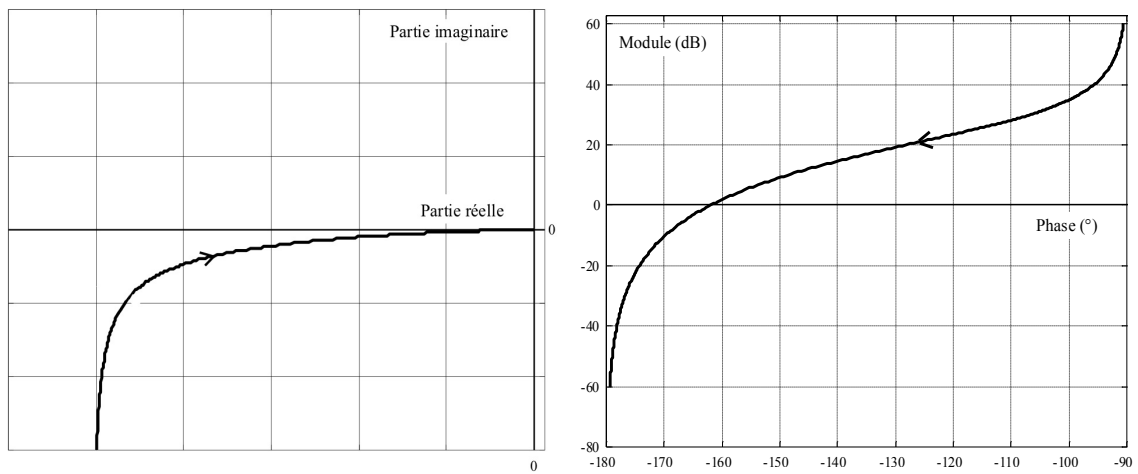
- Fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)}$, avec $K, \tau > 0$
- Caractéristiques fréquentielles :
 - Gain statique : $\lim_{p \rightarrow 0} H(p) = +\infty$
 - Constante de temps : τ (en secondes)
 - Pulsation de brisure : $\omega_b = 1/\tau$ (en rad.s^{-1})
- Diagramme de Bode :



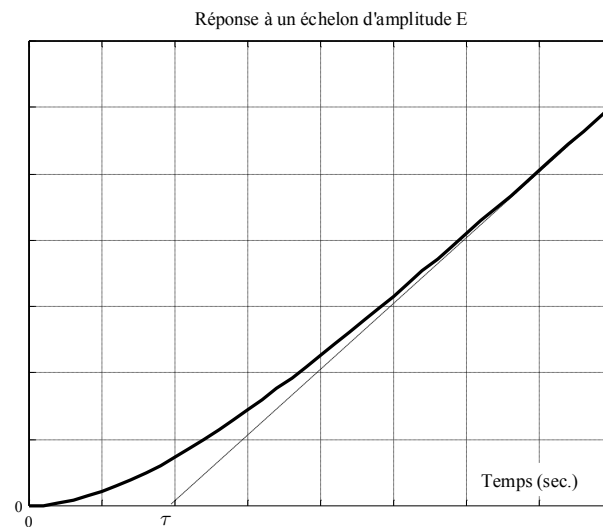
- Calcul de la phase : $\arg(H(j\omega)) = -90^\circ - \arctan(\omega\tau)$

Pulsation	$\omega_b/4$	$\omega_b/2$	ω_b	$2\omega_b$	$4\omega_b$
Phase	-104°	-116.5°	-135°	-153.5°	-166°

— Diagrammes de Nyquist et de Black-Nichols :



— Réponse indicielle :



A.7 Cas des systèmes instables ou à déphasage non-minimal

Les systèmes instables se caractérisent par (au moins) un pôle dans le demi-plan droit du plan complexe ou sur l'axe imaginaire.

Les systèmes à déphasage non-minimal, quant à eux, se caractérisent par un zéro dans le demi-plan droit du plan complexe, faisant intervenir au numérateur de la fonction de transfert un terme de la forme : $1 - \tau p$ avec $\tau > 0$.

