
FONCTION MAXIMALE ET DÉRIVATION DYADIQUES

LES DÉCOMPOSITIONS DE CALDERÓN-ZYGMUND

Les intervalles dyadiques sont très utiles en analyse.

1. Intervalles dyadiques et intervalles dyadiques maximaux

Définition 1. — Un intervalle dyadique de génération $k \in \mathbb{Z}$ est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ de la forme :

$$I = [j2^k, (j+1)2^k[,$$

pour un entier $j \in \mathbb{Z}$; on note $\mathcal{D}_k$ la collection des intervalles dyadiques de génération k .

On pose aussi $\mathcal{D} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k$ et on appelle intervalle dyadique tout élément de $\mathcal{D}$.

Étant donné $I \in \mathcal{D}$, on note $\text{gen}(I) \in \mathbb{Z}$ l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ pour lequel on a $I \in \mathcal{D}_k$ (on l'appelle la génération de I) ; il vient évidemment $|I| = 2^{\text{gen}(I)}$ pour tout $I \in \mathcal{D}$.

Finalement, si $I \in \mathcal{D}$ est donné, on note $\hat{I}$ l'unique intervalle dyadique de génération $\text{gen}(I) + 1$ tel que l'on ait $I \subseteq \hat{I}$; on l'appelle le parent de I .

Remarque 1. — Si $I, J \in \mathcal{D}$ sont deux intervalles dyadiques, on a soit $I \subseteq J$, soit $J \subseteq I$, soit $I \cap J = \emptyset$.

En outre, si $I, J \in \mathcal{D}$ vérifient $I \not\subseteq J$, on a nécessairement $|J| \geq 2|I|$.

Isoler, dans une collection d'intervalles dyadiques, les éléments maximaux est un outil clef en analyse réelle.

Lemme 1. — Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ est une collection d'intervalles dyadiques et que l'on a :

$$\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| < +\infty,$$

alors il existe une famille au plus dénombrable $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ vérifiant $\bigcup \mathcal{C}^* = \bigcup \mathcal{C}$, constituée d'intervalles deux à deux disjoints et maximaux (pour l'inclusion) dans $\mathcal{C}$ au sens suivant : si $I \in \mathcal{C}^*$ et $J \in \mathcal{C}$ vérifient $I \subseteq J$, on a nécessairement $I = J$.

Démonstration. — Commençons par observer que l'hypothèse se récrit $\sup_{I \in \mathcal{C}} \text{gen}(I) < +\infty$. Il existe donc un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait $\mathcal{C} \subseteq \bigcup_{k=-\infty}^{k_0} \mathcal{D}_k$. Par conséquent $\mathcal{C}$ admet des éléments maximaux pour l'inclusion. Pour le voir, on peut observer, par exemple, que $\mathcal{C}$ muni de l'inclusion est un ensemble ordonné inductif (en montrant que si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ est totalement ordonné par l'inclusion, alors $\bigcup \mathcal{E}$ est un intervalle dyadique qui contient tous les éléments de $\mathcal{E}$) et appliquer le lemme de Zorn, ou raisonner par l'absurde comme suit. Supposons que $\mathcal{C}$ n'admette aucun élément maximal et fixons $I_0 \in \mathcal{C}$. Comme I_0 n'est pas maximal, il existe $I_1 \in \mathcal{C}$ vérifiant $I_1 \not\subseteq I_0$; mais alors on

a $|I_1| \geq 2|I_0|$ en vertu de la Remarque 1. De proche en proche, on construit une suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ d'intervalles dyadiques vérifiant $I_k \not\subseteq I_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $|I_k| \geq 2^k |I_0|$. C'est impossible puisqu'il viendrait alors $\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = +\infty$.

Notons à présent $\mathcal{C}_*$ la collection des éléments maximaux de $\mathcal{C}$ pour l'inclusion.

