
Table des matières

1 Définitions et équations fondamentales	9
1 Objectifs et notions fondamentales	9
2 Propriétés des fluides	14
3 Propriétés des écoulements	16
4 Outils mathématiques	21
5 Conservation de la masse	26
6 Conservation de quantité de mouvement	31
Exercices	36
2 Écoulements potentiels	39
1 Définitions	40
2 Théorème de Bernoulli	52
3 Écoulements potentiels	53
4 Écoulements autour d'un corps arbitraire - Méthode des panneaux	64
Exercices	68
3 Écoulement idéal autour d'un profil	71
1 Généralités sur les surfaces portantes	71
2 Géométrie des profils et des surfaces portantes	73
3 Caractéristiques aérodynamiques des surfaces portantes	77
4 Théorème de Kutta-Joukowski	80
5 Circulation et portance	83

6	Théorème de Kelvin	86
7	Circulation autour d'un profil portant	88
8	Profil mince portant	90
9	Méthode des panneaux pour les profils portants	101
	Exercices	104
4	Écoulement autour d'une aile d'envergure finie	107
1	Description de l'écoulement	107
2	Théorie de la ligne portante	110
3	Calcul des coefficients de portance et de traînée induite	117
4	Méthodes globales de calcul aérodynamique	122
5	Conclusion	126
	Exercices	126
5	Couche limite laminaire	129
1	Effets de la viscosité d'un fluide	129
2	Concept de couche limite	136
3	Équations de la couche limite laminaire	142
4	Résolutions exactes des équations de la couche limite	145
5	Méthodes intégrales	153
	Exercices	167
6	Introduction aux couches limites turbulentes	169
1	Notions sur la transition laminaire-turbulent	170
2	Équations de la couche limite turbulente	174
3	Modélisation de la turbulence	178
4	Méthodes intégrales pour la couche limite turbulente	183
	Exercices	189
A	Écoulements complexes	191
1	Définition des grandeurs complexes	191
2	Transformée conforme de Joukowski	192
3	Lignes de courant autour d'un profil portant	194
4	Théorème de Blasius	196

Chapitre I

Définitions et équations fondamentales

1 Objectifs et notions fondamentales

La mécanique des fluides a pour objet l'étude des systèmes fluides et des interactions avec leur environnement. Dans un grand nombre de systèmes, les fluides jouent le rôle de vecteur d'énergie, ils permettent de transporter des espèces, de la chaleur, de stocker de l'énergie, de la restituer sous forme cinétique. Le corps humain a besoin du sang pour transporter les éléments vitaux dans l'organisme, certains modes de chauffage reposent sur le transport d'un fluide caloporteur au travers d'un radiateur, les barrages hydroélectriques tirent leur énergie du stockage d'un grand volume d'eau en altitude. . . Comprendre le mouvement des fluides et la façon dont ils agissent sur les autres éléments des systèmes permet d'assurer le bon fonctionnement de l'ensemble. Le fluide est généralement un sous-système d'un système plus large, la mécanique des fluides permet d'étudier en détail ce sous-système fluide et d'en extraire des grandeurs (forces, puissances, énergies, débits. . .) utiles à la conception, le dimensionnement et l'optimisation des systèmes naturels ou artificiels. Les mêmes lois permettent de prédire l'évolution du climat, le fonctionnement d'un moteur automobile ou le vol d'un avion.

1.1 Définitions

Les fluides peuvent avoir des caractéristiques très différentes les uns des autres. Pour revenir à l'exemple du corps humain, le sang qui circule dans les veines et l'air que l'on respire ont des propriétés très différentes mais ce sont pourtant tous les deux des fluides. Ce qui les différencie sont leur viscosité, leur capacité à transporter de la chaleur, des espèces, leur comportement lorsque la pression et la température varient. . . De façon très générale, **un fluide est un milieu qui adapte sa forme à son contenant**, c'est-à-dire que l'on peut le déformer avec un effort infinitésimal. Un doigt permet de faire des dessins dans le sable, le vent crée des rides à la surface de l'eau, le souffle d'un enfant peut éteindre une bougie.

Un volume donné de fluide représente un *système fluide* au même titre qu'un volume solide (par exemple une pierre) représente un système solide ; on parle dans les deux cas d'un *système matériel* défini par un volume et une surface matériels notés respectivement $\mathcal{V}_m(t)$ et $\mathcal{A}_m(t)$

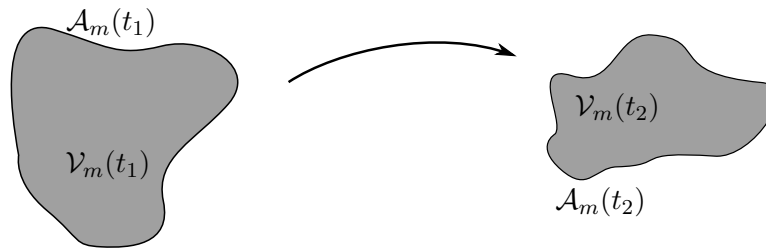


FIGURE 1.1 – Un volume fluide matériel est délimité par une surface qui peut se déformer dans le temps. Cependant le volume contient toujours les mêmes molécules au cours du temps.

(Figure 1.1). Un caillou possède une frontière fixe qui le délimite dans l'espace, un ensemble de lois fondamentales s'appliquent à ce système et permettent de prévoir son comportement. Un volume fluide peut se déformer au cours du temps. La loi de conservation de la masse prévoit que, quelque soit le mouvement du caillou sa masse restera toujours la même, la loi fondamentale de la dynamique affirme que si une force est appliquée au caillou, celui-ci va accélérer. Ces lois s'appliquent au système et permettent de prévoir son évolution. D'autres lois caractérisent le matériau qui compose le caillou ; une maison construite en argile serait beaucoup plus fragile qu'une maison construite en pierre. Des lois comportementales permettent de prévoir comment le matériau du caillou va se comporter : les lois de la chimie permettent de prévoir la réaction possibles de décomposition, les lois de résistance des matériaux permettent de prévoir si le caillou va pouvoir se déformer (comportement élastique), ou à partir de quel effort la rupture va se produire. De façon similaire, la mécanique des fluides utilise des lois de comportement pour caractériser un fluide et des lois de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) pour étudier le comportement d'un système fluide. Une différence de taille apparaît cependant rapidement. La surface d'un volume de fluide se déforme très facilement, il sera donc très difficile, en pratique, de "suivre" l'évolution d'un volume fluide comme on suivrait le caillou dans son mouvement.

1.2 Lois thermodynamiques

Un système matériel fluide doit en premier lieu satisfaire aux principes de la thermodynamique (Figure 1.2). On considère un volume matériel fluide $\mathcal{V}_m(t)$ délimité par une surface fermée $\mathcal{A}_m(t)$ perméable à la chaleur et au travail. Le premier principe indique que la variation d'énergie totale E du système entre un état 1 et un état 2 est égale à la somme du travail W et de la chaleur Q reçus au cours de la transformation qui mène le système du premier état au second :

$$W + Q = E_2 - E_1$$

l'énergie totale du système étant la somme de l'énergie interne, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Dans le cas d'un système fluide, il est fréquent que le volume ne soit pas fermé mais ouvert, c'est-à-dire qu'il possède une entrée et une sortie de matière. Dans ce cas, pour exprimer l'énergie totale du système, on utilise l'enthalpie au lieu de l'énergie interne.

Le second principe de la thermodynamique s'applique également à un système fluide. Il existe une fonction d'état S , l'entropie, associée au système qui permet de caractériser l'irréversibilité

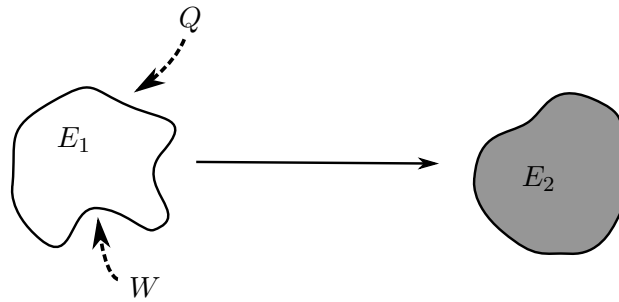


FIGURE 1.2 – Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé indique que la variation d'énergie $E_2 - E_1$ entre un état 1 et un état 2 est égale à la somme de la chaleur et du travail reçus au cours de la transformation.

de certains processus physiques comme la transformation de travail en chaleur. Une variation élémentaire d'entropie dS , que connaît un système au cours d'une transformation élémentaire, est la somme d'une contribution externe au système $\delta_e S$ et une contribution interne au système $\delta_i S$. Ainsi :

$$dS = \delta_e S + \delta_i S \quad \text{avec} \quad \delta_i S \geq 0$$

Si $\delta_i S$ est nulle, la transformation est réversible. Autrement, $\delta_i S$ est positive et la transformation est irréversible. Dans le cas d'un système fermé, la contribution extérieure s'écrit :

$$\delta_e S = \frac{\delta Q}{T}$$

L'objet ici n'est pas de refaire un cours de thermodynamique mais de souligner le fait qu'un volume fluide est un système thermodynamique, et donc satisfait aux principes fondamentaux.

1.3 Lois fondamentales

Le volume $\mathcal{V}_m(t)$ est un volume matériel définissant un système fluide auquel s'appliquent les lois fondamentales des systèmes. En premier lieu, la masse m de fluide contenu dans le volume matériel $\mathcal{V}_m$ se conserve. On peut donc écrire :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

De façon pratique, il est difficile d'accéder à la masse d'un volume de fluide car il arrive fréquemment que le volume ne soit pas homogène, c'est-à-dire que la masse volumique du fluide ρ change d'un endroit à l'autre du volume : la masse volumique dépend de l'espace et du temps $\rho(\mathbf{x}, t)$ (Figure 1.3). La masse de fluide est alors définie comme l'intégrale de la masse volumique sur l'ensemble du volume matériel. La conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (1.1)$$

Cette écriture permet également de prendre en compte le fait que le volume fluide $\mathcal{V}_m$ peut être en mouvement ou se déformer : il varie dans le temps.

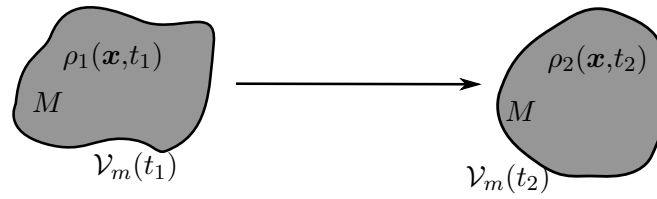


FIGURE 1.3 – Un volume matériel peut se déformer dans le temps. La distribution de masse volumique peut évoluer mais le système étant fermé, la masse totale se conserve.

Un système fluide satisfait également à la loi fondamentale de la dynamique : si l'on exerce une force sur le système, on modifie sa quantité de mouvement suivant la loi $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$. Ici, $\mathbf{F}$ représente la somme de toutes les forces qui s'appliquent sur le fluide. Lorsque l'on applique ce principe à un système fluide, il faut prendre en compte l'inhomogénéité de la masse volumique et des vitesses dans l'espace ainsi que leur variation dans le temps. On écrit donc la variation de quantité de mouvement comme l'intégrale de la quantité $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sur le volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

Les forces sont réparties en deux catégories : les forces surfaciques qui s'exercent sur le contour $\mathcal{A}_m$ du volume et les forces volumiques qui s'appliquent en tout point du volume V_m .

Pour étudier le comportement d'un fluide, on dispose donc des mêmes outils que pour l'étude de n'importe quel système mécanique. Les lois de la thermodynamique permettent d'écrire la conservation de l'énergie du système en fonction des échanges de chaleur et de travail avec l'extérieur. Le système satisfait également à la loi de conservation de la masse et la loi fondamentale de la dynamique. Il est important de noter que cette dernière loi fournit une relation vectorielle entre les forces et les variations de quantité de mouvement. Ces relations vont permettre de définir un système d'équations où les inconnues sont les composantes du champ de vitesse et la pression dans le fluide.

Les relations fondamentales de la mécanique des fluides sont héritées de lois plus générales relativement simples. Ces lois sont applicables sur un volume matériel, mais en mécanique des fluides, cette contrainte pose une difficulté car **il est très difficile d'isoler un volume fluide au sein d'un système**. Si l'on prend l'exemple de l'air et du combustible qui traversent un turboréacteur pour générer une poussée, le système matériel fluide est impossible à prendre en compte dans son ensemble puisque l'air s'écoule à très grande vitesse et que la taille du volume matériel est considérable. On préfère choisir un volume arbitraire $V_a(t)$ associé au corps du turboréacteur pour étudier l'action du fluide sur les organes mécaniques. La particularité de la mécanique des fluides est donc d'appliquer des lois valables pour des volumes matériels à des volumes arbitraires qui ne sont pas nécessairement liés aux fluides étudiés.

1.4 Milieu continu

La définition d'un fluide comme un milieu capable de se déformer sous une contrainte très faible rend compte de la nature microscopique de ce fluide. En regardant de plus près, un fluide est

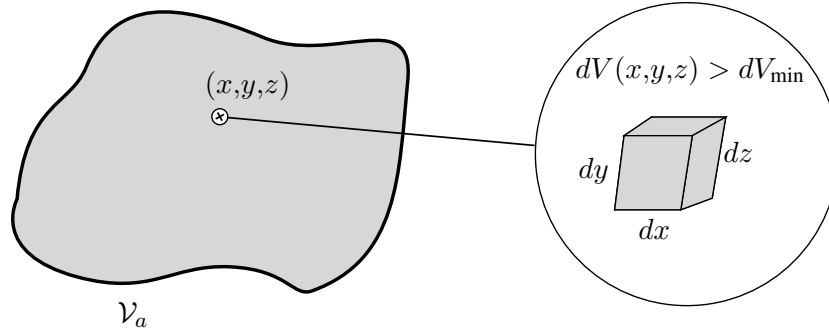


FIGURE 1.4 – En un point (x, y, z) du volume macroscopique V_a est défini un volume élémentaire dV (une particule fluide) de dimensions $dx dy dz$. Le volume dV contient suffisamment de molécules du fluide pour définir des grandeurs moyennes.

constitué de molécules : une molécule d'air occupe approximativement une sphère de diamètre $d = 3,7 \text{ \AA}$. Dans les conditions ambiantes de pression et température, un volume de 22,4 L contient N_a molécules, où $N_a = 6,023 \cdot 10^{23}$ molécules est le nombre d'Avogadro. Une molécule d'air dispose donc d'environ 1 400 fois son volume pour se déplacer avant de rencontrer une autre molécule : à l'échelle moléculaire, la matière est discrète. Le nombre de Knudsen K_n est un nombre sans dimension permettant de comparer l'échelle caractéristique du système étudié l et le libre parcours moyen λ d'une molécule :

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi}nd^2}$$

où n est le nombre de molécules par unité de volume.

À l'échelle macroscopique, le nombre de Knudsen est très petit devant l'unité. On peut alors considérer que **le fluide est un milieu continu**. Les propriétés du fluide (la vitesse, la pression, la température...) sont définies par des variables continues dans tout l'espace. Toute grandeur $\phi(x, y, z)$ mesurée en un point de l'espace est en réalité une moyenne sur toutes les molécules contenues dans une particule fluide dV centrée en (x, y, z) (voir Figure 1.4). Le volume dV doit être plus grand qu'un volume $dV_{\min}$ afin qu'il contienne un nombre statistiquement significatif de molécules, et suffisamment petit pour pouvoir être considéré comme ponctuel à l'échelle macroscopique.

Ainsi, il est possible de définir en tout point de l'espace $\mathbf{x} = (x, y, z)$ la masse volumique $\rho(\mathbf{x}, t)$ du fluide :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \bar{\rho} = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \frac{\delta m}{\delta V}$$

où δm est la masse de fluide contenu dans le volume δV .

De même, la vitesse locale $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ dans le fluide est définie comme la limite de la vitesse moyenne quand le volume fluide tend vers le volume minimal

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

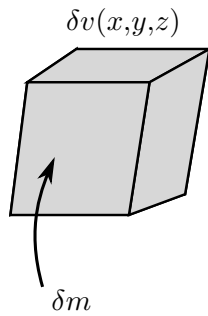


FIGURE 1.5 – Le volume δv est fermé et contient une masse δm constante.

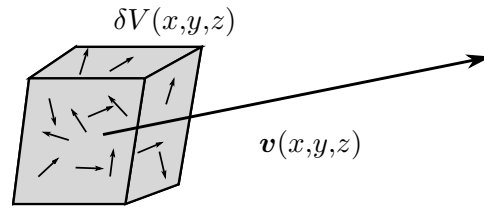


FIGURE 1.6 – Dans le volume élémentaire δV , chaque molécule possède sa propre vitesse. La vitesse locale du fluide en $\mathbf{x} = (x, y, z)$ est la moyenne des vitesses des molécules.

où N est le nombre de molécules contenues dans le volume δV .

Une autre grandeur importante en mécanique des fluides est le vecteur contrainte $\mathbf{t}$ qui est la force exercée sur la surface du volume de contrôle par unité de surface :

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n}) = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta A} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$$

Dans la majorité des cas d'étude, cette hypothèse de milieu continu est satisfaite. Quelques situations particulières nécessitent un examen plus approfondi, en particulier lorsque le milieu est peu dense. On se tournera alors vers la théorie cinétique des gaz où chaque molécule de fluide est considérée comme une sphère indéformable qui interagit avec ses voisines et son environnement.

2 Propriétés des fluides

Les lois mécaniques introduites précédemment dépendent des propriétés du fluide étudié. On peut citer par exemple la compressibilité, la viscosité, le coefficient de diffusion thermique...

2.1 Viscosité

La viscosité μ est une grandeur qui permet de relier la déformation que subit une particule fluide à la contrainte qui lui est appliquée. Plus la viscosité est grande, plus il faudra une contrainte forte pour déformer une particule fluide. Cette grandeur s'exprime en kilogramme par mètre et par seconde. On parle aussi de viscosité dynamique pour la différentier de la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$. La viscosité d'un fluide évolue avec la température ambiante et plusieurs lois permettent de rendre compte de cette évolution. La plus simple est la loi en puissance :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} \simeq \left(\frac{T}{T_0} \right)^n$$

où $T_0 = 273,15 \text{ K}$ et $\mu_0 = \mu(T_0) = 1,711 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Une autre loi couramment utilisée pour les gaz parfaits est la loi de Sutherland définie par :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} \simeq \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

avec $S = 110,4$ K la température de Sutherland. Cette loi est valable pour des températures comprises entre 0 et 550 K avec une précision inférieure à 10%. Comme toutes les lois, ces relations ne sont valables que pour certains fluides dans certaines conditions. La rhéologie est la science qui étudie le comportement des fluides. Elle classe les fluides en fonction de leurs caractéristiques et propose, entre autres, des lois d'évolution de la viscosité.

2.2 Compressibilité

Une propriété très importante des fluides est leur compressibilité. Considérons un volume de fluide V contenant un nombre n fixé de molécules. Ce volume varie en fonction de la pression p et de la température T . Soit un volume $V(T, p)$, sa variation dV s'écrit de façon différentielle :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT$$

On définit alors la compressibilité isotherme κ_T et le coefficient de dilatation thermique β par :

$$\begin{aligned}\kappa_T &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \\ \beta &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p\end{aligned}$$

qui sont toutes les deux des quantités positives caractéristiques du fluide étudié. Pour obtenir les variations de la masse volumique, on considère que le produit ρV qui représente la masse de fluide contenu dans le volume est constant, d'où $\rho dV + V d\rho = 0$. On a alors :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = \kappa_T dp - \beta dT$$

Dans l'ensemble des cas étudiés dans cet ouvrage, on considère que la mécanique des fluides et les transferts thermiques sont découplés, c'est-à-dire que le coefficient d'expansion thermique est nul ($\beta \sim 0$) et que les variations de masse volumique sont uniquement dues à la pression. Autrement dit, la compressibilité isotherme rend compte de la compressibilité du fluide : si κ_T est petit, le fluide est incompressible ; si κ_T est grand, le fluide est compressible. La section [3](#) montre que l'on s'intéresse plus à la compressibilité de l'écoulement qu'à la compressibilité du fluide.

Exemple

En appliquant une pression sur une quantité donnée d'air, son volume diminue (Figure [1.7](#)). Pour quantifier cette diminution, on a $\kappa_T(\text{air}) = 10^{-4} \text{ bar}^{-1}$. Une faible élévation de la pression permet de réduire significativement un volume d'air. Il est important de parler de compression isotherme car la compression d'un fluide compressible réduit le volume mais augmente en même temps la température (phénomène que l'on peut ressentir lorsque l'on gonfle un pneumatique avec une pompe à vélo manuelle). En revanche, l'eau peut être considérée comme incompressible, $\kappa_T(\text{eau}) = 0,7 \text{ bar}^{-1}$. Les gaz sont usuellement considérés comme compressibles et les liquides comme incompressibles même si certaines conditions d'écoulement permettent de négliger la compressibilité des gaz. On explique plus loin que lorsque l'écoulement est lent par rapport à la vitesse du son, la compressibilité des gaz peut être négligée.

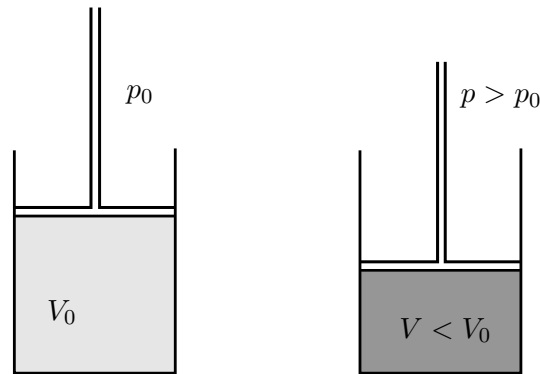


FIGURE 1.7 – Dans le cas d’un fluide compressible, l’augmentation de la pression réduit le volume du gaz. On néglige ici l’augmentation de température associée à cette compression.

2.3 Loi d’état

La compressibilité quantifie la façon dont le volume et la pression d’un fluide évoluent l’un par rapport à l’autre. Pour les gaz, une loi d’état permet d’exprimer la relation entre la pression p , la température T et la masse volumique ρ . La loi d’état la plus couramment utilisée est **la loi des gaz parfaits** qui relie ces grandeurs suivant l’expression

$$\boxed{pV = nRT} \quad \text{ou bien} \quad p = \rho r T \quad \text{avec} \quad r = \frac{R}{W}$$

où R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}\cdot\text{mol}^{-1}$), n le nombre de moles et W est la masse molaire du fluide. Cette loi rend compte du comportement des fluides à basse pression, c’est-à-dire lorsque la densité des molécules est relativement faible. Lorsque la pression s’approche de la pression critique du gaz, cette loi cesse d’être valable. Il faut alors utiliser des lois de gaz réels qui sont généralement des corrections de la loi des gaz parfaits pour prendre en compte les effets de pression. On peut par exemple citer la loi de Van der Waals :

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

où a est la pression de cohésion et b le covolume.

D’autres lois peuvent être utilisées dans le cas de fluides complexes comme par exemple les lois de Soave, de Peng-Robinson ou de Lee et Kestler. . . L’objet de ces lois restent toujours d’établir une relation entre les variables thermodynamiques caractérisant un fluide.

3 Propriétés des écoulements

Les équations de la mécanique des fluides proviennent de principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l’énergie. Ces équations, présentées à la fin de ce chapitre, sont relativement simples à établir mais leur structure mathématique les rendent très difficiles

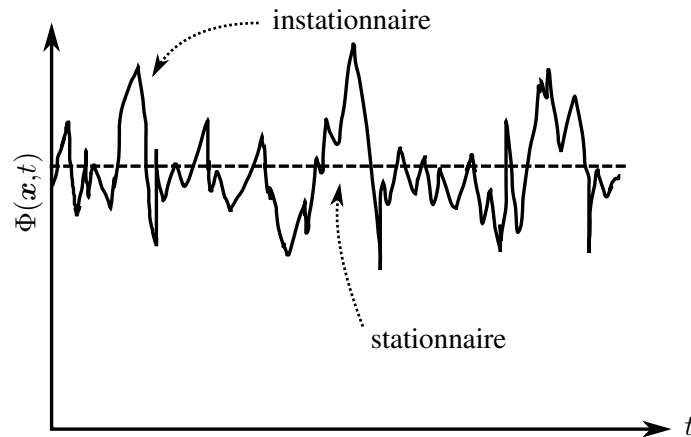


FIGURE 1.8 – La grandeur Φ est mesurée localement en un point x de l'espace. Si l'écoulement est stationnaire la grandeur est constante (— — —) dans le temps, si l'écoulement est instationnaire, Φ varie (—).

à résoudre. L'existence et l'unicité des solutions est toujours un problème ouvert mais, dans de nombreux cas, la résolution est possible en négligeant certains termes par rapport aux autres. Pour cela, il est primordial de comprendre l'écoulement étudié et d'observer les propriétés fondamentales qu'il contient.

3.1 Écoulement instationnaire

La première caractéristique d'un écoulement est **la stationnarité**. L'écoulement est dit stationnaire lorsque toutes les propriétés ϕ du fluide (la vitesse, la température, la pression, la masse volumique, l'énergie...) en un point (x, y, z) de l'espace sont constantes dans le temps :

$$\forall t, \quad \phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) = \text{constante}$$

On écrit de façon équivalente que $\partial/\partial t = 0$. Toutes les variations d'une propriété de l'écoulement par rapport au temps sont nulles. Très fréquemment, on étudie en mécanique des fluides le régime établi, c'est-à-dire le régime stationnaire obtenu après une phase de transition plus ou moins longue. Cette propriété de l'écoulement permet d'éliminer toute référence au temps dans les équations et de supprimer certains termes. Il est donc important de se poser rapidement la question de la stationnarité de l'écoulement étudié. On parlera également de façon équivalente d'écoulements permanents.

3.2 Laminarité

La deuxième caractéristique est relative au régime de l'écoulement. **Le déplacement du fluide se fait soit en régime laminaire, soit en régime turbulent**. Le régime laminaire est caractérisé par la présence de filets fluides parallèles les uns aux autres (Figure 1.9). L'écoulement est

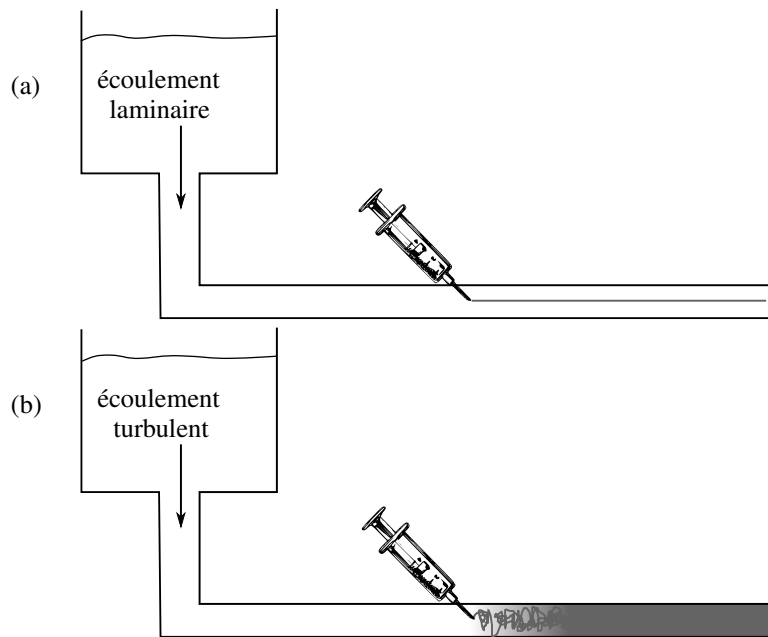


FIGURE 1.9 – Pour mettre en évidence la turbulence d’un écoulement, on injecte un colorant. Si l’écoulement est laminaire (a), le filet de colorant reste observable. Si l’écoulement est turbulent (b), le colorant est mélangé par la turbulence.

régulier et organisé. En régime turbulent, les lignes de courant ne peuvent pas être distinguées les unes des autres, le mouvement du fluide est désordonné et aléatoire. C’est l’Irlandais Osborne Reynolds qui a mis en évidence expérimentalement ces deux régimes en déposant une goutte de colorant au sein d’un écoulement. Lorsque l’écoulement est laminaire, le colorant est transporté par l’écoulement le long d’une ligne clairement visible. Lorsque l’écoulement est turbulent, le colorant est rapidement mélangé au fluide en mouvement et finit par teinter l’ensemble du fluide. Il est alors impossible de distinguer le colorant du fluide porteur, il y a eu homogénéisation.

La transition entre ces deux régimes d’écoulement s’opère de façon continue. Le nombre de Reynolds Re permet de déterminer le régime de l’écoulement. C’est un nombre sans dimension qui s’exprime par la relation :

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, U sa vitesse caractéristique, d une dimension caractéristique de l’écoulement et μ la viscosité dynamique du fluide.

Exemple

On peut illustrer cette relation en calculant le nombre de Reynolds d’un écoulement d’eau autour d’une sphère de diamètre $d = 5$ cm pour deux vitesses différentes $U_1 = 5$ m/s et $U_2 = 80$ m/s. La densité de l’eau est égale à $1\,000$ kg/m³ et sa viscosité dynamique est $\mu = 10^{-3}$ kg m⁻¹ s⁻¹. Alors

$$Re_1 = \frac{1000 \times 0,05 \times 5}{10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^5 \quad \text{et} \quad Re_2 = \frac{1000 \times 0,05 \times 80}{10^{-3}} = 4 \cdot 10^6$$

Pour un écoulement externe, c'est-à-dire un écoulement pour lequel le fluide s'écoule autour d'un obstacle, le nombre de Reynolds critique indiquant le changement de régime est égal à $Re_c = 5 \cdot 10^5$. Dans le premier cas de l'exemple, le nombre de Reynolds Re_1 est inférieur au nombre de Reynolds critique : l'écoulement est laminaire. Dans le deuxième cas, l'écoulement est turbulent.

Pour un écoulement interne, c'est-à-dire un écoulement où le fluide se propage à l'intérieur d'un contenant solide (tuyau, réservoir...), le nombre de Reynolds de transition est égal à $Re_c = 2\,500$.

Le régime de l'écoulement est donc déterminé par la valeur du nombre de Reynolds. Ce nombre augmente lorsque la vitesse de l'écoulement augmente mais ce n'est pas la seule cause de turbulence. L'écoulement peut changer de régime si l'on diminue la viscosité du fluide ou si l'on augmente sa masse volumique. Enfin, la dimension caractéristique de l'écoulement joue aussi un rôle essentiel : dans un tuyau de petite section, l'écoulement sera plus facilement turbulent que dans un tuyau de grand diamètre. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui quantifie l'importance des phénomènes visqueux par rapport aux phénomènes convectifs.

3.3 Écoulement compressible

On a vu à la section 2 qu'un fluide était plus ou moins compressible. Il est facile de réduire le volume d'un gaz en augmentant la pression ; il est plus difficile de réduire le volume d'un liquide en jouant sur cette même pression. La compressibilité du fluide a pour conséquence de modifier la répartition spatiale de la masse volumique si le champ de pression n'est pas uniforme. Si l'écoulement impose une différence de pression entre deux points de l'espace (par exemple autour d'une aile d'avion, la pression en-dessous de l'aile est plus élevée que la pression au-dessus de l'aile) et que le fluide est compressible, sa masse volumique va changer d'un point à l'autre. En revanche, si le fluide est incompressible, la différence de pression n'aura pas d'impact sur la masse volumique du fluide. Un fluide parfaitement incompressible a une masse volumique constante dans l'espace. En réalité, tous les fluides ont une certaine compressibilité mais, en fonction de l'écoulement, on peut négliger ou non cette compressibilité. L'écoulement est alors qualifié de **compressible** (la densité dépend de l'espace) ou **incompressible** (la densité est la même en tout point de l'espace).

Pour modifier la masse volumique d'un fluide incompressible, il faut lui appliquer une très grande variation de pression ou de température. Les écoulements classiques ne génèrent pas de très grandes variations de pression ou de température : les écoulements de fluides incompressibles sont incompressibles. En revanche, pour modifier la masse volumique d'un fluide compressible, une petite variation de la pression ou de la température suffit. Si l'écoulement induit des variations de pression ou de température d'un point à l'autre de l'espace, la masse volumique du fluide compressible peut changer. Pour savoir si un écoulement de fluide compressible est compressible ou incompressible, il faut comparer les variations de pression à la compressibilité du fluide. Pour cela on utilise le nombre de Mach M défini par

$$M = \frac{v}{a}$$

où v est la vitesse de l'écoulement et a la vitesse du son. a a pour expression générale :

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

et permet donc de quantifier la variation de masse volumique induite par une variation de pression à entropie constante. En considérant l'écoulement comme isentropique, on peut montrer que pour un fluide compressible, la variation de la masse volumique avec la pression est de l'ordre de grandeur du nombre de Mach au carré :

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta p} \sim M^2$$

Si le nombre de Mach est faible, l'écoulement peut être considéré comme incompressible même si le fluide est compressible. Si le nombre de Mach est grand, l'écoulement est compressible et l'on doit prendre en compte les variations de la masse volumique dans l'espace. Pour de l'air, si le nombre de Mach est inférieur à 0,1 l'écoulement est considéré comme incompressible. La masse volumique ne dépend alors pas localement de la pression, c'est-à-dire que la masse volumique d'un petit volume matériel situé en (x, y, z) est constante lorsque le volume se déplace, on parle alors d'écoulement isochore (à volume constant). Cette notion est détaillée après avoir défini l'équation de conservation de la masse à la section [5](#)

3.4 Écoulement multi-espèces

Très fréquemment, les écoulements étudiés sont composés de plusieurs espèces. L'air est par exemple un gaz de plusieurs espèces, contenant en majorité du dioxygène et du diazote. Dans le cas de l'air, les deux espèces majoritaires ont des propriétés mécaniques et thermiques très voisines. On peut considérer cette association comme un fluide unique. Cependant, il existe des cas où le fluide est constitué d'espèces aux propriétés différentes. Il est alors important de connaître les quantités respectives de chaque espèce pour pouvoir déterminer leurs évolutions respectives. Ceci est particulièrement vrai lorsque l'on étudie des milieux réactifs où la composition chimique du milieu change avec le temps et l'espace.

Si l'on considère un milieu contenant k espèces différentes, avec n_k le nombre de moles de l'espèce k et n le nombre total de moles contenues dans le fluide, alors :

$$n = \sum_k n_k$$

La masse m_k de l'espèce k est donnée par

$$m_k = n_k W_k$$

où W_k est la masse molaire de l'espèce k . Ce que l'on cherche à déterminer à tout instant est la proportion de l'espèce k dans le mélange par rapport aux autres espèces présentes. Pour cela on définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{la fraction molaire : } X_k &= \frac{n_k}{n} \\ \text{la fraction massique : } Y_k &= \frac{m_k}{m} \\ \text{la concentration : } c_k &= \frac{n_k}{V} \\ \text{la pression partielle : } p_k &= X_k p_{\text{total}} \end{aligned}$$

où p_{total} est la pression totale du mélange. Ces quantités peuvent être reliées les unes aux autres et, en fonction du domaine d'application, on préfère utiliser une grandeur plutôt qu'une autre. On a en particulier le lien :

$$Y_k = \frac{n_k W_k}{n W} = X_k \frac{W_k}{W}$$

où W est la masse molaire du mélange obtenue grâce à la relation

$$W = \sum_k X_k W_k$$

Pour étudier des systèmes impliquant plusieurs espèces, il faut écrire les équations de conservation pour chacune des espèces afin de vérifier la loi de Lavoisier. Ainsi le système d'équations décrivant le mélange augmente significativement : il a autant de lois de conservation que d'espèces présentes. L'étude des écoulements réactifs peut faire intervenir plusieurs centaines d'espèces qu'il faut toutes conserver. . .

Les milieux multi-espèces sont aussi très présents dans le corps humains où un grand nombre de maladies proviennent de déséquilibres d'éléments. La proportion d'oxygène et de globules dans le sang est un témoin de la santé des personnes. Pouvoir mesurer ces quantités est vital.

3.5 Écoulement multi-phasique

Les écoulements multi-phasiques font intervenir un mélange de fluides présents dans des phases différentes. C'est le cas des mélanges liquide-gaz que l'on rencontre dans beaucoup d'applications industrielles. Par exemple, les générateurs de vapeur présents dans les centrales nucléaires contiennent un mélange d'eau liquide et de vapeur d'eau. Il est essentiel de bien contrôler la proportion de chaque phase car la compressibilité du mélange en dépend.

Un autre exemple est le cas du plongeur. En plongeant sous l'eau, la pression environnante augmente, ce qui a pour conséquence de comprimer le diazote contenu dans le sang et d'augmenter sa fraction massique. Des paliers de décompression sont nécessaires lors de la remontée pour laisser le temps à l'organisme d'éliminer cet excès d'azote avant qu'il ne se vaporise dans le sang.

Certaines configurations font également intervenir des particules solides. C'est le cas dans les moteurs fusée à propergols solides, où des billes d'alumine peuvent se détacher du combustible solide et interagir avec l'écoulement gazeux. Ces particules peuvent également se liquéfier sous les effets conjugués de la pression et de la température.

La description de ces écoulements est particulièrement complexe car les propriétés, les masses volumiques, les compressibilités des espèces peuvent varier sur une large gamme. Dans le cas de gouttes, des phénomènes de collisions, de coalescence et d'arrachement viennent fortement modifier la dynamique des écoulements. Plusieurs approches peuvent être utilisées pour décrire ces milieux mais leur complexité dépasse largement le cadre de cet ouvrage.

4 Outils mathématiques

Avant de présenter les équations fondamentales de la mécanique des fluides, il est nécessaire de fixer quelques conventions d'écriture et de rappeler la définition d'opérateurs classiques.

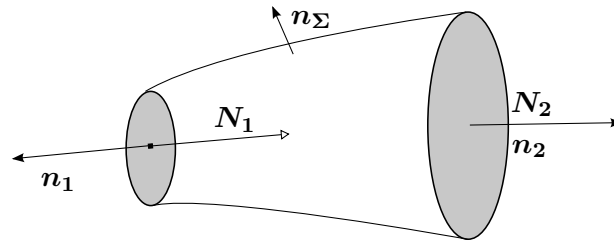


FIGURE 1.10 – Convention d’orientation des vecteurs normaux aux surfaces délimitant un volume fermé : le fluide entre par la surface 1 ($n_1 = -N_1$) et sort par la surface 2 ($n_2 = N_2$), la surface Σ est un mur.

4.1 Opérateurs vectoriels

La description des écoulements en mécanique des fluides nécessite de manipuler des grandeurs scalaires (pression, température, masse volumique...), vectorielles (gradients de scalaires, vitesse, forces...) et tensorielles (contraintes, taux de déformations, gradients de vecteurs...), toutes dépendantes *a priori* de l’espace et du temps. Les opérations sur ces éléments définissent un algèbre vectoriel dont il est bon de rappeler les formulations et fixer les notations.

Les variables scalaires sont notées en italique, ainsi la pression est notée p , la température T et ainsi de suite. Les grandeurs vectorielles sont notées en italique gras : le champ de vitesse est alors noté $\mathbf{v}$, la position dans l’espace étant repérée par le vecteur $\mathbf{x}$. Les tenseurs sont quant à eux notés avec une lettre capital sans empattement : le tenseur des contraintes est alors noté $\mathbf{T}$.

Plusieurs opérations entre ces éléments sont notées comme suit :

- le produit scalaire est noté avec un point : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
- le produit vectoriel est noté : $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- le produit tensoriel est noté avec le symbole $\otimes$: $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$
- le gradient d’un scalaire ou d’un vecteur est noté avec le symbole nabla : $\nabla \phi, \nabla \mathbf{v}$
- la divergence d’un scalaire ou d’un vecteur est notée avec le symbole nabla : $\nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{T}$
- le rotationnel est le produit vectoriel de l’opérateur nabla avec le vecteur : $\nabla \times \mathbf{v}$

On ne détaille pas ici les expressions de ces grandeurs. Dans la suite, ces opérateurs seront indifféremment utilisés en coordonnées cartésiennes, circulaires ou sphériques.

Enfin, il est nécessaire de définir une convention pour l’orientation des vecteurs normaux aux surfaces. La mécanique des fluides repose sur des bilans effectués aux frontières de volumes de contrôle. Ces frontières peuvent être soit imperméables au fluide (mur) ou représenter des surfaces d’échange de matière avec l’extérieur, le fluide entrant et/ou sortant du volume de contrôle à travers ces surfaces. Pour définir une surface, on utilise le vecteur unitaire normal à cette surface. On prendra comme convention :

- le vecteur unitaire normal dirigé vers l’extérieur du volume de contrôle est noté $\mathbf{n}$
- le vecteur unitaire normal dirigé dans le sens de l’écoulement est noté $\mathbf{N}$

Cette convention arbitraire permet d’éviter un grand nombre d’erreurs de signe qui viendraient polluer les calculs.

4.2 Théorème de Green-Ostrogradski

Parmi les outils mathématiques, le théorème de Green-Ostrogradski revêt une importance particulière en mécanique des fluides car il permet d'écrire la correspondance entre l'évolution d'une variable dans un volume V et son flux à la surface A de ce volume.

Soit une grandeur scalaire $G(\mathbf{x}, t)$, le théorème s'écrit alors :

$$\int_V \nabla G dV = \int_A G \mathbf{n} dA \quad (1.3)$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la surface.

Si l'on considère la grandeur vectorielle $\mathbf{f}$, le théorème de Green-Ostrogradski s'écrit

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \int_A \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1.4)$$

Ce théorème traduit la conservation de la quantité $\mathbf{f}$ puisque la divergence de cette grandeur sur le volume V est égale au flux de cette grandeur au travers de la surface A . Dans la suite, on applique indifféremment les deux expressions du théorème à la masse volumique, la pression ou le champ de vitesse.

4.3 Dérivée matérielle

Le fluide est considéré comme un milieu continu (section I), c'est-à-dire que le fluide remplit uniformément l'ensemble du domaine d'étude et que les propriétés du fluide sont décrites par des champs scalaires ou vectoriels. Une particule fluide est un petit élément de volume dV situé en un point de coordonnées (x, y, z) . Ce volume dV est suffisamment petit pour avoir statistiquement des propriétés homogènes (une seule température, une seule vitesse, une seule pression...) et suffisamment grand pour contenir un nombre de molécules de fluide suffisant pour obtenir une moyenne convergée. On considère ϕ une variable scalaire attachée à cette particule fluide (la température, la pression...) et l'on veut observer comment $\phi(x, y, z, t)$ varie dans le temps. ϕ varie avec le temps mais la particule se déplace aussi avec sa vitesse propre. La vitesse de la particule est donnée par le vecteur $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial t} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial t} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial t} \mathbf{e}_z$$

Comme ϕ dépend de quatre variables, on écrit :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi} \quad (1.5)$$

Cette relation montre que toute variable attachée à une particule varie à cause (1) d'une variation locale et (2) d'une variation due au déplacement de la particule. Le même raisonnement peut

être conduit avec une variable vectorielle $\mathbf{B}$. Cette variable attachée à une particule fluide voit sa valeur changer à cause de sa variation locale dans le temps et le déplacement de la particule :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}} \quad (1.6)$$

Ici, l'expression $\nabla \mathbf{B}$ est le gradient d'un vecteur, il s'agit donc d'un tenseur d'ordre 2, qui est ensuite multiplié par le vecteur vitesse. Le terme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}$ peut s'écrire de façon équivalente $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}$.

L'ensemble des lois de la mécanique s'appliquent aux particules fluides. Pour écrire ces lois, il est nécessaire d'exprimer la variation dans le temps de grandeurs comme la masse volumique ou la quantité de mouvement.