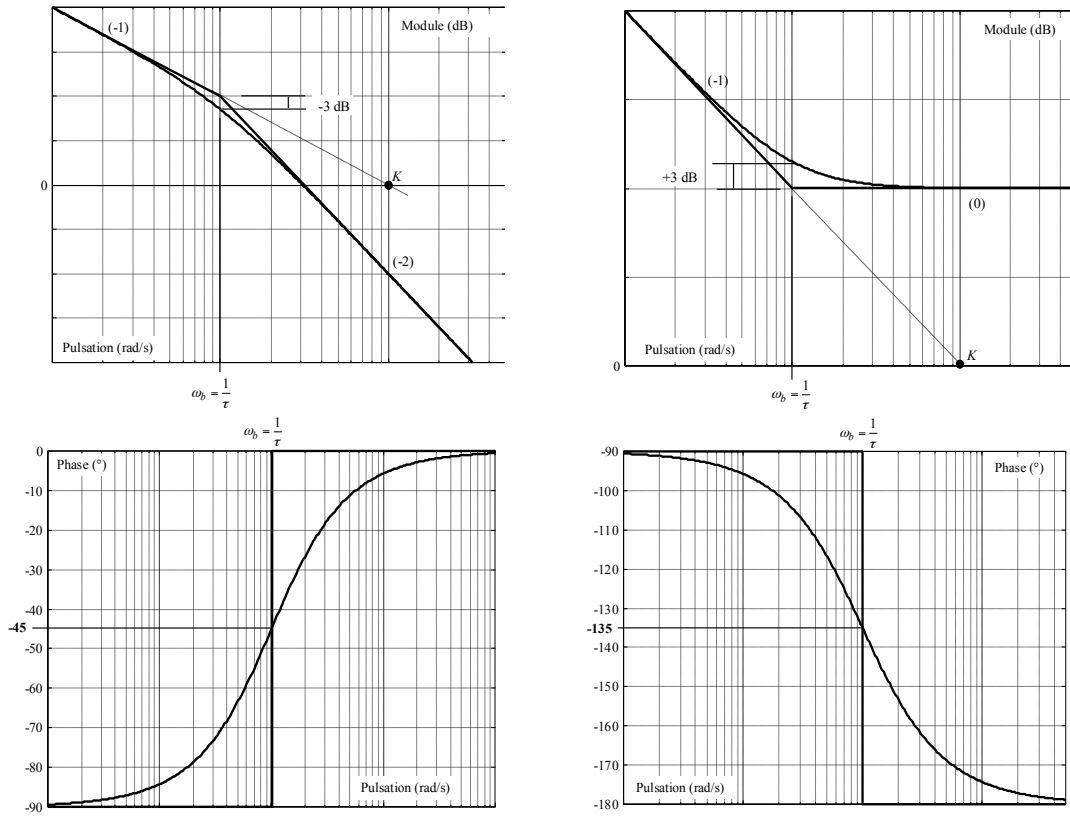
Dans les deux cas, les diagrammes fréquentiels doivent être envisagés en considérant que la contribution de chaque terme $1 - \tau p$:

- est similaire au niveau du module par rapport à un terme $1 + \tau p$
- présente une variation de la phase opposée à celle de $1 + \tau p$: phase diminuée asymptotiquement de -90° pour un zéro positif et phase augmentée asymptotiquement de 90° pour un pôle positif.

Nous illustrons ceci par deux exemples.

$$H(p) = \frac{K}{p(1 - \tau p)}, \quad K, \tau > 0 \quad (\text{A.15})$$

$$H(p) = \frac{K(1 - \tau p)}{p}, \quad K, \tau > 0 \quad (\text{A.16})$$



A.8 Cas des systèmes à retards

Dans le cas d'un retard intervenant sur l'entrée ou sur la sortie, ces systèmes se caractérisent dans le domaine temporel par un laps de temps, appelé retard pur, pendant lequel le système ne réagit pas à une excitation en entrée. Cet aspect se traduit dans le domaine fréquentiel par une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = H'(p)e^{-\tau p}, \quad (\text{A.17})$$