Pour commencer, montrons que $\mathcal{C}_*$ est constituée d'intervalles deux à deux disjoints. À cet effet, fixons $I, J \in \mathcal{C}$ avec $I \neq J$. On sait que l'on a soit $I \subseteq J$, soit $J \subseteq I$, soit $I \cap J = \emptyset$. Les deux premières possibilités conduisant à avoir $I = J$ par maximalité de I et J , il vient nécessairement $I \cap J = \emptyset$. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{C}_*$ est dénombrable puisque chaque élément de $\mathcal{C}_*$ contient un rationnel et que l'on peut ainsi définir (puisque les éléments de $\mathcal{C}_*$ sont deux à deux disjoints) une injection de $\mathcal{C}_*$ dans $\mathbb{Q}$.

Pour montrer à présent que l'on a $\cup \mathcal{C}_* = \cup \mathcal{C}$, fixons $I \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_*$ et montrons que l'on a $I \subseteq \cup \mathcal{C}_*$. Puisque I n'est pas maximal dans $\mathcal{C}$ pour l'inclusion, il existe donc $I_0 \in \mathcal{C}$ vérifiant $I_0 \not\subseteq I$. Si on a $I_0 \in \mathcal{C}_*$, alors on a $I \not\subseteq I_0 \subseteq \cup \mathcal{C}_*$ et l'inclusion souhaitée est démontrée. Sinon, on construit de proche en proche, tant que l'on a $I_k \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_*$, un intervalle dyadique $I_{k+1} \in \mathcal{C}$ vérifiant $I_{k+1} \not\subseteq I_k$ pour tout k et $|I_{k+1}| \geq 2^{k+1} |I_0|$. Cette procédure ne peut continuer indéfiniment, sans quoi on aurait à nouveau $\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}} |I_k| = +\infty$. Il existe donc un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $I_{k_0+1} \in \mathcal{C}_*$, d'où il résulte que l'on a $I \subseteq I_{k_0+1} \subseteq \cup \mathcal{C}_*$. La démonstration est complète. ■

2. La fonction maximale dyadique et le théorème de dérivation de Lebesgue “dyadique”

La fonction maximale dyadique rappelle la fonction maximale de Hardy-Littlewood.

Définition 2. — Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est localement intégrable, on définit la fonction maximale dyadique $M_\Delta f$ de f en posant, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$M_\Delta f(x) := \sup_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \ni x}} \int_I |f| = \sup_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \ni x}} \frac{1}{|I|} \int_I |f|.$$

Comme la fonction maximale de Hardy-Littlewood, la fonction maximale dyadique vérifie une inégalité faible ; il n'est toutefois pas nécessaire, avec la fonction maximale dyadique, d'introduire une constante 5 dans cette inégalité.

Proposition 1. — Étant donné $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$, on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta u(x) > \lambda\}| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|_1.$$

Démonstration. — Fixons $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$ et posons $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : M_\Delta u(x) > \lambda\}$.

Commençons par observer que si $I \in \mathcal{D}$ est un intervalle dyadique, alors on a :

$$\int_I |u| = \frac{1}{|I|} \int_I |u| \leq \frac{1}{|I|} \int_{\mathbb{R}} |u| = \frac{\|u\|_1}{|I|}.$$

Si $I \in \mathcal{D}$ vérifie $|I| \geq \|u\|_1 / \lambda$, il viendra dès lors $\int_I |u| \leq \lambda$.

Posons à présent :

$$\mathcal{C} := \left\{ I \in \mathcal{D} : \int_I |u| > \lambda \right\}.$$

Par ce que nous venons d'observer, il est clair que l'on a :

$$\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| < \frac{\|u\|_1}{\lambda} < +\infty.$$

Le Lemme 1 fournit dès lors une famille au plus dénombrable $\mathcal{C}_* \subseteq \mathcal{C}$ vérifiant $\cup \mathcal{C}_* = \cup \mathcal{C}$, constituée d'intervalles deux à deux disjoints et maximaux pour l'inclusion dans $\mathcal{C}$.