Exemple

L'accélération d'une particule fluide est calculée en dérivant la vitesse de cette particule par rapport au temps. Si l'on applique la relation (1.6) avec $\mathbf{B} = \mathbf{v}$, on obtient :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

Il est important de noter que l'on peut donc avoir un écoulement stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et une accélération non nulle.

4.4 Volumes de contrôle

La mécanique des fluides étudie le comportement des fluides en appliquant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à des systèmes fluides. Un système fluide est un volume matériel $\mathcal{V}_m(t)$ contenant toujours les mêmes molécules de fluide. Par définition, un tel volume a la capacité de se déformer très facilement. Sa surface $\mathcal{A}_m(t)$ évolue avec la vitesse locale du fluide notée $\mathbf{v}$. Il est extrêmement compliqué de définir avec précision les frontières de ce volume et de suivre leur évolution dans le temps. On a alors recours à d'autres volumes, des volumes de contrôle plus facilement identifiables dans l'espace mais définis indépendamment du fluide et de son mouvement. Il y a plusieurs façons de définir ces volumes de contrôle en fonction de la géométrie des éléments solides entourant le fluide ou des quantités que l'on souhaite calculer.

Si l'on veut étudier le comportement d'un fluide à l'intérieur d'une canalisation et calculer les forces créées par le fluide sur les parois solides, on utilise un volume $\mathcal{V}$, fixe dans l'espace, défini par les parois de la conduite et les sections d'entrée et de sortie. Le volume est lié à la canalisation ; il ne se déforme pas et ne bouge pas dans le temps.

Si maintenant, on s'intéresse au comportement d'un fluide dans la chambre de combustion d'un moteur à piston, les parois du contenant sont mobiles. Les mouvements d'aller et retour du piston font varier le volume de la chambre, le volume contenant le fluide se déforme dans le temps. On a alors un volume arbitraire $\mathcal{V}_a(t)$ qui évolue dans le temps. On associe à sa surface une vitesse $\mathbf{w}$. Il permet de prendre en compte les variations de la géométrie solide.

Ces deux volumes sont des volumes de contrôle commodes pour étudier les systèmes physiques mais ils n'ont aucun lien avec le fluide, leur évolution ne dépend pas du comportement du fluide.

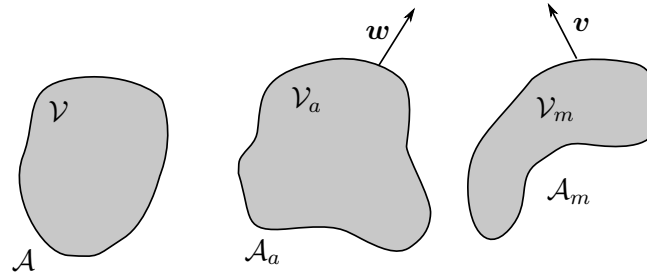


FIGURE 1.11 – Trois volumes de contrôle différents (de la gauche vers la droite) : un volume fixe, un volume arbitraire avec sa propre vitesse w et un volume matériel dont la surface se déplace à la vitesse locale du fluide v .

On dispose donc de différents volumes de contrôle (Figure 1.11) :

- $\mathcal{V}$, un volume fixe
- $\mathcal{V}_a$, un volume arbitraire
- $\mathcal{V}_m$, un volume matériel

Les deux premiers sont facilement définissables car usuellement liés à la géométrie. Le troisième est le volume contenant toujours les mêmes éléments fluides sur lequel s'appliquent les lois de conservation. Toutes les lois de conservation de la mécanique s'appliquent uniquement à un volume matériel, il faut donc établir des relations entre ces différents volumes pour pouvoir intégrer de façon équivalente les propriétés physiques des fluides sur tous les types de volume. C'est l'objet des théorèmes de transport.

4.5 Théorème de transport

Le théorème de transport est un outil mathématique qui permet de calculer des intégrales dont les bornes sont mobiles. Dans le cas de la mécanique des fluides, on souhaite intégrer les propriétés locales d'un fluide (sa masse volumique, sa pression, sa vitesse...) sur un volume de contrôle variable dans le temps. On définit $G(\mathbf{x}, t)$ une grandeur scalaire locale, au point de coordonnées $\mathbf{x}$. On souhaite intégrer cette quantité sur un volume arbitraire $\mathcal{V}_a(t)$ dont la surface $\mathcal{A}_a(t)$ évolue à la vitesse w . Le théorème de transport s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_a(t)} G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{V}_a(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{A}_a(t)} G \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1.7)$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à la surface $\mathcal{A}_a$. Les trois termes qui apparaissent dans cette expression ont une interprétation physique que l'on retrouvera dans toutes les lois de conservation. Le terme de gauche exprime la variation de G sur l'ensemble du volume. Cette variation est due à deux phénomènes : (1) la variation locale de G dans le temps, (2) le flux de G à travers la surface délimitant le volume. Deux cas particuliers de cette expression sont obtenus pour deux volumes particuliers.

1. Si le volume arbitraire est fixe alors $w = 0$ d'où

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial G}{\partial t} dV \quad (1.8)$$

2. Si le volume arbitraire coïncide avec le volume matériel, la vitesse de sa surface est la vitesse du fluide, soit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial G}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{A}_m(t)} G \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1.9)$$

5 Conservation de la masse

Une application immédiate du théorème de transport permet d'exprimer la première équation fondamentale de la mécanique des fluides : la conservation de la masse.

5.1 Équation de continuité

On note M la masse de fluide contenue dans le volume matériel $\mathcal{V}_m$ délimité par la surface $\mathcal{A}_m$. La masse n'étant pas nécessairement répartie de façon homogène dans le volume. On écrit la masse comme :

$$M = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho dV$$

Par définition du volume matériel, la masse de fluide contenue dans ce fluide ne varie pas. On peut donc écrire :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0$$

Pour détailler le terme de droite, on applique le théorème de transport sur un volume matériel (équation [1.9](#)) en prenant $G = \rho$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{A}_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet de réécrire le terme de droite comme une seule intégrale de volume,

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] dV = 0$$

La dernière relation est vraie quelque soit le volume matériel choisi, c'est donc l'intégrande qui doit être nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

(1.10)

Localement, c'est-à-dire en tout point (x, y, z) de l'espace, et à tout instant t , la masse volumique et la vitesse de l'écoulement doivent satisfaire à cette relation pour s'assurer que la masse est conservée. Cette expression est indépendante du volume de contrôle choisi.

5.2 Théorème de Reynolds

L'équation de continuité (équation 1.10) fournit une relation entre les deux propriétés d'un écoulement que sont la masse volumique et la vitesse. Cette relation permet d'écrire une forme particulière du théorème de transport connue sous le nom de théorème de Reynolds.

Il s'agit d'écrire le théorème de transport sur un volume matériel pour une fonction G de la forme $\rho\phi$ avec ρ la masse volumique :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho\phi(\mathbf{x},t) dV &= \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho\phi}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho\phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \\
 &= \int_{V_m(t)} \left(\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \rho \mathbf{v}) \right) dV \\
 &= \int_{V_m(t)} \left(\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dV \\
 &= \int_{V_m(t)} \underbrace{\phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right)}_{(1)} + \underbrace{\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi \right)}_{(2)} dV
 \end{aligned}$$

Le terme (1) est l'expression locale de la conservation de la masse (équation 1.10), cette quantité est donc nulle. Le terme (2) est la dérivée matérielle de la grandeur ϕ (équation 1.5). On obtient donc le théorème de Reynolds

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho\phi dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{d\phi}{dt} dV} \quad (1.11)$$

5.3 Écoulements incompressibles

La section 3 a permis d'introduire la notion de compressibilité de l'écoulement. L'équation de conservation de la masse permet d'apporter une condition sur le champ de vitesse permettant de définir un écoulement incompressible.

On considère localement, en $\mathbf{x} = (x, y, z)$, une particule fluide constituée d'une masse de fluide m , d'une densité ρ et d'un volume V . **L'écoulement est incompressible si la masse volumique ρ de cette particule reste constante lorsque la particule se déplace.** La masse de fluide contenue dans le volume V est constante, donc la grandeur $\rho V = m$ est constante. Un écoulement incompressible est donc un écoulement isochore car si ρ reste constant au cours de l'évolution alors V doit également rester constant.

Mathématiquement, on écrit la conservation locale de la masse volumique :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

En détaillant la dérivée matérielle et en utilisant la conservation de la masse, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \\
 &= -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0
 \end{aligned}$$

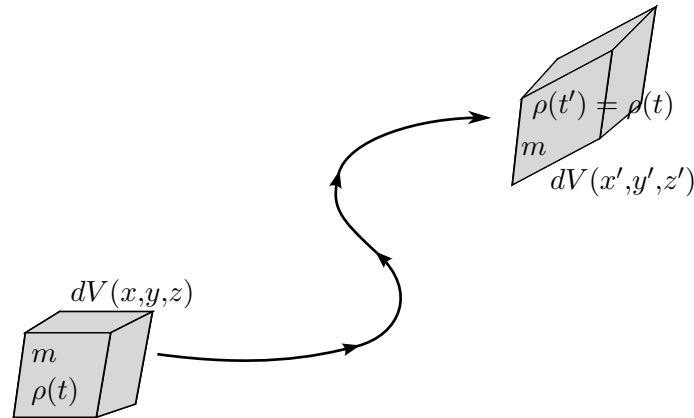


FIGURE 1.12 – Un volume élémentaire dV contient une masse m de fluide. Lors du déplacement de tout volume élémentaire, si la masse volumique ρ reste constante, l'écoulement est incompressible.

Par conséquent, la conservation de la masse volumique d'une particule fluide le long de son trajet implique que la divergence de la vitesse soit nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.12)$$

Un écoulement est donc incompressible si et seulement si la divergence de la vitesse est nulle. Ainsi, faire l'hypothèse que l'écoulement est incompressible induit une condition forte sur le champ de vitesse. Cette condition se révèle très utile pour résoudre analytiquement une grande variété d'écoulements où la compressibilité a une influence minime. À partir du chapitre 2, l'écoulement est considéré comme incompressible et l'ensemble des propriétés des écoulements sont calculées dans ces conditions.

Les écoulements compressibles représentent une branche avancée de la mécanique des fluides où les échanges d'énergie jouent un rôle essentiel.

5.4 Bilan de masse macroscopique

L'équation (1.10) impose une relation *locale* entre la masse volumique d'un fluide et le champ de vitesse associé, et ce afin de conserver la masse. Il est intéressant et utile de regarder à l'échelle macroscopique les conditions nécessaires pour s'assurer que la masse est conservée. L'échelle macroscopique est l'échelle des problèmes d'ingénierie couramment rencontrés, elle s'étend de quelques millimètres (par exemple des durites dans un moteur automobile) jusqu'à plusieurs dizaines de mètres (par exemple pour l'étude des écoulements autour d'un avion ou d'un lanceur spatial).

On définit un volume de contrôle arbitraire macroscopique $\mathcal{V}$ délimité par une surface solide Σ et deux surfaces A_1 et A_2 par lesquelles le fluide entre et sort respectivement du volume. Cette configuration est celle d'un fluide circulant dans un corps solide comme un tuyau. Le volume arbitraire est fixe et contient une masse $M(t)$ de fluide. La figure 1.13 présente un schéma de cette configuration repérée par les vecteurs normaux aux surfaces.

La variation de la masse contenue dans le volume $\mathcal{V}$ s'exprime à l'aide de la relation :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dV$$

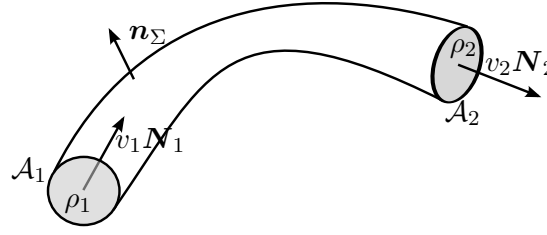


FIGURE 1.13 – Volume arbitraire défini par ses surfaces et ses normales. Les propriétés du fluide et les conditions d'écoulement sont définies en entrée et sortie du volume.

En utilisant le théorème de transport sur un volume arbitraire fixe (équation [1.8](#)) et l'équation de continuité (équation [1.10](#)), on obtient :

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV = - \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

La variation de la masse dans un volume arbitraire fixe dépend donc des flux de masse au travers des surfaces délimitant le volume. Si l'on reprend le volume défini à la figure [1.13](#), on peut décomposer l'intégrale de surface en trois intégrales sur les trois surfaces (Σ , A_1 et A_2) délimitant le volume de contrôle, soit

$$- \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

La surface Σ correspond à une paroi solide. On peut alors faire deux hypothèses différentes quant au comportement du fluide au voisinage de cette paroi :

1. le fluide est idéal c'est-à-dire que l'on néglige les effets de sa viscosité sur son mouvement. Dans ce cas, le fluide glisse sur la paroi et sa vitesse est tangente à la paroi. On a alors

$$\forall \mathbf{x} \in \Sigma, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

2. la viscosité du fluide ne peut pas être négligée et le fluide adhère à la paroi. Dans ce cas, la vitesse du fluide à la paroi est nulle

$$\forall \mathbf{x} \in \Sigma, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

Ces deux analyses montrent que quelque soit l'hypothèse formulée sur le comportement du fluide, le flux de masse au travers de la paroi Σ est nul :

$$\int_{\Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

Les surfaces A_1 et A_2 sont des sections de la conduite aux travers desquelles le fluide entre et sort du volume de contrôle. Si l'on veut détailler le bilan de masse, il est nécessaire à ce stade de faire des hypothèses sur le comportement du fluide au niveau de ces surfaces. Pour cela, on fait l'hypothèse que l'écoulement est unidimensionnel en entrée et en sortie du volume de contrôle.

Autrement dit, la vitesse et la masse volumique du fluide dans les sections d'entrée et de sortie ne dépendent pas du point de la surface considéré :

$$\forall \mathbf{x} \in A_i, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_i \mathbf{N}_i \quad \text{et} \quad \rho(\mathbf{x}) = \rho_i \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2$$

En tout point des sections, la vitesse est normale à la section et de norme constante. Si l'on néglige la viscosité du fluide, cette hypothèse est exacte car le fluide glisse à la paroi. En revanche, si les effets de la viscosité ne sont pas négligeables, un profil de vitesse s'établit dans la section entre une vitesse nulle aux parois et une vitesse maximale au centre de la conduite. Dans le cas d'un écoulement laminaire, la section suivante montre que le profil de vitesse est de forme parabolique, c'est dans ce cas que l'hypothèse d'unidimensionnalité de l'écoulement est la plus forte. Dans le cas turbulent, le gradient de vitesse à la paroi est très important et le profil de l'écoulement est quasiment unidimensionnel sauf au voisinage des parois. L'hypothèse d'écoulement unidimensionnel est donc une hypothèse qui permet une première approximation du profil de vitesse rencontré dans la majorité des écoulements industriels fortement turbulents.

Pour un écoulement unidimensionnel en entrée et en sortie du volume de contrôle, on exprime le flux de masse aux travers des surfaces d'échanges par les relations :

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_{A_1} \rho_1 v_1 \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{n} dA = -\rho_1 v_1 S_1 \\ \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_{A_2} \rho_2 v_2 \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{n} dA = \rho_2 v_2 S_2 \end{aligned}$$

où S_1 et S_2 sont respectivement les surfaces des sections A_1 et A_2 . La variation de masse dans le volume de contrôle pour un écoulement unidimensionnel s'écrit alors

$$\frac{dM}{dt} = \rho_2 v_2 S_2 - \rho_1 v_1 S_1$$

Deux cas particuliers de cette expression sont particulièrement utiles dans les écoulements pratiques.

Premièrement, il est fréquent de s'intéresser aux écoulements en régime permanent, c'est-à-dire quand l'écoulement est stationnaire. Dans ce cas, les propriétés de l'écoulement ne dépendent pas du temps. En particulier, la masse de fluide M contenue dans le volume de contrôle reste constante avec le temps ce qui permet d'écrire :

Pour un écoulement,

1. unidimensionnel en entrée et en sortie,
2. stationnaire,

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \dot{m}$$

où $\dot{m}$ est le débit massique.

Deuxièmement, l'écoulement peut également être incompressible. On rappelle qu'un écoulement est incompressible lorsque la masse volumique d'une particule fluide reste constante

au cours de son évolution. Une particule initialement dans la section d'entrée du volume de contrôle $\mathcal{V}$ possède une masse volumique ρ_1 . Cette particule passera un instant plus tard dans la section de sortie où elle aura une masse volumique ρ_2 . Pour que l'écoulement soit incompressible, il faut que $\rho_1 = \rho_2$. La conservation de la masse dans le volume de contrôle s'écrit alors

Pour un écoulement,

1. unidimensionnel en entrée et en sortie,
2. stationnaire,
3. incompressible,

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = q_v$$

où q_v est le débit volumique.

Ces relations de conservation à l'échelle macroscopique permettent de relier les propriétés du fluide en différents points du système et de dimensionner les installations afin de contrôler la vitesse de l'écoulement. En effet, en jouant sur les surfaces de passage, il est possible d'accélérer ou ralentir le fluide en fonction de conditions que l'on souhaite établir.

6 Conservation de quantité de mouvement

La loi de conservation de la masse détaillée dans la section précédente établit une première relation entre deux grandeurs caractéristiques de l'écoulement : la vitesse et la masse volumique. Cette équation fait intervenir quatre inconnues (les trois composantes de la vitesse et la masse volumique), il est donc nécessaire d'établir d'autres équations liant les propriétés caractéristiques de l'écoulement.

6.1 Quantité de mouvement

Le fluide contenu dans un volume matériel $\mathcal{V}_m$ est un système mécanique, il satisfait au principe fondamental de la dynamique : la variation de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces qui s'appliquent sur le système. La quantité de mouvement s'écrit :

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{v} dV$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}$$

Le terme de gauche peut être écrit différemment à l'aide du théorème de Reynolds (équation [1.11](#)) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

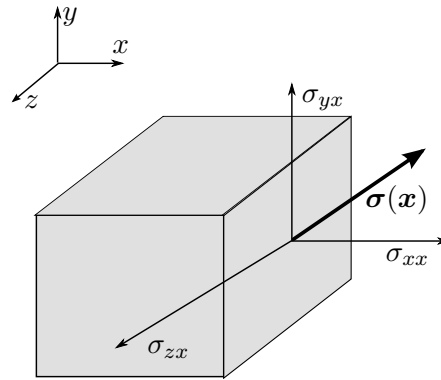


FIGURE 1.14 – La contrainte $\sigma(\mathbf{x})$ est la force par unité de surface qui s'exerce sur la surface de normale $\mathbf{x}$. Elle a trois composantes : σ_{xx} suivant l'axe x , σ_{yx} suivant l'axe y et σ_{zx} suivant l'axe z .

Afin de détailler le terme de droite, on s'intéresse aux forces qui s'exercent sur le volume matériel. On distingue deux catégories de forces : les forces volumiques et les forces surfaciques.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_v$$

Les forces volumiques sont des forces issues d'un champ extérieur au volume (gravité, champ électrique, champ magnétique...) et qui s'appliquent à tous les éléments du volume. Parmi toutes les forces volumiques, on retiendra dans le cadre de ce cours uniquement la force gravitationnelle :

$$\mathbf{F}_v = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{g} dV$$

Les forces surfaciques extérieures au volume sont les forces qui s'appliquent sur la surface délimitant le volume de contrôle. Elles s'expriment à l'aide de la contrainte $\sigma(\mathbf{n})$ qui est une force élémentaire appliquée sur la surface dA de normale $\mathbf{n}$. Ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{F}_s = \int_{\mathcal{A}_m(t)} \sigma(\mathbf{n}) dA$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au volume matériel de fluide $\mathcal{V}_m$ s'écrit alors :

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{\mathcal{A}_m(t)} \sigma(\mathbf{n}) dA \quad (1.13)$$

6.2 Contraintes dans un milieu continu

Une contrainte est une force par unité de surface. En trois dimensions, les forces ont trois composantes et peuvent s'exercer sur une surface dont la normale possède également trois composantes. On définit alors le tenseur des contraintes $\mathbf{T}$ dont l'élément σ_{ij} représente la composante i de la force qui s'exerce sur une surface élémentaire dA de normale j (Figure 1.14).

Les contraintes ont la même dimension que la pression. La pression est une force normale à la paroi qui s'exerce sur une surface A et qui ne dépend pas du fluide. Elle est imposée par les conditions thermodynamiques de l'environnement. On distingue alors dans le tenseur

des contraintes, la contribution de la pression p et la contribution des efforts visqueux qui, eux, dépendent des déformations à l'intérieur du fluide induites par l'écoulement. Pour cela, le tenseur $\mathbf{T}$ prend la forme :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p + \tau_{zz} \end{pmatrix} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

où les éléments τ_{ij} sont les contraintes visqueuses, $\mathbf{T}$ le tenseur identité et $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses.

La mécanique des milieux continus permet d'établir les propriétés du tenseur des contraintes $\mathbf{T}$. D'une part, le tenseur est symétrique :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

et d'autre part, le vecteur contrainte s'exprime comme le produit scalaire du tenseur des contraintes et de la normale $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad \text{soit} \quad \sigma_i(\mathbf{n}) = \sum_j \sigma_{ij} n_j$$

6.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Les notations et propriétés introduites précédemment permettent d'exprimer plus en détail les forces surfaciques qui s'appliquent sur la frontière du volume matériel considéré :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \int_{\mathcal{A}_m(t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}) dA \\ &= \int_{\mathcal{A}_m(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \nabla \cdot \mathbf{T} dV \quad (\text{en utilisant Green-Ostrogradsky}) \\ &= \int_{\mathcal{V}_m(t)} \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV \quad \text{d'où} \\ \mathbf{F}_s &= \int_{\mathcal{V}_m(t)} -\nabla p dV + \int_{\mathcal{V}_m(t)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV \end{aligned}$$

Cette expression des forces surfaciques permet d'écrire, à partir de l'équation (1.13) :

$$\int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV$$

Le volume matériel défini pour l'analyse est quelconque. L'égalité des intégrales implique alors l'égalité des intégrandes, soit :

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}} \quad (1.14)$$

Cette équation exprime la relation que doivent satisfaire les propriétés de l'écoulement pour conserver la quantité de mouvement en tout point du volume matériel $\mathcal{V}_m$. Comme pour la conservation de la masse, on peut intégrer cette expression locale pour obtenir une relation macroscopique à l'échelle du volume matériel. Les relations obtenues permettent de calculer, moyennant certaines hypothèses, les forces et les puissances que le fluide échange avec le milieu extérieur.

Avec certaines hypothèses supplémentaires, il est possible de simplifier et de reformuler l'équation (1.14) pour prendre en compte des caractéristiques communes à une grande majorité de fluides.

6.4 Équation d'Euler

La simplification la plus immédiate et radicale est de considérer que l'on peut négliger les effets de la viscosité du fluide. Pour des nombres de Reynolds très grands devant l'unité, les effets de convection sont prépondérants par rapport aux effets visqueux. En l'absence de viscosité, tous les éléments du tenseur des contraintes visqueuses τ sont nuls. L'équation de conservation de la quantité de mouvement devient alors :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (1.15)$$

Pour des écoulements à moyenne vitesse dans l'air, le nombre de Reynolds est très grand devant 1, ce qui permet de négliger les effets de la viscosité. La dynamique des fluides, et en particulier l'aérodynamique, utilisent cette hypothèse pour calculer les écoulements qui s'établissent autour de différents objets ainsi que les forces créées sur ces objets.

6.5 Équation de Navier-Stokes

Les contraintes σ qui apparaissent dans un milieu fluide dépendent des taux de déformations que subit le fluide. L'écoulement, de par ses hétérogénéités de vitesses, de pression, de température, impose des déformations à chaque volume de fluide élémentaire. Ces déformations dépendent du temps et du point de l'espace. Les particules fluides peuvent être déformées de différentes façons : le cisaillement, la rotation, l'étirement. . . Au cours de son déplacement, une particule fluide subit différentes déformations en fonction de sa trajectoire. La vitesse à laquelle ces déformations varient (le taux de déformation) crée des contraintes dans le fluide.

La relation entre les taux de déformation et les contraintes n'est pas la même pour tous les fluides. **Les fluides les plus élémentaires rencontrés dans les systèmes industriels sont considérés comme des fluides newtoniens**, c'est-à-dire que les contraintes et les taux de déformations (notés d_{ij}) sont proportionnels, et satisfont à la relation :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3} d_{kk} \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad d_{kk} = \sum_m d_{mm} \quad (\text{notation d'Einstein})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et le taux de déformation d_{ij} s'exprime comme

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) \quad \text{avec} \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Dans ces conditions, on peut expliciter le tenseur des contraintes visqueuses dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation 1.14) qui devient :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (1.16)$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Navier-Stokes et exprime la conservation de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien.

Dans le cas d'un écoulement incompressible, la section 5.3 a montré que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. L'équation de Navier-Stokes devient alors :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

Cette forme de la conservation de la quantité de mouvement est très couramment utilisée. Elle permet de prendre en compte la viscosité du fluide au travers de l'hypothèse de fluide newtonien. Cette relation est une relation vectorielle qui regroupe trois équations scalaires, soit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Face à un problème de mécanique des fluides, on souhaite résoudre les champs de vitesse, de pression, de masse volumique, de température et d'énergie, soit un jeu de sept inconnues scalaires. La conservation de la masse et de la quantité de mouvement offrent quatre équations scalaires, la loi d'état offre une cinquième, la fonction d'état de l'énergie interne une sixième.

La septième équation est une équation obtenue à partir de la conservation de l'énergie totale. Un fluide possède une énergie interne et une énergie cinétique qui doivent être conservées. Plusieurs formes de cette équation existent, nous n'en donnons qu'une seule ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$$

où $\nabla \cdot \mathbf{q}$ est le flux de chaleur reçu par le système.

L'ensemble de ces équations et de ces inconnues doit être accompagné d'une solution initiale et de conditions aux limites pour pouvoir être résolues. La solution initiale est un ensemble de champs associés à chacune des variables enregistrées au même instant. Les conditions aux limites sont l'ensemble des valeurs prises par les inconnues aux limites du domaine étudié. Mesurer ou calculer ces deux informations est quelque chose de pratiquement impossible sur les systèmes complexes. C'est ce qui rend la résolution des équations extrêmement difficile.

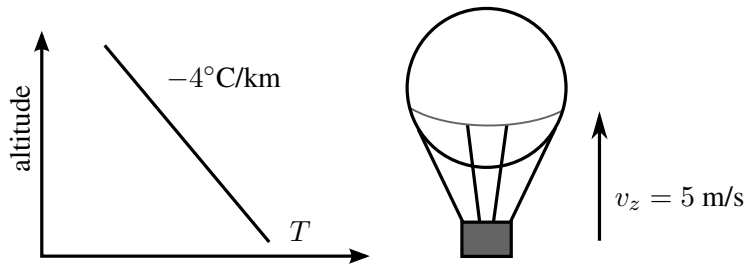


FIGURE 1.15 – Une montgolfière monte à 5 m/s dans l’atmosphère dont la température diminue avec l’altitude.

Dans la suite de l’ouvrage, on fait l’hypothèse que les écoulements sont incompressibles, c’est-à-dire qu’il n’y a pas de couplages entre le champ de température et les champs de vitesse et de pression. On cherche uniquement à obtenir les distributions de vitesse et de pression à partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On s’attache en particulier à définir précisément les conditions aux limites.

Exercice 1.1

On cherche à calculer l’évolution de la température ressentie par les passagers d’une montgolfière à mesure que celle-ci s’élève. Le champ de température extérieur à la montgolfière est fixe (on néglige les courants et le vent). Dans l’atmosphère, la température $T(z)$ dépend de l’altitude z et diminue de 4 K tous les 1 000 m. On considère que la montgolfière monte à $v_z = 5$ m/s. Calculer la variation de température ressentie par les passagers ?

On veut calculer la variation de la température en fonction du temps, soit le terme : dT/dt . Par définition de la dérivée particulaire, la variation de la température dans la nacelle s’exprime comme :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Le champ de température n’évolue pas avec le temps donc $\partial T/\partial t = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \\ &= 0 + 5 \times (-0.004) \\ \frac{dT}{dt} &= -0.02 \text{ K/s} = -1,2 \text{ K/min} \end{aligned}$$

La température ressentie par les passagers de la nacelle va diminuer de 1,2 degré chaque minute.

Exercice 1.2

On considère un écoulement d’eau stationnaire entre deux plaques planes distantes de la longueur $y = h$. Les plaques sont longues (selon la direction x) devant la distance h , la structure de l’écoulement ne dépend donc pas de la position x le long

des plaques. Le fluide est entraîné par la présence d'un gradient de pression selon x constant. Cette configuration est connue sous le nom d'écoulement de Poiseuille.

1. En simplifiant les équations de Navier-Stokes avec les hypothèses du problème, exprimer les trois équations scalaires qui régissent l'écoulement.
2. En utilisant l'équation de conservation de la masse, montrer que la composante v du champ de vitesse (selon y) est nulle.
3. Exprimer le profil de vitesse axiale $u(x, y)$.

1. Considérons de l'eau (fluide incompressible) s'écoulant entre deux parois planes de façon stationnaire ($\partial/\partial t = 0$). Les parois sont infiniment longues et d'envergure infinie. Le problème est alors bi-dimensionnel, aucune variable ne dépend de la coordonnée z ($\partial/\partial z = 0$). Les parois étant infiniment longues, les effets de bord peuvent être négligés et quelque soit l'abscisse x auquel on se place, le champ de vitesse est identique. On cherche à obtenir le champ de vitesse en tout point de l'espace entre les deux parois.

Pour cela, on dispose des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un écoulement stationnaire, bidimensionnel et incompressible :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

On peut négliger la gravité, et en considérant que le champ de vitesse ne dépend pas de l'abscisse x , on obtient le jeu d'équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

2. La première équation (conservation de la masse) est directement intégrable pour obtenir la composante verticale de la vitesse :

$$v(y) = Ay \quad A \text{ étant une constante déterminée grâce aux conditions aux limites.}$$

À la paroi ($y = 0$), le fluide adhère à la paroi donc $v(y = 0) = A = 0$ donc $v = 0$ dans tout le domaine.

3. La seconde équation (projection de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \text{d'où } u(y) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + By + C \quad \text{avec } u(y=0) = u(y=h) = 0 \\ \text{soit } u(y) &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) \end{aligned}$$

Le profil de vitesse est donc une parabole, le maximum étant atteint au milieu de la conduite. L'utilisation conjointe des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ont ainsi permis de résoudre analytiquement le champ de vitesse. Bien entendu, cette situation est extrêmement rare car il est en général impossible de faire d'aussi fortes hypothèses ce qui induit des couplages très forts entre les champs de vitesse, de pression et masse volumique.

Chapitre II

Écoulements potentiels

Les équations de Navier-Stokes présentées au chapitre précédent permettent de décrire l'évolution des propriétés d'un système fluide soumis à des forces extérieures. Ces équations mettent en évidence de fortes non-linéarités entre les phénomènes de convection, viscosité et diffusion. Lorsque tous ces phénomènes entrent simultanément en jeu, la résolution des équations est très difficile. Les simulations numériques permettent d'obtenir des solutions approchées en discrétisant les différents termes mais nécessitent d'importantes ressources informatiques.

Pour résoudre les équations de façon plus aisée, il est nécessaire de négliger certains phénomènes. Par exemple, en calculant le nombre de Reynolds, on peut avoir une idée du rapport entre l'intensité des phénomènes convectifs et des phénomènes visqueux. Lorsque le nombre de Reynolds est très grand devant un, on peut dans certains cas négliger les termes visqueux devant les termes de convection. De même, en calculant le nombre de Mach d'un écoulement, on obtient une information sur la compressibilité de cet écoulement.

On se propose dans ce chapitre,

- de lister les hypothèses qui peuvent être faites pour calculer des écoulements courants et,
- de montrer à travers quelques exemples comment ces hypothèses permettent de simplifier et résoudre les équations de Navier-Stokes.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse plus particulièrement aux écoulements potentiels qui jouent un rôle prépondérant en aérodynamique et dans toutes les situations d'écoulements externes. Les écoulements potentiels sont des écoulements obtenus lorsque :

1. l'écoulement est incompressible
2. la viscosité du fluide est négligée
3. les forces volumiques sont négligées
4. l'écoulement est stationnaire
5. l'écoulement est irrotationnel

Ces hypothèses permettent de simplifier les équations de Navier-Stokes et de mettre en oeuvre des techniques de résolution basées sur les fonctions potentielles. La première section introduit de nouvelles définitions générales ou particulières aux écoulements potentiels. Dans la

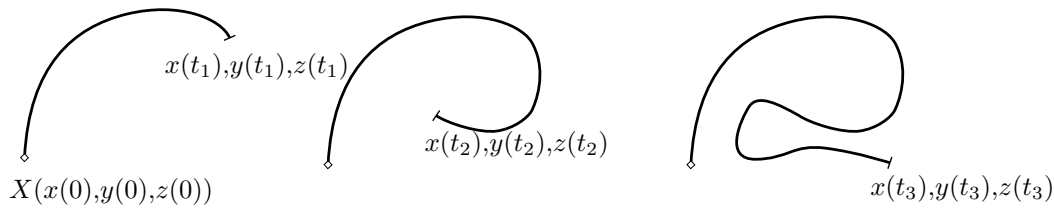


FIGURE 2.1 – La trajectoire d’une particule fluide s’allonge avec le temps mais n’est pas modifiée. Elle est associée à une position initiale $X(x(0), y(0), z(0))$.

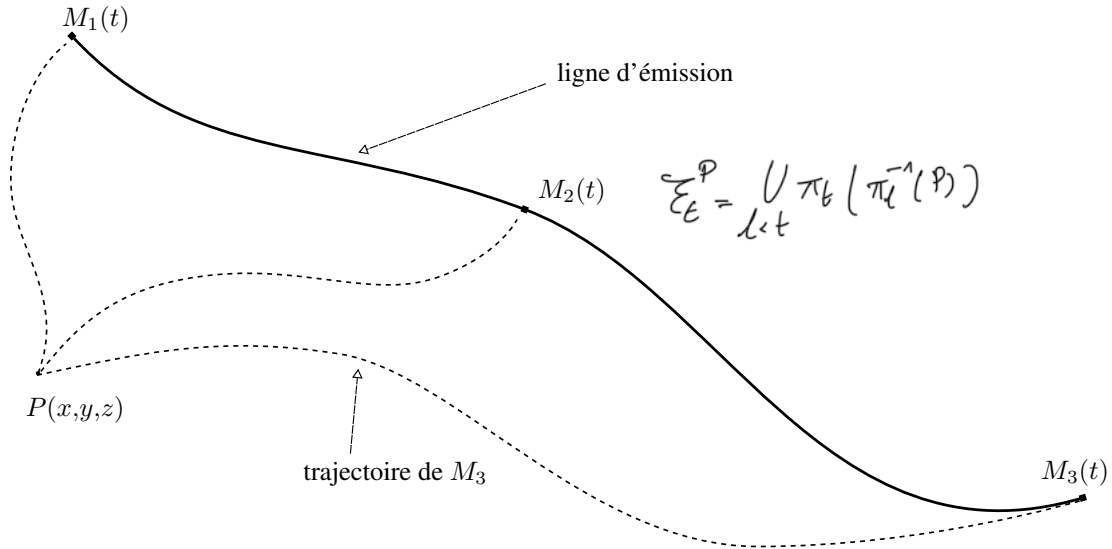


FIGURE 2.2 – La ligne d’émission est associée à un point P et une date t . Tous les points M_i sont passés par P à un instant précédent, ils forment maintenant la ligne d’émission de P à la date t .

deuxième section, on présente le théorème de Bernoulli, très utile en mécanique des fluides. La troisième section permet d’introduire les écoulements potentiels fondamentaux et le principe de superposition. On montre dans la dernière section comment la superposition d’écoulements potentiels permet de résoudre le champ de vitesse dans le cas d’écoulements autour d’obstacles immergés.

1 Définitions

1.1 Trajectoires, lignes d’émissions et lignes de courant

La *trajectoire* $\mathcal{C}_t$ d’une particule fluide est l’ensemble des points de l’espace visités par la particule au cours du temps (Figure 2.1). Il existe autant de trajectoires que de particules fluides dans le système. Les trajectoires s’allongent avec le temps (la particule visite de nouvelles positions) mais ne sont pas modifiées dans le temps. La trajectoire d’une particule est une application qui, à une position initiale X d’une particule, associe la courbe paramétrique $x = (x(t), y(t), z(t))$ des lieux visités par la particule. La trajectoire d’une particule permet de retracer son histoire.

La *ligne d’émission* est une propriété associée à un point P de l’espace et à un instant t . La

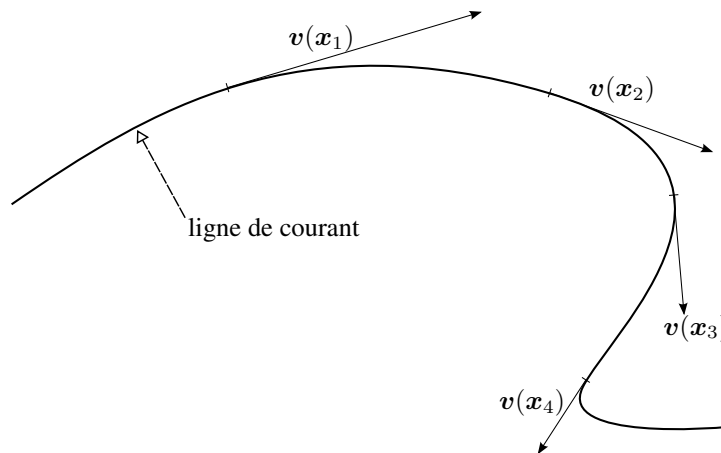


FIGURE 2.3 – La ligne de courant admet en chacun de ses points une tangente colinéaire au vecteur vitesse local.

ligne d'émission à l'instant t est le lieu des particules étant passées en P à un instant $t_i \leq t$ (Figure 2.2). Deux particules M_i et M_j passées au point P à des instants t_i et t_j différents seront toujours sur la ligne d'émission associée au point P à des instants $t > t_j > t_i$ bien que les deux particules aient pu suivre deux trajectoires différentes. On peut visualiser les lignes d'émission expérimentalement en injectant en un point de l'écoulement un colorant. Toutes les particules passant par ce point seront colorées et continueront d'émettre leur couleur tout au long de leur évolution. La courbe formée par le colorant représente la ligne d'émission.

Une *ligne de courant* est définie à un instant t comme une courbe qui admet en chacun de ses points une tangente colinéaire au vecteur vitesse local (Figure 2.3).

Si l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire que la vitesse en chaque point de l'espace est indépendante du temps, les trajectoires et les lignes de courant sont identiques. En effet, la trajectoire d'une particule est définie par sa position et sa vitesse à l'instant t_1 . Si l'écoulement est stationnaire, la vitesse en ce point reste identique pour les instants $t > t_1$.

1.2 Écoulements irrotationnels

Les trajectoires permettent de décrire le mouvement d'une particule fluide au sein d'un écoulement. À l'échelle de la trajectoire, la particule est considérée comme un point qui se déplace en trois dimensions. À l'échelle microscopique, la particule est un volume élémentaire dV qui se déforme au cours de son évolution en fonction du champ de vitesse (Figure 2.4). On cherche ici à relier la déformation d'une particule, et en particulier sa rotation, au champ de vitesse. Dans le plan xy et au temps t , la particule est un rectangle dont les deux longueurs sont dx et dy (Figure 2.5). On repère trois coins du rectangle par les lettres A , B et C . La vitesse au point A est

$$\mathbf{v}(A) = (u, v)$$

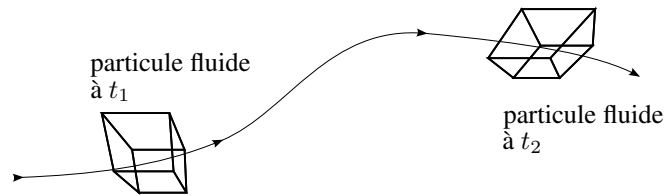


FIGURE 2.4 – Le mouvement d’une particule est une composition de translations, rotations et déformations.

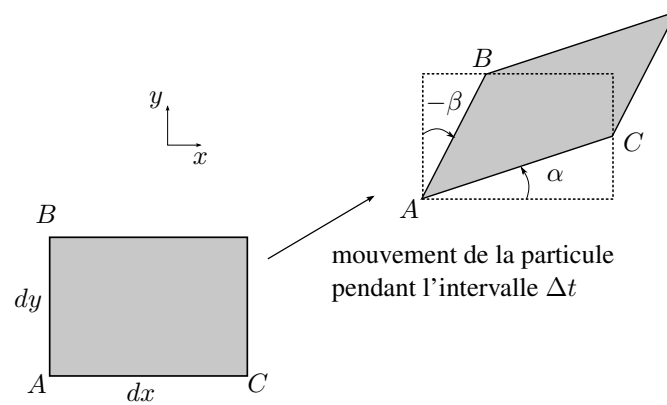


FIGURE 2.5 – Au cours de son mouvement, une particule fluide se déforme.

Les vitesses en B et C s'écrivent alors

$$\begin{aligned} v(B) &= \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy, v + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \right] \\ v(C) &= \left[u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx, v + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right] \end{aligned}$$

Durant l'intervalle Δt , la particule fluide se déplace et se déforme. En particulier, les côtés AB et AC ont tourné respectivement des angles orientés $-\beta$ et α . Le point A s'est déplacé suivant l'axe y de la distance $v\Delta t$ tandis que le point C s'est déplacé de la distance

$$\left(v + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right) \Delta t$$

dans cette même direction. Le déplacement relatif de C par rapport à A s'écrit alors

$$\left(v + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \right) \Delta t - v\Delta t = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \Delta t$$

Ceci permet d'écrire la tangente de α comme

$$\tan \alpha = \frac{[\partial v / \partial x] dx \Delta t}{AC} = \frac{[\partial v / \partial x] dx \Delta t}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t$$

La déformation étant faible dans l'intervalle Δt , on peut confondre la tangente de l'angle α et l'angle lui-même, soit :

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta t \quad (2.1)$$

La même analyse est conduite pour étudier le mouvement de B le long de l'axe x . Le déplacement relatif de B par rapport à A pendant l'intervalle Δt s'écrit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \Delta t$$

La tangente de l'angle β s'exprime alors comme

$$\tan(-\beta) = \frac{[\partial u / \partial y] dy \Delta t}{AB} = \frac{[\partial u / \partial y] dy \Delta t}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta t$$

et l'angle β étant petit, on peut écrire

$$\beta = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta t \quad (2.2)$$

Les expressions (2.1) et (2.2) permettent de calculer les vitesses angulaires des segments AC et AB :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

La vitesse angulaire ω_z de la particule fluide est, par définition, la moyenne des vitesses angulaires des deux segments :

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)$$

que l'on écrit encore en fonction de la vitesse :

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

La démonstration est ici détaillée en deux dimensions, la généralisation conduit à exprimer le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ d'une particule par la relation :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$$

Cette expression quantifie la rotation pure que subit une particule fluide dans l'espace. Si le vecteur rotation est nul, la particule se déplace en translation. Si le vecteur rotation est différent de zéro, la particule fluide tourne autour d'un axe fixe. Le vecteur rotation est porté par l'axe perpendiculaire au plan de la rotation induite par l'écoulement tourbillonnant. De façon usuelle, on définit également la grandeur associée :

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ est appelée la vorticité.