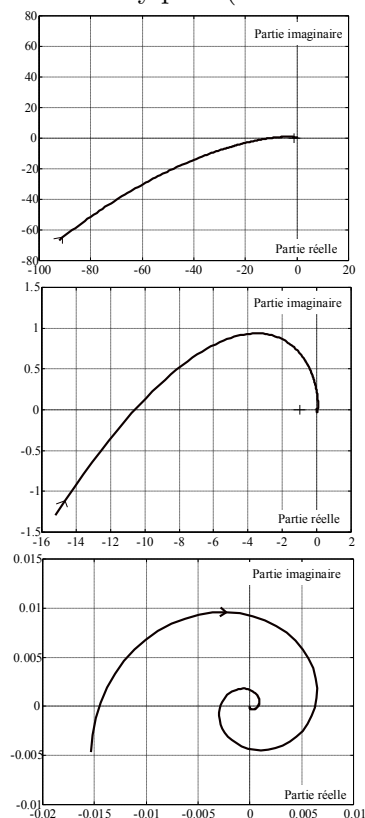
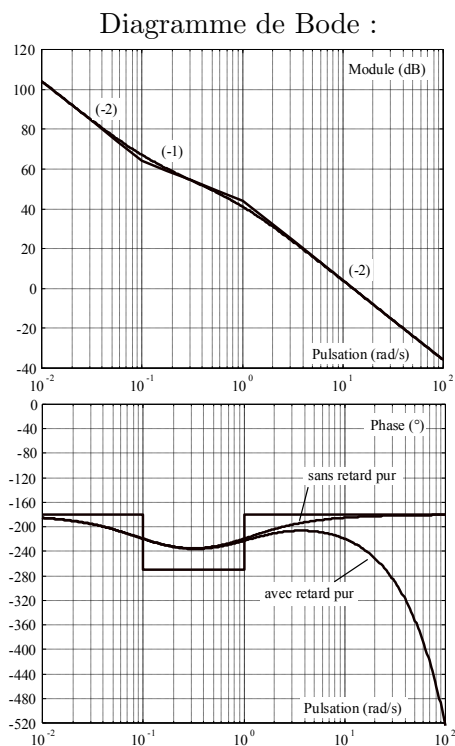
où $H'(p)$ correspond à la partie "non retardée", faisant intervenir une ou plusieurs des représentation(s) précédente(s), et où τ représente le retard pur. Cette fonction de transfert se caractérise alors par :

- un module identique à celui de $H'(p)$: $|H(j\omega)|_{dB} = |H'(j\omega)|_{dB}$ (aucune influence du retard)
- une phase abaissée de $\omega\tau$: $\arg^\circ(H(j\omega)) = \arg^\circ(H'(j\omega)) - \frac{180}{\pi}\omega\tau$ (phase en degrés, pulsation en rad.s^{-1})