Observons que l'on a $E_\lambda = \cup \mathcal{C}$. Si, en effet, $x \in E_\lambda$ est donné, alors on a $M_\Delta u(x) > \lambda$ et il existe donc par définition un intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ tel que l'on ait $f_I |u| > \lambda$, d'où l'on tire $I \in \mathcal{C}$ et donc aussi $x \in I \subseteq \cup \mathcal{C}$. Réciproquement, si $I \in \mathcal{C}$ est donné, alors on a $f_I |u| > \lambda$ et donc il vient $M_\Delta u(x) \geq f_I |u| > \lambda$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire $I \subseteq E_\lambda$. Il vient donc, puisque l'on a $\cup \mathcal{C}_* = \cup \mathcal{C}$ et que les intervalles de $\mathcal{C}_*$ sont deux à deux disjoints :

$$|E_\lambda| = |\cup \mathcal{C}| = |\cup \mathcal{C}_*| = \sum_{I \in \mathcal{C}_*} |I| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{C}_*} \int_I |u| < \frac{1}{\lambda} \|u\|_1,$$

où l'on a utilisé que les éléments de $\mathcal{C}_* \subseteq \mathcal{C}$ vérifient $\frac{1}{|I|} \int_I |u| = f_I |u| > \lambda$. C'est l'inégalité annoncée. ■

L'inégalité maximale précédente a une conséquence qui rappelle le théorème de dérivation de Lebesgue.

Proposition 2. — *Étant donné $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$u(x) = \lim_{\substack{x \in I \in \mathcal{D} \\ |I| \rightarrow 0}} f_I u. \quad (1)$$

Remarque 2. — *Dans l'énoncé de la proposition précédente, (1) signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $I \in \mathcal{D}$ vérifie $I \ni x$ et $|I| \leq \delta$, alors on a $|u(x) - f_I u| \leq \varepsilon$.*

Démonstration. — Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\delta > 0$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\omega_f(x, \delta) := \sup \left\{ \left| f(x) - \int_I f \right| : I \in \mathcal{D}, I \ni x, |I| \leq \delta \right\}.$$

Il est clair que l'on a, pour tous $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\delta > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\omega_f(x, \delta) \leq |f(x)| + \sup \left\{ \int_I |f| : I \in \mathcal{D}, I \ni x, |I| \leq \delta \right\} \leq |f(x)| + M_\Delta f(x).$$

On pose finalement, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\omega_f(x) := \inf_{\delta > 0} \omega_f(x, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(x, \delta).$$

Il suit de ce qui précède que l'on a $\omega_f \leq |f| + M_\Delta f$ partout sur $\mathbb{R}$.

Il est par ailleurs facile de voir que l'on a $\omega_g = 0$ partout sur $\mathbb{R}$ pour tout $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et que, pour tous $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ on a $\omega_{f+g} \leq \omega_f + \omega_g$ sur $\mathbb{R}$.

Il vient donc, sur $\mathbb{R}$, pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$:

$$\omega_f = \omega_{f-g+g} \leq \omega_{f-g} + \omega_g = \omega_{f-g} \quad \text{et} \quad \omega_{f-g} \leq \omega_f + \omega_{-g} = \omega_f,$$

puisque l'on a $\omega_g = 0$ partout sur $\mathbb{R}$; on a donc, sur $\mathbb{R}$, $\omega_f = \omega_{f-g}$.

Fixons à présent $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On va montrer que l'on a $\omega_u = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$, ce qui suffira à conclure. À cette fin, commençons par fixer $\lambda > 0$ et montrons que l'on a $|\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > \lambda\}| = 0$. À cet effet, posons $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > \lambda\}$, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons, par densité de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, une fonction $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u - v\|_1 \leq \varepsilon$. On vient de voir que l'on a $\omega_u = \omega_{u-v}$ sur $\mathbb{R}$. Si $x \in E_\lambda$ est donné, alors on a, puisque l'on a $\omega_{u-v} \leq |u - v| + M_\Delta(u - v)$ sur $\mathbb{R}$:

$$M_\Delta(u - v)(x) + |(u - v)(x)| \geq \omega_{u-v} f(x) = \omega_f(x) > \lambda.$$