Un écoulement est *irrotationnel* lorsque le vecteur rotation est nul en tout point, autrement dit si le rotationnel du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est nul :

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0$$

Il est important ici de bien comprendre que la rotation concerne la particule fluide. Il est possible d'avoir un mouvement circulaire dans le fluide sans que les particules fluides soient en rotation. Il y a deux possibilités pour que l'écoulement soit irrotationnel :

1. la particule fluide est en translation, dans ce cas $\alpha = \beta = 0$,
2. la particule fluide est déformée de façon symétrique, soit

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = - \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

Un mouvement rotationnel est celui d'un avion effectuant un looping. Il y a une rotation en bloc autour d'un axe fixe. Un exemple de mouvement irrotationnel est le mouvement d'une nacelle de grande roue de fête foraine. La nacelle est en translation le long d'une trajectoire circulaire. Dans les deux cas, il n'y a pas de déformation de la particule (l'avion ou la nacelle) mais l'une des particules subit une rotation tandis que l'autre subit une translation. L'écoulement autour d'un profil d'aile peut être considéré comme un écoulement irrotationnel loin de la paroi. Les particules fluides ne subissent pas de rotation en parcourant l'aile. Dans l'écoulement proche de la paroi, les effets de la viscosité entrent en jeu et l'écoulement devient rotationnel.

L'évaluation du taux de rotation pure ω_z montre que la rotation est due à une différence du taux de variation de la vitesse dans les différentes directions de l'espace (Equation [2.3](#)). Ainsi

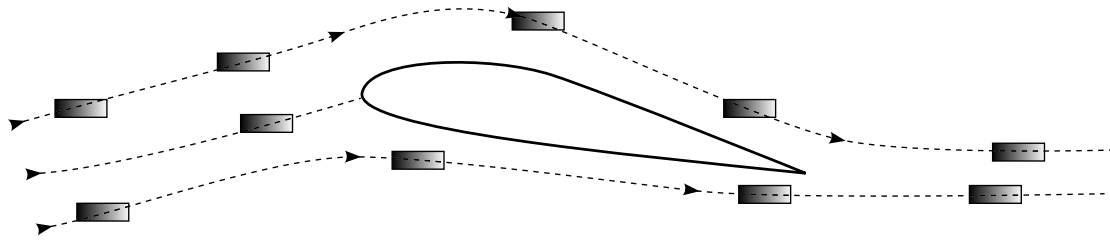


FIGURE 2.6 – L'écoulement autour d'un profil d'aile est irrotationnel. Toutes les particules fluides conservent leur position angulaire.

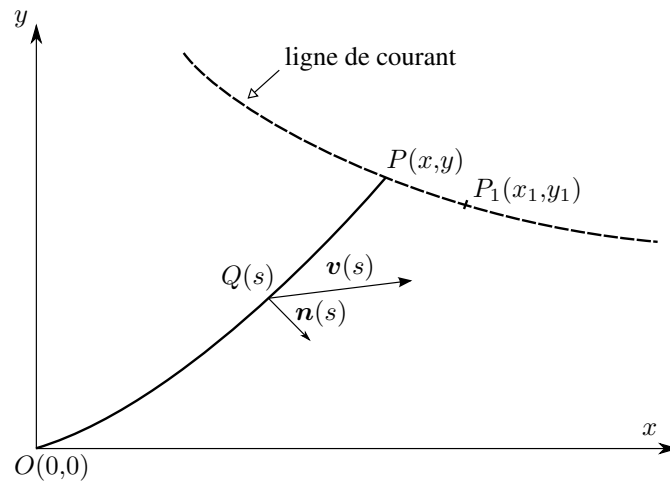


FIGURE 2.7 – Pour définir la fonction de courant, on calcule le débit volumique traversant toute ligne OP orientée : l'abscisse curviligne s vaut 0 en O .

pour générer une rotation, il faut que la particule fluide subisse le travail de forces visqueuses à l'intérieur du fluide, car la vitesse doit augmenter avec la distance à l'axe de rotation. Cette variation de vitesse provoque un cisaillement au sein du fluide, c'est un mouvement dissipatif (les frottements visqueux dissipent l'énergie cinétique du fluide). À l'opposé, les mouvements irrotationnels ne font intervenir que faiblement les forces visqueuses et sont par conséquent très peu dissipatifs. Un écoulement irrotationnel perd peu d'énergie par frictions internes.

1.3 Fonction de courant

On considère l'écoulement comme étant bidimensionnel, incompressible et non visqueux, c'est-à-dire que l'une des composantes du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ est négligeable par rapport aux deux autres composantes en tout point de l'écoulement, que la masse volumique d'une particule fluide reste constante avec le temps et que les effets de viscosité du fluide sont négligeables devant les autres forces. Dans ces conditions, on note $\mathbf{v} = (u, v)$ les composantes de la vitesse. On peut alors étudier l'évolution de l'écoulement dans le plan (Oxy) où chaque point est défini par ces coordonnées (x, y) .

Pour tout point $P(x, y)$ du plan, il est possible de tracer une ligne reliant P à l'origine O du repère (Figure 2.7). L'écoulement traverse cette ligne avec des vitesses $\mathbf{v}(s)$ qui varient le long

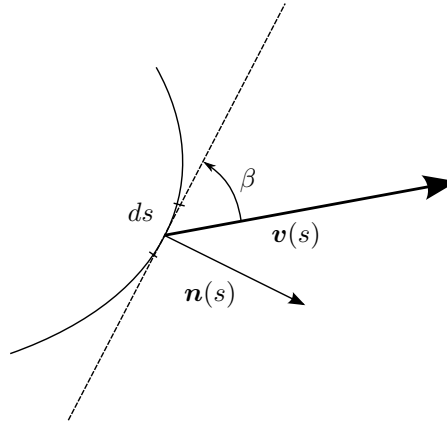


FIGURE 2.8 – Au voisinage du point $Q(s)$, on définit le vecteur $\mathbf{n}(s)$ normal à l'élément ds .

de la ligne (s est l'abscisse curviligne permettant de parcourir la ligne). Le débit volumique au travers de la courbe OP est donné par :

$$\int_0^{s_P} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.4)$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la courbe OP . On note β l'angle entre le vecteur vitesse et la tangente à la courbe (Figure 2.8), ce qui permet d'écrire le débit comme :

$$\int_0^{s_P} |\mathbf{v}| \sin \beta ds$$

Si la valeur de ce débit est indépendante de la courbe OP , on définit la *fonction de courant* $\psi(x,y)$ comme :

$$\psi(x,y) = \int_0^{s_P} |\mathbf{v}| \sin \beta ds \quad (2.5)$$

L'indépendance du débit à la courbe OP est quelque chose de relativement intuitif. Si l'on considère les points O et P comme des points situés sur chacune des rives d'une rivière, en tendant une corde entre O et P , on voit que s'il n'y a pas de source à proximité, quelque soit la forme que prend la corde, le débit traversant cette corde sera toujours celui de la rivière. Pour définir le signe de la fonction de courant, on utilise la convention qui veut que lorsque l'on parcourt la courbe de O vers P , la fonction de courant est positive si le fluide traverse la courbe de gauche à droite. Enfin, la définition de la fonction de courant est relative au point O , c'est-à-dire qu'elle est nulle en O .

Si l'on considère un point $P_1(x_1, y_1)$ proche du point P pour lequel la fonction de courant possède la même valeur, $\psi(x,y) = \psi(x_1, y_1)$, alors le débit au travers des courbes OP et OP_1 est le même, ce qui signifie, par conservation du débit, que le débit au travers de PP_1 est nul. On dit que P et P_1 appartiennent à la même *ligne de courant*. Pour poursuivre l'analogie de la rivière, si le point O reste fixe et que l'on déplace le point P le long de sa berge, le débit

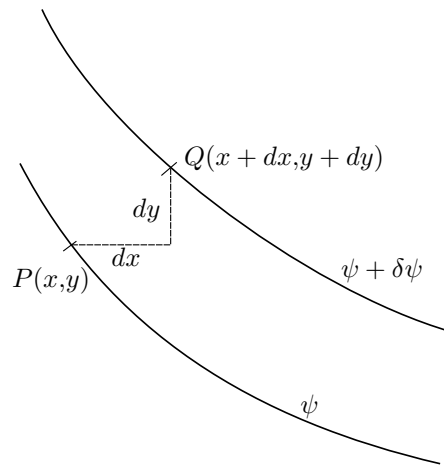


FIGURE 2.9 – L'expression de la fonction de courant en fonction de la vitesse de l'écoulement est obtenue en rapprochant deux lignes de courant.

au travers de la courbe le reliant à O restera toujours le débit de la rivière. En ce sens, la rive représente une ligne de courant de la rivière. La vitesse peut évoluer le long de la ligne de courant mais le fluide ne peut pas la traverser, c'est un mur immatériel. Le vecteur vitesse est toujours parallèle à une ligne de courant. Cette définition physique de la fonction de courant rend difficile son calcul. On peut établir une relation directe entre la fonction et les composantes du vecteur vitesse. On considère deux lignes de courant voisines de valeur ψ et $\psi + \delta\psi$. Soit $P(x, y)$ un point de la ligne ψ et $Q(x + dx, y + dy)$ un point de la ligne $\psi + \delta\psi$. Par définition, au travers de n'importe quelle courbe reliant P à Q , le débit vaut $\delta\psi$, soit :

$$\delta\psi = \int_{s_P}^{s_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{x_P}^{x_Q} -v dx + \int_{y_P}^{y_Q} u dy = -v dx + u dy \quad (2.6)$$

car

$$\mathbf{n} ds = -\mathbf{e}_y dx + \mathbf{e}_x dy$$

De façon générale, la fonction ψ est une fonction de deux variables. Sa différentielle s'exprime donc comme :

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy$$

En rapprochant cette équation de l'équation (2.6), on obtient le lien entre la fonction de courant et le champ de vitesse :

$$\boxed{u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

Remarque : En coordonnées cylindriques, le même raisonnement peut être appliqué. On a alors (Fig. 2.10) :

$$\mathbf{n} ds = \mathbf{n}_r dr + \mathbf{n}_\theta d\theta = -\mathbf{e}_\theta dr + \mathbf{e}_r r d\theta$$

soit

$$\delta\psi = \int_{s_P}^{s_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{r_P}^{r_Q} -v_\theta dr + \int_{\theta_P}^{\theta_Q} v_r r d\theta = -v_\theta dr + v_r r d\theta$$

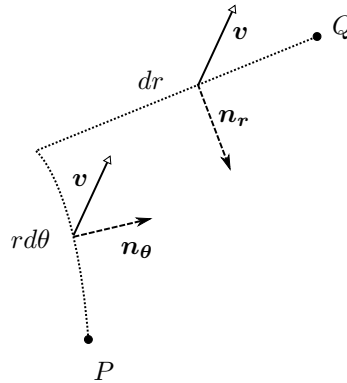


FIGURE 2.10 – En coordonnées cylindriques, le chemin ds entre P et Q est décomposé en deux variations $rd\theta$ et dr , les normales positives (au sens de la fonction de courant, c'est-à-dire orientée de la gauche vers la droite quand on parcourt le chemin) sur chaque chemin sont respectivement $n_\theta = e_r$ et $n_r = -e_\theta$.

avec

$$\delta\psi(r, \theta) = \frac{\partial\psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta$$

soit

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

La fonction de courant permet donc de remplacer les deux variables u et v par une seule variable ψ d'ordre plus élevé. On remarque que cette définition satisfait naturellement à l'équation de conservation de la masse. Pour un écoulement incompressible, l'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

Naturellement, ψ satisfait l'équation de conservation de la masse mais permet aussi d'écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement en fonction d'une seule variable de vitesse. Pour cela, il est utile d'exprimer le rotationnel du champ de vitesse en fonction de ψ . Puisque l'on est en deux dimensions, le rotationnel selon l'axe z normal au plan xy s'écrit :

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z = -\nabla^2 \psi$$

On peut alors écrire le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement comme

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi) = \nu \nabla^2 (\nabla^2 \psi)$$

L'équation est une équation scalaire à une seule variable. Cependant, cette équation est d'ordre quatre, il faut donc quatre conditions aux limites pour poser correctement le problème. On verra dans les prochaines sections que cette méthodologie s'applique très bien aux problèmes où un écoulement contourne un corps solide immergé (aile d'avion, sous-marin, voile...). Dans ces conditions, on peut définir deux conditions à l'infini où l'écoulement est uniforme et non perturbé par la présence de l'objet :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = U_\infty \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

Puis deux conditions sur les parois de l'objet traduisant le fait que l'objet est imperméable au fluide (la vitesse normale à la paroi est nulle) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \mathbf{n} = 0$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi.

Malgré la simplification relative du problème, il peut être nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques pour résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement étant donné son ordre élevé. Cependant, un cas particulier d'écoulement induit une équation simple d'ordre deux de la fonction ψ . En effet, **si l'écoulement est irrotationnel**, on a $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. La fonction de courant satisfait donc à l'équation :

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Le laplacien de la fonction ψ est nul. En deux dimensions et dans un repère cartésien, l'équation devient alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

En résolvant cette équation et en traçant les lignes de ψ constant, on obtient les lignes de courant de l'écoulement. L'utilisation d'une fonction de courant est donc particulièrement adaptée aux cas stationnaires et bidimensionnels où l'écoulement est irrotationnel.

Cette définition de la fonction de courant pour un écoulement incompressible peut être extrapolée au cas des écoulements compressibles. Le même raisonnement est mené en considérant le débit massique au lieu du débit volumique. Ainsi on définit une fonction de courant compressible ψ_c comme :

$$\rho u = \frac{\partial \psi_c}{\partial y} \quad \text{et} \quad \rho v = -\frac{\partial \psi_c}{\partial x}$$

Cette fonction satisfait naturellement la conservation de la masse $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$ et permet d'écrire la conservation de la quantité de mouvement comme une équation scalaire d'ordre quatre avec les conditions aux limites associées.

1.4 Fonction potentielle

La section précédente a permis de définir la fonction de courant dans le cas d'un écoulement bidimensionnel non visqueux. En particulier, lorsque l'écoulement est irrotationnel, le laplacien de la fonction de courant est nul. Un écoulement irrotationnel possède une vorticité nulle en tout point de l'écoulement. Cette propriété permet de définir une classe d'écoulements dénommée *les écoulements potentiels*. Les notions de vorticité et de viscosité sont très proches, la vorticité n'apparaissant que si l'on prend en compte la viscosité du fluide. **Il est donc très courant de considérer un écoulement comme irrotationnel lorsque l'on néglige la viscosité.**

La fonction de courant a été définie précédemment comme l'intégrale de la composante normale de la vitesse à une ligne reliant les points O et P de l'espace (Equation 2.4). On définit de même la fonction potentielle ϕ comme :

$$\phi(x,y) = \int_0^{s_P} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds$$

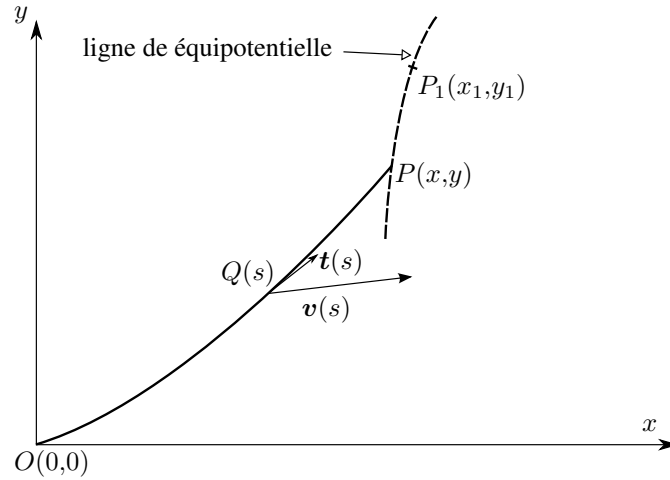


FIGURE 2.11 – La fonction potentielle est définie en calculant le débit au travers d’une courbe OP quelconque avec la composante tangentielle de la vitesse.

où $\mathbf{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe liant O à P (Figure 2.11), soit :

$$\phi(x,y) = \int_0^{s_P} |\mathbf{v}| \cos \beta \, ds \quad (2.7)$$

Par convention, cette grandeur est positive si la vitesse est dans le sens de parcours de la ligne OP . Si l’on considère un point P_1 proche de P tel que la fonction potentielle possède la même valeur en P et en P_1 , la ligne PP_1 est une *ligne équipotentielle*. Par définition, **une ligne équipotentielle est une ligne normale au vecteur vitesse en tout point.**

Afin d’établir une relation directe entre les composantes de la vitesse et la fonction potentielle, on considère deux lignes équipotentielles ϕ et $\phi + \delta\phi$ très proches. Soit $P(x,y)$ un point de la ligne ϕ et $Q(x+dx, y+dy)$ un point de la ligne $\phi + \delta\phi$, la différence de potentiel $\delta\phi$ s’exprime alors :

$$\delta\phi = \int_{s_P}^{s_Q} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{x_P}^{x_Q} u \, dx + \int_{y_P}^{y_Q} v \, dy = u \, dx + v \, dy \quad (2.8)$$

La fonction potentielle étant une fonction de deux variables, sa différentielle s’exprime comme

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy$$

soit, d’après l’équation (2.8),

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad \text{soit} \quad \nabla\phi = \mathbf{v}$$

Pour un écoulement incompressible la conservation de la masse stipule que la divergence de la vitesse est nulle $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. En introduisant la fonction potentielle, cette relation de conservation s’écrit :

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.9)$$

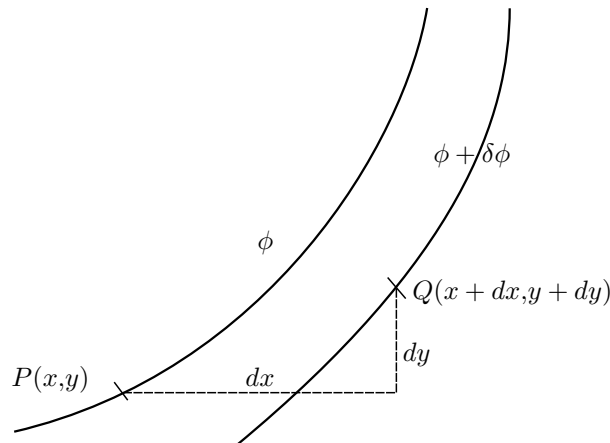


FIGURE 2.12 – Pour exprimer la fonction potentielle en fonction des composantes de la vitesse, on écrit la variation de débit entre deux lignes équipotentielles.

Cette équation d'ordre deux, associée à deux conditions aux limites, permet de résoudre le champ de vitesse établi autour d'un corps immergé dans un fluide. L'aérodynamique se prête très bien à l'utilisation d'une telle fonction. Cette équation potentielle sera utilisée de façon exhaustive pour les applications aérodynamiques. Il est naturellement possible d'utiliser la fonction potentielle pour réécrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement mais l'équation de continuité permet déjà à l'aide de deux conditions aux limites de calculer les composantes du champ de vitesse.

Si l'on s'intéresse aux relations entre les fonctions de courant et potentielles, on note que :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Si l'on se déplace le long d'une ligne de courant, la fonction de courant est constante, soit :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 = u dx + v dy$$

donc

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi=\text{const}} = -\frac{u}{v} = -\frac{1}{(dy/dx)_{\psi=\text{const}}}$$

Cette dernière équation montre que les deux fonctions sont orthogonales ; les lignes de courant sont orthogonales aux lignes potentielles. Naturellement, cette propriété n'est plus vérifiée aux points d'arrêt de l'écoulement où la vitesse s'annule et la relation d'orthogonalité n'est pas définie.

La fonction de courant et la fonction potentielle permettent d'écrire différemment les équations de conservation et de les résoudre plus facilement. En particulier, beaucoup d'outils mathématiques sont disponibles pour chercher des solutions à l'équation de Laplace, et l'analogie avec les problèmes électriques (avec les notions de courant et de potentiel) permet des résolutions numériques efficaces des champs de vitesses. Au-delà, leur représentation dans l'espace permet une meilleure compréhension de l'écoulement et apporte des informations essentielles sur la localisation de points remarquables.

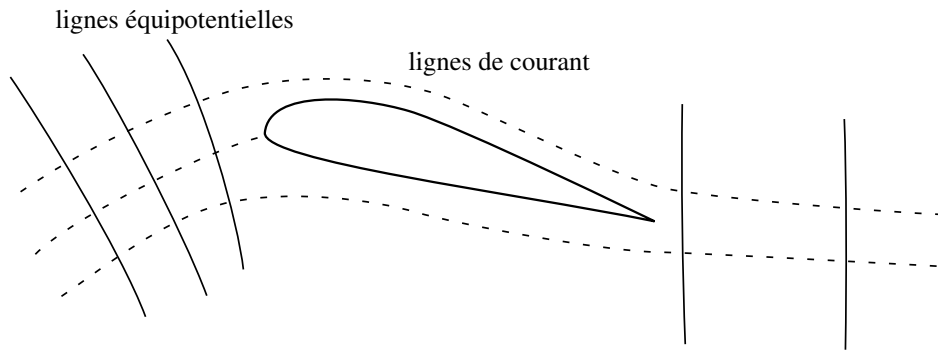


FIGURE 2.13 – Dans les écoulements, les lignes de courant et les lignes équipotentielles sont orthogonales.

2 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli est un outil précieux qui établit une relation entre l'évolution de la pression et de la vitesse au sein d'un écoulement non-visqueux. Un écoulement non-visqueux est un écoulement pour lequel les effets de la viscosité du fluide sont négligeables devant les autres phénomènes dynamiques. On a vu que, dans ces conditions, la conservation de la quantité de mouvement est formalisée mathématiquement par l'équation d'Euler (équation [1.15](#)) :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p$$

Cette équation traduit le fait que la variation de la quantité de mouvement est due à la présence d'une force surfacique de pression et d'une force volumique, en l'occurrence la gravité. En détaillant la dérivée matérielle de la vitesse, on obtient :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{(1)} = \rho \mathbf{g} - \nabla p$$

Le terme convectif (1) peut être réécrit grâce à la relation vectorielle :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$

Cette expression permet d'écrire la conservation de la quantité de mouvement avec le vecteur rotation :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \rho (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} &= \rho \mathbf{g} - \nabla p \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si l'on projette cette relation vectorielle le long d'un déplacement élémentaire $d\mathbf{s}$, on obtient :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

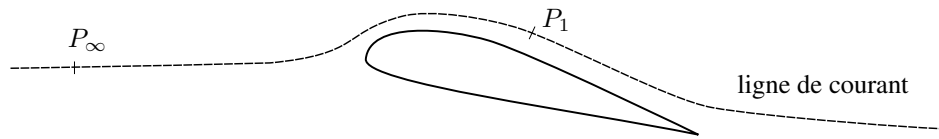


FIGURE 2.14 – Pour un écoulement autour d'un profil dont on néglige la viscosité, les vitesses et les pressions en chaque point d'une ligne de courant sont liées par le théorème de Bernoulli.

On cherche ici à obtenir une relation entre la pression, la vitesse et les forces volumiques. Il faut pour cela déterminer les conditions pour lesquelles le terme instationnaire et le terme rotationnel sont égaux à zéro.

Si l'écoulement est stationnaire, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$. Pour annuler le terme rotationnel, plusieurs hypothèses existent :

1. $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0$ si l'écoulement est irrotationnel ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$),
2. $[(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{s} = 0$ si le déplacement est colinéaire au vecteur vitesse.

La deuxième hypothèse, qui est la plus générale et facilement vérifiable, indique que si l'on intègre la relation (2.10) le long d'une ligne de courant ϕ pour un écoulement stationnaire non-visqueux, on obtient les intégrales exactes :

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + g dz = 0$$

avec $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. En intégrant cette relation entre deux points situés sur la même ligne de courant, on obtient la relation de Bernoulli :

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{constante le long d'une ligne de courant}} \quad (2.11)$$

ceci étant valable pour un écoulement stationnaire et non-visqueux. Dans le cas général, la constante varie d'une ligne de courant à l'autre. Cependant, si l'écoulement est irrotationnel, le rotationnel de la vitesse est égal à zéro quelque soit la direction d'intégration $d\mathbf{s}$. Dans ce cas-là, la constante est la même quelque soit la ligne de courant considérée.

Dans le cadre de calculs aérodynamiques, le théorème de Bernoulli permet de calculer facilement la pression en un point de l'aile (Figure 2.14). À faible vitesse, la pression sur l'aile est liée à la pression à l'infini, la vitesse à l'infini et la vitesse locale. Connaître la pression en tout point d'une aile permet de calculer dans un second temps la distribution des forces aérodynamiques. Un exemple est détaillé dans le prochain chapitre pour mettre en évidence le paradoxe de d'Alembert. Le théorème de Bernoulli est utilisé pour calculer la distribution de pression autour d'un cylindre plongé dans un écoulement et l'intégration de cette distribution sur toute la surface fournit la résultante des forces aérodynamiques.

3 Écoulements potentiels

Un écoulement potentiel est un écoulement dont le rotationnel de la vitesse est nul en tout point. Cette notion est très proche de la notion de viscosité dans la mesure où c'est la viscosité qui

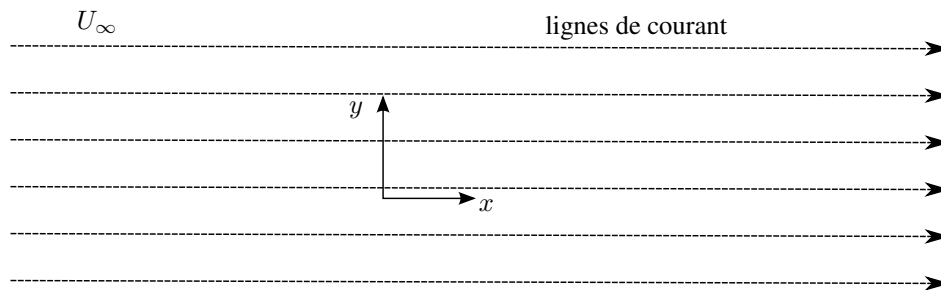


FIGURE 2.15 – Un écoulement uniforme est caractérisé par une vitesse uniforme U_∞ et des lignes de courant parallèles. La direction de l'écoulement peut éventuellement faire un angle avec le repère de coordonnées choisi.

permet le mouvement de rotation. Négliger la viscosité offre alors la possibilité d'utiliser les fonctions de courant (section 1.3) et potentielles (section 1.4) pour calculer le champ de vitesse de l'écoulement. Quelques écoulements remarquables peuvent être obtenus à l'aide de fonctions de courant simples.

3.1 Écoulements fondamentaux

Les écoulements fondamentaux sont qualifiés comme tels car ils représentent des briques élémentaires à partir desquels, il est possible de représenter des écoulements autour de géométries complexes. Dans cette partie, on commence par lister trois écoulements fondamentaux en donnant leurs fonctions potentielle et de courant puis on montre comment la superposition de ces écoulements permet de représenter des écoulements plus complexes et réalistes.

L'écoulement le plus simple que l'on puisse considérer est **l'écoulement uniforme de vitesse constante U_∞ parallèle à l'axe horizontal**. La fonction de courant en un point $P(x,y)$ est obtenue en calculant le débit volumique traversant une ligne reliant les points O et P (voir la définition équation 2.5). Le plus simple est de prendre la courbe OP_0P où $P_0 = (0, x)$. La fonction de courant est alors la somme du débit traversant OP_0 et du débit traversant P_0P . On obtient alors :

$$\psi(x,y) = 0 \times x + U_\infty y = U_\infty y$$

De même, en reprenant la définition de la fonction potentielle (équation 2.7), la fonction potentielle est l'intégrale de la composante tangentielle de la vitesse à la ligne OP . Soit en passant le point P_0 ,

$$\phi = U_\infty x$$

Ces expressions peuvent être généralisées pour des écoulements uniformes progressant dans des directions quelconques. Ceci se traduit par les expressions plus générales :

$$\begin{aligned}\psi &= -V_\infty x + U_\infty y \\ \phi &= U_\infty x + V_\infty y\end{aligned}$$

où V_∞ est la composante verticale du vecteur vitesse uniforme.

Un autre écoulement fondamental est la source ou le puits. Une source représente l'écoulement d'un fluide sur une plaque plane horizontale, le fluide étant introduit sur la plaque au

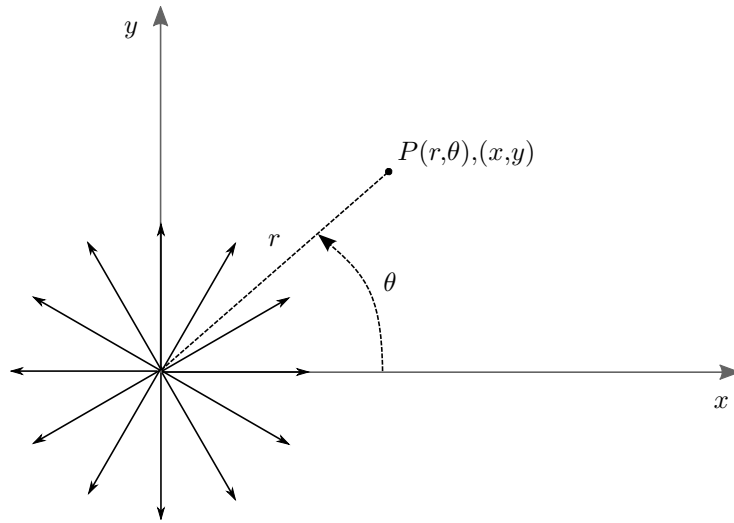


FIGURE 2.16 – La source est un écoulement radial issu d'un point et qui diverge. On exprime le champ de vitesse en P en fonction (x,y) ou (r,θ) .

travers d'un trou (Figure 2.16). L'écoulement obtenu est un écoulement radial dont le centre est le trou (la source). Sa vitesse diminue en $1/r$ où r est la distance au point source. On définit K l'intensité de la source de sorte que la vitesse à la distance r soit, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{K}{2\pi r} \\ v_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Cette définition conduit aux expressions des fonctions de courant et potentielle :

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \frac{K}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{K}{2\pi} \theta \\ \phi(x,y) &= \frac{K}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) = \frac{K}{2\pi} \ln r \end{aligned}$$

Ces expressions permettent de satisfaire à l'équation de conservation de la masse en tout point du domaine excepté au point source. Ceci ne pose pas de problème en pratique car les sources sont en général positionnées loin des points d'intérêts de l'écoulement.

Un *puits* produit le même écoulement mais en direction inverse (Figure 2.17). L'intensité est négative, on la note $-K$. Les expressions des fonctions potentielles et de courant sont donc les opposées des fonctions associées à la source.

Le troisième et dernier écoulement fondamental est **un écoulement tourbillon où le fluide dessine un mouvement circulaire autour d'un point fixe** (Figure 2.18). Ce mouvement est créé par un tourbillon centré en un point fixe de l'espace. L'écoulement est alors irrotationnel dans tout l'espace sauf au centre du tourbillon où le vecteur rotation est infini. Pour un tourbillon centré en $(0, 0)$, les fonctions ψ et ϕ sont données en coordonnées polaires par :

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \\ \phi(r, \theta) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{aligned}$$

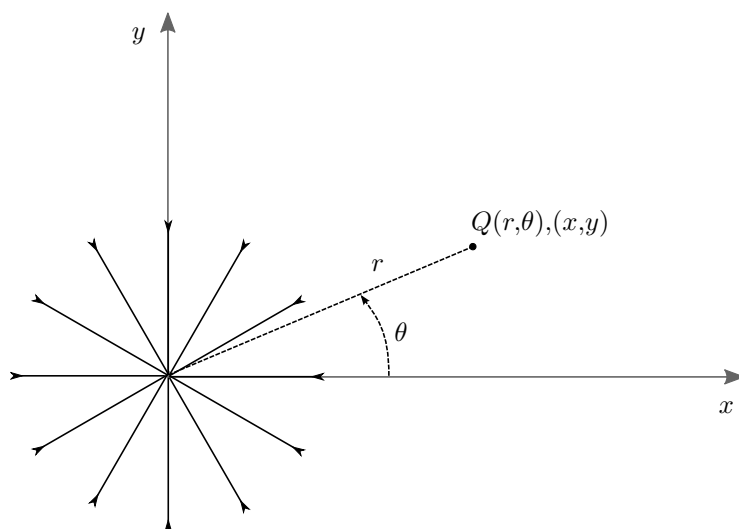


FIGURE 2.17 – Le puits est un écoulement radial convergeant vers un point unique. Le champ de vitesse en $Q(x,y)$ s'exprime comme une source avec un coefficient négatif.

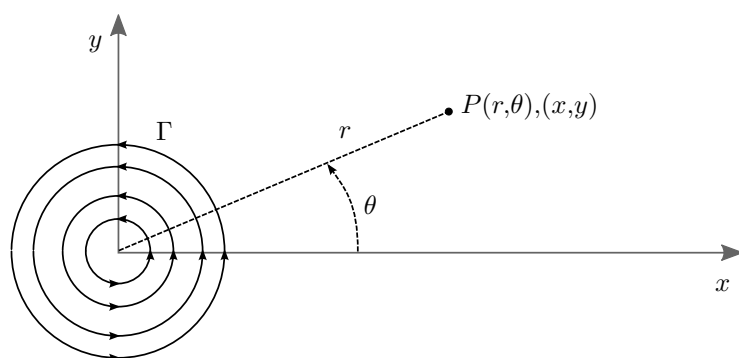


FIGURE 2.18 – Le tourbillon est un écoulement circulaire autour d'un point fixe. La circulation Γ caractérise l'intensité du tourbillon.

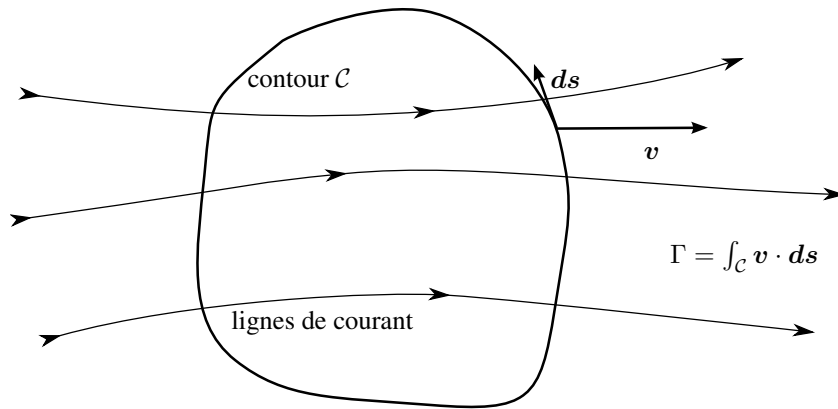


FIGURE 2.19 – La circulation est l'intégrale sur un contour fermé de la vitesse tangentielle au contour.

où Γ est la circulation du tourbillon. La circulation est définie comme l'intégrale le long d'un contour fermé de la composante tangentielle de la vitesse :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

où $d\mathbf{s}$ est un vecteur élémentaire du contour. La circulation permet de quantifier l'intensité du tourbillon contenu à l'intérieur du contour. Cette grandeur joue un rôle fondamental en aérodynamique. Le champ de vitesse induit par la présence d'un tourbillon possède une unique composante selon $\mathbf{e}_\theta$:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

On montre dans le chapitre suivant que la portance créée par un écoulement autour d'un profil est directement proportionnelle à la circulation du fluide autour du profil. Si le profil ne génère pas de circulation au sein de l'écoulement, la portance est nulle.

Malgré la dénomination, un écoulement ayant une circulation non nulle ne veut pas dire que l'écoulement fait des cercles. Une circulation finie signifie simplement que l'écoulement n'est pas uniforme et change globalement de direction entre le moment où il rentre dans le contour et le moment où il en ressort. La circulation autour d'un profil est non nulle et finie, le profil induit une déflexion de l'écoulement, l'écoulement arrive avec un certain angle d'attaque et quitte le profil avec un autre angle. Il est également intéressant de noter que la circulation est liée à la vorticité grâce au théorème de Stokes :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$$

où S est une surface s'appuyant sur le contour C (Figure 2.20). Cette relation implique que si l'écoulement est irrotationnel sur toute la surface S , la circulation sur le contour C est nulle. Le chapitre suivant revient sur le lien entre la circulation et la vorticité avec le théorème de Kelvin. Un profil génère de la circulation pour générer de la portance, la conséquence étant qu'un tourbillon est créé induisant une traînée.

On peut enfin remarquer que les expressions des fonctions pour la source ou le tourbillon sont très proches : la fonction potentielle associée à une source possède la même expression que la

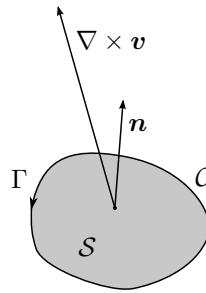


FIGURE 2.20 – La circulation et la vorticité sont liées par le théorème de Stokes.

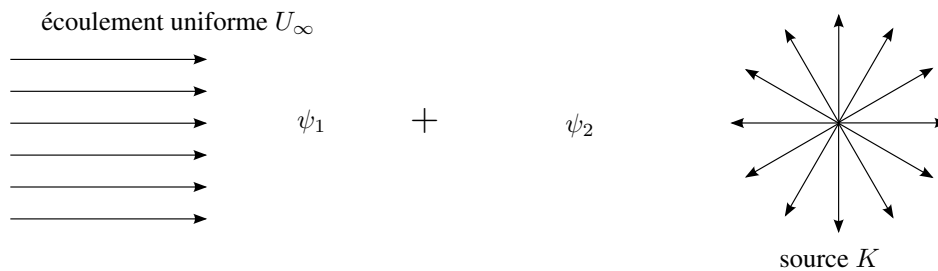


FIGURE 2.21 – Le principe de superposition permet d'additionner deux écoulements fondamentaux pour reproduire un écoulement complexe. Ici la superposition d'un écoulement uniforme U_∞ et d'une source K .

fonction de courant associée à un tourbillon. L'orthogonalité des lignes de courant et des lignes équipotentielle montre donc qu'une source et un tourbillon génèrent des écoulements orthogonaux en tout point. De façon plus générale, on peut montrer que les lignes de courant et les lignes équipotentielles d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel correspondent respectivement aux lignes équipotentielles et aux lignes de courant d'un autre écoulement bidimensionnel et irrotationnel.

3.2 Principe de superposition

Les écoulements fondamentaux définis précédemment (l'écoulement uniforme, la source, le puits et le tourbillon) représentent des écoulements potentiels, c'est-à-dire des écoulements incompressibles et irrotationnels. L'équation qui régit ces écoulements est donc l'équation de Laplace (voir les sections [1.3](#) et [1.4](#)), soit pour la fonction de courant, soit pour la fonction potentielle :

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 \phi = 0$$

Chacune de ces équations, assortie des conditions aux limites, permet d'obtenir le champ de vitesse. Ces équations sont linéaires : la somme de deux solutions est une solution. Il est alors possible d'additionner les différents écoulements fondamentaux afin d'obtenir des écoulements plus complexes : c'est le principe de superposition.

Si l'on considère ψ_1 la fonction de courant associée à une source et ψ_2 la fonction de courant associée à un écoulement uniforme, la fonction de courant $\psi = \psi_1 + \psi_2$ est une solution de l'équation de Laplace et décrit l'écoulement résultant de la superposition d'une source et d'un

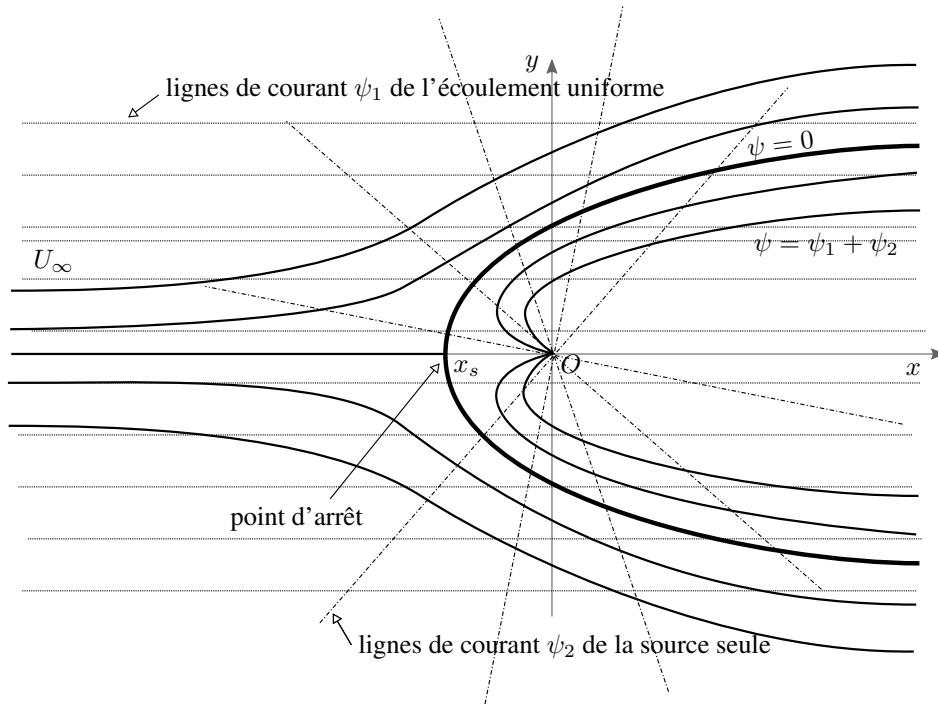


FIGURE 2.22 – La superposition d'un écoulement uniforme et d'une source fait apparaître les lignes de courant ψ caractérisées par un point d'arrêt. Ces lignes résultent de l'addition des lignes de courant ψ_1 de l'écoulement uniforme et des lignes de courant ψ_2 de la source centrée en O .

écoulement uniforme. Dans ce cas précis, on a :

$$\psi_1 = \frac{K}{2\pi} \theta = \frac{K}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad \text{et} \quad \psi_2 = U_\infty y$$

La superposition des deux écoulements est alors décrite par la fonction de courant :

$$\psi(x,y) = \psi_1 + \psi_2 = \frac{K}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y}{x} + U_\infty y$$

De même, la fonction potentielle est la somme des fonctions potentielles de la source et de l'écoulement uniforme :

$$\phi(x,y) = \phi_1 + \phi_2 = \frac{K}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + U_\infty x$$

La figure 2.22 montre les lignes de courant de la fonction $\psi(x,y)$. La source est centrée au point $O(0,0)$ et l'écoulement uniforme évolue de la gauche vers la droite. Lorsque l'écoulement approche de la source, il est dévié et contourne la source. La partie droite de l'écoulement de la source est canalisée par l'écoulement uniforme et finalement, loin de la source, l'écoulement redevient uniforme. Les lignes de courant à gauche de la source vont à la rencontre de l'écoulement uniforme, puis sont déviées pour suivre l'écoulement uniforme.

Le plan des lignes de courant permet de montrer que l'écoulement potentiel global est divisé en deux parties délimitées par la ligne de courant $\psi = 0$. Par définition, cette ligne de courant ne peut pas être traversée par l'écoulement car le vecteur vitesse est tangent à cette ligne. Elle

sépare alors virtuellement le fluide provenant de la source, du fluide venant de l'écoulement uniforme. À l'intérieur de la ligne de courant $\psi = 0$, le fluide est issu de la source ; à l'extérieur il est issu de l'écoulement à l'infini. Cette observation permet de formuler deux remarques.

Premièrement, comme le fluide ne traverse jamais une ligne de courant, il est possible de remplacer n'importe quelle ligne de courant par une paroi solide imperméable. En particulier, la ligne $\psi = 0$ peut être remplacée par une paroi fine sans que l'écoulement global soit modifié. On voit ainsi que la superposition de deux écoulements fondamentaux permet d'obtenir le champ de vitesse associé à un écoulement uniforme contournant un obstacle dont la forme extérieure évolue selon $\psi(x,y) = 0$. Cette propriété des écoulements potentiels permet ainsi de calculer le champ de vitesse d'un écoulement autour d'un profil. C'est par exemple le cas lorsque l'on veut calculer la distribution de vitesse autour d'un profil d'aile d'avion.