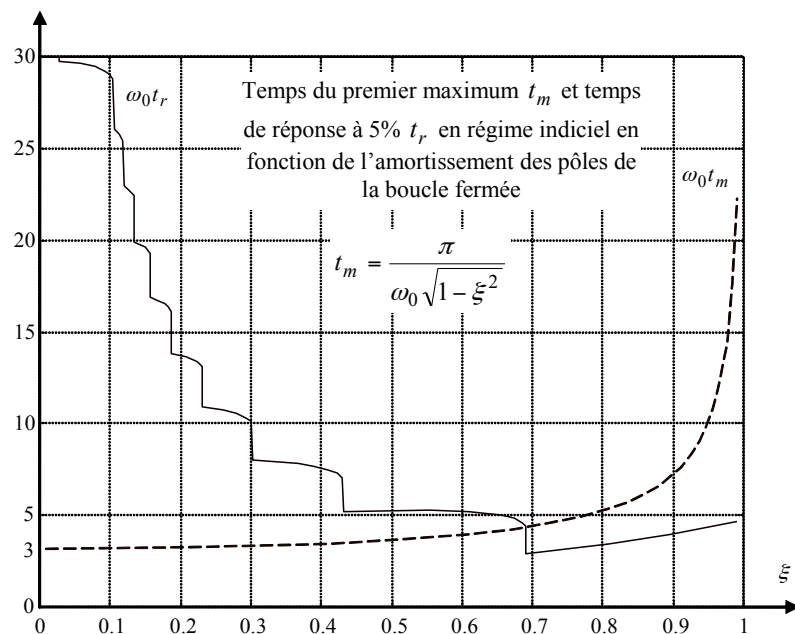
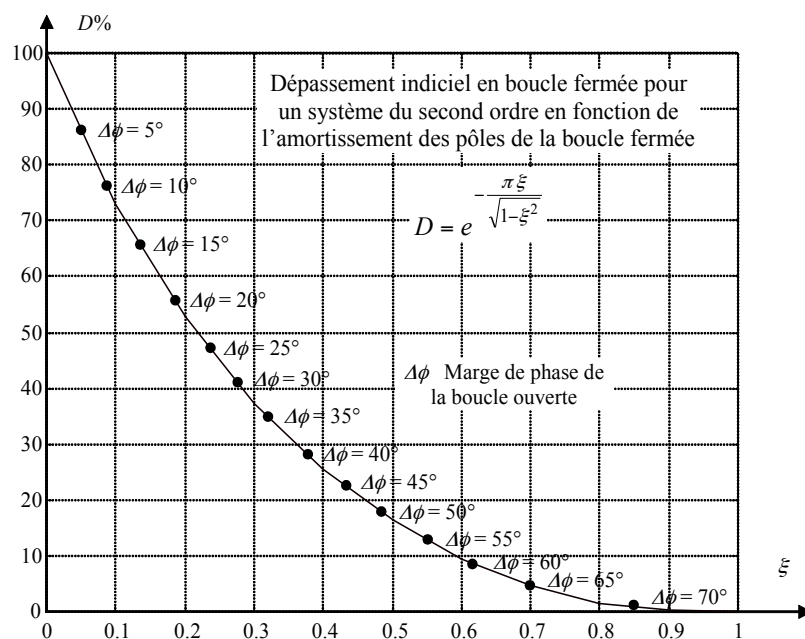
Nous illustrons ceci au travers de l'exemple :

$$H(p) = \frac{16(1 - 10p)}{p^2(1 - p)}e^{-0.06p}. \quad (\text{A.18})$$

Diagramme de Nyquist (zooms successifs) :



A.9 Abaques : dépassement et temps du 1^{er} maximum pour les systèmes du 2^{ème} ordre



Index

- actionneur, 23
 - amortissement, 45, 77, 192, 198
 - avance de phase, 85

 - bande passante, 31, 78
 - bibliographie, 179

 - CAN, 24, 58, 113
 - capteur, 23
 - causal (signal), 21
 - changement de base, 141
 - choix de la période d'échantillonnage, 114
 - classe d'un système, 36, 51, 69
 - CNA, 24, 58, 113, 114
 - commandabilité partielle, 144, 161
 - commandabilité : critère, 143
 - commandabilité : définition, 142
 - commande, 18, 20
 - commande par retour d'état, 151
 - comparateur, 23, 24
 - compensation de la consigne, 103
 - compensation des perturbations, 104
 - consigne, 22
 - contour de Nyquist, 34
 - correcteur, 23
 - correction numérique, 24
 - correction par anticipation, 103
 - correction par avance de phase, 85
 - correction PI, 89
 - correction PID, 93
 - correction proportionnelle, 81
 - correction série, 80
 - critère de Nyquist, 37
 - critère de Nyquist (discret), 64
 - critère du revers, 40

 - dépassement, 45
 - déphasage minimal, 43
 - déphasage non-minimal, 196
 - dérivateur numérique, 121
 - décade, 186

 - dépassement, 77, 185, 193, 198
 - diagramme de Black-Nichols, 43, 187
 - diagramme de Bode, 42, 186
 - diagramme de Bode (discret), 68
 - diagramme de Nyquist, 41, 186
 - dilemme stabilité-précision, 79
 - dualité des formes, 141