Il vient donc nécessairement *soit* $M_\Delta(u-v)(x) > \lambda/2$, *soit* $|(u-v)(x)| > \lambda/2$ (sans quoi on aurait $|(u-v)(x)| + M_\Delta(u-v)(x) \leq \lambda/2 + \lambda/2 = \lambda$). Autrement dit, on a :

$$E_\lambda \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta(u-v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : |(u-v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Il vient donc en particulier :

$$|E_\lambda| \leq \left|\left\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta(u-v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \in \mathbb{R} : |(u-v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Or la Proposition 1 assure que l'on a d'une part :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : M_\Delta(u-v)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|u-v\|_1 \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda},$$

tandis qu'il résulte de l'inégalité de Markov que l'on a :

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |(u-v)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|u-v\|_1 \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda}.$$

Il vient donc finalement :

$$|E_\lambda| \leq \varepsilon \cdot \frac{4}{\lambda}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire dans l'inégalité précédente, on trouve par conséquent $|E_\lambda| = 0$.

Il vient finalement :

$$\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 2^{-k}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{2^{-k}}.$$

La sous-additivité de la mesure extérieure de Lebesgue assure dès lors que l'on a :

$$|\{x \in \mathbb{R} : \omega_u(x) > 0\}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |E_{2^{-k}}| = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a $\omega_u = 0$ hors d'un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}$. C'est ce qu'il nous fallait démontrer. ■

3. Décompositions de Calderón-Zygmund

Les décompositions de Calderón-Zygmund sont un outil fondamental en analyse harmonique ; nous les utiliserons, dans la section suivante, pour démontrer un théorème de convergence presque partout de sous-suites universelles d'une approximation de l'identité positive dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1 (Décomposition de Calderón-Zygmund). — Soient $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. Il existe $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, une famille au plus dénombrable $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$ d'intervalles dyadiques deux à deux disjoints et, pour chaque $I \in \mathcal{B}$, une fonction $b_I \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tels que l'on ait :

$$u = v + \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$$

presque partout sur $\mathbb{R}$, ainsi que les propriétés suivantes :

- (i) $\|v\|_\infty \leq \lambda$;
- (ii) pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a $b_I = 0$ hors de I ;
- (iii) pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a $\|b_I\|_1 \leq \lambda|I|$;
- (iv) pour tout $I \in \mathcal{B}$, on a $\int_{\mathbb{R}} b_I = 0$;
- (v) $\sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq \frac{4}{\lambda} \|u\|_1$.

Démonstration. — Remarquons pour commencer, comme dans la preuve de la Proposition 1, que l'on aura $f_I |u| \leq \lambda/4$ dès que $I \in \mathcal{D}$ vérifie $|I| \geq 4\|u\|_1/\lambda$.

Posons à présent :

$$\mathcal{C} := \left\{ I \in \mathcal{D} : \int_I |u| > \frac{\lambda}{4} \right\}.$$

Nous venons d'observer que l'on doit avoir :

$$\sup_{I \in \mathcal{C}} |I| < \frac{4\|u\|_1}{\lambda} < +\infty.$$

Il existe donc, en vertu du Lemme 1, une famille au plus dénombrable $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ vérifiant $\cup \mathcal{B} = \cup \mathcal{C}$, constituée d'intervalles deux à deux disjoints et maximaux pour l'inclusion dans $\mathcal{C}$.

On définit alors des fonctions Lebesgue-mesurables $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et, pour tout $I \in \mathcal{B}$, $b_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour $x \in \mathbb{R}$:

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{si } x \notin \cup \mathcal{B}, \\ f_I u & \text{si } x \in I \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

et, pour $I \in \mathcal{B}$:

$$b_I(x) := \begin{cases} u(x) - v(x) = u(x) - f_I u & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que l'on a $u = v + \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$ sur $\mathbb{R}$.