Deuxièmement, la superposition des écoulements fondamentaux crée un point d'arrêt, c'est-à-dire un point où la vitesse de l'écoulement est nulle. On devine sur la figure 2.22 que le point d'arrêt est situé sur l'axe Ox à gauche de la source. La position (x_s, y_s) de ce point d'arrêt dépend naturellement de l'intensité K de la source et de la vitesse U_∞ de l'écoulement uniforme. On détermine la position du point d'arrêt en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{K}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + U_\infty = 0 \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{K}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

La composante verticale v s'annule sur l'axe des abscisses, $y_s = 0$ ce qui permet d'écrire pour la composante axiale de la vitesse :

$$\frac{K}{2\pi} \frac{1}{x_s} + U_\infty = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{x_s = -\frac{K}{2\pi U_\infty}}$$

Logiquement, plus l'intensité de la source est grande, plus le point d'arrêt est loin du centre ; plus la vitesse de l'écoulement uniforme est importante, plus le point d'arrêt est proche du centre. On voit au passage que l'on peut facilement déterminer les équations du champ de vitesse en fonction des coordonnées x et y dans l'espace. Obtenir la fonction potentielle ou la fonction de courant d'un écoulement permet d'obtenir automatiquement le champ de vitesse associé.

Dans le cas que l'on vient d'étudier, la ligne de courant $\psi = 0$ est une ligne ouverte : elle tend vers l'infini pour des abscisses positives. Très souvent, on souhaite calculer l'écoulement autour d'un profil fermé comme un rocher au milieu d'un rivière, une voiture ou un avion dans un écoulement d'air. L'une des solutions pour fermer une ligne de courant est de rajouter un puits.

Ceci montre que la superposition d'écoulements fondamentaux permet de déterminer le champ de vitesse au voisinage d'un obstacle dont on connaît la géométrie. Pour des géométries simples comme un ovale, il est possible d'ajuster les paramètres des fonctions potentielles pour correctement représenter la géométrie. Pour des objets plus compliqués, il faut superposer un nombre infini de sources au travers d'une distribution.

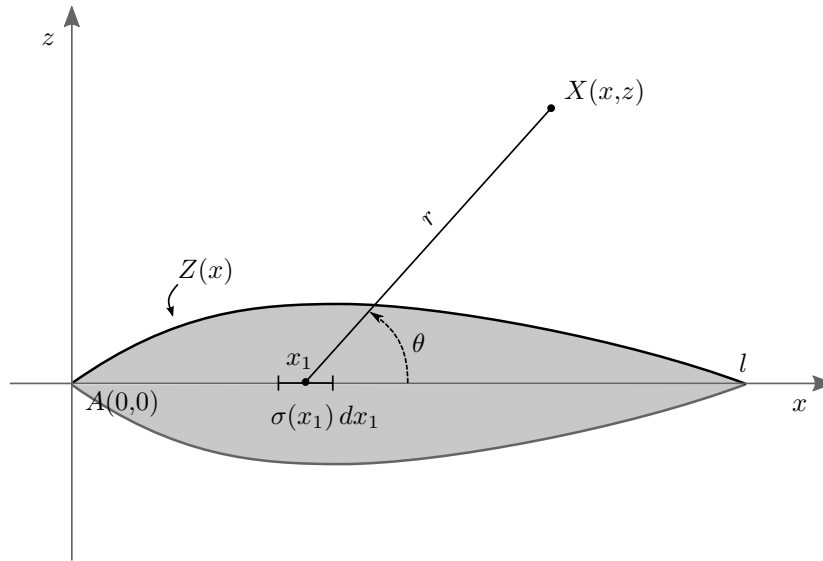


FIGURE 2.23 – Pour reconstruire l'écoulement autour d'un corps mince profilé, une distribution de source d'intensité linéique $\sigma(x)$ est répartie le long de l'axe de symétrie.

3.3 Écoulements autour d'obstacles minces et symétriques

La superposition d'écoulements fondamentaux comme les sources, les puits et les écoulements uniformes permettent d'obtenir analytiquement le champ de vitesse qui s'établit autour d'un obstacle dont on connaît la géométrie. Certaines géométries, comme l'ovale de Rankine, peuvent être obtenues par une répartition discrète de quelques sources et puits. Les géométries plus complexes nécessitent une distribution linéique d'une infinité de sources et/ou puits.

On souhaite ici déterminer le champ de vitesse autour d'obstacles minces et symétriques. On considère le problème bidimensionnel. L'obstacle est attaché à un repère Oxz où l'axe Ox est horizontal et l'axe Oz est vertical (Figure 2.23). Le bord de l'objet est positionné au point $A = (0,0)$ et s'étend jusqu'à l'abscisse $x = l$. La frontière supérieure de l'objet est décrite par la fonction $Z(x)$ pour $x \in [0; l]$. Les objets étudiés ici ont deux propriétés communes :

1. ils sont symétriques : la paroi inférieure est obtenue par symétrie autour de l'axe Ox . On ne s'intéresse donc qu'à la paroi supérieure.
2. les objets sont minces, ce qui signifie que $Z(x) \ll l$. L'épaisseur de l'objet reste très petite devant la longueur. La forme est effilée ou profilée.

Pour représenter de tels objets, on utilise une distribution de sources et de puits disposés le long du segment $[0; l]$. On considère un point $x_1 \in [0; l]$ auquel est placée une source d'intensité $\sigma(x_1)dx_1$. $\sigma(x_1)$ est une intensité de source par unité de longueur, elle s'exprime en mètre par seconde. La source (ou le puits en fonction du signe de σ) s'étend sur la longueur dx_1 , son intensité totale est donc $\sigma(x_1)dx_1$. On cherche dans un premier temps à exprimer la vitesse induite par cette source en un point $X = (x, z)$.

La fonction potentielle d'une source centrée en $(0,0)$ s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\phi(r, \theta) = \frac{K}{2\pi} \ln r$$

où K est l'intensité de la source et r la distance à la source. La vitesse induite possède une unique composante radiale donnée par :

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{K}{2\pi r}$$

Par analogie, la source $\sigma(x_1) dx_1$ centrée en x_1 induit la vitesse élémentaire :

$$dv_r = \frac{1}{2\pi r} \sigma(x_1) dx_1$$

Avec les notations utilisées sur la figure [2.23](#), on peut exprimer les composantes de la vitesse (du_1, dw_1) induite en $X(x, z)$ par la source en x_1 selon respectivement les axes Ox et Oz par :

$$\begin{aligned} du_1 &= dv_r \cos \theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \sigma(x_1) dx_1 \\ dw_1 &= dv_r \sin \theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \sigma(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

avec

$$r^2 = (x - x_1)^2 + z^2 \quad ; \quad \cos \theta = \frac{x - x_1}{r} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{z}{r}$$

Le champ de vitesse élémentaire induit en X par la source positionnée en x_1 a donc pour composantes :

$$du_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_1}{(x - x_1)^2 + z^2} \sigma(x_1) dx_1 \quad (2.12)$$

$$dw_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{(x - x_1)^2 + z^2} \sigma(x_1) dx_1 \quad (2.13)$$

Pour pouvoir intégrer ces expressions entre 0 et l , le long de l'axe Ox , il faut connaître la distribution de sources à utiliser. C'est cette distribution qui va créer les lignes de courant décrivant la géométrie de l'obstacle. La distribution dépend donc directement de la forme de la frontière $Z(x)$ de l'objet. Pour établir le lien entre les deux grandeurs, on a besoin (1) d'établir une relation entre la distribution de sources sur l'axe et la vitesse à la paroi et (2) de relier la vitesse imposée par l'écoulement externe à l'obstacle à l'écoulement "dans" l'obstacle.

(1) La relation entre la distribution de source et la vitesse à la paroi se fait par conservation du débit. La figure [2.24](#) propose un grossissement autour de l'abscisse x_1 . Comme le profil est mince, la surface dZ est très proche de l'axe Ox . On peut donc considérer que le débit issu de la source est égal au débit traversant la paroi dZ , d'où :

$$\sigma(x_1) dx_1 = dv_n^d dZ \quad (2.14)$$

En effet, le terme de gauche est le débit volumique traversant la ligne de longueur dx_1 au niveau de la source et, si l'on nomme dv_n^d la vitesse normale à la paroi dZ , le débit traversant la paroi est le terme de droite. Soit β l'angle que forme la paroi dZ avec l'horizontal. Le profil étant mince, β est très petit et donc $dx_1 \sim dZ$. Dans ce cas, la vitesse normale à la paroi est la vitesse verticale dw induite par la source située en x_1 à la paroi, c'est-à-dire quand $z = Z(x) \rightarrow 0$. On obtient finalement à partir de l'équation [\(2.14\)](#) :

$$\begin{aligned} \sigma(x_1) dx_1 &= dv_n^d dZ \\ &\simeq dv_n^d dx_1 \\ \sigma(x_1) &\simeq dv_n^d \simeq dw(z \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (2.15)$$

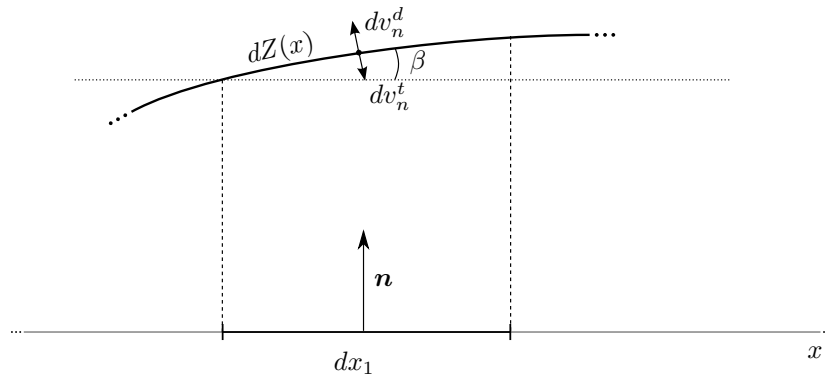


FIGURE 2.24 – La courbure de la surface de l'obstacle $dZ(x)$ est proche de l'axe de symétrie car le profil est mince. Ceci permet d'approcher la normale à la surface et de calculer la vitesse normale à la paroi issue dv_n^d de la source $\sigma(x_1)$ et la vitesse normale à la paroi issue de l'écoulement uniforme dv_n^t .

(2) L'obstacle est immergé dans un écoulement uniforme de vitesse U_∞ . Lorsque l'écoulement arrive sur l'élément de paroi dZ , la vitesse élémentaire normale à la paroi est, comme le montre la figure 2.24 :

$$dv_n^t = -U_\infty \sin \beta$$

La figure 2.24 montre aussi que l'on peut exprimer β en fonction de la pente de la paroi puisque :

$$\sin \beta = \frac{dZ}{dx} \quad \text{soit} \quad dv_n^t = -U_\infty \frac{dZ}{dx} \quad (2.16)$$

À la paroi, il faut que les vitesses normales extérieure dv_n^t et intérieure dv_n^d se compensent car la paroi représente une ligne de courant sur laquelle la vitesse normale est nulle :

$$dv_n^t = -dv_n^d \quad \text{et d'après les équations (2.15) et (2.16), on obtient}$$

$$U_\infty \frac{dZ}{dx} = \sigma(x_1)$$

Cette dernière équation établit le lien entre la distribution de source à imposer et la géométrie de l'obstacle. On peut alors exprimer la vitesse tangente à la paroi (quand $z \rightarrow 0$) en intégrant les équations (2.12) et (2.13), en remplaçant $\sigma(x_1)$ par la géométrie et en ajoutant la vitesse uniforme :

$$u(x) = \underbrace{\frac{U_\infty}{2\pi} \int_0^l \frac{dZ}{dx} \frac{dx_1}{x - x_1}}_{\text{sources}} + \underbrace{U_\infty x}_{\text{uniforme}}$$

$$w(x) = 0$$

Pour des obstacles minces et symétriques, le champ de vitesse normale est nul. En revanche, la vitesse axiale $u(x)$ est modifiée et varie en fonction de la géométrie du profil.

Cette expression est valable pour des pentes faibles de la paroi. Il est donc impossible avec cette approche de calculer le champ induit par la présence d'un obstacle ayant un bord d'attaque

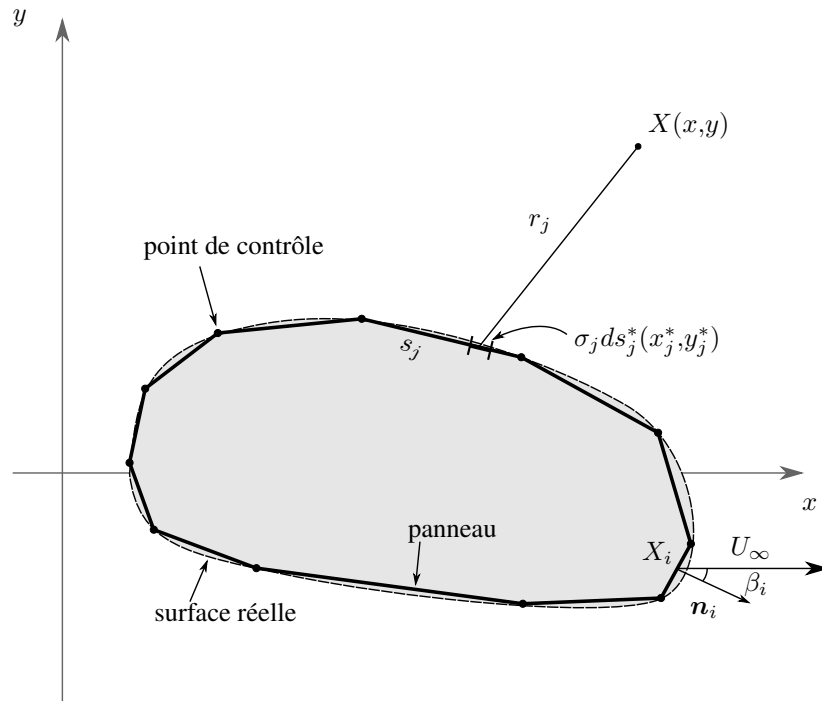


FIGURE 2.25 – La surface de l’objet est approchée par une série de panneaux. Sur chaque panneau, une distribution de sources induit une vitesse en tout point $X(x,y)$ de l’écoulement.

arrondi où la pente est très forte. Dans ces cas là, on parle de profils épais et il est impossible d’obtenir des solutions analytiques au problème, il faut utiliser les outils numériques et, en particulier, la méthode des panneaux.

4 Écoulements autour d’un corps arbitraire - Méthode des panneaux

La répartition discrète ou continue de sources et de puits permet de reproduire l’écoulement qui s’établit autour d’un obstacle. L’ovale de Rankine peut être calculé en superposant une source et un puits de même intensité à un écoulement uniforme. Pour les profils minces symétriques, une distribution de sources et de puits le long de l’axe de symétrie permet de recréer l’écoulement autour du profil dont la frontière est définie par la fonction $Z(x)$. Cette dernière approche est uniquement valable lorsque les épaisseurs et les pentes du profil sont très faibles. Si l’on veut modéliser l’écoulement qui s’établit autour d’un objet de géométrie quelconque, il faut pousser un cran plus loin l’effort de modélisation pour mettre en oeuvre la méthode dite *des panneaux*.

L’idée est de créer une distribution de sources non pas sur un axe mais le long de la frontière du profil. La frontière $Z(x)$ de l’objet est approchée par une fonction affine par morceaux. Chaque segment est appelé un panneau. Plus le nombre m de panneaux est grand et plus la méthode est précise mais coûteuse. La longueur du j -ème panneau est notée s_j sur laquelle on distribue des sources d’intensité $\sigma_j ds_j^*$ où ds_j^* est un élément de longueur du panneau s_j . L’intensité linéique σ_j est constante sur l’ensemble du panneau mais peut changer d’un panneau à l’autre. On cherche la fonction potentielle élémentaire $d\phi_X^j$ créée par l’élément de longueur ds_j^* au

point $X = (x, y)$. La fonction potentielle d'une source d'intensité K est donnée par :

$$\phi = \frac{K}{2\pi} \ln r$$

Par analogie,

$$d\phi_X^j = \frac{\sigma_j ds_j^*}{2\pi} \ln r_j$$

où r_j est la distance entre l'élément ds_j^* situé en (x_j^*, y_j^*) et le point X , soit :

$$r_j^2 = (x_j^* - x)^2 + (y_j^* - y)^2$$

En intégrant sur l'ensemble du panneau j , on obtient la fonction potentielle ϕ_X^j créée par le panneau j au point X :

$$\phi_X^j = \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \ln r_j ds_j^* \quad (2.17)$$

Par conséquent, si l'on somme la contribution des m panneaux, on obtient la fonction potentielle créée par l'ensemble de l'obstacle au point X :

$$\phi_X = \sum_{j=1}^m \phi_X^j = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \ln r_j ds_j^*$$

Pour calculer la fonction potentielle, il manque une information sur la nature de la distribution de source à imposer. En effet, les distributions σ_j doivent permettre de reproduire la fonction de courant issue de la présence de l'obstacle dans un écoulement uniforme.

L'information qui permet de déterminer la distribution σ_j est le fait que la frontière de l'objet doit être une ligne de courant, c'est-à-dire que la vitesse normale à la paroi doit être nulle. Or la vitesse à la paroi est la superposition de l'écoulement induit par les sources et de l'écoulement uniforme. On appelle $v_{t,n}$ la vitesse normale à la paroi issue de l'écoulement uniforme et $v_{d,n}$ la vitesse normale à la paroi issue de la distribution des sources. Par conséquent, on doit avoir :

$$v_{d,n} + v_{t,n} = 0 \quad (2.18)$$

La vitesse normale issue de l'écoulement uniforme est relativement simple à déterminer. On appelle $\mathbf{n}_i$ le vecteur unitaire normal extérieur au panneau i . On a alors :

$$v_{t,n} = U_\infty \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}_i = U_\infty \cos \beta_i \quad (2.19)$$

où β_i est l'angle entre les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{n}_i$ (Figure 2.26).

Pour écrire $v_{d,n}$, il faut donc exprimer la vitesse induite par le j -ème panneau au niveau du i -ème panneau. On écrit l'équation (2.17) au point $X_i = (x_i, y_i)$ situé au centre du panneau i :

$$\phi_i^j = \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \ln r_{ij} ds_j^*$$

avec $r_{ij} = [(x_j^* - x_i)^2 + (y_j^* - y_i)^2]^{1/2}$ la distance entre le point courant du j -ème panneau et le centre du i -ème panneau. En sommant la contribution des m panneaux, on obtient la fonction potentielle en X_i induite par tous les panneaux décrivant la frontière de l'obstacle :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^m \phi_i^j = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \ln r_{ij} ds_j^*$$

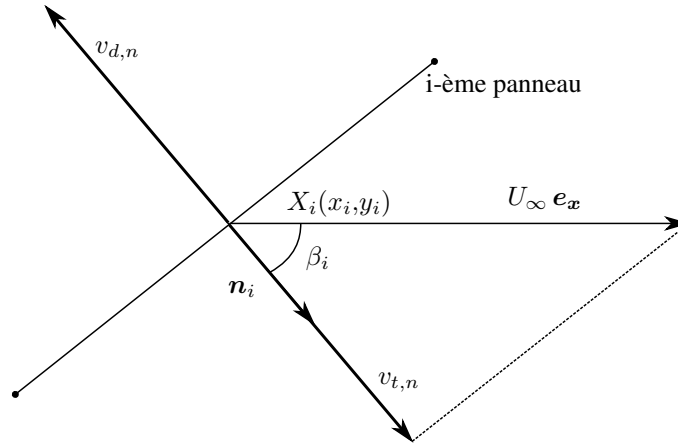


FIGURE 2.26 – Au point X_i , centre du panneau i , la vitesse normale induite par l'écoulement uniforme doit compenser la vitesse normale induite par la distribution de sources sur l'ensemble des panneaux.

Cette fonction semble mal définie car lorsque $j = i$ le point courant (x_i^*, y_i^*) coïncide avec le centre du panneau (x_i, y_i) quand on parcourt s_i d'où $r_{ii} = 0$ et le logarithme qui tend vers $-\infty$. Plus exactement l'intégrale est impropre et doit être définie par la valeur principale de Cauchy qui permet de calculer l'intégrale par approche aux limites du point de singularité (ce calcul est numériquement rendu possible par l'utilisation des bibliothèques QUADPACK disponibles pour de nombreux langages de programmation).

n_i est le vecteur unitaire normal au panneau i . La vitesse normale $v_{d,n}$ au panneau i induite par les distributions de sources σ_j est donc

$$v_{d,n} = \frac{\partial \phi_i}{\partial n_i} = \underbrace{\frac{\sigma_i}{2}}_{\text{panneau } i} + \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_i} \ln r_{ij} ds_j^* \quad (2.20)$$

Le premier terme est la contribution du panneau i à la vitesse normale au panneau i , la somme est la contribution de tous les autres panneaux. Les équations (2.18), (2.19) et (2.20) permettent alors d'écrire la relation :

$$\boxed{\frac{\sigma_i}{2} + \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_i} \ln r_{ij} ds_j^* + U_\infty \cos \beta_i = 0} \quad (2.21)$$

On peut écrire cette relation pour les m panneaux, c'est-à-dire pour $i = 1, m$. Le système obtenu est un système à m équations (une équation pour chaque panneau) et m inconnues (les m distributions linéiques σ_j). Des méthodes numériques simples permettent de résoudre ces systèmes avec une excellente précision. Le nombre m de panneaux peut alors être adapté à la situation étudiée. En augmentant le nombre de panneaux, la géométrie étudiée est décrite avec une grande précision mais la taille du système à résoudre est plus grande, ce qui nécessite plus de ressources informatiques. Aucune condition n'est imposée sur le nombre et la taille des panneaux, il est donc tout à fait possible d'améliorer la description de la géométrie en utilisant de nombreux petits panneaux aux endroits de fortes courbures et des panneaux plus grands

et moins nombreux dans les zones où la géométrie est quasiment uniforme. Par exemple, la représentation d'une aile d'avion épaisse est très bien réalisée en considérant de petits panneaux au voisinage du bord d'attaque tandis que des panneaux plus grands permettent de décrire le bord de fuite avec une fidélité remarquable.

La détermination des distributions σ_j permet ensuite d'exprimer le champ de vitesse induit par l'ensemble des panneaux en tout point de l'espace et en particulier sur le panneau i . À la surface, la vitesse tangentielle est donnée par :

$$v_{d,s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial s_i} \ln r_{ij} ds_j^*$$

où $\partial/\partial s_i$ est la dérivée le long du i -ème panneau. La vitesse totale tangentielle à la surface est la somme des vitesses induites par les panneaux superposées à l'écoulement uniforme, soit :

$$v_s = v_{d,s} + v_{t,s} = U_\infty \sin \beta_i + \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial s_i} \ln r_{ij} ds_j^* \quad (2.22)$$

Il est important de bien voir que les expressions (2.21) et (2.22) prennent en compte la géométrie que l'on étudie. Il est logique que le champ de vitesse induit par des profils d'équation $Z(x)$ différents dépend de ce profil. Or $Z(x)$ n'apparaît pas explicitement dans ces expressions. En réalité $Z(x)$ se cache dans les dérivées.

Les intensités des sources sont obtenues en calculant la dérivée selon la normale à la paroi $\partial/\partial n_i$. On montre ici que cette dérivée s'exprime en fonction de $Z(x)$.

Soit la fonction φ définie par :

$$\varphi(x,z) = Z(x) - z$$

Cette fonction de deux variables fournit un champ dans le plan (x,z) . La surface de l'objet que l'on étudie est obtenue pour une valeur particulière de φ qui est

$$\varphi(x,z) = 0 \quad \text{soit} \quad Z(x) = z$$

La dérivée selon la normale à la paroi est donc la dérivée le long du vecteur unitaire $\mathbf{n}_i$ normal à la ligne $\varphi = 0$. Le vecteur est alors obtenu à partir du gradient de la fonction φ puisque

$$\mathbf{n}_i = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$$

avec

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Z'(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} \frac{Z'(x)}{Z'^2(x) + 1} \\ -\frac{1}{Z'^2(x) + 1} \end{pmatrix}$$

La dérivée d'une fonction $\psi(x,z)$ selon la normale $\mathbf{n}_i$ s'écrit alors

$$\frac{\partial \psi(x,z)}{\partial n_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n_i} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n_i} = \nabla \psi \cdot \mathbf{n}_i$$

Ceci montre que l'on peut exprimer la dérivée le long de la normale en fonction de la dérivée de la fonction décrivant le profil $Z'(x)$. Si l'on se donne l'équation du panneau i , il est possible de calculer la dérivée par rapport à sa normale.

Le même raisonnement peut être fait avec la dérivée selon le vecteur tangent à la surface $\partial/\partial s_i$ pour déterminer la vitesse tangente :

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial s_i} = \nabla \psi \cdot \mathbf{s}_i$$

où s_i est le vecteur unitaire tangent au panneau i . Ce vecteur s'exprime en fonction de la dérivée de la fonction du panneau puisque :

$$\mathbf{s}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z'^2(x) + 1} \\ \frac{Z'(x)}{Z'^2(x) + 1} \end{pmatrix}$$

La méthode des panneaux montre que la répartition judicieuse de sources et de puits le long d'une géométrie complexe permet de calculer le champ de vitesse autour d'un obstacle symétrique plongé dans un écoulement de vitesse uniforme. Ici l'écoulement est potentiel, c'est-à-dire qu'il est irrotationnel et incompressible. Dans ces conditions, il est possible d'appliquer le théorème de Bernoulli pour calculer la distribution de pression le long de l'obstacle. Le long d'une ligne de courant qui part de l'infini jusqu'à un point courant de la surface de l'objet, la quantité $p/\rho + v^2/2$ est conservée, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

où p et v sont respectivement la pression et la vitesse en un point (x, y) de la surface du profil. On définit le coefficient de portance c_p comme,

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} = 1 - \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^2 \quad (2.23)$$

En intégrant ce coefficient le long du profil, on obtient la résultante des forces aérodynamiques qui s'exercent sur le profil.

Pour calculer les forces aérodynamiques qui s'exercent sur un objet, il est nécessaire de calculer le champ de vitesse puis la pression au voisinage du profil. Ce chapitre a montré une méthode efficace et peu coûteuse pour calculer cette distribution de vitesse dans le cas d'un objet symétrique. Cette méthode est étendue dans le chapitre suivant à des situations dissymétriques pour lesquelles la résultante des forces est non-nulle, permettant ainsi de calculer les forces de portance et de traînée.

Exercice 2.1

Le tube de Pitot (Figure 2.27) est un dispositif permettant de mesurer la vitesse relative d'un avion pendant son vol. Le fonctionnement de ce système pour une

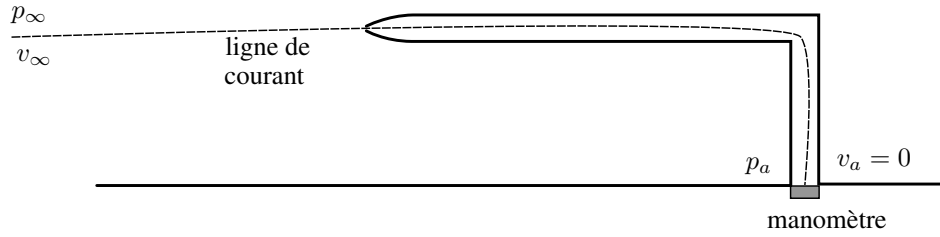


FIGURE 2.27 – Un tube de Pitot permet de mesurer la vitesse relative d'un avion par rapport à l'air ambiant. Une ligne courant va de l'infini au manomètre du tube. La différence de pression permet d'obtenir la vitesse d'avancée.

faible vitesse de progression peut s'expliquer grâce au théorème de Bernoulli. Le tube possède une entrée d'air à son extrémité puis un coude conduit l'écoulement vers un manomètre mesurant la pression d'arrêt p_a de l'écoulement. La pression d'arrêt est la pression lorsque la vitesse de l'écoulement est nulle.

En supposant que l'on connaisse la pression ambiante p_∞ , exprimer à l'aide du théorème de Bernoulli la vitesse v_∞ de l'avion.

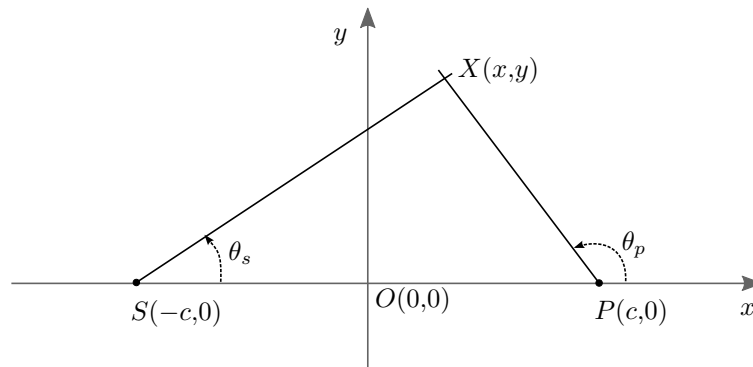


FIGURE 2.28 – Pour reproduire l'écoulement autour d'un corps fermé, on place une source et un puits de même intensité de part et d'autre de l'origine.

Exercice 2.2

Calculer les lignes de courant d'un écoulement potentiel constitué de la superposition d'un écoulement uniforme, d'une source et d'un puits de même intensité K . Les fonctions de courant ψ_s et ψ_p d'une source et d'un puits sont respectivement :

$$\psi_s = \frac{K}{2\pi} \theta_s \quad ; \quad \psi_p = -\frac{K}{2\pi} \theta_p$$

On place la source et le puits de façon symétrique autour du centre du repère. La source est située au point $S = (-c, 0)$ et le puits au point $P = (c, 0)$ (Figure 2.28).

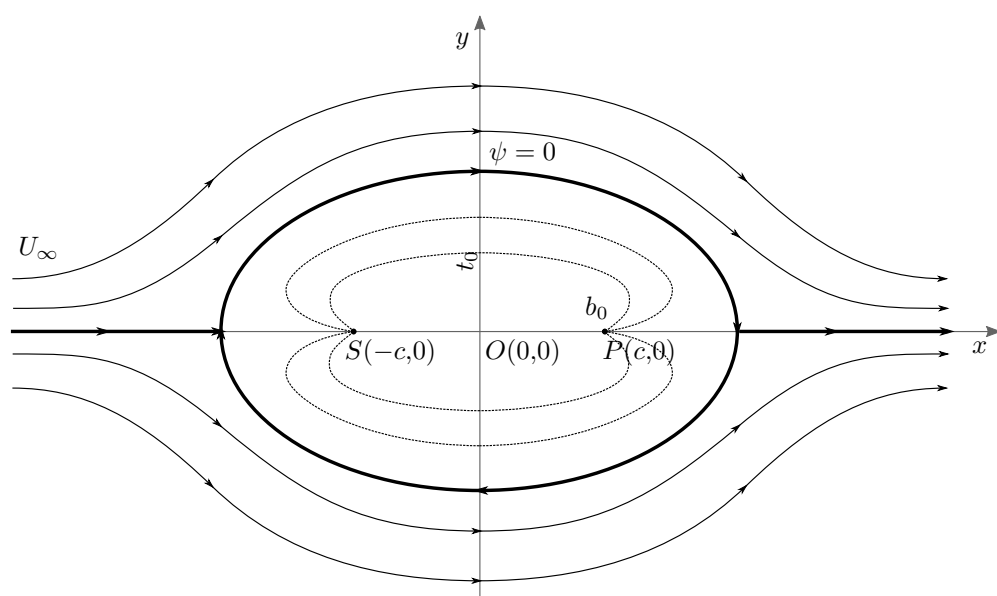


FIGURE 2.29 – La superposition d’un écoulement uniforme, d’un puits et d’une source permet de recréer l’écoulement autour d’un corps oval. L’intensité de la source et du puits est déterminée en fonction des dimensions de l’ovale (t_0, b_0) .

Chapitre III

Écoulement idéal autour d'un profil

Ce chapitre a pour objectif de présenter l'origine physique de la portance et de la calculer dans les cas les plus simples. Pour cela, on fait l'hypothèse que l'allongement de la surface portante est infini ce qui permet de traiter le problème en deux dimensions en raisonnant par unité d'envergure. Dans cette situation, les effets de bord sont négligés et l'étude porte sur la portance générée par un profil. Cette approche bidimensionnelle permet de mettre en place un cadre mathématique rigoureux à la détermination de la portance. Les effets d'allongement seront vus dans le chapitre suivant.

1 Généralités sur les surfaces portantes

On définit ici les grandeurs physiques et géométriques qui caractérisent les surfaces et les profils étudiés dans ce cours. L'objectif est de comprendre les grandeurs qui caractérisent la géométrie globale d'un avion et donc ce qui différencie les éléments sustentateurs d'un avion à l'autre. Cette première partie essentielle pose ou rappelle les bases pour aborder les aspects théoriques et physiques de la discipline.

Les avions de ligne actuels proposent à peu près tous la même géométrie globale constituée d'ailes principales et d'un empennage situé à l'arrière de l'appareil. Cette configuration très répandue n'est pourtant pas celle retenue initialement par les frères Wright lors de leur premier vol en 1903. Le premier appareil volant avait plutôt une géométrie inversée où les ailes se situaient à l'arrière et deux *canards* étaient placés vers l'avant de l'appareil. La forme actuelle des avions de ligne est apparue assez rapidement à l'initiative de chercheurs et aérodynamiciens français, très dynamiques dans le domaine. De nos jours, plusieurs géométries se sont imposées, outre le couple aile/empennage des avions de ligne, on retrouve des ailes Delta présentes principalement sur les avions militaires, et leur variante gothique (une aile Delta avec une flèche variable) popularisée par le *Concorde*. L'ajout de canards, éléments sustentateurs additionnels situés en avant de l'aile, permettent d'assurer la stabilité de telles configurations.

De nombreux éléments de l'avion sont en contact avec l'écoulement extérieur et contribuent aux forces de portance et/ou de traînée. Parmi ces éléments, on trouve (Figure 3.1) :

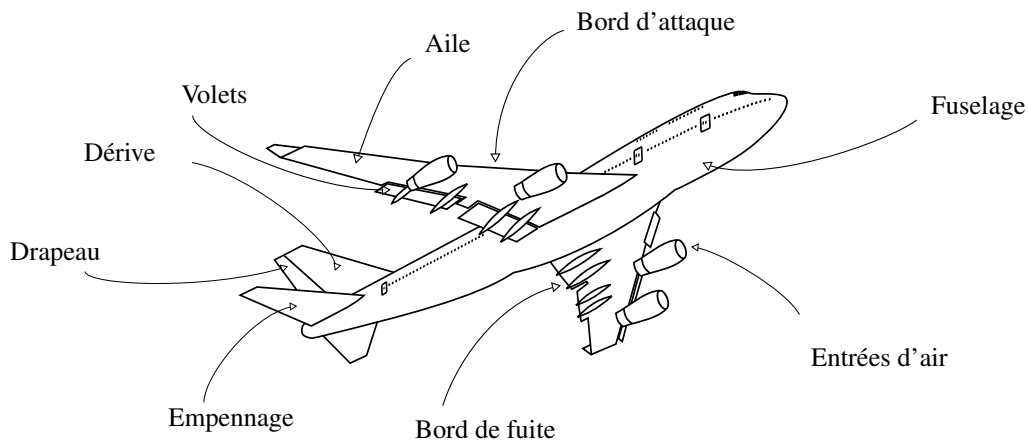


FIGURE 3.1 – Éléments principaux d'un avion commercial actuel. Certains éléments participent à la création de portance, d'autres créent uniquement une force de traînée qui s'oppose à l'avancement de l'avion (Boeing 747-400 dessiné par Eluveitie).

- le fuselage (*body*) est l'élément principal de l'avion. Il contient les charges à transporter et n'a pas de fonction aérodynamique. Sa forme cylindrique permet de résister aisément aux différences de pressions qui existent entre l'intérieur et l'extérieur en cours de vol.
- l'aile (*wing*) est le principal élément portant. Sa surface est en rapport avec la masse totale de l'avion. Elle est profilée pour générer la portance nécessaire et fait l'objet d'une attention particulière au moment de la conception afin d'optimiser le rapport portance sur traînée. La création de portance induit nécessairement l'apparition d'une force de traînée, il s'agit de minimiser la traînée tout en assurant la portance suffisante.
- l'empennage (*stabilizer*) est la surface portante située à l'arrière de l'avion. Sa fonction principale est d'assurer la stabilité en tangage de l'avion. Une aile classique est naturellement instable, elle a tendance à se positionner à la verticale. L'empennage crée un couple de rappel qui maintient l'avion en position horizontale.
- les entrées d'air (*air intake*) aspirent l'air ambiant pour alimenter les réacteurs nécessaires à la propulsion.
- les bords de bord d'attaque (*slats*) sont des appendices rétractables situés sur le bord d'attaque de l'aile et utilisés dans les phases d'atterrissage et de décollage. Ils permettent d'augmenter la surface de la voilure lorsque la vitesse de progression de l'avion est la plus faible.
- les volets (*flaps*) sont également des appendices de la voilure mais situés sur le bord de fuite de l'aile. Leur fonction est d'augmenter la surface de l'aile afin de permettre à l'avion de décoller et atterrir.
- la dérive (*drift*) est l'extension verticale située à l'arrière de l'avion. C'est un élément aérodynamique qui ne crée pas de portance mais qui assure la stabilité en lacet de l'avion, c'est-à-dire qu'elle permet de maintenir la direction de l'avion.
- le drapeau (*roller*) est un organe de commande. C'est la partie mobile de la dérive qui permet de piloter l'avion en modifiant la répartition des forces aérodynamiques sur l'arrière et ainsi de tourner.
- la tuyère (*nozzle*) est la partie arrière des moteurs, à travers laquelle les gaz chauds sont éjectés. C'est l'éjection des gaz chauds à haute vitesse qui permet de créer la poussée.

"After running the engine and propellers a few minutes to get them in working order, I got on the machine at 10 :35 for the first trial. The wind, according to our anemometers at this time, was blowing a little over 20 miles (corrected) 27 miles according to the Government anemometer at Kitty Hawk. On slipping the rope the machine started off increasing in speed to probably 7 or 8 miles. The machine lifted from the truck just as it was entering on the fourth rail. Mr. Daniels took a picture just as it left the tracks. I found the control of the front rudder quite difficult on account of its being balanced too near the center and thus had a tendency to turn itself when started so that the rudder was turned too far on one side and then too far on the other. As a result the machine would rise suddenly to about 10 ft. and then as suddenly, on turning the rudder, dart for the ground. A sudden dart when out about 100 feet from the end of the tracks ended the flight. Time about 12 seconds (not known exactly as watch was not promptly stopped)."

December 17, 1903, Orville Wright.

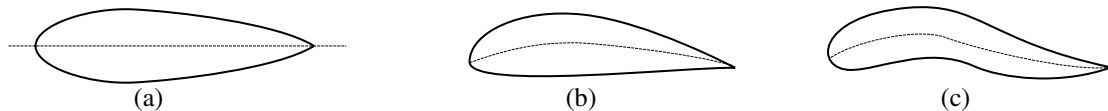


FIGURE 3.2 – Le profil d'une aile peut avoir plusieurs formes différentes. Cette forme peut éventuellement évoluer avec l'envergure : (a) profil symétrique, (b) profil à simple courbure, (c) profil à double courbure.

- les aéro-freins (*spoilers*) sont des éléments mobiles plaqués sur les ailes et qui peuvent être relevés pour ralentir l'avion.

Si tous ces éléments ont un effet certain sur l'aérodynamisme global de l'avion, les ailes et l'empennage sont les composants qui assurent l'essentiel de la portance de l'avion. Seuls ces éléments sont considérés ici et sont regroupés sous le vocable *surfaces portantes*. Voyons maintenant ce qui définit une surface portante et quelles sont les grandeurs qui permettent de caractériser ces éléments.

2 Géométrie des profils et des surfaces portantes

Un *profil* est une coupe transverse d'une surface portante. L'objectif premier de la surface portante est de créer une force de portance lorsque l'avion est en mouvement afin de compenser le poids de ce dernier. Ceci passe par l'utilisation d'un profil présentant une courbure et/ou placé en incidence dans un écoulement à grande vitesse. Lorsqu'un tel profil est plongé dans un écoulement d'air à la vitesse U_∞ , l'air passant sous le profil ralentit alors que celui contournant le profil par le dessus accélère. Le théorème de Bernoulli nous dit alors que la pression sous l'aile sera plus importante que la pression sur l'aile. La force de portance résulte donc d'une différence de pression entre le dessous de l'aile, appelé **l'intrados** (*pressure side*), et le dessus de l'aile, **l'extrados** (*suction side*). L'intensité de la force de portance qui est ainsi créée dépend de la différence de pression que l'écoulement va subir autour de l'aile.

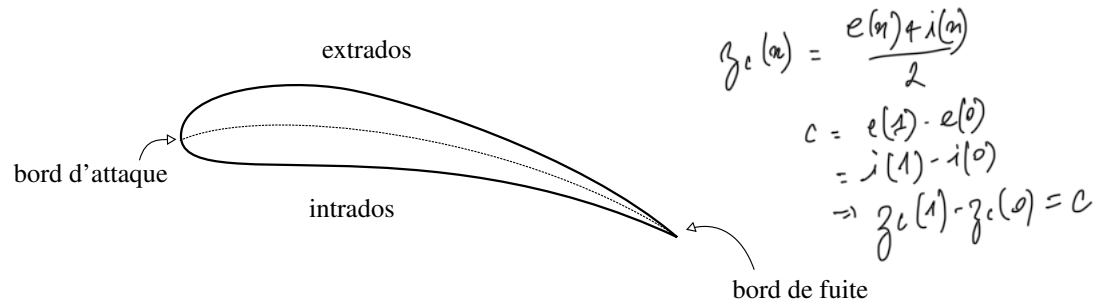


FIGURE 3.3 – Un profil est repéré par ses bords d'attaque et de fuite, et ces deux faces : l'extrados et l'intrados.

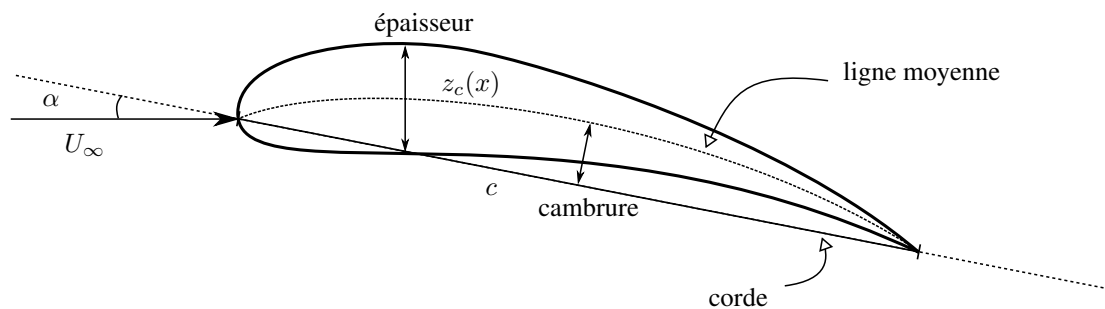


FIGURE 3.4 – Un profil est plongé dans un écoulement uniforme à la vitesse U_∞ avec un angle d'incidence α . La géométrie d'un profil est caractérisée par l'épaisseur, la cambrure, la ligne moyenne et la corde.