 - EBSB, 32
 - écart, 23
 - échantillonneur-bloqueur, 58
 - équation d'état discrète, 135
 - équation d'état, 133
 - équation de mesure, 133
 - équilibre, 136
 - erreur, 23
 - erreur de trainage, 52, 71
 - erreur dynamique, 25
 - erreur permanente, 50
 - erreur permanente (discret), 69
 - erreur statique, 25
 - état, 133

 - fonction de transfert, 21
 - fonction de transfert en boucle fermée, 30
 - fonction de transfert en boucle ouverte, 29
 - forme compagnon pour l'observation, 140
 - forme compagnon pour la commande, 139
 - formule d'Ackermann, 152

 - gabarits fréquentiels, 79
 - gain statique, 185
 - gel de l'action intégrale, 125

 - historique, 13

 - linéaire invariant, 19
 - linéarisé tangent, 136
 - linéarisation, 136

 - marge de gain, 41
 - marge de phase, 41, 78, 198
-

-
- marge de retard, 43
 - marges de stabilité (discret), 68
 - matched transform, 118
 - matrice d'évolution, 134
 - matrice d'observabilité, 148
 - matrice d'observation, 134
 - matrice de commandabilité, 143
 - matrice de commande, 134
 - matrice de transition, 134
 - matrice de transmission directe, 134
 - méthode aux différences retard, 115
 - méthode des rectangles, 115, 118
 - méthode des trapèzes, 117, 118
 - modèle discret équivalent, 58
 - monovariable, 19, 134

 - observabilité : critère, 148
 - observabilité : définition, 147
 - observateur, 163
 - observateur à mémoire finie, 163
 - observateur dynamique, 165
 - octave, 186

 - période d'échantillonnage, 24, 113
 - paramètres localisés, 19
 - partiellement commandable, 142
 - partiellement observable, 147
 - passage état-transfert, 137
 - perturbation, 18, 20
 - PI, 89
 - PID, 93
 - plan de Black-Nichols, 43
 - plan de Bode, 42
 - plan de Nyquist, 41
 - point critique, 34
 - point d'équilibre, 136
 - précision, 25, 78
 - précision en régime permanent, 25, 50
 - précision en régime transitoire, 25
 - précision statique (discret), 69
 - précision transitoire, 55, 56
 - principe de séparation, 171
 - principe de superposition, 30
 - pulsation de coupure, 31, 78
 - pulsation propre, 192, 198

 - quantification, 121

 - réponse fréquentielle, 31

 - réponse harmonique, 31
 - réponse indicielle, 45
 - rapidité, 25, 78
 - régulateur PI, 89
 - régulateur PID, 93
 - régulation cascade, 105
 - réponse apériodique, 185
 - réponse indicielle, 185
 - résolution d'une équation d'état, 134, 136
 - résonance, 49, 78, 192
 - retard, 197

 - sinusoïde équivalente, 55
 - stabilité, 25, 32, 62, 77
 - stabilité conditionnelle, 45
 - système, 18
 - système à retard, 197
 - système du 1^{er} ordre, 188
 - système du 1^{er} ordre + intégrateur, 194
 - système du 1^{er} ordre généralisé, 190
 - système du 2^{ème} ordre, 192
 - système instable, 196

 - temps d'établissement, 185
 - temps de calcul, 121
 - temps de premier maximum, 45, 78, 185
 - temps de réponse, 46
 - théorème de Cauchy, 33
 - théorème de la valeur finale, 50
 - théorème de la valeur finale (discret), 69
 - totalelement commandable, 142
 - totalelement observable, 147
 - tracé approximatif de la boucle fermée, 32
 - transformation bilinéaire, 117, 118
 - transformation d'Euler, 115, 118
 - transposition directe, 118
 - transposition numérique, 113, 118

 - variable d'état, 133
 - variable incomplète, 109
 - vecteur d'état, 133
-