Pour prouver (i), commençons par noter $N \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble Lebesgue-négligeable tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus N$, on ait :

$$|u(x)| = \lim_{\substack{x \in I \in \mathcal{D} \\ |I| \rightarrow 0}} \int_I |u|.$$

Si $x \in \cup \mathcal{B}$ est donné, alors il ne peut exister *aucun* intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ contenant x qui vérifie $\int_I |u| > \frac{\lambda}{4}$: si un tel intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ existait, il viendrait $I \in \mathcal{C}$ et on aurait dès lors $x \in I \subseteq \cup \mathcal{C} = \cup \mathcal{B}$, ce qui est absurde. Par conséquent, il vient $\int_I |u| \leq \frac{\lambda}{4}$ pour *tout* intervalle dyadique $I \in \mathcal{D}$ contenant x . Si, en outre, on a $x \notin N$, alors on trouvera par conséquent :

$$|v(x)| = |u(x)| = \lim_{\substack{x \in I \in \mathcal{D} \\ |I| \rightarrow 0}} \int_I |u| \leq \frac{\lambda}{4}.$$

Il vient donc $|v| \leq \lambda/4$ presque partout sur $\mathbb{R} \setminus \cup \mathcal{B}$.

Si $x \in I \in \mathcal{B}$ est donné, alors on calcule :

$$|v(x)| = \left| \int_I u \right| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |u| \leq \frac{1}{|I|} \int_{\hat{I}} |u| = \frac{|\hat{I}|}{|I|} \int_{\hat{I}} |u| = 2 \int_{\hat{I}} |u|,$$

où $\hat{I} \in \mathcal{D}_{\text{gen}(I)+1}$ est le parent de I (voir la Définition 1 ci-dessus). Or comme I est maximal pour l'inclusion dans $\mathcal{C}$ et que l'on a $I \subsetneq \hat{I}$, il vient nécessairement $\hat{I} \notin \mathcal{C}$, c'est-à-dire $\int_{\hat{I}} |u| \leq \frac{\lambda}{4}$. L'inégalité ci-dessus donne alors :

$$|v(x)| \leq 2 \int_{\hat{I}} |u| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Il vient donc $|v| \leq \lambda/2$ partout sur $\cup \mathcal{B}$.

La propriété (i) s'ensuit aussitôt puisque l'on a montré l'inégalité $|v| \leq \lambda$ (et même $|v| \leq \lambda/2$) presque partout sur $\mathbb{R}$. Il vient en particulier $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Fixons $I \in \mathcal{B}$. Il est clair, par définition, que l'on a $b_I = 0$ hors de I (ce qui établit (ii)). Il vient dès lors :

$$\int_{\mathbb{R}} b_I = \int_I (u - f_I u) = \int_I u - |I| \int_I u = \int_I u - \int_I u = 0,$$

ce qui démontre (iv). Mais on calcule aussi :

$$\begin{aligned} \|b_I\|_1 &= \int_I |u - f_I u| \leq \int_I |u| + |I| \int_I |f_I u| \leq \int_I |u| + \int_I |u| \\ &= 2 \int_I |u| \leq 2 \int_{\hat{I}} |u| = 2|\hat{I}| \int_{\hat{I}} |u| \leq 4|I| \cdot \frac{\lambda}{4} = \lambda|I|, \end{aligned}$$

puisque l'on a à nouveau $\hat{I} \notin \mathcal{C}$ et donc $f_{\hat{I}} |u| \leq \lambda/4$. Le point (iii) est ainsi vérifié.

Finalement, puisque l'on a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ et qu'il vient donc $f_I |u| > \lambda/4$, c'est-à-dire $|I| \leq \frac{4}{\lambda} \int_I |u|$ pour tout $I \in \mathcal{B}$, on écrit :

$$\sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq \frac{4}{\lambda} \sum_{I \in \mathcal{B}} \int_I |u| \leq \frac{4}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |u| = \frac{4}{\lambda} \|u\|_1,$$

puisque les intervalles de $\mathcal{B}$ sont deux à deux disjoints. La propriété (v) est ainsi vérifiée à son tour.

Comme il résulte par ailleurs de (iv) et (v) que l'on a :

$$\sum_{I \in \mathcal{B}} \|b_I\|_1 \leq \lambda \sum_{I \in \mathcal{B}} |I| \leq 4\|u\|_1,$$

on voit que la fonction b définie sur $\mathbb{R}$ par $b := \sum_{I \in \mathcal{B}} b_I$, vérifie $b \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et on a donc aussi $v = u - b \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. La démonstration est complète. ■

Le 16 octobre 2024

- E-mail : Laurent.Moonens@centralesupelec.fr