Pour voler, il y a donc deux possibilités :

1. déplacer un petit volume d'air à grande vitesse : c'est le cas des avions qui ont des profils faiblement courbés et qui donc modifient peu l'écoulement autour d'eux mais le font sur des vitesses d'écoulement considérables.
2. déplacer un grand volume d'air à petite vitesse : c'est le principe du battement d'ailes utilisées par les insectes et les mini-drônes, qui brassent un grand volume d'air à des vitesses plus faibles que les avions. Les pionniers du vol habité ont d'abord tenter d'utiliser cette deuxième technique avec le succès que l'on sait...

Afin de caractériser la géométrie particulière d'un profil, on définit plusieurs grandeurs :

- la corde, c , est la distance géométrique qui relie le bord d'attaque au bord de fuite,
- la ligne moyenne, $z_c(x)$, est la courbe située à égale distance de l'extrados et de l'intrados,
- la cambrure, z_{max} , est la distance maximale entre la ligne moyenne et la corde,
- l'épaisseur, notée $z_e(s)$, est la distance entre l'extrados et l'intrados, elle évolue donc le long du profil,
- l'épaisseur maximale est, intuitivement, la distance maximale séparant l'extrados de l'intrados.

Aux premières heures de l'aéronautique, le *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA) a défini un moyen de caractériser ces grandeurs au travers d'une nomenclature : ce sont les célèbres profils NACA. Les profils les plus simples sont identifiés par 4 chiffres. Le premier est le pourcentage que représente la courbure maximale par rapport à la corde, le deuxième est le

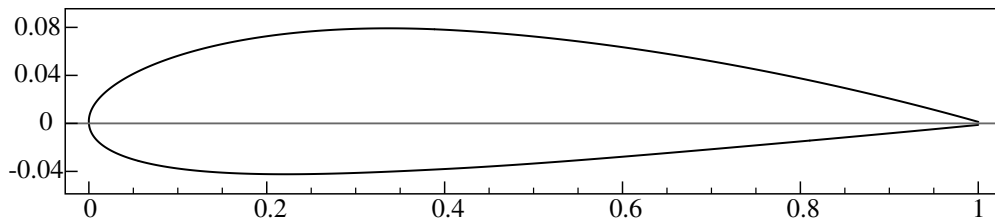


FIGURE 3.5 – Profil NACA 2412.

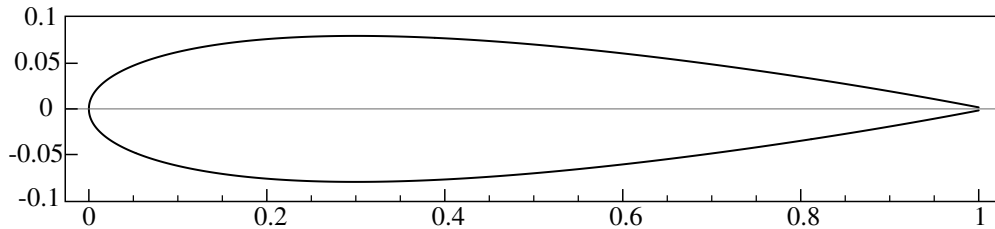


FIGURE 3.6 – Profil NACA 0016.

dixième de la position du point de cambrure maximale par rapport à la longueur de la corde et les deux derniers sont le pourcentage d'épaisseur maximale par rapport à la corde.

Exemple

L'aile NACA 2412 (Figure 3.5) possède une cambrure de 2% à 40% du bord d'attaque avec une épaisseur maximale de 12% de la corde. Les profils à quatre chiffres ont par défaut une épaisseur maximale située à une distance de 30% de la corde du bord d'attaque. Le NACA 0016 est symétrique, le 00 indiquant qu'il n'a pas de cambrure. Le 16 indique que l'aile a une épaisseur de 16% de la corde.

À partir d'un ou des profils, la surface portante est générée par translation dans la troisième dimension. La surface ainsi obtenue est caractérisée par quelques grandeurs fondamentales (Fig. 3.7) :

- l'envergure b (*span*) est la distance entre les deux extrémités de l'aile,
- la corde en pied, ou à la racine, c_r de l'aile est la corde à l'emplanture de l'aile,
- la corde en tête ou à l'extrémité de l'aile c_t ,
- la ligne de quart de corde est la ligne reliant les points situés au quart de la corde de tête et de la corde en pied,
- la flèche notée Λ est l'angle entre la ligne de quart de corde et la ligne d'envergure,
- la surface alaire est la surface des ailes projetée au sol,
- le dièdre est l'angle entre le plan horizontal et la ligne de quart de corde.

Deux grandeurs adimensionnées permettent de rendre compte de la géométrie d'une surface portante : l'*effilement* et l'*allongement*. L'effilement (*taper ratio*) est le rapport entre la longueur de la corde en bout d'aile et la corde à l'emplanture de l'aile sur le fuselage :

$$\text{effilement} = \frac{c_t}{c_r}$$

L'allongement (*aspect ratio*) noté AR est le rapport entre le carré de l'envergure et la surface

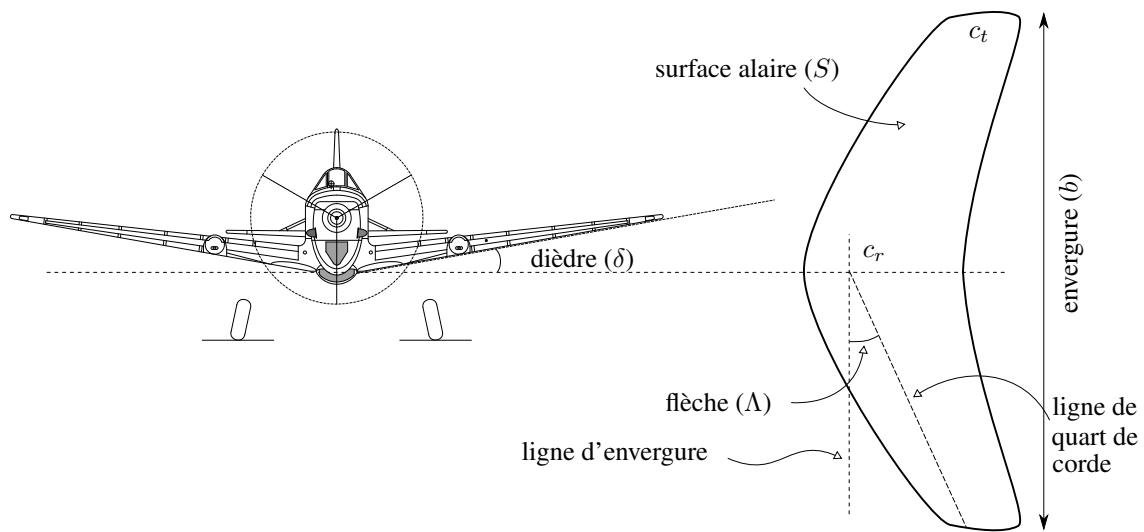


FIGURE 3.7 – Éléments de géométrie des surfaces portantes d'un avion (Morane-Saulnier M.S.406 C1 fighter dessiné par Kaboldy).

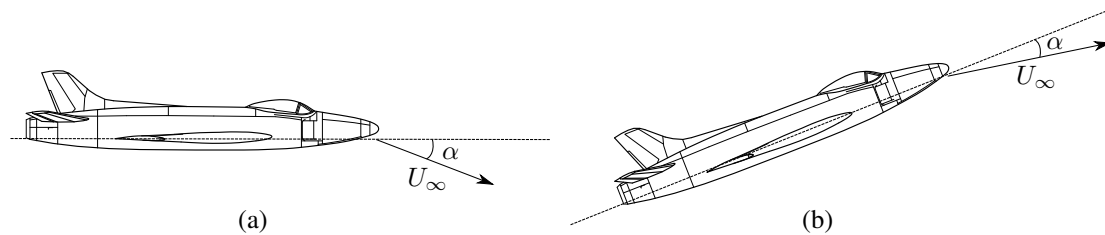


FIGURE 3.8 – Un avion ne se déplace pas toujours dans la direction de son axe. L'angle entre l'axe et le vecteur vitesse définit l'incidence : (a) descente, (b) montée (Supermarine Swift dessiné par Kaboldy).

alaire :

$$AR = \frac{b^2}{S}$$

L'allongement joue un rôle particulièrement important dans les performances d'un avion. En particulier, un grand allongement – les planeurs ont des allongements supérieurs à 20 – permettent de réduire la traînée induite (que l'on présente et calcule dans le chapitre suivant). Les avions militaires pour lesquels la manoeuvrabilité est privilégiée ont un allongement plus petit.

Ces grandeurs permettent de caractériser les géométries traditionnelles de surfaces portantes. Certains éléments peuvent venir se rajouter à cette géométrie pour améliorer les performances comme par exemple les *winglets* : appendices verticaux fixés en bout d'ailes qui permettent de réduire la traînée. Face à ces géométries traditionnelles, des concepts plus novateurs font parfois leur apparition même s'ils restent la plupart du temps rangés au fond des cartons : les ailes volantes, les voiles solaires, les ailes cylindriques, les avions à propulsion musculaire...

En fonction des phases de vol (croisière, décollage, montée, atterrissage...), la direction du vecteur vitesse de l'avion n'est pas nécessairement alignée avec l'axe de l'avion. On utilise au moins deux repères : l'un attaché à l'avion, l'autre, galiléen, fixe par rapport au sol. Le passage

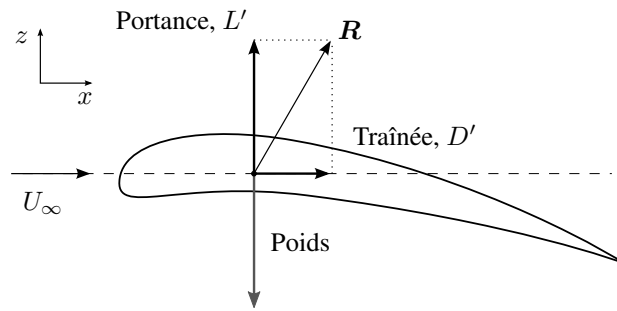


FIGURE 3.9 – La résultante des forces aérodynamiques est décomposée en deux composantes : la portance et la traînée.

d'un repère à l'autre se fait par rotations successives autour de chacun des axes des repères. Ils définissent alors les angles d'Euler. Ceci permet de définir une matrice de passage entre les deux repères afin de pouvoir écrire les équations de la mécanique appliquées à l'avion dans un repère galiléen – le repère attaché à l'avion ne l'étant évidemment pas. Parmi ces angles de transformation, un seul est utilisé pour l'étude de l'aérodynamique : *l'angle d'incidence* (Figures 3.4 et 3.8). Les autres angles ont une influence bien moindre sur l'aérodynamique de l'avion.

3 Caractéristiques aérodynamiques des surfaces portantes

3.1 Définitions

L'objet du cours est de comprendre l'origine des forces qui s'appliquent sur une aile et de se donner les outils nécessaires à son calcul. La résultante des forces aérodynamiques est notée $\mathbf{R}$ et son module est R . La résultante des forces possède deux composantes principales suivant l'axe horizontal Ox et suivant l'axe vertical Oz (Figure 3.9). La résultante s'écrit donc :

$$\mathbf{R} = D \mathbf{e}_x + L \mathbf{e}_z$$

avec

- L est la portance (*lift*)
- D est la traînée (*drag*)

La portance est la force verticale qui permet de compenser le poids et donc de voler. La traînée est la composante horizontale, elle s'oppose à l'avancée de l'objet. En pratique, seule la portance est utile pour voler, la traînée est une conséquence inévitable du déplacement de l'avion dans l'air.

Pour s'affranchir des conditions environnementales (pression, vitesse, masse volumique...) et de la géométrie de l'aile, les forces sont adimensionnées pour former des *coefficients de force* :

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} \quad : \text{coefficient de portance} \quad (3.1)$$

$$C_D = \frac{D}{q_\infty S} \quad : \text{coefficient de traînée} \quad (3.2)$$

$$C_M = \frac{M}{q_\infty S b} \quad : \text{coefficient de moment} \quad (3.3)$$

où $q_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ est la pression dynamique et M est le moment qui s'exerce sur le profil. Son adimensionnement nécessite l'utilisation d'une longueur supplémentaire de référence, ici l'envergure b . Ces coefficients sont apparus dès les débuts de l'aérodynamique car ils sont adimensionnés et peuvent donc être mesurés en soufflerie. C'est Gustave Eiffel qui a mis en évidence l'utilité de ces coefficients en les mesurant dans la première soufflerie à veine ouverte qui porte aujourd'hui son nom^{*}.

Ces grandeurs quantifient les forces qui s'exercent sur l'ensemble de l'aile, c'est-à-dire sur la géométrie complète en trois dimensions. Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à un profil bidimensionnel. On parle alors de grandeurs par unité d'envergure : les grandeurs calculées dans le cadre de la théorie des profils portants doivent être intégrées le long de l'envergure pour fournir les grandeurs totales. On définit :

$$\begin{aligned} L' & : \text{la portance par unité d'envergure} \\ D' & : \text{la traînée par unité d'envergure} \\ M' & : \text{le moment par unité d'envergure} \end{aligned}$$

Comme pour les grandeurs globales, des coefficients peuvent être associés :

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{L'}{q_\infty c} & : \text{le coefficient de portance par unité d'envergure} \\ c_d &= \frac{D'}{q_\infty c} & : \text{le coefficient de traînée par unité d'envergure} \\ c_m &= \frac{M'}{q_\infty c^2} & : \text{le coefficient de moment par unité d'envergure} \end{aligned}$$

Ces coefficients adimensionnent les forces par unité d'envergure grâce à la corde c et non plus la surface alaire.

Enfin, on définit deux autres coefficients permettant d'adimensionner la pression le long d'un profil et la contrainte pariétale τ sur ce profil :

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{p - p_\infty}{q_\infty} & : \text{le coefficient de pression} \\ c_f &= \frac{\tau}{q_\infty} & : \text{le coefficient de frottement} \end{aligned}$$

Le coefficient de frottement intervient principalement dans les chapitres concernant le calcul de la couche limite.

3.2 Estimation des ordres de grandeurs

La première étape vers le calcul de la portance est la réalisation de l'analyse dimensionnelle du problème afin d'identifier les paramètres principaux. La portance, ou plus généralement la résultante des forces aérodynamiques exercées sur l'avion, dépend :

1. des propriétés de l'air (masse volumique, viscosité),
2. de la nature de l'écoulement autour de l'avion (vitesse de l'air, vitesse du son),

*. Soufflerie toujours visible dans le Laboratoire Eiffel situé au 47 rue Boileau, 75016 Paris.

3. des conditions de vol (l'incidence et le dérapage en première approximation),
4. de la géométrie de l'avion (la surface alaire, l'envergure, l'allongement).

Écrit autrement, la résultante des forces R est de la forme :

$$R = R(U_\infty, \rho, \nu, a, \alpha, \beta, S, b, AR)$$

où β est l'angle de lacet qui mesure l'écart entre l'axe longitudinal de l'avion et le vecteur vitesse dans le plan Oxy .

Les neuf paramètres ne font en réalité intervenir que 3 unités fondamentales. Le théorème de Vaschy-Buckingham stipule que l'on peut définir 6 nombres sans dimension pour décrire le problème et que chacun s'exprime en fonction des cinq autres. Trois paramètres sont déjà sans dimension : il s'agit de l'incidence α , de l'angle de lacet β et de l'allongement AR . Le nombre de Mach, qui est le rapport de la vitesse de l'écoulement sur la vitesse du son, et le nombre de Reynolds sont deux autres paramètres sans dimension intervenant régulièrement dans les problèmes de mécanique des fluides à grande vitesse. Le dernier paramètre est un coefficient de force obtenu à partir de la résultante des forces R adimensionnée par la pression dynamique q_∞ , soit finalement les paramètres :

$$\begin{aligned} &\alpha \\ &\beta \\ AR &= \frac{b^2}{S} \\ M &= \frac{U_\infty}{a} \\ Re &= \frac{\rho U_\infty b^2}{\nu} \\ C_R &= \frac{R}{1/2 \rho S U_\infty^2} \end{aligned}$$

avec la relation exprimant le coefficient de force en fonction des autres paramètres :

$$C_R = C_R(\alpha, \beta, M, AR, Re)$$

Certains paramètres peuvent être négligés au premier ordre, c'est le cas de l'angle de lacet $\beta \sim 0$. Aux petites vitesses, le nombre de *Mach* reste petit devant 1, son influence peut être négligée.

Il reste alors $C_L(Re, \alpha, AR)$. Pour étudier l'effet du nombre de Reynolds et de l'incidence sur ce coefficient, on trace l'évolution de ce paramètre en fonction de l'incidence pour différentes valeurs du nombre de Reynolds (Fig. 3.10).

Ces courbes montrent deux régions distinctes. La première, pour les petites valeurs de l'incidence, met en évidence la linéarité entre le coefficient de portance et l'incidence, quelque soit le nombre de Reynolds. Dans la deuxième partie de la courbe, le coefficient diminue et s'arrête au point de décrochage qui correspond physiquement au décollement de la couche limite sur le profil. L'aile possède une incidence tellement forte que l'écoulement n'adhère plus à la paroi, il

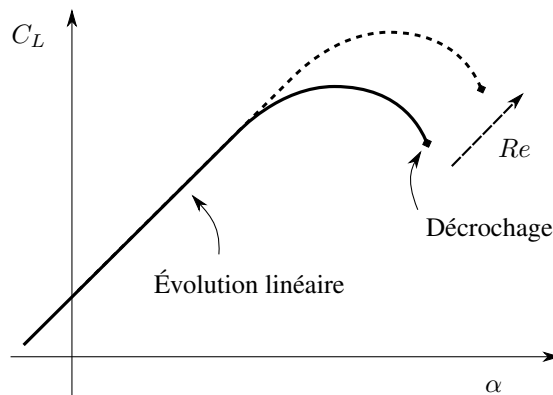


FIGURE 3.10 – Évolution du coefficient de portance en fonction de l'incidence. Lorsque le nombre de Reynolds croît, les courbes sont décalées vers le haut dans la seconde partie.

se crée une zone de recirculation derrière le profil qui lui fait perdre toutes ses propriétés sustentatrices. Cette zone est naturellement à éviter pour un avion de ligne. L'étude aérodynamique permet de déterminer l'incidence maximale admissible de chaque avion.

Dans le reste du chapitre, on se place à des incidences faibles. On considère alors que le coefficient de portance est proportionnel à l'incidence.

Le coefficient de portance est déterminé par la géométrie de l'avion. Plus ce coefficient est grand, plus la portance est importante pour une vitesse donnée. Le problème est que le coefficient de traînée est lui-même proportionnel au carré du coefficient de portance. Augmenter le coefficient de portance revient à augmenter significativement la traînée. Pour obtenir un avion performant, on cherche plutôt à optimiser le rapport entre le coefficient de portance et le coefficient de traînée. Cette grandeur s'appelle la finesse.

4 Théorème de Kutta-Joukowski

La méthodologie présentée ici pour calculer la portance par unité de longueur L' s'appuie sur plusieurs hypothèses. Premièrement, l'incidence du profil est petite et le coefficient de portance varie linéairement avec celle-ci. Deuxièmement, le nombre de Reynolds est considéré comme grand, ce qui permet de négliger les effets visqueux par rapport aux effets d'inertie.

Soit un profil plongé dans un écoulement uniforme U_∞ , la présence du profil dans l'écoulement perturbe sensiblement celui-ci. On note $\mathbf{v}_e$ le vecteur vitesse au voisinage du profil. Ce vecteur s'exprime comme :

$$\mathbf{v}_e = \begin{pmatrix} u + U_\infty \\ w \end{pmatrix}$$

où (u, w) est un vecteur vitesse quantifiant la perturbation de vitesse induite par la présence du

fluides idéal
 $\left. \begin{array}{l} Re \rightarrow \infty \\ v \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0 \end{array} \right\}$

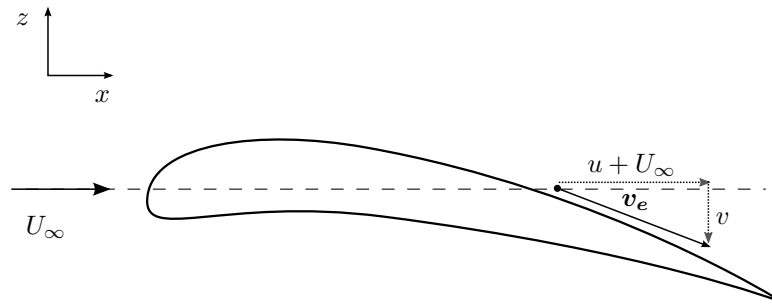


FIGURE 3.11 – Au voisinage du profil, le champs de vitesse uniforme U_∞ est perturbé par le vecteur (u, v) .

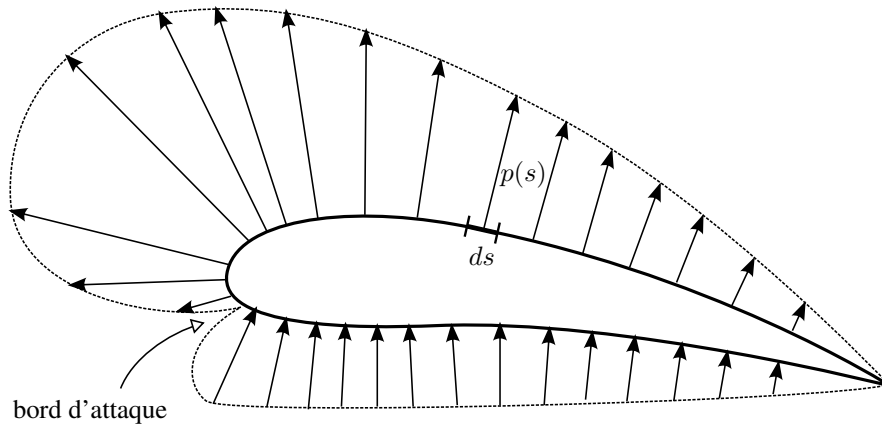


FIGURE 3.12 – Le long du profil, la pression n'est pas répartie uniformément. L'intégration de la pression sur l'ensemble du profil est égale à la résultante des forces aérodynamiques.

profil. En négligeant les frottements du fluide à la paroi, la résultante des forces aérodynamiques $\mathbf{R}$ est portée par le vecteur $\mathbf{n}$ normal au vecteur vitesse. L'incidence étant très faible, la normale au vecteur vitesse peut être confondue avec la normale à la paroi. La force que le fluide exerce sur la paroi est orientée vers l'intérieur et est obtenue en intégrant la distribution de pression le long du profil :

$$\mathbf{R} = - \int_{C_p} p(s) \mathbf{n} ds \quad (3.4)$$

Cette formule a été obtenue expérimentalement par Gustave Eiffel. Ces expériences sont extrêmement sensibles car il s'agit de mesurer avec précision la pression en un grand nombre de points de la surface du profil.

La pression est liée à la vitesse grâce au théorème de Bernoulli (équation [2.11](#)). En effet, l'écoulement est incompressible et les seules forces volumiques dérivent d'un potentiel. Le long d'une ligne de courant allant de l'infini à un point (x, y) situé sur le profil, on peut écrire la relation de conservation :

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v}_e^2}{2} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}_e^2 = (u + U_\infty)^2 + w^2$$

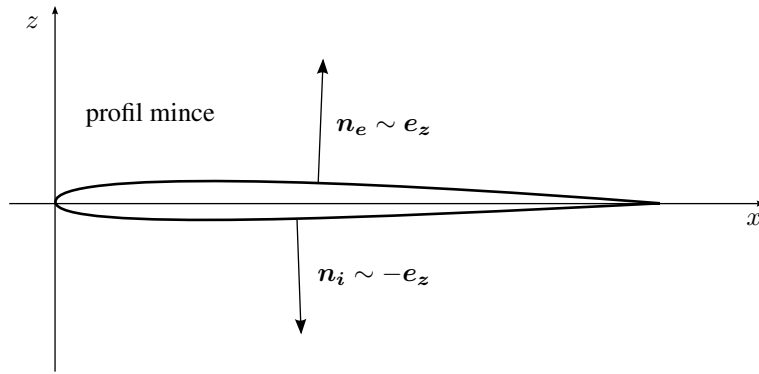


FIGURE 3.13 – Le profil étant mince, les normales aux surfaces sont pratiquement verticales.

soit,

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{U_\infty^2}{2} - \frac{1}{2} (u^2 + 2uU_\infty + U_\infty^2 + w^2)$$

On rappelle que $u, w \ll U_\infty$, ce qui permet de considérer uniquement le terme d'ordre 1 dans l'équation précédente, soit :

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} \sim -uU_\infty$$

En injectant cette expression dans l'équation (3.4),

$$\mathbf{R} = \int_{C_p} \rho u U_\infty \mathbf{n} ds$$

l'intégrale sur le contour du profil de la pression p_∞ étant nulle.

On considère de plus le profil comme étant très mince, ainsi le vecteur normal sur l'extrados du profil $\mathbf{n}_e$ est voisin de $\mathbf{e}_z$ et, par symétrie, le vecteur normal à l'intrados $\mathbf{n}_i$ est voisin de $-\mathbf{e}_z$ (Figure 3.13). La résultante est alors uniquement portée par l'axe vertical soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= L' \mathbf{e}_z = \left(- \int_{C_{\text{extrados}}} \rho u U_\infty dx + \int_{C_{\text{intrados}}} \rho u U_\infty dx \right) \mathbf{e}_z \\ L' &= \rho U_\infty \left(- \int_0^c u_{\text{extrados}} dx + \int_0^c u_{\text{intrados}} dx \right) = \rho U_\infty \underbrace{\int_0^c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}}_{\text{circulation}} \end{aligned}$$

L'intégrale de la vitesse tangentielle au contour, le long du profil, est la circulation, notée Γ . La portance s'exprime alors comme

$$L' = \rho U_\infty \Gamma \quad (3.5)$$

Cette formule est connue sous le nom de Kutta-Joukowski du nom des deux scientifiques qui l'ont établie. Le développement exposé ici est valable pour les profils minces en faible incidence à l'ordre 1. Ceci permet de montrer simplement la physique nécessaire à l'établissement de cette expression. Cette formule est en réalité beaucoup plus générale et constitue le théorème de Kutta-Joukowski démontré pour un profil de forme quelconque. Cette démonstration

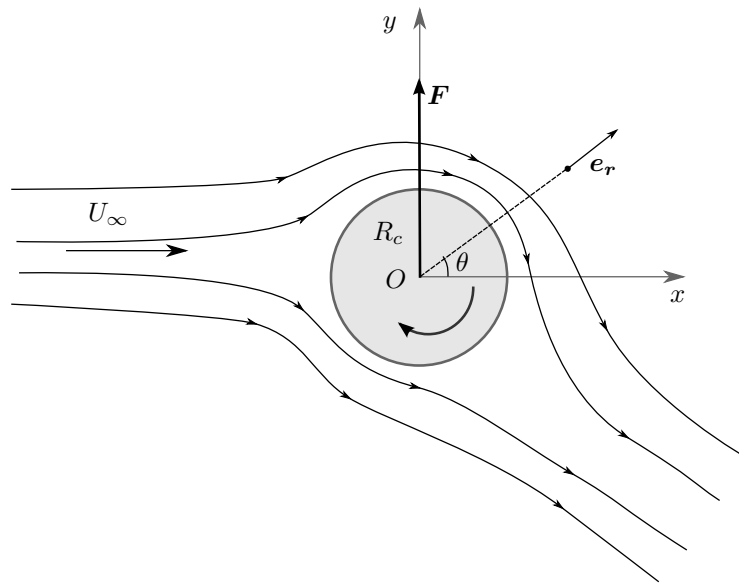


FIGURE 3.14 – Un cylindre en rotation dans un écoulement uniforme dévie l'écoulement. Cette circulation induit une force de portance F le long de l'axe Oz .

fait intervenir la transformée conforme de Joukowski qui exprime l'équivalence dans le plan complexe entre un profil et un cercle.

Cette formule montre que la portance est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement relatif, à la masse volumique mais surtout à la circulation. En l'absence de circulation, la portance est nulle. Le rôle du profil est donc de dévier l'écoulement de sa ligne initiale pour que la distribution de vitesse le long du contour soit différente sur l'extrados et l'intrados de l'aile.

5 Circulation et portance

À la fin du XIX^{ème} siècle, plusieurs expériences d'écoulements autour de corps solides plongés dans des liquides ont montré que, dans certaines conditions, il est possible de créer sur l'objet une force perpendiculaire à la direction de l'écoulement. C'est en particulier à cette période que l'effet *Magnus* est mis en évidence expérimentalement. En 1894, Frederick Lanchester[†] propose pour la première fois l'idée que cette force transversale puisse être liée à la circulation du fluide autour du corps. Ses idées aboutissent finalement en 1907 à la publication d'articles de synthèse [26].

Pour observer l'effet Magnus, il faut plonger un cylindre dans un écoulement, de façon perpendiculaire à la vitesse. En mettant le cylindre en rotation, une force est créée sur le cylindre. Cette force est à la fois perpendiculaire au vecteur vitesse et au cylindre (Figure 3.14).

La force résultante est calculée en superposant deux écoulements potentiels fondamentaux comme présenté au chapitre précédent. On superpose un écoulement autour d'un cylindre de rayon R dont la fonction potentielle est ψ_1 et un tourbillon d'intensité Γ dont la fonction poten-

[†]. Ingénieur automobile anglais, (23 octobre 1878 – 8 mars 1946)

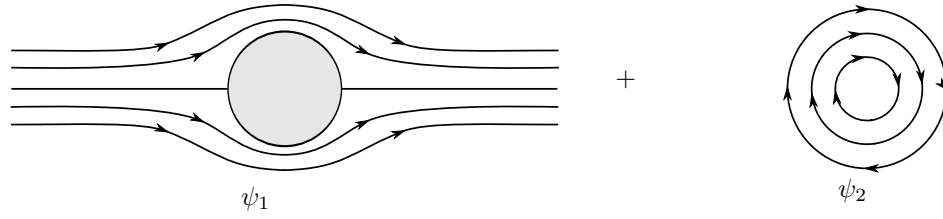


FIGURE 3.15 – La superposition de deux écoulements potentiels permet de calculer la force exercée par l'écoulement sur un cylindre en rotation. La fonction de courant ψ associée est la somme des deux fonctions ψ_1 et ψ_2 .

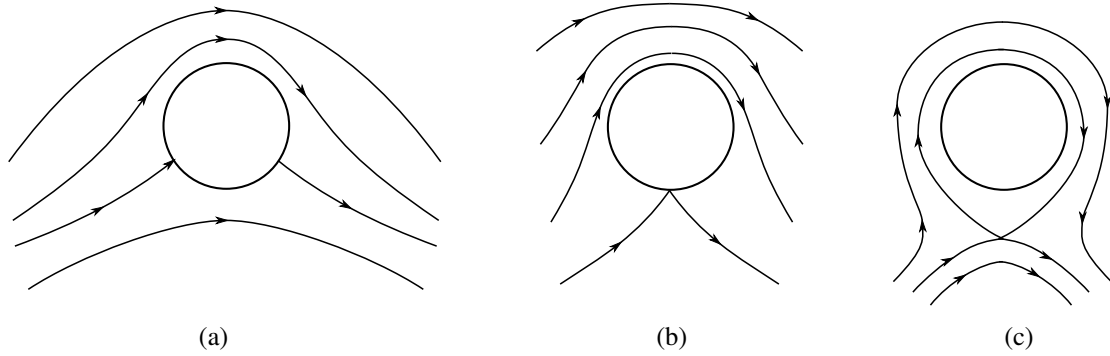


FIGURE 3.16 – L'écoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation peut avoir deux (a), un (b) ou zéro (c) points d'arrêt sur le cylindre en fonction de la valeur Γ de la circulation donnée au tourbillon.

tielle est ψ_2 avec, en coordonnées cylindriques,

$$\psi_1 = U_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$$

Le principe de superposition assure que l'écoulement autour d'un cylindre tournant a pour fonction potentielle la fonction $\psi = \psi_1 + \psi_2$,

$$\psi = U_\infty r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R}$$

Le vecteur vitesse associé est obtenu en coordonnées cylindriques par les relations :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.6)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.7)$$

Le champ de vitesse dépend de la valeur de la circulation Γ . Un critère qui caractérise l'écoulement est le nombre de points d'arrêt ($v_r = v_\theta = 0$) que possède le champ de vitesse au voisinage de l'obstacle : il peut en avoir zéro, un ou deux (Figure 3.15). On considère ici que l'écoulement possède deux points d'arrêt ce qui impose que :

$$\Gamma > 4\pi U_\infty R$$

Ceci montre que le choix du paramètre Γ conditionne la structure de l'écoulement obtenu bien que la géométrie de l'obstacle et la vitesse relative soient fixées. Cette modélisation de l'écoulement n'a pas de solution unique, il faut se donner une condition supplémentaire pour assurer l'unicité de la solution. Cette remarque est également valable pour l'étude d'un écoulement autour d'un profil d'aile. La condition de Kutta permet de déterminer de façon unique l'écoulement potentiel qui reproduit l'écoulement physique.

Dans le cas du cylindre tournant, supposons Γ fixé. Pour calculer la force qu'exerce le fluide sur la structure, il faut obtenir la vitesse sur la paroi, soit $r = R_c$ dans les équations (3.6) et (3.7),

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R_c} \end{aligned}$$

Comme présenté précédemment (équation 2.23), le coefficient de pression est lié à la vitesse par la relation :

$$c_p = 1 - \left(\frac{v}{U_\infty} \right)^2$$

On remplace alors la vitesse v par l'expression

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

soit

$$c_p = 1 - \left[4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi R_c U_\infty} + \left(\frac{\Gamma}{2\pi R_c U_\infty} \right)^2 \right] \quad (3.8)$$

Le lien entre la résultante des forces aérodynamiques et la pression est donné par l'équation (3.4), soit ici :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= - \int_{C_p} p(s) \mathbf{e}_r ds \\ &= - \underbrace{\int_0^{2\pi} p(\theta) R_c \cos \theta d\theta}_{\text{traînée}} \mathbf{x} - \underbrace{\int_0^{2\pi} p(\theta) R_c \sin \theta d\theta}_{\text{portance}} \mathbf{y} \end{aligned}$$

La projection verticale de la résultante est la portance L' que l'on peut exprimer grâce à son coefficient associé c_l :

$$c_l = \frac{R_c}{c} \int_0^{2\pi} c_p \sin \theta d\theta$$

Le coefficient de portance est constitué de trois termes dont l'un est fixe avec θ , le second varie comme $\sin \theta$ et le dernier comme $\sin^2 \theta$ (équation 3.8). En multipliant le coefficient de portance par $\sin \theta$ pour former l'intégrande, seul un terme n'est pas nul après intégration entre 0 et 2π :

$$c_l = \frac{R}{c} \int_0^{2\pi} \frac{2\Gamma}{\pi R U_\infty} \sin^2 \theta d\theta = \frac{2\Gamma}{c\pi U_\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{2\Gamma}{c U_\infty}$$

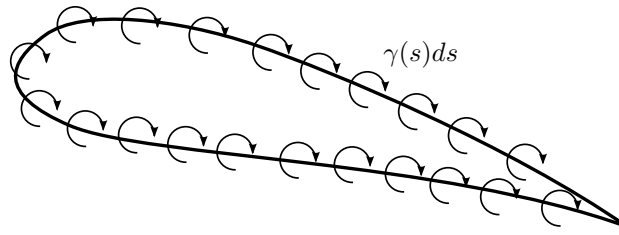


FIGURE 3.17 – Pour calculer l'écoulement autour d'un profil de forme quelconque, on dispose une série de tourbillons le long du profil. La superposition des fonctions de courant permet de calculer l'écoulement global.

En exprimant de nouveau la portance en lieu et place du coefficient de portance, on obtient :

$$L' = \rho U_{\infty} \Gamma$$

Trois remarques s'imposent pour conclure cet exemple :

(1) Lorsque l'écoulement autour d'un objet possède une circulation Γ finie, le fluide exerce une force sur l'objet. Certains objets n'induisent pas de circulation dans l'écoulement (cylindre au repos, objets symétriques), la portance est nulle. Ici, la rotation du cylindre provoque une circulation qui, en retour, crée la force de portance. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Magnus. On peut le mettre en évidence en plongeant un barreau dans un écoulement uniforme, et en faisant tourner le barreau cylindrique autour de son axe. Cet effet est utilisé pour la propulsion de navire et permet, en support des moteurs principaux, de fournir une puissance non négligeable pour la propulsion. La force créée dans ce cas n'est pas utilisée pour s'élever mais pour avancer.

(2) L'écoulement est incompressible et non-visqueux ce qui permet de décrire le champ de vitesses en termes de fonctions de courant. La superposition de deux écoulements fondamentaux, ici l'écoulement autour d'un cylindre et un tourbillon, permet de calculer la force exercée par le fluide sur l'objet. La présence du tourbillon crée une circulation et induit la force de portance. De façon plus générale, l'écoulement autour d'un profil dissymétrique quelconque peut être modélisé en remplaçant le profil par une distribution de tourbillons (Figure 3.17). Dans le chapitre précédent, cette méthode est utilisée avec une distribution de sources pour décrire l'écoulement autour d'un objet symétrique. Dans la suite du chapitre, on calcule de cette manière la force créée par un écoulement sur un profil portant.

(3) La force L' créée satisfait au théorème de Kutta-Joukowski : elle est proportionnelle à la vitesse et à la circulation. La circulation est capitale dans la théorie de l'aérodynamique, elle dépend de la géométrie de l'objet. Elle possède quelques propriétés remarquables que l'on présente dans la suite et qui aident à son estimation.

6 Théorème de Kelvin

La circulation Γ d'un écoulement est définie le long d'un contour C par la relation

$$\Gamma = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

La circulation a pour dimension une surface par unité de temps. Lorsque cette grandeur est différente de zéro, cela signifie qu'à l'intérieur du contour $\mathcal{C}$, un phénomène ou un objet tend à dévier le fluide. Il n'y a pas obligatoirement création d'un mouvement de rotation mais la direction principale de l'écoulement est modifiée. La présence d'un tourbillon dans le contour $\mathcal{C}$ induit une circulation finie. La circulation permet de quantifier la capacité de l'écoulement à circuler à l'intérieur du contour.

Théorème de Kelvin – Considérons un écoulement de fluide parfait, barotrope ou incompressible, en présence de forces de masse conservatives, c'est-à-dire dérivant d'un potentiel. Alors, la circulation du vecteur vitesse le long d'un contour matériel ne coupant aucune surface de discontinuité de vitesse est indépendante du temps :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Autrement dit, si l'on définit un contour matériel – un contour qui contient toujours les mêmes particules élémentaires de fluide – contenant un fluide non-compressible, idéal et où les forces dérivent d'un potentiel, la circulation sur ce contour ne varie pas au cours du temps.

Démonstration La démonstration repose sur la mise en commun de trois équations :

1. le théorème de transport d'un vecteur $\mathbf{G}$ le long d'un contour matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_m(t)} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{C}_m(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{G}) \times \mathbf{v} \right] dl$$

2. l'équation d'Euler pour la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

avec $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$,

3. et la relation vectorielle :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$$

En appliquant le théorème de transport au vecteur vitesse, puis en remplaçant le terme de droite par l'équation d'Euler et la relation vectorielle, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_m(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_{\mathcal{C}_m(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_m(t)} \left[-\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \right] \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \oint_{\mathcal{C}_m(t)} \nabla \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right] \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

Remarque : un contour matériel est toujours fermé.

↑
↓
transport
↓
Navier ~ Euler
↓
validité d'une
circulation de
gradient

Or la circulation d'un gradient est nulle, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

Ce théorème puissant montre tout son intérêt dans un cas très simple, où le champ de vitesse est initialement uniforme – *a fortiori* lorsque ce dernier est nul.

Exemple

La circulation d'un champ de vitesse uniforme sur un contour matériel est nulle. Le théorème de Kelvin montre que, quelque soit l'instant auquel on regarde l'écoulement, et, quelque soit l'évolution du champ de vitesse, la circulation de ce champ sur le même contour matériel est nulle. Cet exemple est résumé sur la figure 3.18. Dans ce cas précis, il n'est pas nécessaire de connaître le champ de vitesse pour avoir accès à la circulation, il suffit d'identifier le contour matériel.

Le théorème de Kelvin permet de montrer qu'une circulation non nulle se crée autour d'un profil portant. L'utilisation de l'expérience vient ici enrichir l'approche théorique.

7 Circulation autour d'un profil portant

On applique le théorème de Kelvin à un écoulement autour d'un profil portant. Le profil est initialement placé dans un champ de vitesse au repos (Figure 3.19(a)), sur lequel un contour matériel $\mathcal{C}(t_1)$ est défini. La vitesse étant nulle, la circulation sur ce contour est nulle au temps t_1 . Le théorème de Kelvin stipule que, quelque soit l'instant $t_2 > t_1$ auquel cette circulation est calculée, elle restera nulle. Le profil est mis en mouvement, les particules fluide contenues dans le contour se déplacent vers, puis autour du profil. À l'instant t_2 , le contour matériel $\mathcal{C}(t_2)$ entoure le profil portant (Figure 3.19). D'après le théorème de Kelvin, la circulation sur le contour au temps t_2 est nulle. On conclut alors un peu rapidement que la présence du profil dans l'écoulement ne génère pas de circulation.

Cette analyse théorique est cependant mise en défaut par l'expérience. Les visualisations expérimentales montrent qu'un *tourbillon de démarrage* est généré derrière le profil au moment de la mise en mouvement du profil. La figure 3.19(b) montre ce tourbillon dessiné à l'arrière du profil. Le contour matériel sur lequel la circulation est calculée dans le cadre du théorème de Kelvin contient le tourbillon de démarrage. La figure 3.19(b) schématise une ligne de courant et le contour matériel $\mathcal{C}(t_2)$ utilisé pour le calcul de la circulation.

On considère que le contour $\mathcal{C}(t_2)$ est l'union des contours $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Chaque sous-contour possède sa propre circulation, respectivement Γ_1 et Γ_2 . La circulation Γ est égale à la somme des circulations sur les sous-contours :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$$

Le contour $\mathcal{C}_1$ contient le tourbillon de démarrage donc $\Gamma_1 \neq 0$. Afin de conserver la circulation nulle sur le contour $\mathcal{C}(t_2)$, il est nécessaire que la circulation Γ_2 sur le contour $\mathcal{C}_2$ contenant le profil portant soit non nulle et de signe opposé à Γ_1 :

$$\Gamma_2 = -\Gamma_1 \neq 0$$

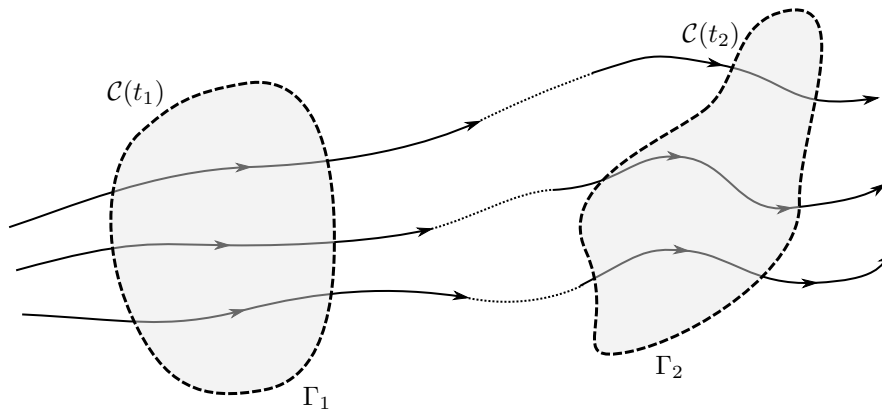


FIGURE 3.18 – Illustration du théorème de Kelvin : soit un contour $\mathcal{C}(t_1)$ à la date t_1 , la circulation sur ce contour est égale à Γ_1 . À la date $t_2 > t_1$, le contour s'est déformé mais contient toujours les mêmes particules fluides. La circulation Γ_2 est alors égale à Γ_1 .

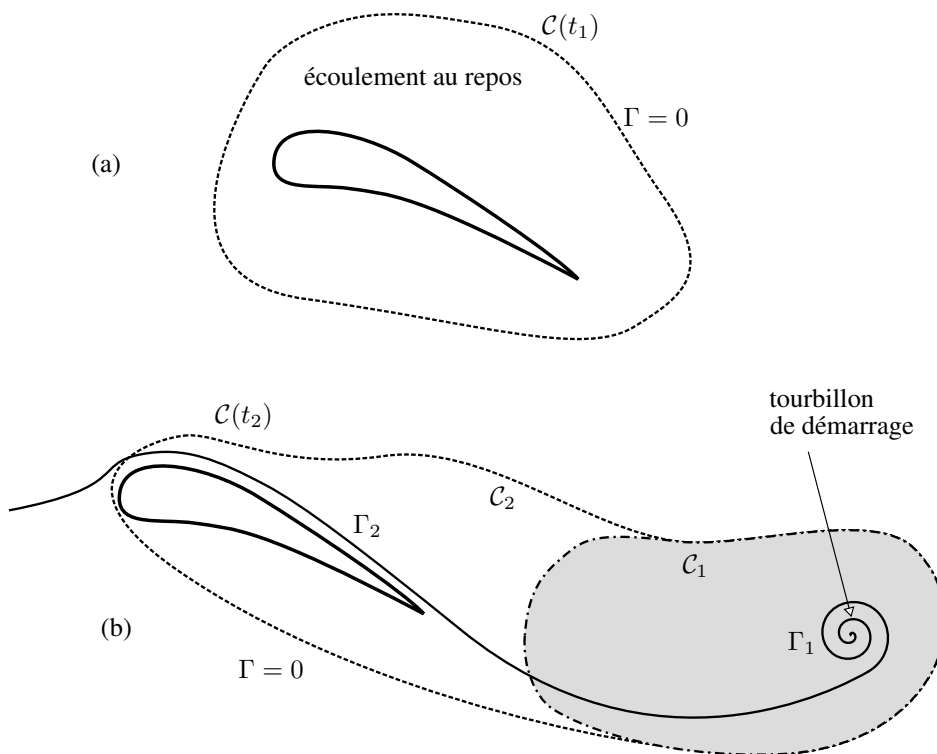


FIGURE 3.19 – Le théorème de Kelvin est appliqué à un écoulement contenant un profil portant initialement au repos (a). Lors de la mise en mouvement du profil, un tourbillon de démarrage apparaît en aval du profil. La circulation Γ sur le contour $\mathcal{C}(t_2)$ est nulle. Le contour $\mathcal{C}(t_2)$ est la réunion des contours $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ donc $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$.

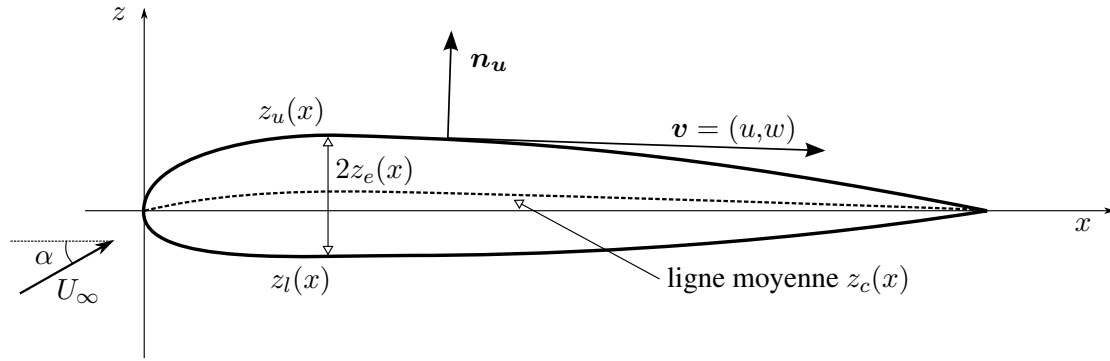


FIGURE 3.20 – Un profil mince est repéré par les équations $z_u(x)$ et $z_l(x)$ de son extrados et de son intrados. Le champ de vitesse est calculé en vérifiant que la vitesse normale à la paroi est nulle.

Ceci montre que la mise en mouvement du profil dans l'écoulement induit une circulation Γ_2 non-nulle autour du profil portant. Cette circulation est directement reliée à la portance par le théorème de Kutta-Joukowski (Equation 3.5). Cette phénoménologie permet de décrire qualitativement l'apparition de circulation autour du profil.

8 Profil mince portant

Dans cette section, on montre comment calculer la portance créée par un profil mince dont la géométrie est fixée. Un profil mince est caractérisé par un extrados dont l'équation est $z_u(x)$ et un intrados dont l'équation est $z_l(x)$ (Figure 3.20). La vitesse incidente fait un angle α avec le profil. Cet angle est l'incidence du profil. Le champ de vitesse $\mathbf{v}$ est donc la superposition d'un champ uniforme U_∞ avec une incidence α et d'un champ perturbé (u, w) dû à la présence du profil dans l'écoulement. On écrit donc le champ de vitesse comme :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u + U_\infty \cos \alpha \\ w + U_\infty \sin \alpha \end{pmatrix}$$

La composante normale au profil de cette vitesse doit être nulle car le profil est une surface solide. On montre ici le raisonnement pour l'extrados de l'aile repéré par l'indice u , le même raisonnement est applicable à l'intrados. La vitesse suivant le vecteur unitaire normal à l'extrados $\mathbf{n}_u$ est nulle :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_u = 0$$

Le vecteur normal à la courbe $z_u(x)$ est obtenu en calculant le gradient de la fonction $f(x, z) = z_u(x) - z$,

$$\mathbf{n}_u = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla f|} \begin{pmatrix} z'_u \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(z_u'^2 + 1)^{1/2}} \begin{pmatrix} z'_u \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec z'_u la dérivée par rapport à x de $z_u(x)$. La projection de la vitesse sur le vecteur normal est alors :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_u = 0 = z'_u U_\infty \cos \alpha + u z'_u - U_\infty \sin \alpha - w$$

Le profil étudié est considéré comme mince, cela permet d'établir les relations d'ordre de grandeurs suivantes :

1. les longueurs de l'extrados et de l'intrados sont quasiment égales à la corde, les épaisseurs sont faibles :

$$z_u, z_l \ll a$$

2. les angles sont très faibles :

$$\alpha, z'_u, z'_l \ll 1$$

3. les vitesses de perturbation u et w sont petites devant la vitesse relative de l'écoulement :

$$u, w \ll U_\infty$$

Ainsi $\cos \alpha \sim 1$ et $\sin \alpha \sim \alpha$, ce qui permet d'écrire la vitesse normale comme :

$$U_\infty(z'_u - \alpha) + \underbrace{uz'_u}_{(1)} = w$$

Le terme (1) est le produit de deux termes d'ordre 1 : il est d'ordre 2. On peut le négliger par rapport aux autres termes. Ceci fournit une condition sur la vitesse verticale induite par la présence du profil :

$$U_\infty(z'_u - \alpha) = w \quad (3.9)$$

Cette relation a été établie le long de l'extrados. La même relation avec $z'_l(x)$ peut être obtenue de façon équivalente pour l'intrados. Comme indiqué précédemment, la géométrie des profils est définie à partir de la ligne moyenne et de l'épaisseur du profil. Ces deux grandeurs ont respectivement pour équation $z_c(x)$ et $2z_e(x)$ avec :

$$z_c = \frac{z_u + z_l}{2} \quad \text{et} \quad z_e = \frac{z_u - z_l}{2}$$

La cambrure et l'épaisseur sont donc obtenues à partir des équations de la paroi.

Inversement, l'extrados et l'intrados peuvent être exprimés en fonction de l'épaisseur et de la ligne moyenne :

$$z_u = z_c + z_e \quad \text{et} \quad z_l = z_c - z_e$$

En remplaçant z'_u dans l'équation (3.9), la vitesse verticale s'exprime comme :

$$w = \underbrace{U_\infty(z'_c - \alpha)}_{\text{portance}} \pm \underbrace{U_\infty z'_e}_{\text{épaisseur}} \quad (3.10)$$

avec un signe positif pour l'extrados, le signe négatif étant valable pour l'intrados. L'expression de la vitesse est composée de deux termes. Le premier terme fait intervenir la cambrure du profil et l'incidence. Ce terme crée une circulation dans l'écoulement, les effets de l'incidence et de la cambrure s'ajoutent pour générer de la portance. Ce terme est le terme de portance. Le second terme fait intervenir l'épaisseur du profil.

L'étude de l'écoulement autour d'un profil mince est équivalente à l'étude de deux écoulements superposés : le premier est l'écoulement autour d'une ligne cambrée sous incidence, le deuxième est l'écoulement autour d'un obstacle épais symétrique.

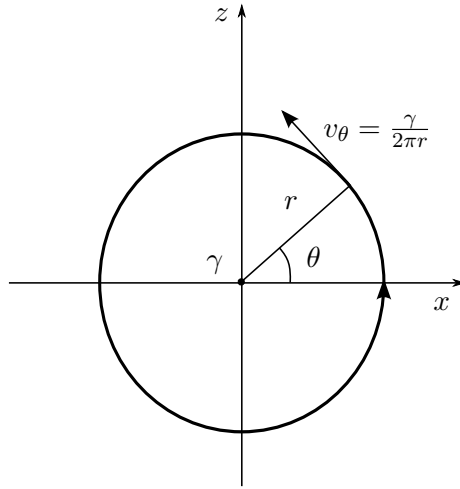


FIGURE 3.21 – Vitesse induite par un tourbillon γ situé en $(0,0)$.

Le second écoulement a été analysé dans le chapitre précédent. Si l'épaisseur reste faible devant la longueur de corde, le profil est assimilé à un obstacle mince et l'écoulement peut être modélisé par une distribution de sources le long de l'axe Ox . Si le profil est plus épais, il est possible de calculer l'écoulement par la méthode des panneaux qui consiste à distribuer des sources linéiques le long de panneaux approchant la géométrie exacte du profil.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au calcul de la portance générée par un écoulement autour d'un profil. Seul le premier terme est source de circulation et donc de portance, on ne conserve que celui-ci dans la suite. Le terme de portance fait intervenir la cambrure et l'incidence du profil. Ceci permet de noter dès à présent que la portance est générée par l'une ou l'autre de ces caractéristiques : **un profil cambré n'a pas besoin d'incidence pour voler et un profil non-cambré doit nécessairement être mis en incidence pour générer de la portance**. Dans la pratique, les deux effets s'ajoutent : les ailes d'avion sont naturellement cambrées et mise en incidence pour optimiser la portance.

À l'image de la stratégie développée pour étudier les écoulements autour des profils symétriques, le profil cambré en incidence est modélisé par une distribution de tourbillons $\gamma(x^*)$ le long de sa ligne moyenne (Figure 3.22). Le profil étant mince avec des pentes faibles, les tourbillons peuvent être directement distribués sur la ligne $z = 0$ entre $x = 0$ et $x = c$. L'une des conditions que doit satisfaire cette distribution est que son intégrale entre 0 et c doit être égale à la circulation Γ du profil :

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x^*) dx^* \quad (3.11)$$

On cherche alors à déterminer la distribution de circulation $\gamma(x^*)$ nécessaire pour reproduire l'écoulement autour d'un profil de ligne moyenne $z_c(x)$.

Soit un tourbillon d'intensité γ situé en $(x,z) = (0,0)$. Ce tourbillon génère un écoulement fondamental dont la vitesse s'exprime en coordonnées cylindriques selon la direction v_θ (Figure 3.21). Si γ est positif dans le sens des aiguilles d'une montre :

$$v_\theta = -\frac{\gamma}{2\pi r}$$

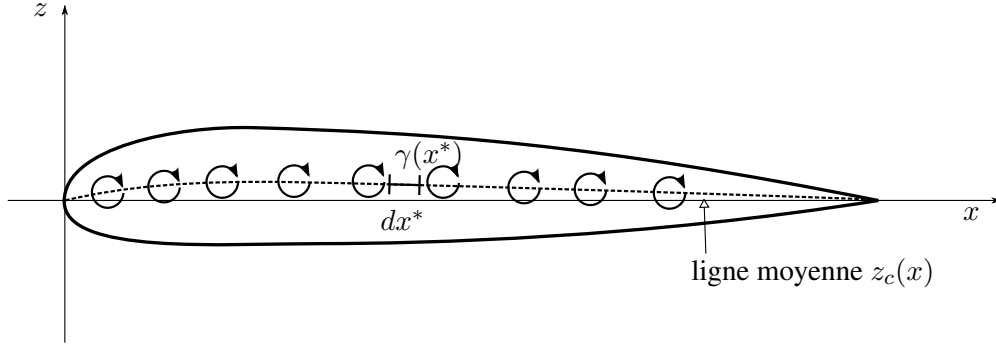


FIGURE 3.22 – La circulation induite par la présence du profil est modélisée par une distribution de circulation $\gamma(x^*)$ le long de la corde. Le profil étant mince, on confond l'abscisse curviligne de la ligne moyenne et l'axe de corde.

En projetant cette expression selon les directions x et z , on obtient :

$$\begin{cases} u = -v_\theta \sin \theta = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} \\ w = v_\theta \cos \theta = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + z^2} \end{cases}$$

Pour représenter le profil portant, on distribue des tourbillons d'intensité linéique $\gamma(x^*)$ le long de la ligne moyenne (Figure 3.22). Les tourbillons présents sur la distance dx^* en $x = x^*$ induisent la vitesse verticale élémentaire :

$$dw(x, z, x^*) = -\frac{\gamma(x^*)}{2\pi} \frac{x - x^*}{(x - x^*)^2 + z^2} dx^*$$

Le profil est mince, la ligne moyenne est très proche de l'axe de la corde. On considère alors que la distribution de tourbillons est répartie le long de l'axe $z = 0$. En intégrant cette vitesse induite en $z = 0$ sur l'ensemble de la distribution de circulation, on obtient :

$$w(x) = \int_0^c dw(x, z \rightarrow 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x^*)}{x - x^*} dx^* \quad (3.12)$$

Cette équation est à rapprocher de l'expression (3.10) pour obtenir la relation entre la géométrie du profil et la distribution de circulation :

$$w(x) = \int_0^c dw(x, z \rightarrow 0) = \boxed{U_\infty (\alpha - z'_c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x^*)}{x - x^*} dx^*} \quad (3.13)$$

Cette expression permet d'obtenir l'équation de la ligne de cambrure du profil $z_c(x)$ pour une distribution de tourbillons donnée $\gamma(x)$. C'est en général l'inverse qui est recherché : connaissant la ligne moyenne et l'incidence d'un profil, on cherche la distribution de circulation pour obtenir la portance. L'équation (3.13) est une relation intégrale entre la ligne moyenne et la circulation. La conséquence est que : connaissant z_c , la distribution est connue à une constante près. En d'autres termes, il existe mathématiquement une infinité de distributions $\gamma(x)$ pour une ligne moyenne. Une seule de ces distributions est physiquement acceptable. Un critère supplémentaire est nécessaire pour choisir la bonne distribution.

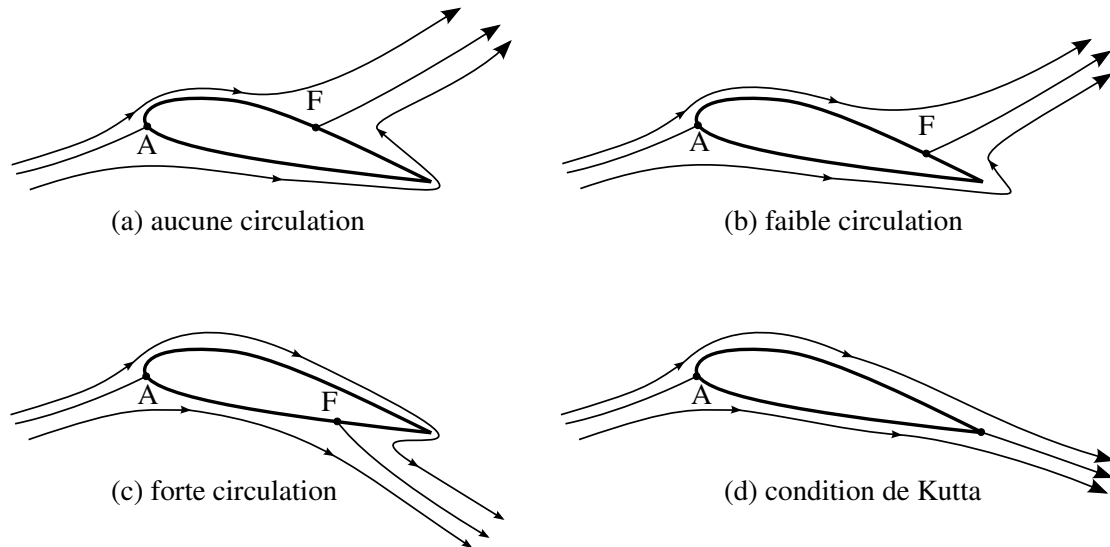


FIGURE 3.23 – La condition de Kutta impose à l'écoulement d'avoir la même vitesse sur l'extrados et sur l'intrados au bord de fuite.

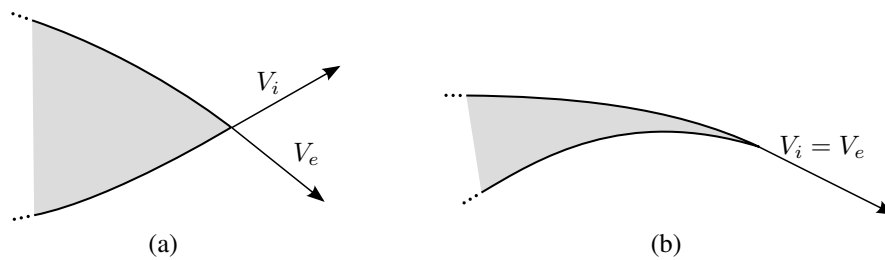


FIGURE 3.24 – Si le bord de fuite est épais (a), les vitesses sur l'extrados et l'intrados doivent être nulles pour être égales. Si le bord de fuite est mince (b), les vitesses sont égales et non nulles.

8.1 Condition de Kutta

L'écoulement autour d'un profil portant, c'est-à-dire un profil possédant une incidence α et/ou une cambrure $z_c(x)$, est modélisé par une distribution de tourbillons le long de la corde, afin de générer une circulation globale (Figure 3.22). L'intensité de la circulation dépend de la position des points d'arrêt sur le profil. La figure 3.23 montre différents écoulements potentiels autour d'un profil en incidence, ils diffèrent par la position des points d'arrêt. La figure 3.23(a) montre la configuration où la circulation induite est nulle : l'intégrale le long de la distribution de tourbillons le long de la corde est nulle. Lorsque la circulation augmente, le point d'arrêt F se déplace vers le bord de fuite du profil. À l'extrême, la circulation devient maximale lorsque ce point d'arrêt est situé sur l'intrados du profil. Parmi toutes ces solutions, une seule est physiquement réaliste et génère de la portance. Cette condition implique un unique point d'arrêt A sur le profil. En effet, la présence d'un second point d'arrêt sur le profil implique que l'écoulement contourne le bord de fuite, ce qui équivaut à une vitesse infinie à cet endroit.

La condition de Kutta stipule que la vitesse au bord de fuite du profil doit être finie.

Deux situations se présentent alors (Figure 3.24) :

1. sur un profil réel, le bord de fuite possède un angle β formé par la jonction de l'extrados et de l'intrados. Au bord de fuite, l'écoulement venant de l'extrados possède la vitesse V_e , sur l'intrados la vitesse est V_i . Ces deux vitesses n'ont pas la même direction donc pour être égales, elles doivent être nulles. Le second point d'arrêt est situé sur le bord de fuite :

$$V_i = V_e = 0$$

2. dans le cas des profils minces, l'angle au bord de fuite est négligeable et l'on considère que les deux côtés du profil, et donc les vitesses, sont parallèles. Les deux vitesses ont donc la même valeur $V_i = V_e$ ce qui implique que la circulation au bord de fuite est nulle :

$$\gamma(x = c) = 0 \quad (3.14)$$

Cette considération physique permet donc de choisir l'unique distribution de circulation $\gamma(x)$ qui décrit l'écoulement potentiel autour d'un profil portant.

8.2 Coefficients aérodynamiques d'un profil mince portant

L'équation (3.13) exprime la relation qui lie la distribution de tourbillons, à l'incidence et la cambrure du profil. La condition de Kutta impose une condition à la distribution au bord de fuite :

$$U_\infty (\alpha - z'_c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x^*)}{x - x^*} dx^* \quad \text{avec} \quad \gamma(c) = 0$$

Trouver la distribution $\gamma(x)$ à partir de cette équation constitue un problème inverse, où l'on cherche le modèle qui va permettre de reproduire l'écoulement potentiel autour d'un profil cambré en incidence. Le modèle (la distribution de tourbillons) doit reproduire les effets conjugués de l'incidence et de la cambrure du profil.

Profil plat – On étudie dans un premier temps l'effet de l'incidence seule. On considère un profil plat ($z'_c = 0$) en incidence α . La distribution de tourbillons satisfait à l'équation :

$$U_\infty \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x^*)}{x - x^*} dx^* \quad \text{avec} \quad \gamma(c) = 0 \quad (3.15)$$

Pour résoudre ce problème, on utilise le changement de variable suivant :

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \quad \text{et} \quad x^* = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta^*)$$

Ce qui permet d'écrire l'équation (3.15) comme :

$$U_\infty \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta^*) \sin \theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^* \quad \text{avec} \quad \gamma(\pi) = 0 \quad (3.16)$$

La difficulté ici est d'exprimer $\gamma(\theta)$. Pour cela, on s'appuie sur les relations suivantes établies par Glauert :

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta^*}{(\cos \theta^* - \cos \theta)} d\theta^* = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (3.17)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta^* \sin \theta^*}{(\cos \theta^* - \cos \theta)} d\theta^* = -\pi \cos n\theta \quad (3.18)$$

avec n un entier positif ou nul.

L'équation (3.17), pour $n = 1$, permet d'écrire la relation :

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta^*}{(\cos \theta^* - \cos \theta)} d\theta^* = \pi \quad (3.19)$$

En rapprochant les équations (3.19) et (3.16), la distribution de tourbillons γ peut s'écrire comme :

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) = 2U_\infty \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Cette expression permet de vérifier l'expression de l'intégrale mais ne satisfait malheureusement pas à la condition de Kutta car pour $\theta = \pi$, $\gamma_1(\pi) \rightarrow +\infty$. Pour résoudre cette difficulté, il faut remarquer que s'il existe une fonction γ_2 telle que :

$$\int_0^\pi \frac{\gamma_2 \sin \theta^*}{(\cos \theta^* - \cos \theta)} d\theta^* = 0$$

alors la fonction $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ est solution de l'équation (3.16). Pour déterminer la fonction γ_2 , on considère l'équation (3.17), pour $n = 0$, soit

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\cos \theta^* - \cos \theta)} d\theta^* = 0$$

ce qui permet d'exprimer γ_2 comme :

$$\gamma_2(\theta) = \frac{\gamma_0}{\sin \theta}$$

où γ_0 est une constante. La distribution totale s'exprime alors comme :

$$\gamma(\theta) = \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta) = \frac{2\alpha U_\infty \cos \theta + \gamma_0}{\sin \theta}$$

La condition de Kutta permet finalement de déterminer la constante γ_0 afin que $\gamma(\pi) = 0$, d'où :

$$\gamma(\theta) = 2\alpha U_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

Cette expression fournit la distribution de tourbillons à disposer le long de l'axe horizontal pour reproduire l'écoulement potentiel autour d'un profil portant, plat, sous incidence α . Elle permet d'exprimer les coefficients caractéristiques du profil. La portance par unité d'envergure L' du profil est obtenue à partir de l'équation (3.11) :

$$\begin{aligned} L' &= \rho U_\infty \Gamma = \rho U_\infty \int_0^c \gamma(x^*) dx^* \\ &= \rho U_\infty^2 c \alpha \int_0^\pi 1 + \cos \theta^* d\theta^* \\ L' &= \pi \rho U_\infty^2 c \alpha \end{aligned}$$

Il est préférable d'exprimer le coefficient de portance plutôt que la portance, soit :

$$c_l = \frac{L'}{q_\infty c} = 2\pi\alpha$$

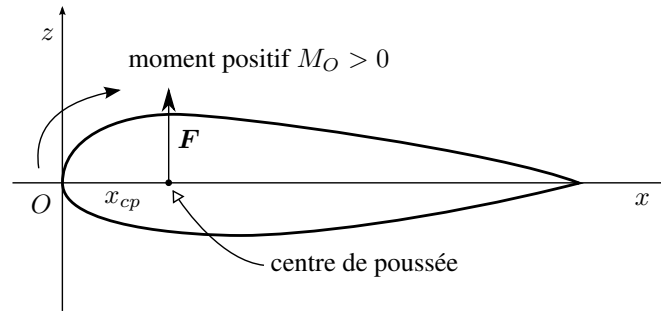


FIGURE 3.25 – Par convention le moment des forces aérodynamiques en O , au bord d'attaque, est positif quand il tend à cabrer le profil.

Pour un profil mince plat, le coefficient de portance est proportionnel à l'incidence (exprimée ici en radian !). Il faut garder en mémoire que cette expression est valable pour de faibles incidences car évidemment, si l'incidence augmente trop, l'écoulement s'éloigne de l'axe $z = 0$ et l'ensemble de la modélisation présentée ici n'est plus valable.

Une autre grandeur utile est le coefficient de moment créé par la force de portance L' au bord d'attaque du profil. Par convention, **les moments en aérodynamique sont positifs lorsqu'ils tendent à faire cabrer le profil** (Figure 3.25). Dans le repère choisi, le moment est positif lorsque le profil est en rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. Soit $dL' = \rho U_\infty \gamma(x^*) dx^*$ la portance élémentaire par unité d'envergure créée par le tourbillon situé en x^* , le moment élémentaire dM_0 au bord d'attaque s'exprime comme :

$$dM_0 = -\rho U_\infty x^* \gamma(x^*) dx^*$$

soit

$$\begin{aligned} M_0 &= -\rho U_\infty \int_0^c x^* \gamma(x^*) dx^* \\ &= -\rho U_\infty^2 \alpha \frac{c^2}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta^*) d\theta^* \\ M_0 &= -\frac{\pi}{4} \rho U_\infty^2 \alpha c^2 \end{aligned}$$

Ainsi le coefficient de moment s'exprime comme :

$$c_m = \frac{M_0}{q_\infty c^2} = -\frac{\pi}{2} \alpha = -\frac{c_l}{4}$$

Enfin, on définit le centre de poussée comme le point d'application des forces aérodynamiques, c'est-à-dire le point où le moment de la portance est nul. Le profil étant mince et faiblement incliné, le centre de poussée se situe sur l'axe Ox en $x = x_{cp}$, donné par $x_{cp} L' = -M_0$ soit :

$$x_{cp} = \frac{c}{4}$$

Pour un profil mince symétrique en incidence, le point d'application de la force de portance se situe à un quart de la corde. La position de ce point est indépendante de l'incidence.

Profil cambré – Pour prendre en compte l'influence de la cambrure du profil dans les caractéristiques aérodynamiques du profil, il faut repartir de l'équation (3.13) tout en s'appuyant sur les relations obtenues pour les profils non cambrés. L'objectif est de résoudre le problème inverse :

$$U_{\infty} (\alpha - z'_c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(x^*)}{x - x^*} dx^* \quad \text{avec} \quad \gamma(c) = 0$$

c'est-à-dire déterminer la distribution de circulation γ . Pour cela, on conserve le changement de variable introduit pour les profils non-cambrés :

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \quad \text{et} \quad x^* = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta^*)$$

La ligne de cambrure $z_c(x)$ est définie par une équation valant 0 en $x = 0$ et $x = c$, c'est donc une fonction impaire dont la dérivée $z'_c(x)$ est paire et définie sur le même intervalle. La dérivée $z'_c(x)$ est alors développable en série cosinus de Fourier :

$$z'_c = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (3.20)$$

ce qui donne par analogie avec l'équation (3.16),

$$U_{\infty} (\alpha - A_0) - U_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta^*) \sin \theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^*$$

Toujours par analogie avec la démarche suivie précédemment, on considère que la solution $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ est la somme de trois distributions solutions des équations :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_1(\theta^*) \sin \theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^* &= U_{\infty} (\alpha - A_0) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_2(\theta^*) \sin \theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^* &= 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma_3(\theta^*) \sin \theta^*}{\cos \theta^* - \cos \theta} d\theta^* &= -U_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \end{aligned}$$

Les intégrales de Glauert (équation 3.17) permettent d'obtenir les expressions de γ_1 et γ_2 comme dans le cas des profils non cambrés :

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta) &= 2U_{\infty} (\alpha - A_0) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \gamma_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{\sin \theta} \end{aligned}$$

La troisième distribution est exprimée en utilisant l'équation (3.18), soit :

$$\gamma_3(\theta) = 2U_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

La constante γ_0 est choisie pour satisfaire la condition de Kutta, d'où :

$$\gamma_0 = 2U_{\infty} (\alpha - A_0)$$

ce qui permet d'écrire la distribution totale de circulation comme :

$$\gamma(\theta) = 2U_\infty \left[(\alpha - A_0) \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right]$$

Cette fois-ci, pour exprimer complètement la distribution de tourbillons, il faut calculer les coefficients de Fourier A_n de la fonction $z'_c(x)$. L'obtention des coefficients est quelque chose de relativement classique. En intégrant l'équation (3.20), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi z'_c d\theta &= \int_0^\pi A_0 d\theta = A_0\pi \\ A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi z'_c d\theta \end{aligned} \quad (3.21)$$

puis en intégrant l'équation (3.20) multipliée par $\cos m\theta$ avec m entier,

$$\int_0^\pi z'_c \cos m\theta d\theta = A_0 \int_0^\pi \cos m\theta d\theta + \int_0^\pi \cos m\theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \right) d\theta$$

sachant que

$$\int_0^\pi A_n \cos n\theta \cos m\theta d\theta = 0 \quad \text{sauf pour } n = m$$

d'où

$$\int_0^\pi z'_c \cos n\theta d\theta = \int_0^\pi A_n \cos^2 n\theta d\theta = \frac{\pi}{2} A_n$$

soit finalement

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi z'_c \cos n\theta d\theta \quad \text{pour } n \geq 1 \quad (3.22)$$

Ainsi, il est possible d'exprimer la distribution de tourbillons $\gamma(\theta)$. Il reste ensuite à écrire les coefficients de portance et de moment pour un profil générique.

En utilisant la formule de Kutta-Joukowski et l'intégrale de la distribution de tourbillons, la portance par unité d'envergure s'exprime comme :

$$\begin{aligned} L' &= \rho U_\infty \int_0^c \gamma(x^*) dx^* = \rho U_\infty \int_0^\pi \gamma(\theta) \frac{c}{2} \sin \theta d\theta \\ &= \rho U_\infty^2 c \int_0^\pi \left[(\alpha - A_0)(\cos \theta + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin \theta \right] d\theta \\ L' &= \rho U_\infty^2 c \left[\pi(\alpha - A_0) + \frac{\pi}{2} A_1 \right] \quad \text{car } \int_0^\pi \sin n\theta d\theta = 0 \quad \text{pour } n \neq 1 \end{aligned}$$

Ainsi le coefficient de portance s'écrit :

$$c_l = 2\pi\alpha + \pi(A_1 - 2A_0) \quad (3.23)$$

Le coefficient de portance est constitué de deux parties correspondant à la superposition des effets d'incidence et de cambrure. Seuls les deux premiers coefficients de Fourier sont utiles pour exprimer le coefficient de portance.

Le moment au bord d'attaque est obtenu par la relation :

$$M_0 = \rho U_\infty \int_0^c x^* \gamma(x^*) dx^*$$

soit

$$c_m = \int_0^\pi (\alpha - A_0)(1 - \cos^2 \theta) d\theta + \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \sin \theta \cos \theta d\theta$$

et finalement, comme :

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin p\theta d\theta = 0 \quad \text{pour } n \neq p$$

$$c_m = -\frac{\pi}{2} \left[(\alpha - A_0) + A_1 - \frac{A_2}{2} \right]$$

L'abscisse du centre de poussée x_{cp} est alors donné par :

$$c_m = -x_{cp} c_l$$

$$x_{cp} = -\frac{c_m}{c_l}$$

Le centre de poussée se déplace avec l'incidence et dépend de la géométrie du profil.

La méthode présentée ici permet de calculer les coefficients de portance et de moment d'un profil portant dont on connaît l'équation de la cambrure z_c . La démarche est relativement systématique :

1. calculer l'expression de la dérivée de la ligne de cambrure
2. calculer les trois premiers coefficients de Fourier de cette dérivée
3. calculer les coefficients de moment et de portance
4. calculer la position du centre de poussée

La théorie des profils minces permet de calculer la portance et le moment de la portance sur un profil dont on connaît l'équation de la ligne moyenne. Les calculs sont relativement simples surtout si l'équation de la ligne moyenne est polynomiale. Cette approche donne des résultats remarquables. Pour le profil NACA 23012 utilisé en exemple précédemment, les valeurs expérimentales sont :

$$c_l = 0,55$$

$$\alpha_{L=0} = -1,1^\circ$$

soit moins de 2% d'erreur. Pour les profils plus épais, l'écoulement est significativement dévié de l'axe $z = 0$ et les hypothèses de la théorie deviennent trop fortes. La méthode des panneaux permet, avec un coût de calcul plus important, de calculer les coefficients aérodynamiques dans le cas général.

9 Méthode des panneaux pour les profils portants

Le calcul de la portance sur les profils minces est valable pour des profils dont l'épaisseur maximale n'excède pas 12 % de la corde. Au-delà, la composante normale de la vitesse, que l'on a négligée jusqu'à présent, joue un rôle essentiel au sein de l'écoulement. Au chapitre précédent, on a présenté la méthode des panneaux dans le cadre d'un écoulement autour d'un corps symétrique. L'écoulement autour d'un tel objet est reproduit en superposant des écoulements potentiels : une distribution de sources le long de la surface et un écoulement uniforme (voir chapitre 2 p.64). La distribution de sources est choisie de telle sorte que la paroi de l'objet représente une ligne de courant fermée de l'écoulement. Dans le cas d'un objet symétrique, des sources suffisent à recréer l'écoulement car la circulation autour de l'objet est nulle. En revanche, un corps asymétrique comme un profil d'aile génère de la circulation, une distribution de source n'est plus suffisante pour retrouver un écoulement potentiel équivalent, il est nécessaire de rajouter d'autres écoulements potentiels fondamentaux : les tourbillons.

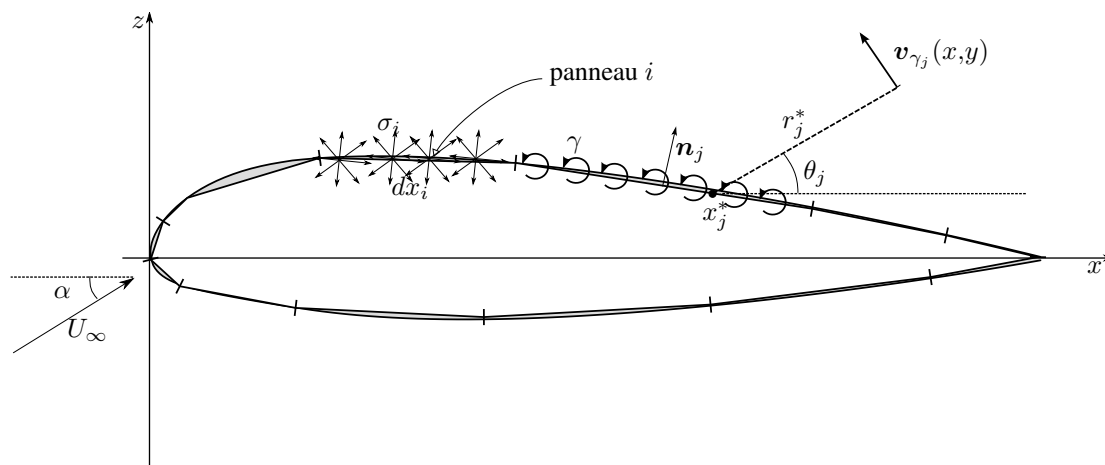


FIGURE 3.26 – Sur chaque panneau du profil, on place une distribution de sources σ_i qui varie en fonction du panneau et une distribution de tourbillons γ identique pour chaque panneau. Le profil est plongé dans un écoulement uniforme U_∞ .

Ainsi, l'écoulement autour d'un profil d'aile est représenté par la superposition de plusieurs écoulements fondamentaux :

1. **un écoulement uniforme** U_∞ qui permet de rendre compte de la vitesse d'avancement du profil dans le milieu ambiant ainsi que l'incidence de progression,
2. **une distribution de sources** σ_i le long de la paroi du profil qui reproduit l'épaisseur du profil,
3. **une distribution de tourbillons** γ_i qui génère la circulation induite par la dissymétrie du profil.

La méthode des panneaux pour les profils portants est donc une extension de la méthode des panneaux pour les corps symétriques, une distribution de tourbillons venant rajouter la circulation induite par le profil. Le raisonnement est donc très proche de celui présenté section 4 du chapitre 2. Cette méthode a été proposée par l'ingénieur Rubbert chez l'avionneur Boeing au milieu des années 60. Deux difficultés apparaissent pour généraliser la méthode des panneaux : (1) il faut déterminer la distribution de circulation équivalente et (2) il faut satisfaire à la condition de Kutta, c'est-à-dire avoir une vitesse finie au bord de fuite du profil. Pour résoudre ces difficultés, il existe plusieurs stratégies. On se propose ici d'en présenter une, caractérisée par deux choix essentiels :

1. la distribution de tourbillons est localisée sur chaque panneau du profil et est caractérisée par une distribution linéique uniforme γ , identique quelque soit le panneau,
2. les vitesses tangentielles sur les deux panneaux supérieur et inférieur formant le bord de fuite tendent vers la même valeur.

D'autres approches permettent d'avoir des résultats plus ou moins précis mais peuvent se révéler plus coûteuses en temps de calcul et plus élaborées. On peut citer entre autre la possibilité de positionner la distribution de circulation le long de la corde, la possibilité de faire varier l'intensité de la circulation linéique d'un panneau à l'autre, la possibilité de rajouter un panneau *appendice* après le bord de fuite pour satisfaire la condition de Kutta. . . L'approche simple retenue ici permet de comprendre la méthodologie et de calculer des écoulements avec une précision très satisfaisante.

Comme pour la méthode des panneaux des corps symétriques, la première étape consiste à approcher la géométrie du profil par une succession de m segments. Chaque segment est identifié par la position de son centre et de ses extrémités, une distribution de sources σ_i est associée à chaque panneau i ainsi qu'une distribution de tourbillons de circulation linéique γ .

La superposition des écoulements dus à l'écoulement uniforme, aux sources et aux tourbillons doit permettre de définir la paroi du profil comme une ligne de courant de l'écoulement global. En d'autres termes, il faut que la vitesse normale induite par la superposition des trois écoulements au niveau de chaque panneau i soit nulle :

$$v_{t,n_i} + v_{d,n_i} + v_{\gamma,n_i} = 0$$

avec v_{t,n_i} , v_{d,n_i} et v_{γ,n_i} les vitesses normales au panneau i induites respectivement par l'écoulement uniforme, les distributions de sources sur tous les panneaux du profil et les distributions de tourbillons. v_{t,n_i} et v_{d,n_i} ont été exprimées pour un corps symétrique section 4 chapitre 2. Leurs expressions restent identiques dans le cas présent :

$$v_{t,n_i} = U_{\infty} \cos \beta_i \quad (3.24)$$

$$v_{d,n_i} = \frac{\sigma_i}{2} + \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_i} \ln r_{ij} ds_j^* \quad (3.25)$$

Il reste à déterminer la vitesse normale induite par les distributions de tourbillons et à s'assurer que la condition de Kutta est satisfaite.

Soit $\mathbf{v}_{\gamma_j}(x,y)$ le vecteur vitesse induit par la distribution de tourbillon γ du panneau j au point $X(x,y)$ (Figure 3.26). Le panneau j est de longueur s_j et l'on nomme x_j^* l'abscisse courant du

panneau. Par analogie avec l'expression de la vitesse induite par un tourbillon élémentaire (voir chapitre 2, p.56), la vitesse élémentaire induite par l'élément de panneau dx_j^* situé en x_j^* s'écrit

$$dv_{\theta_j}(x,y) = \frac{\gamma}{r_j^*} dx_j^* = \frac{\gamma}{\sqrt{(x-x_j^*)^2 + y^2}} dx_j^*$$

Cette vitesse est suivant le vecteur e_{θ_j} perpendiculaire au segment $[x_j^*X]$ repéré par l'angle θ_j . Lorsque l'on intègre cette contribution sur l'ensemble du panneau, l'angle θ_j varie. On décompose alors l'élément de vitesse en une composante tangente au panneau j que l'on appelle dv_{γ_j,t_j} et une composante normale dv_{γ_j,n_j} :

$$dv_{\gamma_j,t_j}(x,y) = -dv_{\theta_j}(x,y) \sin \theta_j = -\gamma \frac{y}{(x-x_j^*)^2 + y^2} dx_j^*$$

$$dv_{\gamma_j,n_j}(x,y) = dv_{\theta_j}(x,y) \cos \theta_j = \gamma \frac{(x-x_j^*)}{(x-x_j^*)^2 + y^2} dx_j^*$$

On obtient alors les deux composantes de la vitesse induite par l'ensemble du panneau j en $X(x,y)$ en intégrant sur la longueur du panneau :

$$v_{\gamma_j,t_j}(x,y) = -\gamma \int_{-s_j/2}^{s_j/2} \frac{y}{(x-x_j^*)^2 + y^2} dx_j^* = -\gamma \left[\tan^{-1} \left(\frac{x+s_j/2}{y} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x-s_j/2}{y} \right) \right]$$

$$v_{\gamma_j,n_j}(x,y) = \gamma \int_{-s_j/2}^{s_j/2} \frac{(x-x_j^*)}{(x-x_j^*)^2 + y^2} dx_j^* = \frac{\gamma}{2} \ln \left[\frac{(x+s_j/2)^2 + y^2}{(x-s_j/2)^2 + y^2} \right]$$

On cherche à exprimer la vitesse normale $v_{\gamma_j,n_i}(x_i,y_i)$ au panneau i au centre $X_i = (x_i,y_i)$ de ce panneau induite par le panneau j :

$$v_{\gamma_j,n_i}(x_i,y_i) = v_{\gamma_j,t_j}(x_i,y_i) \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{n}_i + v_{\gamma_j,n_j}(x_i,y_i) \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_i$$

où $\mathbf{n}_j$, $\mathbf{n}_i$ et $\mathbf{t}_j$ sont les vecteurs unitaires respectivement normaux aux panneaux j et i et tangent au panneau j . La direction de ces vecteurs et donc leur produits scalaires sont donnés par la géométrie du profil et l'orientation respective des différents profils. Enfin, la vitesse normale au panneau i induite par tous les panneaux est obtenue en sommant les m panneaux :

$$v_{\gamma,n_i} = \sum_{j=1}^m v_{\gamma_j,n_i}(x_i,y_i)$$

En sommant cette expression avec les deux autres vitesses exprimées par les équations (3.24) et (3.25), on obtient la condition pour laquelle la paroi du profil représente une ligne de courant de l'écoulement :

$$U_{\infty} \cos \beta_i + \frac{\sigma_i}{2} + \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{\sigma_j}{2\pi} \int_{s_j} \frac{\partial}{\partial n_i} \ln r_{ij} ds_j^* + \sum_{j=1}^m v_{\gamma_j,n_i}(x_i,y_i) = 0$$

Si on écrit cette équation pour les m panneaux, on obtient m équations alors que l'on a $m+1$ inconnues : les m sources σ_i et l'intensité linéique des tourbillons γ .

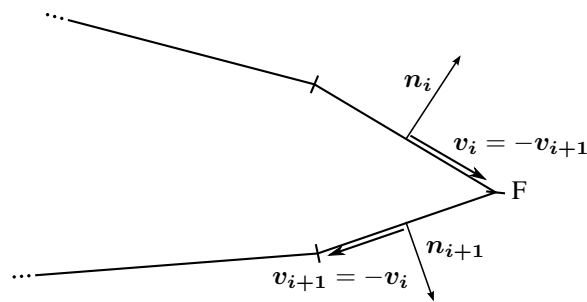


FIGURE 3.27 – Les vitesses induites au niveau des panneaux adjacents au bord de fuite doivent être opposées pour créer un point d'arrêt. Cette contrainte permet de vérifier la condition de Kutta.

La condition supplémentaire n'est rien d'autre que la condition de Kutta qui assure que la vitesse au bord de fuite est finie. Pour cela, il suffit d'écrire que la vitesse tangente au panneau extrados du bord de fuite est l'opposée de la vitesse tangente au panneau intrados du bord de fuite : le point de jonction (bord de fuite) représentera alors un point d'arrêt de l'écoulement (Figure 3.27).

Plusieurs méthodes classiques permettent de résoudre numériquement ce système linéaire à $m + 1$ inconnues avec une précision suffisante pour obtenir des résultats exploitables industriellement. Bien entendu, plus le nombre de panneaux est important, plus le profil portant sera approché avec précision et plus les résultats de calcul seront pertinents. À l'heure actuelle, des travaux de recherche continuent d'être menés pour améliorer la méthode des panneaux en optimisant les distributions de tourbillons et de sources au sein de l'écoulement afin de reproduire le plus fidèlement possible les écoulements. L'avantage de ces méthodes par rapport aux simulations numériques est leur temps de calcul. Il est très rapide de découper un profil en segments, calculer les coefficients du système et résoudre ce système pour plusieurs conditions de vitesse et d'incidence alors que les calculs numériques nécessitent de long calculs itératifs pour chaque condition de vol. Pour ces raisons, la méthode des panneaux est encore utilisée pour des calculs d'avant-projet afin de tester rapidement les propriétés aérodynamiques des profils.

Exercice 3.1

Le coefficient de portance permet de rendre compte des performances aérodynamique d'un avion. Il dépend de la masse de l'avion, de sa géométrie et des conditions de vol. Calculer le coefficient de portance du Concorde en vol de croisière. On utilise les informations données dans le tableau 3.1

Exercice 3.2

Calculer les coefficients aérodynamiques (portance et traînée) du profil NACA 23012 sous un angle d'incidence de 4° . La ligne moyenne de ce profil est donnée par deux équations : la première pour la partie avant du profil, la seconde pour la partie ar-

TABLE 3.1 – Données relatives au vol en croisière du Concorde.

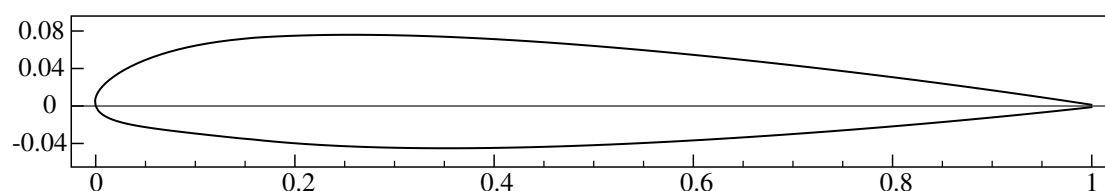
Masse de l'avion	150 tonnes
Masse volumique	$1,26 \cdot 10^{-1} \text{ kg/m}^3$
Température de l'air	216 K
Surface alaire	358 m^2
Nombre de Mach	2

rière.

$$\frac{z_c}{c} = 2,6595 \left[\left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0,6075 \left(\frac{x}{c} \right)^2 + 0,1147 \left(\frac{x}{c} \right) \right]$$

pour $0 \leq x/c \leq 0,2025$

$$\frac{z_c}{c} = 0,02208 \left(1 - \frac{x}{c} \right) \quad \text{pour } 0,2025 \leq x/c \leq 1$$

**FIGURE 3.28** – Profil NACA 23012.

Chapitre IV

Écoulement autour d'une aile d'envergure finie

Le chapitre précédent a permis de calculer les propriétés aérodynamiques d'un profil portant, c'est-à-dire une géométrie bidimensionnelle induisant une circulation dans un écoulement uniforme. On a montré que la portance d'un profil dépend de la vitesse de l'écoulement mais aussi de l'incidence et de la cambrure du profil. Cette première approche fait l'hypothèse que l'écoulement autour d'une aile peut être calculé à partir d'un écoulement bidimensionnel dont les propriétés sont répliquées le long de l'envergure de l'aile en négligeant les effets de bords de l'aile. Cependant, la finitude de l'aile induit des mouvements tridimensionnels impossibles à décrire avec la théorie des profils. L'objet de ce chapitre est de décrire l'écoulement tridimensionnel autour d'une aile, de présenter la théorie de la ligne portante utilisée pour modéliser l'écoulement, et de calculer la portance et la traînée induite d'une aile, dont l'allongement est suffisamment grand (en pratique, supérieur à 4).

1 Description de l'écoulement

La portance est générée par une différence de pression entre le dessus de l'aile (l'extrados) et le dessous de l'aile (l'intrados). Généralement, dans ces conditions, la pression sur l'extrados est inférieure à la pression ambiante tandis que la pression sur l'intrados est supérieure à la pression ambiante. Comme très souvent en physique, les questions apparaissent en regardant ce qu'il se passe au bord du domaine. Le bout de l'aile sépare l'extrados de l'intrados mais autorise aussi le mouvement de l'air par contournement. La différence de pression entre les deux faces de l'aile induit un mouvement de contournement de l'air le long du bout d'aile (Figure 4.1). Le long de l'aile, les lignes de courant ne sont pas parfaitement parallèles. Quelques lignes quittent l'aile par l'extrémité au lieu de le faire par le bord de fuite. Cette composante de vitesse le long de l'envergure de l'aile se propage jusqu'à l'emplanture où le mouvement est fortement amoindri mais toujours présent (Figure 4.2).

Sur chacune des faces de l'aile, les lignes de courant ont un comportement différent. L'air parcourant l'intrados a tendance à être écarté vers l'extérieur de l'aile pour passer par dessus le bout de l'aile. L'air sur l'extrados se retrouve donc dévié vers l'emplanture de l'aile. Il en résulte un mouvement de cisaillement au bord de fuite de l'aile entre les lignes de courant de l'extrados

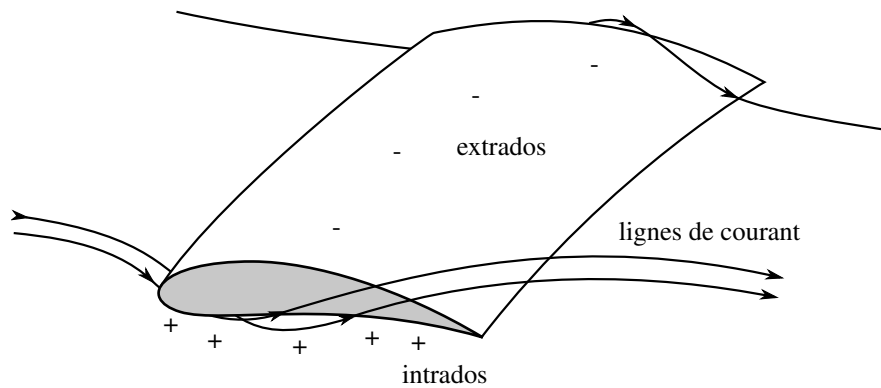


FIGURE 4.1 – Les lignes de courant de l'intrados contournent le bord de l'aile. Ce mouvement est induit par la différence de pression entre la surpression de l'intrados et la dépression de l'extrados.

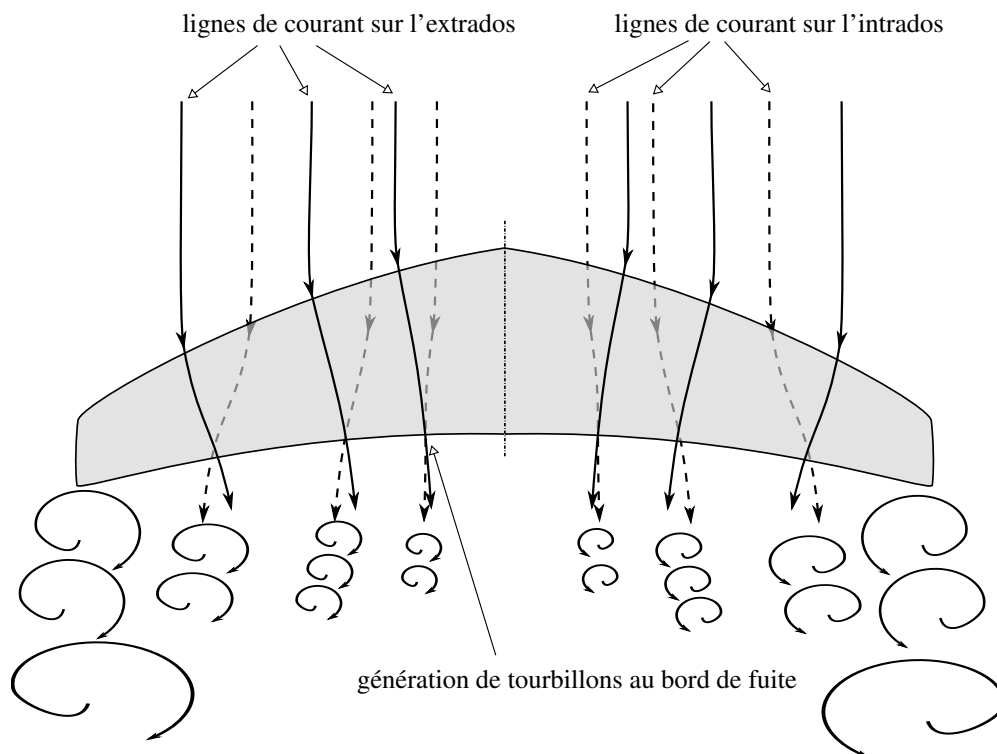


FIGURE 4.2 – Les lignes de courant sur l'intrados et l'extrados sont déviées. Au bord de fuite, les directions des vitesses sont différentes, induisant la création de tourbillons libres.

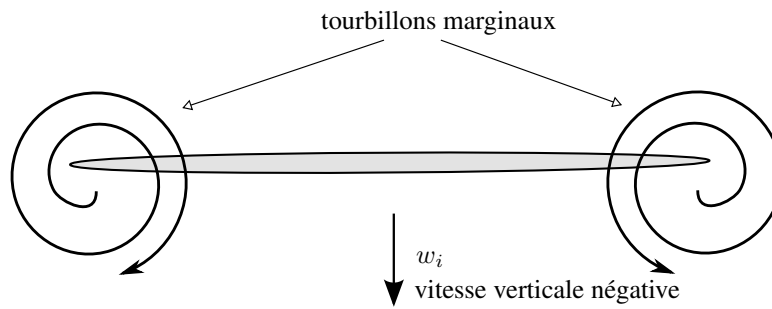


FIGURE 4.3 – Dans le sillage d'une aile, les tourbillons de bout d'aile induisent une vitesse verticale négative.

et celles de l'intrados. Ce cisaillement donne naissance à des tourbillons libres dont l'intensité augmente à mesure que l'on se rapproche du bout de l'aile. L'ensemble des tourbillons créés au bord de fuite de l'aile coalescent rapidement, pour ne former qu'un unique tourbillon marginal en bout d'aile. On considère qu'après une distance égale à deux fois la corde de l'aile, les tourbillons de bord de fuite ne sont plus visibles, ils ont tous été happés pour former deux tourbillons contrarotatifs en bouts d'aile. Ces deux tourbillons sont parfaitement visibles à l'oeil nu dans certaines conditions. Certaines études expérimentales ont permis de visualiser ces tourbillons en projetant un avion au travers d'un nuage de fumée ou bien en colorant l'écoulement en bout d'aile. Dans certaines conditions climatiques humides ou nuageuses, les tourbillons ordonnent les nuages, créant des motifs réguliers observables. Ces tourbillons tournants dans des sens opposés, le sillage d'une aile est caractérisé par une vitesse verticale négative (vers le bas) de l'écoulement. Après un certain temps, l'intensité de ces tourbillons se dissipent et la vitesse verticale s'annule, mais au voisinage de l'aile, l'intensité de cette vitesse verticale n'est pas négligeable. Cette vitesse induite joue un rôle essentiel dans les performances des avions. Elle conditionne aussi l'espacement des avions aux alentours des aéroports, car il est dangereux, surtout aussi près du sol, de voler dans le sillage d'un avion où les vitesses verticales négatives sont importantes (Figure 4.3).

Une des conséquences de la finitude de l'aile est donc de générer des tourbillons marginaux au bord de fuite. On cherche à modéliser ces tourbillons pour calculer les performances aérodynamiques des ailes.

Une autre conséquence de la finitude de l'aile est la variation de la portance le long de l'aile. Afin de satisfaire au principe de continuité, il faut que la portance de l'aile décroisse à mesure que l'on s'approche du bout de l'aile pour finalement s'annuler à l'extrémité. Ceci implique que la portance n'est pas constante le long de l'envergure. La portance L de l'aile est donc obtenue par une intégration le long de l'envergure des différentes portances de profil :

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy$$

où b est l'envergure de l'aile et $L'(y)$ la portance du profil à la position y (Figure 4.4). D'après la théorie des profils portants, la portance est donnée par la relation de Kutta-Joukowski, ce qui permet d'écrire la portance totale comme :

$$L = \rho U_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (4.1)$$

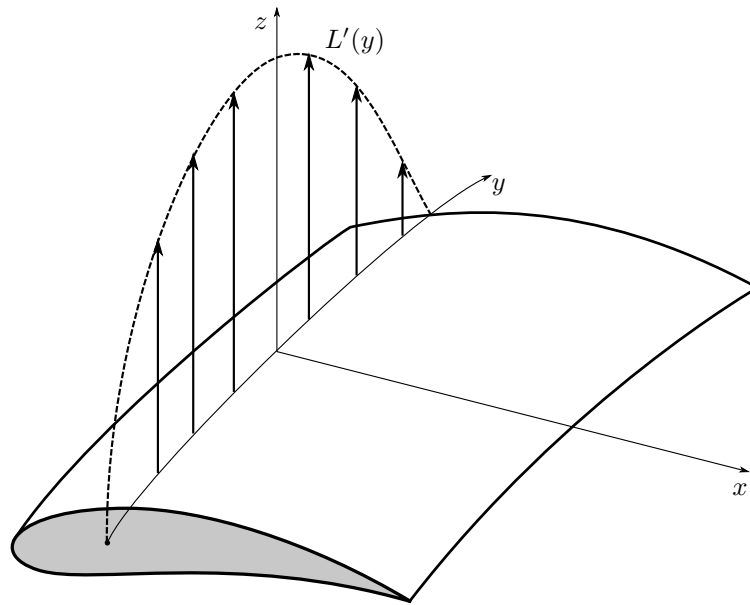


FIGURE 4.4 – Le long de l’envergure de l’aile, la portance n’est pas constante. La distribution de portance $L'(y)$ doit assurer la continuité en bout d’aile.

avec $\Gamma(y)$ la circulation du profil en y . Le coefficient de portance s’écrit alors :

$$C_L = \frac{2}{S U_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (4.2)$$

La distribution de circulation le long de l’envergure est une caractéristique de l’aile, la distribution est donc un paramètre de dimensionnement d’une voilure. En fonction des performances recherchées (maniabilité, faible traînée. . .) on choisit d’imposer une distribution de circulation plutôt qu’une autre en modifiant la géométrie de la voilure.

2 Théorie de la ligne portante

La création de portance sur une aile s’accompagne d’une perturbation de l’écoulement environnant. L’aile induit une circulation au sein de l’écoulement dont les caractéristiques sont directement liées aux forces créées sur la structure. L’objectif de la théorie de la ligne portante est de recréer la déformation de l’écoulement, induite par la présence d’une aile, à l’aide d’une distribution de tourbillons.

2.1 Ligne tourbillon

Au cours du chapitre précédent, une distribution de tourbillons le long de la corde d’un profil a permis de générer une circulation équivalente et de déterminer le coefficient de portance par unité d’envergure. L’axe de ces tourbillons est normal au plan du profil, ces tourbillons sont dits *liés*. Ils sont utilisés pour reproduire l’écoulement générant la portance. Pour modéliser

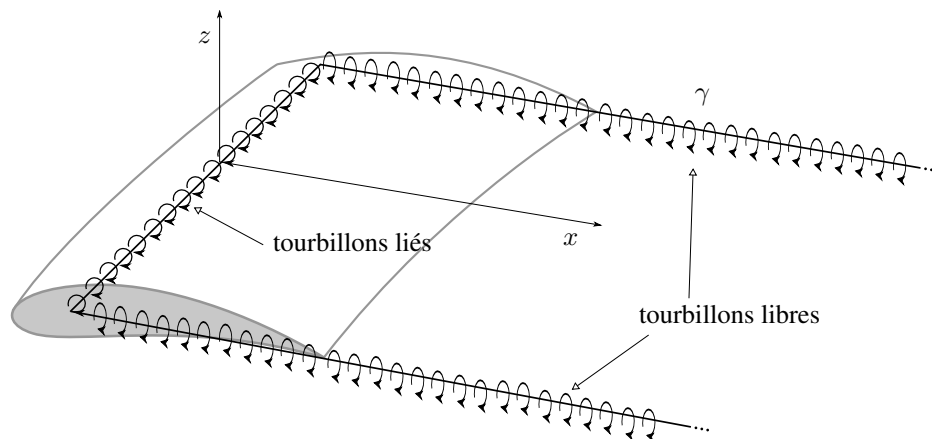


FIGURE 4.5 – Pour reproduire l’écoulement autour d’un profil, on utilise des lignes tourbillons. Les tourbillons libres permettent de reproduire la circulation associée à la portance. Les tourbillons libres représentent les tourbillons marginaux de bout d’aile.

la perturbation de l’écoulement provoqué par une aile d’envergure finie, il faut rajouter à ces tourbillons liés, des tourbillons *libres* qui reproduisent les tourbillons marginaux au niveau du bord de fuite (Figure 4.5). Les tourbillons marginaux sont des tourbillons physiques, que l’on peut observer, les tourbillons libres et liés sont des tourbillons théoriques utilisés pour modéliser le problème de portance.

De façon plus générale, on introduit la notion de ligne tourbillon. Une ligne tourbillon est une ligne infinie sur laquelle est répartie une circulation linéique γ . Trois théorèmes régissent les propriétés de ces lignes. Ce sont les théorèmes de Helmholtz^{*}:

1. L’intensité d’une ligne tourbillon est constante sur toute sa longueur,
2. une ligne tourbillon ne peut pas s’arrêter au sein du fluide ; elle doit s’étendre jusqu’aux limites du domaine (éventuellement l’infini) ou bien former une figure fermée,
3. en absence de force rotationnelle, un écoulement irrotationnel reste irrotationnel.

L’idée de Prandtl est de remplacer l’aile par une ligne tourbillon tout en vérifiant les théorèmes de Helmholtz. La configuration retenue est une configuration de ligne en fer à cheval (Figure 4.5) : une ligne parallèle au bord d’attaque de l’aile simule les tourbillons liés. Elle est prolongée par deux lignes tourbillon parallèles aux bouts des ailes. Cette configuration permet de modéliser les tourbillons générant la portance et les tourbillons marginaux qui apparaissent en bout d’aile. De plus, les théorèmes de Helmholtz sont vérifiés en choisissant une circulation linéique constante le long de la ligne et en prolongeant à l’infini les lignes à l’arrière de l’aile.

Cette ligne tourbillon génère une perturbation du champ de vitesse dans tout l’espace, à l’image du champ magnétique généré par un fil parcouru par un courant électrique. L’analogie entre les deux configurations est complète car la perturbation de vitesse s’exprime à l’aide de la loi de Biot-Savart, plus connue dans le domaine de l’électromagnétisme.

Ici, on souhaite exprimer le champ de vitesse induit par une ligne tourbillon en un point P de l’espace. La position du point P est donnée par rapport à sa distance à la ligne tourbillon et, en

*. Hermann von Helmholtz (1837-1921), biographie par Leo Königsberger, 1906, librement accessible sur <http://archive.org/details/hermannvonhelmho00koenrich>

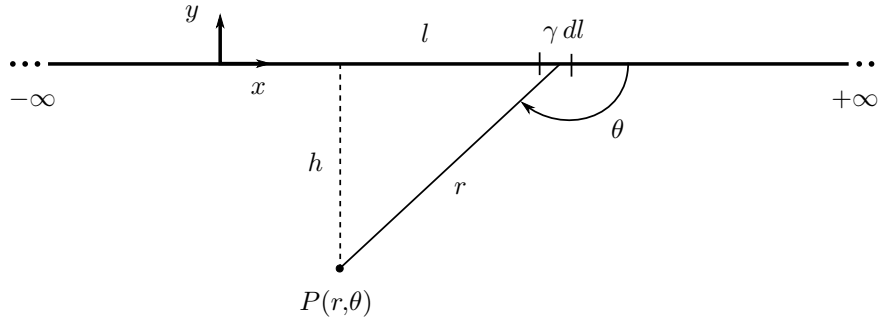


FIGURE 4.6 – Une ligne tourbillon possède une distribution linéique de circulation γ . L'élément de longueur dl induit une vitesse normale au plan de la page $dw(r, \theta)$ en $P(r, \theta)$.

particulier, un petit élément dl de cette ligne (Figure 4.6). Soit $d\mathbf{V}(r, \theta)$ la vitesse induite en P par l'élément dl de la ligne tourbillon :

$$\begin{aligned} d\mathbf{V}(r, \theta) &= \frac{\gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} && \text{Loi de Biot et Savart} \\ d\mathbf{V}(r, \theta) &= dw(r, \theta) \mathbf{e}_z = -\frac{\gamma}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \mathbf{e}_z \\ dw(r, \theta) &= -\frac{\gamma}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \end{aligned}$$

Pour calculer la vitesse induite par les tourbillons libres, il faut obtenir la vitesse induite par une demie ligne tourbillon, soit $l \in [0; +\infty[$:

$$w(r, \theta) = -\frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

Le calcul de l'intégrale est réalisé avec la variable θ :

$$\begin{aligned} l &= -\frac{h}{\tan \theta} \\ dl &= \frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta \\ r^2 &= \frac{h^2}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \frac{\sin^2 \theta}{h^2} \frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= -\frac{\gamma}{4\pi h} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ w &= -\frac{\gamma}{4\pi h} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Cette vitesse induite est perpendiculaire au plan passant par la ligne tourbillon et le point P. Elle décroît comme l'inverse de la distance du point à la ligne.

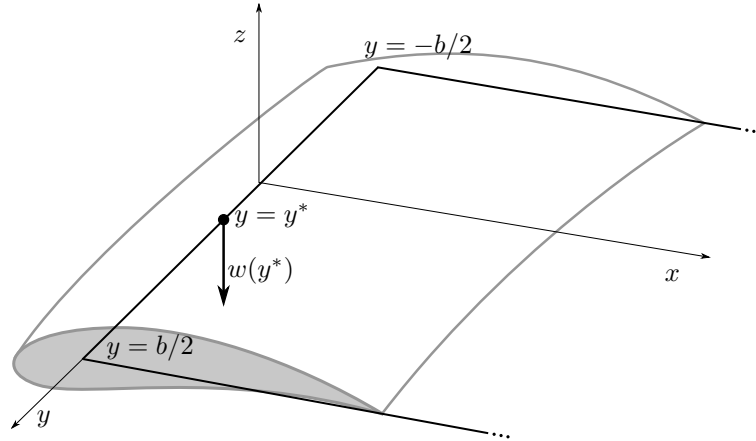


FIGURE 4.7 – Les deux lignes tourbillons semi-infinies induisent une vitesse verticale en tout point de la ligne portante de l’aile. Cette vitesse est fonction de la distance aux deux extrémités de l’aile.

Si l’on revient au cas de l’aile modélisée par une ligne tourbillon (Figure 4.7), ceci implique que la ligne tourbillon en forme de fer à cheval induit une vitesse verticale w en tout point de l’espace. En particulier, les lignes de bout d’aile, qui sont deux lignes semi-infinies, induisent une vitesse au niveau du bord d’attaque de l’aile dont l’intensité dépendra de la position y le long de l’envergure. Par analogie avec l’équation (4.3), la vitesse induite par les deux lignes tourbillon semi-infinies au point y^* de l’envergure s’exprime comme :

$$w(y^*) = -\frac{\gamma}{4\pi(b/2 - y^*)} - \frac{\gamma}{4\pi(b/2 + y^*)} = -\frac{\gamma b}{4\pi(b^2/4 - y^{*2})}$$

Cette vitesse est verticale et dirigée vers le bas. Elle modifie le vecteur vitesse au bord d’attaque de l’aile et perturbe ainsi l’écoulement aérodynamique. Ce qui est remarquable dans ce mécanisme est que les tourbillons créés à l’arrière de l’aile induisent une variation de vitesse en amont de l’aile, au niveau du bord d’attaque. La conséquence s’exprime en terme de traînée.

2.2 Traînée induite

L’aile est plongée dans un écoulement uniforme de vitesse U_∞ avec l’incidence α comme indiqué sur la figure 4.8. L’envergure finie de l’aile induit une vitesse verticale négative w au niveau du bord d’attaque de l’aile. L’écoulement qui rencontre l’aile est donc la somme de deux contributions de directions différentes. L’incidence effective du profil α_{eff} est donc inférieure à l’incidence définie par rapport à l’écoulement uniforme U_∞ . Il apparaît une incidence induite α_i définie comme la différence entre l’incidence α et l’incidence effective :

$$\alpha_i = \alpha - \alpha_{\text{eff}} \quad (4.4)$$

En considérant que les angles d’incidence mis en jeu sont faibles, on peut approcher l’incidence induite par la relation :

$$\alpha_i = \tan^{-1} \left(-\frac{w}{U_\infty} \right) \sim -\frac{w}{U_\infty} \quad (4.5)$$

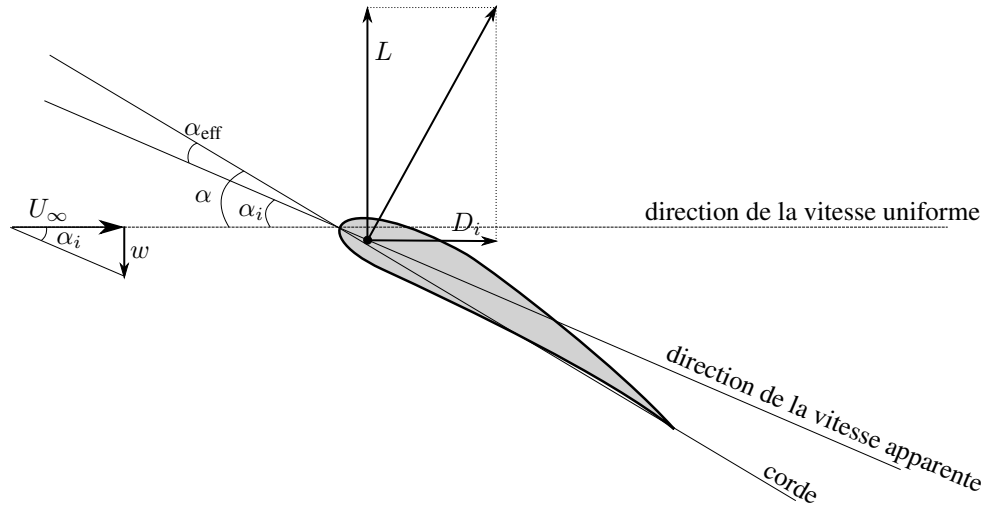


FIGURE 4.8 – La vitesse induite en amont de l’aile modifie l’incidence. L’incidence induite fait naître une composante aérodynamique de traînée D_i qui s’oppose à la progression de l’aile.

comme la vitesse U_∞ est donnée et que l’on peut calculer la vitesse induite grâce à la théorie de la ligne portante et des lignes tourbillons, il est possible de calculer l’incidence induite.

La conséquence principale de l’existence de l’incidence induite est la modification des forces aérodynamiques. Dans le cas d’un écoulement non-visqueux, la seule composante de la force aérodynamique est la portance, perpendiculaire au vecteur vitesse. En l’absence de vitesse induite verticale, la portance est dirigée suivant l’axe z (Figure 4.8). L’incidence effective est en réalité inférieure à l’incidence physique de l’aile, la résultante aérodynamique possède donc un angle par rapport à la verticale de l’aile ce qui génère une traînée induite D_i . Cette composante est une traînée qui s’oppose à la progression de l’aile. Cette traînée induite sera d’autant plus grande que l’incidence induite est grande.

Si l’on résume la causalité des événements, on a identifié expérimentalement l’existence de tourbillons au niveau du bord de fuite qui s’agglomèrent rapidement en aval de l’aile pour former deux tourbillons marginaux en bout d’aile. Ces tourbillons peuvent être modélisés par une ligne tourbillon qui induit une perturbation de vitesse dirigée vers le bas (*downwash* en anglais). Cette vitesse induite modifie l’incidence effective de l’aile qui engendre une traînée induite, freinant la progression de l’aile. La traînée induite est par conséquent liée à l’intensité des tourbillons marginaux : réduire la puissance de ces tourbillons par l’utilisation de profils aérodynamiques étudiés permet de réduire les perturbations transverses de vitesse, et par conséquent la traînée induite.

La traînée induite est fonction de l’incidence induite et de la portance $L'(y)$. Géométriquement, on observe que :

$$\begin{aligned}
 D_i(y) &\sim L'(y) \sin [\alpha_i(y)] \\
 &\sim L'(y) \alpha_i(y) \\
 &\sim -\rho U_\infty \Gamma(y) \frac{w_i(y)}{U_\infty} \\
 D_i(y) &\sim -\rho w_i(y) \Gamma(y)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ce qui représente une bonne approximation pour des incidences faibles. La traînée totale est obtenue en intégrant la traînée de chaque profil :

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} D_i(y) dy = -\rho \int_{-b/2}^{b/2} w_i(y) \Gamma(y) dy \quad (4.7)$$

Soit le coefficient de traînée induite :

$$C_{D_i} = -\frac{2}{U_\infty^2 S} \int_{-b/2}^{b/2} w_i(y) \Gamma(y) dy \quad (4.8)$$

La démarche de calcul est donc la suivante :

1. se donner une distribution de circulation $\Gamma(y)$,
2. calculer la vitesse induite $w_i(y)$ par section,
3. calculer le coefficient de portance,
4. calculer le coefficient de trainée induite.

La théorie de la ligne portante met en évidence l'apparition d'une traînée induite par les tourbillons marginaux. Cependant, la modélisation de l'aile par une ligne tourbillon en forme de fer à cheval souffre de deux limitations :

1. la distribution de tourbillons est constante le long de la ligne ce qui ne permet pas de rendre compte de la variation de portance en fonction de la position le long de l'envergure. En effet, pour assurer la continuité de l'écoulement, il est nécessaire que la portance s'annule au voisinage du bout d'aile.
2. la forme de la ligne tourbillon ne permet pas de modéliser la création des tourbillons marginaux le long du bord de fuite. Ces tourbillons coalescent après une distance égale à quelques longueurs de corde mais ils ont un rôle important dans la génération de l'incidence induite car ils peuvent être très intenses à proximité de l'aile.

Une évolution de la théorie de la ligne portante permet, avec la même idée de base, de palier ces deux limitations majeures et de calculer plus précisément la vitesse induite $w_i(y)$.

2.3 Filets tourbillon

On cherche à utiliser la théorie de la ligne portante tout en prenant en compte la variation de la circulation Γ avec la position y le long de l'envergure. Pour cela, on définit une ligne tourbillon élémentaire en forme de fer à cheval centrée en y^* dont la partie parallèle au bord d'attaque ne couvre pas toute l'envergure mais uniquement la distance dy^* (Figure 4.9). L'intensité linéique du tourbillon est la circulation $d\Gamma^*$ définie par :

$$d\Gamma^* = \frac{d\Gamma}{dy} dy^*$$

La ligne tourbillon doit satisfaire les théorèmes de Helmholtz. Elle se prolonge donc à l'infini par deux lignes qui génèrent en y la vitesse élémentaire dw_i :

$$dw_i(y) = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma^*}{y^* - y}$$

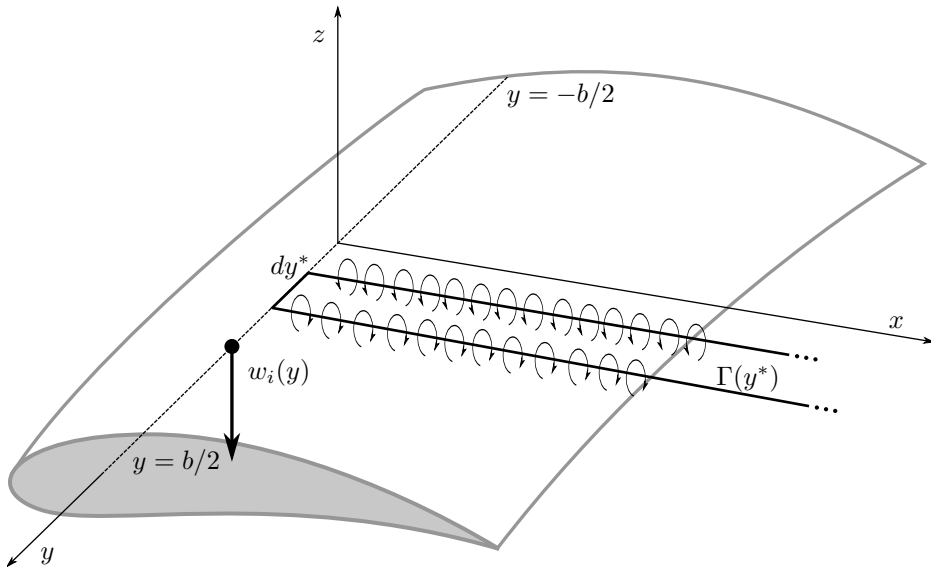


FIGURE 4.9 – En y^* , une ligne tourbillon d'intensité $\Gamma(y^*)$ induit une vitesse verticale $w_i(y)$ en y .

La vitesse induite par l'ensemble de la voilure est obtenue en intégrant la contribution de chaque ligne tourbillon élémentaire :

$$w_i(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{d\Gamma}{dy} \right)_{y^*} \frac{dy^*}{y^* - y} \quad (4.9)$$

La vitesse induite dépend de la distribution de circulation $\Gamma(y)$ de la voilure. Cette distribution doit être choisie par le concepteur de la voilure. En fonction des objectifs aérodynamiques de l'appareil, la distribution favorisera la maniabilité, la stabilité et/ou les performances globales.

Le choix de la distribution $\Gamma(y)$ influence directement la distribution de portance puisque, pour chaque section, la portance du profil $L'(y)$ dépend linéairement de la circulation :

$$L'(y) = \rho U_\infty \Gamma(y)$$

Le coefficient de portance c_l d'un profil en y est également lié à cette circulation puisque par définition,

$$c_l = \frac{L'(y)}{q_\infty c(y)} \quad \text{soit} \quad c(y) = \frac{2\Gamma(y)}{c_l S U_\infty}$$

avec $c(y)$ la longueur de la corde du profil situé en y . On voit que pour un coefficient de portance de section constant, la forme de l'aile est directement déterminée par la distribution de circulation. Le problème peut également être posé directement : (1) la forme de l'aile est choisie, (2) la distribution de circulation associée est calculée, (3) on en déduit la portance et la traînée induite. Ainsi, par itération, la géométrie de la voilure peut être calculée avec un objectif précis de performance.

La section suivante montre comment calculer pratiquement les coefficients de portance et de traînée induite d'une aile dans le cas particulier d'une distribution elliptique de circulation, puis pour une distribution quelconque.

3 Calcul des coefficients de portance et de traînée induite

3.1 Distribution elliptique

La distribution de circulation le long de l'envergure d'une aile est un paramètre de dimensionnement. Son choix conditionne les performances de l'avion. Le travail de l'ingénieur est de trouver un compromis entre la performance, la stabilité et la manoeuvrabilité.

La distribution la plus simple à étudier est la distribution elliptique :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

où Γ_0 est une constante et b l'envergure de l'aile. Cette donnée permet de calculer la portance grâce à l'équation (4.1) :

$$L = \rho U_\infty \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} dy$$

L'intégrale se résout facilement avec le changement de variable :

$$y = -\frac{b}{2} \cos \theta$$

soit

$$L = \int_0^\pi \rho U_\infty \Gamma_0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \frac{b}{2} \sin \theta d\theta = \rho U_\infty \Gamma_0 b \frac{\pi}{4}$$

La constante Γ_0 permet d'ajuster la portance au poids total de l'avion. Durant le vol en palier, la portance équilibre le poids de l'avion, soit :

$$L = Mg = \rho U_\infty \Gamma_0 b \frac{\pi}{4}$$

où M est la masse de l'avion et g la constante gravitationnelle. Γ_0 s'exprime alors comme :

$$\Gamma_0 = \frac{4Mg}{\rho U_\infty b \pi}$$

Le coefficient de portance s'écrit alors :

$$C_L = \frac{\pi b \Gamma_0}{2 U_\infty S}$$

Pour calculer la traînée induite, il est nécessaire de calculer en premier la vitesse induite grâce à l'expression (4.9) :

$$w_i(y) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y^*}{\sqrt{b^2/4 - y^{*2}}} \frac{dy^*}{y^* - y}$$

ce qui permet d'écrire :

$$w_i(y) = -\frac{\Gamma_0}{2b}$$

La traînée induite est alors une fonction de la vitesse induite et de la distribution de circulation d'après l'équation (4.7). La traînée induite s'écrit alors :

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} \rho \frac{\Gamma_0}{2b} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2} dy$$

soit avec le même changement de variable que précédemment,

$$D_i = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2 \quad (4.10)$$

d'où le coefficient de traînée induite,

$$C_{D_i} = \frac{\pi \Gamma_0^2}{4 S U_\infty^2}$$

La distribution de circulation elliptique permet de calculer très facilement les coefficients de traînée induite et de portance. Ces deux quantités sont d'ailleurs reliées, on peut écrire :

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

avec $AR = b^2/S$ l'allongement.

La traînée induite est l'une des composantes de la traînée. On peut la calculer sans prendre en compte la viscosité du fluide, uniquement avec des écoulements potentiels équivalents. L'autre composante est due aux frottements du fluide visqueux sur la paroi, il faut pour la calculer étudier la couche limite au voisinage de l'aile, ce qui fait l'objet du prochain chapitre. De façon générale, le coefficient de traînée s'exprime comme un terme constant C_{D_0} (le coefficient de traînée à portance nulle) et un terme de traînée induite C_{D_i} qui devient non nul dès que la portance est non nulle. Le coefficient de traînée globale s'écrit :

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + k C_L^2$$

avec k une constante. Dans le cas d'une distribution elliptique de circulation, $k = 1/(AR\pi)$.

Cette étude de référence faisant intervenir une distribution elliptique de circulation permet de présenter une application simple de calcul de coefficients et introduit le changement de variable qui sera à la base de la généralisation au cas d'une distribution quelconque de circulation.

3.2 Distribution quelconque

Les équations permettant de calculer les coefficients de portance, Eq.(4.2), et de traînée induite, Eq.(4.8), sont valables pour une distribution de circulation quelconque. Le cas particulier de la distribution de circulation elliptique utilise le changement de variable trigonométrique $y = -b/2 \cos \theta$ avec $\theta \in [0; \pi]$. Nous réutilisons ce changement de variable pour définir une distribution de circulation $\Gamma(\theta)$ quelconque. La distribution n'est pas complètement quelconque puisque, pour des raisons physiques, elle s'annule en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, c'est une fonction périodique impaire qui peut être décomposée en série de Fourier tronquée au rang N :

$$\Gamma(\theta) = 2bU_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \quad (4.11)$$

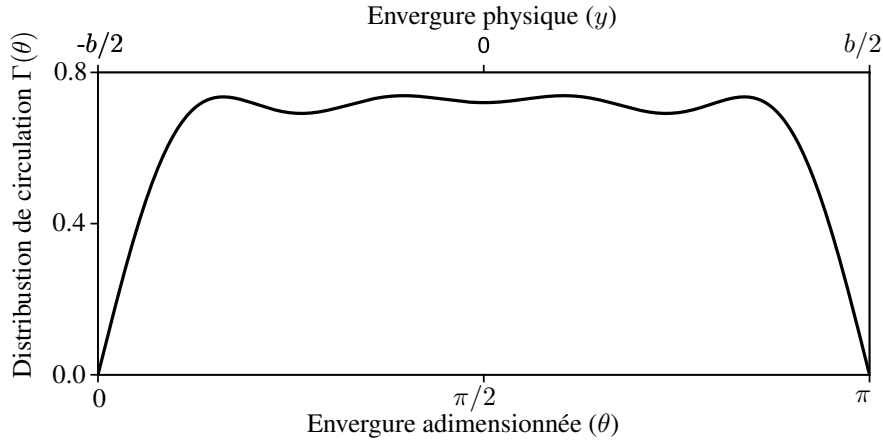


FIGURE 4.10 – Distribution de circulation Γ tracée pour une série de Fourier à quatre coefficients : $A_1 = 0,9$; $A_3 = 0,25$; $A_5 = 0,12$; $A_7 = 0,05$.

De plus, la distribution de portance doit être la même sur chaque aile ce qui signifie que la distribution de circulation doit être symétrique par rapport à l'axe $x = \pi/2$ (i.e. $\Gamma(\theta) = \Gamma(\pi - \theta)$). Cette condition impose que les coefficients pairs de la série de Fourier soient nuls ($A_{2i} = 0$ pour i entier positif ou nul). On ne cherchera donc que les coefficients impairs.

La portance du profil est obtenue par la relation de Kutta-Joukowski,

$$L'(\theta) = \rho U_\infty \Gamma(\theta) = 2b\rho U_\infty^2 \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta)$$

Le premier objectif est de calculer les coefficients A_n de la décomposition en sinus. Le deuxième objectif est d'exprimer les coefficients de portance et de traînée induite en fonction des coefficients A_n .

Pour calculer les coefficients A_n , on s'intéresse au coefficient de portance $c_l(\theta)$ du profil situé en θ . Par définition, celui-ci s'exprime comme :

$$c_l(\theta) = \frac{L'(\theta)}{q_\infty c(\theta)} = \frac{2\Gamma(\theta)}{U_\infty c(\theta)} \quad (4.12)$$

On a montré précédemment que pour les angles d'incidence faibles, le coefficient de portance évolue linéairement avec l'incidence. Par exemple pour un profil sans cambrure, on a $c_l = 2\pi\alpha$. De façon générale, a_0 est le coefficient de proportionnalité entre le coefficient de portance et l'incidence effective :

$$\begin{aligned} c_l(\theta) &= a_0 \alpha_{\text{eff}} + a_1 \\ &= a_0 (\alpha_{\text{eff}} - \alpha_{L'=0}) \\ &= a_0 (\alpha - \alpha_i - \alpha_{L'=0}) \\ c_l(\theta) &= a_0 (\alpha - \alpha_{L'=0}) - a_0 \alpha_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

La première équation est l'expression affine entre le coefficient de portance et l'incidence, le coefficient a_1 est exprimé en fonction de l'incidence $\alpha_{L'=0}$ pour laquelle la portance est nulle.

Ensuite l'équation (4.4) donne le lien entre l'incidence effective α_{eff} et, α l'incidence géométrique et α_i l'incidence induite du profil. Ces incidences dépendent de la position du profil le long de l'aile. Si l'aile est vrillée, l'incidence géométrique change à mesure que l'on parcourt l'aile depuis l'emplanture jusqu'au bout, de même l'incidence induite évolue avec la position le long de l'aile car la vitesse induite $w_i(\theta)$ change.

L'équation (4.5) fournit l'expression de l'incidence induite en fonction de la vitesse induite :

$$\alpha_i(y) = -\frac{w}{U_\infty} = -\frac{1}{4\pi U_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy^*}{y^* - y}$$

$$\alpha_i(\theta) = \frac{\sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad \text{avec } y = -b/2 \cos \theta$$

Les deux expressions (4.12) et (4.13) sont équivalentes d'où :

$$\frac{2\Gamma(\theta)}{U_\infty c(\theta)} = a_0(\alpha - \alpha_{L'=0}) - a_0 \alpha_i$$

soit en développant la circulation et l'incidence induite en sinus :

$$\frac{4b \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta)}{c(\theta)} = a_0(\alpha - \alpha_{L'=0}) - a_0 \frac{\sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta)}{\sin \theta}$$

pour finalement obtenir la relation :

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \left(\frac{4b}{a_0 c(\theta)} \sin \theta + n \right) A_n \sin(n\theta) = \sin \theta (\alpha - \alpha_{L'=0})} \quad (4.14)$$

Cette relation est essentielle car elle permet de calculer les coefficients A_n . Pour la clarté de la lecture, certaines dépendances ont disparu mais les angles d'incidence géométrique α et d'incidence à portance nulle $\alpha_{L'=0}$ dépendent de la position le long de l'aile et donc de l'angle θ . Si l'on souhaite calculer les N premiers coefficients A_n , il faut écrire la relation (4.14) pour N positions θ différentes, positions auxquelles on connaît les deux angles d'incidence. On obtient alors un système linéaire à N équations et N inconnues A_n . Plus on choisira de profils, plus la description de l'aile sera précise et plus on aura de coefficients pour décrire la distribution de portance.

L'un des inconvénients de cette méthode est la nécessité de calculer tous les coefficients A_n , même si l'on a besoin uniquement du premier. Cependant, la résolution d'un système linéaire à une dizaine d'équations n'est pas quelque chose de très coûteux en temps de calcul. De plus, la distribution de circulation est en générale symétrique autour de l'axe $y = 0$ d'une aile. Ceci implique que la fonction de circulation est paire et donc que tous les coefficients pairs de la décomposition de la circulation dans l'équation (4.11) sont nuls. Dans la pratique, on cherche uniquement les coefficients A_n impairs.

Les coefficients de portance et de traînée induite s'obtiennent à partir des A_i .

$$\begin{aligned} L &= \int_{-b/2}^{b/2} \rho U_\infty \Gamma(y) dy \\ &= \frac{b}{2} \int_0^\pi \rho U_\infty \Gamma(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= \rho U_\infty^2 b^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

L'intégration entre 0 et π du produit $(\sin(n\theta) \sin \theta)$ est non nulle uniquement pour $n = 1$. La portance s'écrit alors :

$$L = \rho U_\infty^2 b^2 A_1 \frac{\pi}{2}$$

soit pour le coefficient de portance :

$$C_L = \pi AR A_1 \pi \quad (4.15)$$

Il est remarquable de voir que le coefficient de portance ne dépend que du premier coefficient A_1 . Cependant, le calcul de A_1 sera d'autant plus précis que l'on aura précédemment pris beaucoup de sections. Encore une fois, il faut prendre un nombre N de sections suffisant pour décrire avec précision la géométrie de l'aile même si l'on ne garde que le premier pour le calcul de la portance.

L'effort n'est pas vain car la traînée induite nécessite, elle, l'utilisation de tous les coefficients A_i . En effet, d'après l'équation (4.7) la traînée induite s'exprime comme :

$$\begin{aligned} D_i &= -\rho \int_{-b/2}^{b/2} w_i(y) \Gamma(y) dy \\ &= \rho \int_0^\pi \underbrace{\frac{U_\infty \sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta)}{\sin \theta}}_{-w_i} \underbrace{2b U_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta)}_{\Gamma} \underbrace{\frac{b}{2} \sin \theta d\theta}_{dy} \\ &= \rho b^2 U_\infty^2 \int_0^\pi \underbrace{\left[\sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta) \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right]}_{\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N n A_n^2} d\theta \end{aligned}$$

La traînée induite s'exprime donc en fonction des coefficients A_i comme :

$$D_i = \rho b^2 U_\infty^2 \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N n A_n^2$$

ce qui permet d'écrire le coefficient de traînée induite :

$$C_{D_i} = \pi AR \sum_{n=1}^N n A_n^2 \quad (4.16)$$

Comme précédemment dans le cas de la distribution elliptique de circulation, les coefficients de traînée induite et de portance sont liés, ce que l'on montre en rapprochant les équations (4.15) et (4.16) :

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} \sum_{n=1}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)$$

avec

$$\delta = 3 \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + 5 \left(\frac{A_5}{A_1} \right)^2 + 7 \left(\frac{A_7}{A_1} \right)^2 + \dots$$

Le paramètre δ étant positif ou nul, la traînée induite est minimale lorsque $\delta = 0$ c'est-à-dire lorsque tous les coefficients A_i sont nuls sauf le premier. Ce cas est uniquement réalisé lorsque la distribution de circulation est elliptique. Le paramètre δ est donc un paramètre de correction de la traînée induite pour les ailes non-elliptiques.

La méthode de la ligne portance de Prandtl fournit des résultats extrêmement satisfaisants aussi bien pour la quantification de la traînée que pour la portance. On atteint ici la limite de ce que les outils analytiques permettent de calculer. Pour calculer l'aérodynamique d'un avion entier par exemple, des méthodes numériques sont utilisées pour pouvoir prendre en compte des géométries complexes. Cependant, la philosophie des méthodes a très peu varié depuis les années 1950, l'idée est toujours de distribuer des sources et des tourbillons sur des lignes ou des surfaces et choisir les intensités afin de satisfaire les conditions aux limites, c'est-à-dire une vitesse normale aux parois nulle. On présente dans la dernière section les grandes lignes de deux de ces méthodes.

4 Méthodes globales de calcul aérodynamique

La théorie de la ligne portante fournit des résultats très satisfaisants pour le calcul de la traînée induite et de la portance d'ailes d'envergure finie. Certaines restrictions représentent cependant un véritable handicap pour l'utilisation de cette méthode. Il faut, entre autre, que l'aile ait une flèche nulle, ceci afin que l'écoulement puisse être considéré comme la superposition d'écoulements parallèles aux différentes sections. L'aile doit également être mince car la portance est uniquement modélisée par une distribution de tourbillons liés le long de la corde. Afin que les effets tridimensionnels soient limités, il faut aussi que l'allongement soit suffisamment grand. La valeur de 4 est communément admise pour indiquer l'allongement minimal nécessaire pour utiliser la théorie de la ligne portante. Enfin l'écoulement doit être incompressible.

Afin de calculer l'aérodynamique de géométries plus compliquées dans des conditions plus exigeantes, des méthodes numériques sont nécessaires. Quelques notions sur deux de ces méthodes sont présentées ici.

4.1 Méthode des panneaux

Comme son nom l'indique, cette méthode est directement héritée de la méthode des panneaux pour les profils portants et non-portants. En deux dimensions, la surface du corps étudié est divisée en segments de différentes longueurs. Chaque segment abrite une singularité (source, puits, tourbillon...) dont les intensités sont les inconnues du problème. L'écoulement potentiel satisfait à l'équation de Laplace, $\Delta\phi = 0$, associée à deux conditions aux limites. La première est

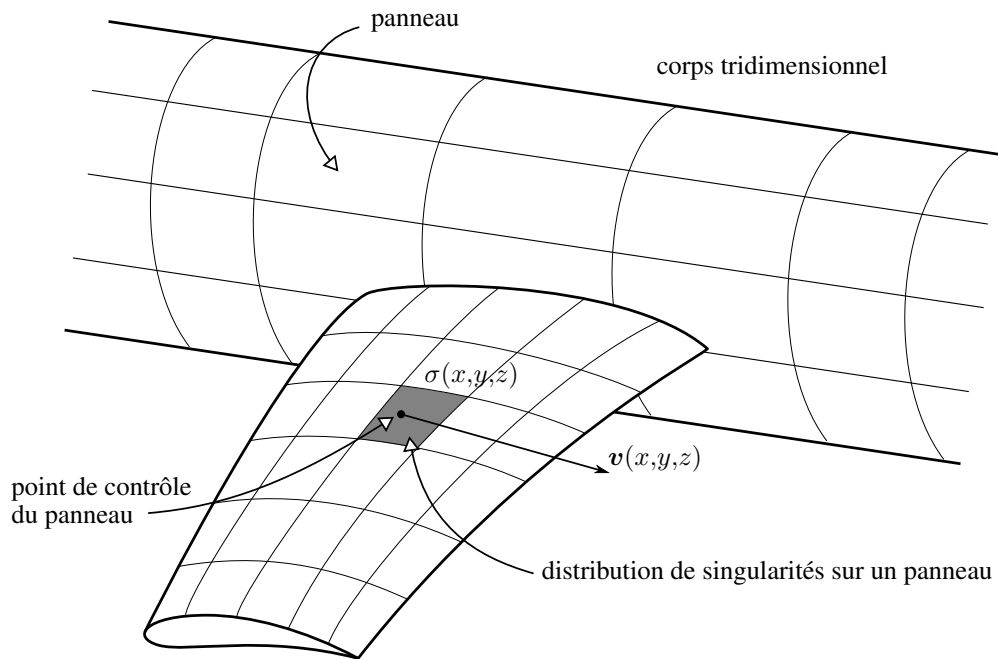


FIGURE 4.11 – La surface du corps immergé est divisée en *panneaux*. Chaque panneau possède une distribution de singularités, qui impose un champ de vitesse dans l'ensemble du domaine, et un point de contrôle, où la résultante des vitesses induites par tous les panneaux doit être tangente à la surface.

la condition de l'écoulement à l'infini qui est celle de l'écoulement uniforme. La deuxième est la condition à la paroi du corps. Les intensités des singularités sont calculées afin que la vitesse au niveau des points de contrôle de chaque panneau, obtenue par sommation de la contribution de tous les panneaux en ce point, respecte la condition limite.

Dans le cas d'un corps tridimensionnel (aile, avion...), les segments sont remplacés par des panneaux qui viennent recouvrir l'ensemble de la surface. La paroi de l'objet étudié est décomposée en une série de quadrilatères auxquels sont attachés une ou plusieurs singularités et un point de contrôle. Le potentiel de l'écoulement en chaque point de contrôle est la somme des contributions de tous les panneaux et doit satisfaire aux conditions aux limites associées à l'équation de Laplace pour le champ potentiel.

Cette technique avancée date de la fin des années 1970 et a permis, entre autre, de calculer les adaptations aérodynamiques nécessaire au Boeing 747 pour transporter les navettes spatiales américaines sur le dessus de son fuselage. Discrétiser une telle géométrie requiert un nombre très important de panneaux et donc autant de points de contrôle et de singularités à traiter.

La méthode se décompose en plusieurs étapes :

1. la géométrie est divisée en plusieurs panneaux,
2. sur chaque panneau sont placés une ou plusieurs singularités et un point de contrôle,
3. les conditions à la paroi sont définies pour chaque panneau,
4. on calcule les intensités des singularités qui permettent de satisfaire aux conditions aux limites,
5. on déduit le champ potentiel puis les champs de vitesse et pression correspondants.

Cette théorie se comprend relativement bien et semble relativement simple à mettre en oeuvre pour peu que l'on apporte un soin particulier au référencement des panneaux et des singularités. Ensuite les équations à résoudre sont linéaires. Cependant, le problème n'est pas uniquement mathématique et il doit satisfaire à certaines lois physiques.

Dans un premier temps, il faut choisir les singularités à distribuer. Plusieurs jeux de singularités peuvent être utilisés pour finalement obtenir le même écoulement. La différence entre une distribution ou l'autre se fait essentiellement sur des critères de méthodes numériques. Il est primordial de pouvoir coder simplement et efficacement les méthodes de résolution avec des outils numériques précis. Le choix de la distribution de singularités doit donc permettre de modéliser le comportement de l'objet étudié mais aussi pouvoir être résolue numériquement à un coût de calcul raisonnable et avec une grande précision. La distribution dépend aussi de la géométrie choisie. Pour des profils minces, on préfère utiliser des tourbillons qui ont une formulation concise tandis que les sources sont utilisées dans le cas de géométrie plus volumiques. Enfin, il est impératif que la distribution respecte les théorèmes de Helmholtz dans le cas de lignes tourbillon et vérifie la condition de Kutta au bord de fuite de l'aile. La méthode des panneaux pour un profil portant propose plusieurs solutions pour résoudre ce problème et s'assurer que la physique de l'écoulement soit respectée. Toutes ces contraintes sont autant de choix que doit effectuer l'utilisateur de la méthode qui demande donc un véritable savoir-faire informatique et aérodynamique.

Enfin, plusieurs stratégies peuvent être retenues pour définir les conditions aux limites du problème. L'équation de Laplace est correctement posée si elle est associée à des conditions aux limites du domaine. À la paroi, plusieurs solutions sont possibles :

1. on fixe la valeur ϕ du potentiel à la paroi, c'est la condition de Dirichlet,
2. on fixe la valeur de la normale de ϕ ($\partial\phi/\partial n$) à la paroi, c'est la condition de Neumann.

Derrière ce choix se cachent deux objectifs différents : la conception ou la détermination. Soit la géométrie du corps est figée et l'on veut déterminer *a posteriori* la nature de l'écoulement, alors on choisira d'imposer une condition de Neumann en imposant le flux à la paroi. Soit l'écoulement, et en particulier la distribution de pression, est connu et l'on cherche à concevoir la géométrie de l'objet qui va permettre de créer cet écoulement, dans ce cas c'est une condition de Dirichlet qui est utilisée. Dans la pratique, la frontière entre les phases de conception et de détermination ne sont pas aussi claires et les propriétés aérodynamiques d'une structure volante sont déterminées par un processus itératif au cours duquel des perturbations sont imposées alternativement à la géométrie et à l'écoulement, afin de trouver l'optimum entre une géométrie que l'on puisse ensuite fabriquer et un écoulement aérodynamiquement performant.

Une fois ces contraintes maîtrisées, la méthode des panneaux fournit des résultats remarquables qui permettent de concevoir avec une grande précision des objets volants à la géométrie complexe.

4.2 Méthode du réseau de tourbillons

La méthode du réseau de tourbillons permet de calculer les propriétés aérodynamiques d'une aile de géométrie quelconque et en particulier les voilures possédant une flèche non nulle. Elle repose sur la décomposition de la paroi en N trapèzes munis chacun d'une ligne tourbillon élémentaire en forme de fer à cheval. Chaque ligne tourbillon possède sa propre intensité γ_i

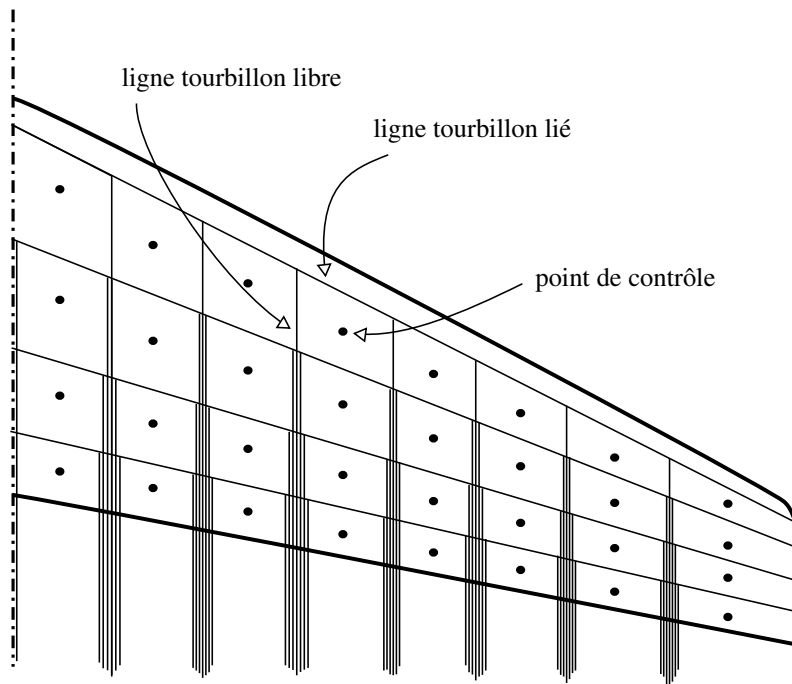


FIGURE 4.12 – La surface portante est divisée en cellules définies par un point de contrôle et une ligne tourbillon en forme de fer à cheval. Chaque ligne possède une distribution de circulation qui induit une vitesse dans tout l'espace.

qui est calculée afin de satisfaire aux conditions aux limites de l'équation de Laplace. Pour chaque trapèze, on identifie un point de contrôle auquel est appliquée la condition limite de la fonction potentielle. Dans la majeure partie des cas, on impose que la vitesse de l'écoulement soit tangente à la paroi au point de contrôle. Cette vitesse est calculée linéairement, elle est donc la somme de l'écoulement uniforme et de la contribution de toutes les lignes tourbillon qui ont été positionnées sur la voilure. Cette méthode est un mélange de la théorie de la ligne portante et de la méthode des panneaux : la voilure est décomposée en éléments plus petits similaires aux panneaux, et une ligne tourbillon est associée à chaque élément.

Les étapes de la méthode sont les suivantes :

1. la voilure est découpée en éléments trapézoïdaux,
2. un point de contrôle est défini pour chaque trapèze,
3. la ligne tourbillon est dessinée pour chaque trapèze,
4. on impose la condition à la paroi au point de contrôle de chaque élément,
5. on calcule la vitesse en chaque point de contrôle pour trouver les distributions linéiques de circulation,
6. les champs de vitesse et de pression sont calculés à partir du champ potentiel.

Si la démarche est proche des techniques mises en place pour la méthode des panneaux et la ligne portante, certaines difficultés apparaissent.

Premièrement, les bords d'attaque et de fuite d'une aile ayant une flèche positive ne sont pas parallèles. L'axe des tourbillons liés ne peut donc pas être parallèle aux deux. On a montré que

pour un profil non cambré en incidence, la portance s'applique au quart de la corde. La cambrure de l'aile fait varier légèrement cette valeur qui reste cependant une très bonne approximation. On choisit donc ici de placer la ligne des tourbillons parallèle à la ligne située au quart de la corde. C'est le lieu du centre de poussée, c'est donc l'endroit qui permet de représenter au mieux les effets de la portance.

Deuxièmement, les tourbillons libres qui fuient le quadrilatère par l'arrière doivent être tangents à la cambrure moyenne de l'élément. Si l'on applique cette loi à tous les éléments, les lignes tourbillons seront dispersées dans des plans disjoints. On adopte donc la règle qui consiste à faire courir la ligne des tourbillons libres parallèlement à l'axe de l'avion afin que tous les tourbillons soient dans le même plan. Ainsi, ces tourbillons libres ne sont pas nécessairement répartis le long de la cambrure moyenne ou de la corde, mais le long d'un axe qui localement peut ne rien représenter de physique.

Troisièmement, il faut se donner un critère pour définir la position du point de contrôle. Ce point est important car c'est le lieu où est imposée la condition limite à vérifier dans l'équation de Laplace. C'est en ce point que les contributions de tous les éléments sont sommées. Il est matériellement impossible de définir une condition limite pour tous les points de l'élément quadrilatère : il faut un unique point. Ce point est situé aux trois quarts du bord de l'élément dans la direction de l'écoulement et à la moitié dans le sens de l'envergure. Ces choix ont été fait en montrant que c'est à cet endroit que l'incidence de l'élément est la plus représentative de l'incidence moyenne de l'élément.

Enfin, il faut identifier le vecteur normal à l'élément trapézoïdal. Cette surface peut avoir une double courbure suivant les axes x et y . Il est donc nécessaire de faire intervenir les angles de cambrures moyennes dans chacune des directions auxquelles on appliquera les hypothèses des angles faibles afin de linéariser le problème. La mise en équation est donc légèrement plus lourde que pour la théorie de la ligne portante.

5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire la notion essentielle de traînée induite dans le problème des écoulement autour d'ailes d'envergure finie. Un ensemble d'outils a été présenté depuis la théorie de la ligne portante des années 1950 jusqu'à la méthode des panneaux qui fait encore aujourd'hui l'objet d'étude de recherche afin d'améliorer sa robustesse et sa précision tout en étant applicable à des cas extrêmement complexes où les effets de compressibilité et les chocs interviennent. L'ensemble de ces méthodes analytiques ou numériques de bas ordre sont très pertinentes et ont l'énorme avantage d'être peu coûteuses en ressources informatiques ce qui en fait des outils de dimensionnement très efficaces. Elles sont particulièrement adaptées à des processus de dimensionnement itératifs où la géométrie d'une aile ou d'un avion est affinée et améliorée par essais et erreurs. Une fois la géométrie finale quasiment arrêtée, il est possible de réaliser des calculs beaucoup plus coûteux où l'écoulement complet est calculé par résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Ces calculs d'une grande précision permettent d'accéder aux grandeurs moyennes et dynamiques de l'écoulement au voisinage de l'objet étudié.

Exercice 4.1

On considère un avion pesant 7,5 tonnes, avec une voilure elliptique dont l'envergure mesure 15,50 m. L'avion évolue avec une vitesse de 90 m/s à une altitude relativement basse.

1. Calculer la traînée induite.
2. Calculer la circulation au niveau de la section située à la moitié des ailes.

Exercice 4.2

On cherche à comparer l'influence de la distribution de circulation sur la traînée induite, à portance égale. On considère la distribution de portance parabolique donnée par la relation :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0^p \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]$$

avec b l'envergure de la voilure. La distribution de circulation elliptique est donnée par l'expression :

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2}$$

1. En considérant que une même portance pour les deux voilures définies précédemment, donner la relation entre les constante Γ_0 et Γ_0^p .
2. Établir la relation entre les vitesses induites et les traînées induites des deux distributions.

Chapitre V

Couche limite laminaire

Les chapitres précédents ont montré comment obtenir le champ de vitesse et les forces créées sur une surface profilée dans le cas d'un écoulement idéal, c'est-à-dire un écoulement où la viscosité du fluide peut-être négligée. Au voisinage de la paroi (quelques millimètres au-dessus de celle-ci), cette approximation n'est plus valable car le concept de fluide idéal ne permet pas de calculer la traînée de frottement exercée par un fluide s'écoulant le long d'une paroi. Un fluide réel adhère à la paroi, une zone tampon apparaît alors dans laquelle la vitesse passe rapidement de zéro à la vitesse de l'écoulement externe. Cette zone est appelée la *couche limite*, les effets de viscosité y jouent un rôle essentiel. Ce chapitre constitue une introduction au concept de couche limite, l'objectif est de comprendre les mécanismes physiques qui pilotent la géométrie de cette zone et de calculer la force créée par le fluide le long d'une paroi profilée.

Dans un premier temps, on montre pourquoi la couche limite joue un rôle essentiel. On s'intéresse en particulier à la viscosité et son influence sur l'écoulement d'un fluide. La description de la physique de l'écoulement permet de faire le lien avec les équations et de simplifier les équations de Navier-Stokes pour obtenir les équations de la couche limite qui décrivent l'évolution dans la zone tampon du champ de vitesse et de la pression pour une surface et un écoulement externe donnés.

Dans un second temps, on s'intéresse aux méthodes de résolutions qui permettent de calculer les grandeurs caractéristiques de la couche limite et les forces de frottement. Ces méthodes se divisent en deux catégories : les méthodes exactes et les méthodes approchées. Les méthodes exactes fournissent des solutions analytiques et précises mais sont réservées à des problèmes où l'écoulement extérieur est simple. Pour des problèmes plus compliqués, où la géométrie de l'obstacle est variable et où les gradients de pression interviennent, les méthodes approchées sont plus robustes mais moins précises. Ces deux situations sont détaillées en fournissant des outils pratiques permettant de résoudre des cas concrets.

1 Effets de la viscosité d'un fluide

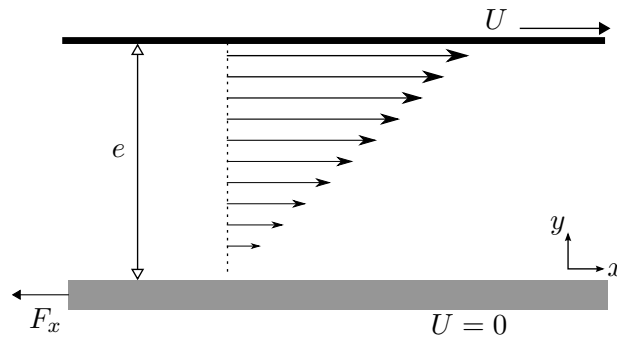


FIGURE 5.1 – Écoulement de Couette : le fluide est mis en mouvement entre deux plaques, l'une étant fixe (bas), l'autre en translation selon l'axe x à la vitesse U . Le fluide adhère aux parois, un gradient de vitesse normal à la paroi (selon la direction z) s'établit et permet de quantifier la viscosité du fluide.

1.1 Définition de la viscosité

La viscosité d'un fluide peut facilement s'appréhender. De façon intuitive, on perçoit que l'huile est un fluide plus visqueux que l'eau, sa viscosité est supérieure à celle de l'eau. Un fluide visqueux a tendance à adhérer aux parois du récipient qui le contient, il est plus difficile à mettre en mouvement. La viscosité d'un fluide peut se mesurer expérimentalement de façon très simple grâce à un écoulement de Couette^{*}. Cet écoulement est créé en emprisonnant le fluide entre deux parois parallèles (Figure 5.1). La paroi supérieure est en translation à la vitesse U selon l'axe x . On exerce alors une force $\mathbf{F} = F_x \mathbf{x}$ pour maintenir fixe la paroi du bas. Cette force rapportée à la surface S de la plaque est directement proportionnelle à la vitesse U divisée par l'écartement e entre les plaques :

$$\frac{F_x}{S} \propto \frac{U}{e} \quad (5.1)$$

Ce résultat expérimental se comprend bien. Plus la plaque supérieure va vite, plus la force à exercer pour retenir la plaque inférieure est grande, de même si l'on rapproche les plaques. Le terme de gauche est une force divisée par une surface, il est donc homogène à une pression. La pression est une force normale à la paroi par unité de surface, ici la force est tangentielle à la paroi. On parle alors de contrainte que l'on note τ . Le terme de droite est une vitesse rapportée à une distance, c'est le gradient de vitesse du/dy que l'on a déterminé au chapitre 1 dans le cas de ce même écoulement de Couette. L'expérience montre donc que la contrainte τ dans le fluide est proportionnelle au gradient de vitesse, ce qui permet d'écrire

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (5.2)$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. On voit donc que :

1. la viscosité est une propriété intrinsèque du fluide,
2. l'effet de la viscosité se manifeste lorsque le fluide est mis en mouvement.

*. Maurice Couette (1858-1943) est un scientifique français ayant étudié les propriétés des fluides en mouvement. Voir Piau et Piau, *Rhéologie*, Vol. 8, 1-4 (2005)

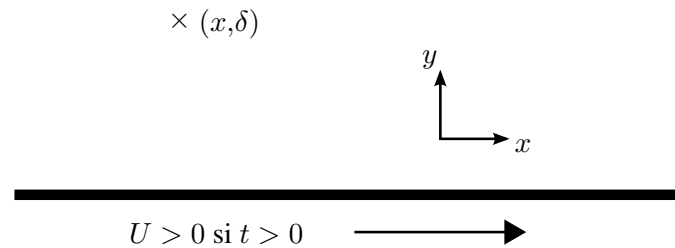


FIGURE 5.2 – Problème de Stokes : le fluide est initialement au repos puis progressivement mis en mouvement par la plaque située au-dessous. Combien de temps faut-il pour que le fluide situé à la distance δ de la plaque soit mis en mouvement ?

La viscosité dynamique s'exprime en Poiseuille[†] (PI), une analyse dimensionnelle de l'équation (5.2) montre que $1 \text{ PI} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Les équations de la mécanique des fluides font couramment apparaître le rapport μ/ρ , ce rapport est noté ν et appelé *viscosité cinématique*. On montre facilement que la viscosité cinématique s'exprime en m^2/s .

1.2 Problème de Stokes

L'expérience de Couette permet donc de mesurer la viscosité d'un fluide. Pour cela, il faut atteindre un régime stationnaire où le profil de vitesse est établi entre les plaques. En partant d'une situation initiale où le fluide est au repos, il faut un certain temps t_v pour que la viscosité se manifeste, et que la force d'entraînement de la plaque et la force créée par le fluide sur les parois s'équilibrent. C'est le physicien Stokes qui s'est intéressé à cette phase de transition en imaginant un problème qui porte maintenant son nom. La figure 5.2 illustre ce problème. Le fluide est initialement au repos sur une plaque immobile. À l'instant $t = 0$, la plaque est instantanément mise en mouvement à la vitesse $\mathbf{U} = U_p \mathbf{x}$. Le fluide en contact avec la plaque adhère à celle-ci et se retrouve donc entraîné à la vitesse U_p puis, de proche en proche, va transmettre le mouvement au fluide situé au-dessus. Le mouvement se propage de bas en haut avec un certain temps de retard. Si l'on néglige la viscosité du fluide, celui-ci n'adhère plus à la paroi et ne peut pas transmettre son mouvement. C'est la viscosité du fluide qui permet de transmettre la quantité de mouvement de la plaque à l'ensemble du domaine. La viscosité caractérise la capacité du fluide à transmettre de la quantité de mouvement. On peut faire le parallèle avec les transferts thermiques où la diffusivité thermique d'un milieu quantifie la capacité de ce milieu à transmettre la chaleur. Ce transport de quantité de mouvement n'étant pas instantané, il y a un temps caractéristique t_v associé à la viscosité du fluide. Pour déterminer ce temps, il faut revenir aux équations de Navier-Stokes obtenues au chapitre 1.

Pour simplifier le problème de Stokes, on peut considérer que le fluide est incompressible. L'équation de continuité (1.10) s'écrit alors $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ où $\mathbf{u} = (u, v, w)$ est le vecteur vitesse d'une particule fluide située au point (x, y, z) . Le problème de Stokes est bidimensionnel ($\partial/\partial z = 0$) et invariant par translation le long de l'axe x ($\partial/\partial x = 0$) donc l'équation de continuité s'écrit finalement $\partial v/\partial y = 0$ d'où $v = \text{cste} = 0$ car le fluide est initialement au repos.

[†]. Unité donnée en l'honneur du physicien et médecin français Jean-Leonard-Marie Poiseuille (1797-1869) qui s'intéressa aux écoulements dans les tubes pour comprendre la circulation sanguine.

Pour obtenir l'expression du champ de vitesse dans l'ensemble du domaine, on écrit l'équation de conservation de quantité de mouvement projeté sur l'axe x (équation 1.16) en considérant que le problème est isobare, bidimensionnel, invariant par translation le long de l'axe x et le fluide incompressible :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

L'équation de continuité a montré que $v = 0$, et τ est donné par l'équation (5.2), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Cette équation différentielle possède une solution analytique. On montre dans les lignes qui suivent comment résoudre ce type d'équation car la méthode proposée s'appuie sur les propriétés d'auto-similarité de l'écoulement, propriété que l'on retrouve dans les couches limites.

Un changement de variable est nécessaire pour prendre en compte cette propriété de l'écoulement. On pose :

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad \text{et} \quad F(\eta) = \frac{u}{U_p}$$

On note F' la dérivée de F par rapport à η . L'équation 5.3 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F' \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \nu F'' \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ -\frac{\eta}{2t} F' &= \frac{1}{4t} F'' \\ F'' + 2\eta F' &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation différentielle possède une solution exacte qui s'écrit :

$$F = \frac{u(\eta)}{U_p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

Cette fonction est tracée Figure 5.3. Pour un temps $t > 0$, le fluide en contact avec la paroi ($\eta = 0$) possède la même vitesse U_p que la plaque. Plus on s'éloigne de la plaque, plus cette vitesse diminue. Le fluide est considéré à l'arrêt lorsque le rapport u/U_p est inférieur à 1%, cette limite est atteinte pour $\eta_{1\%} = 1,82$. On en déduit la distance physique associée :

$$y_{1\%}(t) = 3,64\sqrt{\nu t} \quad (5.4)$$

Cette expression signifie qu'au temps t , le fluide situé à la hauteur $y > y_{1\%}(t)$ est immobile, autrement dit il n'a pas encore "vu" que la plaque s'était mise en mouvement. C'est la viscosité qui transporte la quantité de mouvement dans le fluide. Il s'agit d'une diffusion car le transport n'est pas instantané, il y a un délai entre le moment où la plaque est mise en mouvement et le moment où le fluide est entraîné par ce mouvement. La figure 5.4 montre le profil de vitesse établi dans le fluide à différents instants après la mise en mouvement de la plaque. L'information

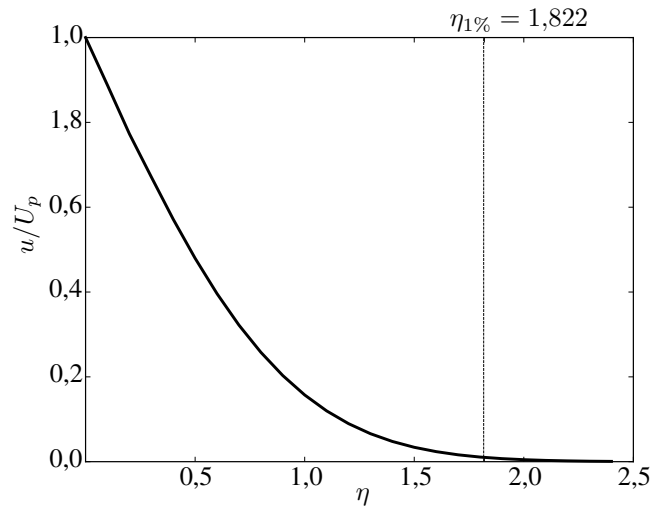


FIGURE 5.3 – Évolution de la vitesse adimensionnée du fluide en fonction du paramètre d'auto-similarité $\eta = y/2\sqrt{\nu t}$.

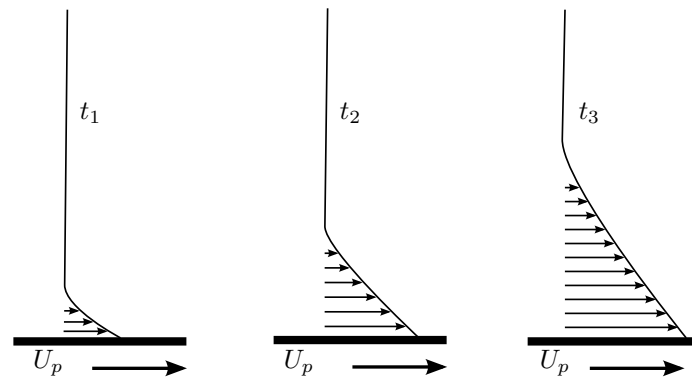


FIGURE 5.4 – Profils de vitesse établis dans le fluide à différents instants ($t_1 < t_2 < t_3$) après la mise en mouvement d'une plaque située à la base.

de vitesse se propage pour déplacer de façon progressive l'ensemble du fluide. On peut définir une vitesse de diffusion v_d en dérivant la position $y_{1\%}(t)$:

$$v_d = \frac{dy_{1\%}}{dt} = 3,64\sqrt{\frac{\nu}{t}} \simeq \left(\frac{\nu}{t}\right)^{1/2}$$

La vitesse de diffusion de la quantité de mouvement est donc proportionnelle à la racine de la viscosité. Plus un fluide est visqueux plus la quantité de mouvement se déplace vite dans le fluide. On voit ici que cette information joue un rôle essentiel lorsque l'on étudie le comportement d'un fluide au voisinage d'une paroi. Plus le fluide est visqueux, plus il va rapidement être sensible à la présence de la paroi. Inversement, un fluide faiblement visqueux va réagir après un long délai à la présence d'une paroi, à la limite, un fluide idéal ne *s'apercevra* jamais de la présence d'une paroi dans son voisinage. Dès lors, deux vitesses rentrent en compétition : la vitesse convective (la vitesse avec laquelle le fluide avance) et la vitesse de propagation de

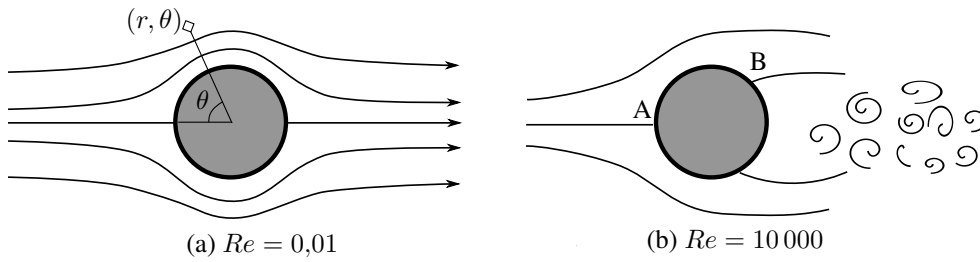


FIGURE 5.5 – Écoulements d'un fluide réel autour d'une sphère pour un nombre de Reynolds égale à 0,01 (a) et 10 000 (b). Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le fluide décolle à partir d'un certain angle.

la quantité de mouvement. Cette compétition caractérise la couche limite qui se forme dans le fluide au voisinage d'une paroi.

1.3 Le paradoxe de d'Alembert

Dans certaines conditions d'écoulement, la viscosité ne se manifeste pas. On parle d'écoulement idéal régi par les équations d'Euler (équation [1.15](#)). Dans les chapitres 3 et 4, les forces de portance et traînée induite ont pu être explicitées sans prendre en compte la viscosité du fluide. Cette facilité connaît pourtant des limites comme l'illustre le paradoxe de d'Alembert. Ce paradoxe, mis en évidence par le fameux scientifique français, montre qu'en l'absence de viscosité, la force exercée sur une sphère plongée dans un écoulement fluide est nulle. L'expérience montre naturellement qu'une sphère plongée dans un écoulement subit une force entraînante non-nulle, mais l'expérience montre aussi que pour certains nombres de Reynolds, l'écoulement est incapable d'épouser parfaitement la forme de la sphère. La figure [5.5](#) schématise l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle circulaire pour deux nombres de Reynolds. Le point d'arrêt A est le point où la vitesse du fluide s'annule, le fluide contourne l'objet par le bas et par le haut. Pour des faibles nombres de Reynolds (figure [5.5\(a\)](#)), l'écoulement épouse la forme de l'objet mais dès que le nombre de Reynolds augmente, le fluide décolle à partir d'un certain point le long de l'objet (B). Ce phénomène de décollement ne peut pas être mis en évidence sans prendre en compte la viscosité du fluide.

Pour illustrer le paradoxe présenté ci-dessus, on considère un objet circulaire de rayon R plongé dans un écoulement fluide de vitesse Ux . La surface de l'obstacle est notée $\mathcal{C}$, on repère la position sur la surface de l'objet par l'abscisse curviligne s associé à l'angle θ du repère cylindrique (figure [5.5](#)). Tout point de l'espace est identifié par son angle θ et sa distance r au centre de l'obstacle. La force exercée par le fluide sur l'obstacle est alors l'intégrale de la distribution de pression $p(s)$ le long de la surface $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{F} = - \int_{\mathcal{C}} p(s) \mathbf{n} ds \quad (5.5)$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ est le vecteur normal à la surface de l'obstacle. Il faut donc calculer la distribution de pression $p(s)$ pour connaître la force $\mathbf{F}$. Le vecteur vitesse en un point (r, θ) du domaine se décompose en deux composantes :

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$$

On considère que l'écoulement est irrotationnel. Le vecteur vitesse peut alors s'écrire à l'aide d'une fonction potentielle φ : $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$. De plus, on considère le régime établi, c'est-à-dire que l'écoulement est stationnaire. L'équation de conservation de la masse (équation 1.10) s'écrit alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = \nabla^2 \varphi$$

Le potentiel φ satisfait donc à l'équation de Laplace, soit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.6)$$

Cette équation s'accompagne de deux conditions aux limites :

(1) à l'infini, l'écoulement est horizontal et non perturbé : $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi = -U x = -U r \cos \theta$

(2) sur l'obstacle, la vitesse radiale est nulle : $v_r(R, \theta) = (\partial \varphi / \partial r)_{r=R} = 0$

Pour satisfaire la condition limite (2), on choisit des solutions de la forme $\varphi(r, \theta) = f(r) \cos \theta$.

L'équation (5.6) s'écrit alors :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{f}{r^2} = 0$$

Cette équation possède des solutions de la forme $f(r) = \alpha r + \beta/r$, α et β étant déterminés par les conditions aux limites : $\alpha = -U$ et $\beta = -UR^2$. Ainsi la fonction potentielle s'écrit :

$$\varphi(r, \theta) = -U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad (5.7)$$

Le champ de vitesse autour de l'obstacle s'écrit donc :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_r = -\partial \varphi / \partial r = U(1 - R^2/r^2) \cos \theta & \text{soit} & v_r(r = R) = 0 \\ v_\theta = -\frac{1}{r} \partial \varphi / \partial \theta = -U(1 + R^2/r^2) \sin \theta & \text{soit} & v_\theta(r = R) = -2U \sin \theta \end{pmatrix}$$

L'écoulement étant irrotationnel, le théorème de Bernoulli peut s'appliquer entre un point situé à l'infini en amont de l'obstacle et un point de l'obstacle :

$$\begin{aligned} \frac{p(R, \theta)}{\rho} + \frac{v(R, \theta)^2}{2} &= \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} \\ p(R, \theta) &= p_\infty + \frac{\rho}{2}(U^2 - v(R, \theta)^2) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4 \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Cette dernière équation fournit la distribution de pression le long de la surface de l'obstacle. La figure 5.6 présente la distribution le long du cylindre en fonction de l'angle θ . En injectant cette expression dans l'équation (5.5), on obtient la force exercée par le fluide sur l'obstacle :

$$\mathbf{F} = - \left(R \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta \right) \mathbf{x} - \left(R \int_0^{2\pi} p \sin \theta d\theta \right) \mathbf{y} = 0$$

On a montré ici le paradoxe de d'Alembert avec l'hypothèse d'irrotationalité de l'écoulement pour écrire le champ de vitesse sous la forme d'un gradient de potentiel et pour utiliser le théorème de Bernoulli. On obtient une force nulle exercée sur l'obstacle ce qui n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux. Ne pas considérer la viscosité du fluide équivaut à considérer que le fluide glisse sur la paroi ; il n'y a pas de frottement du fluide et donc pas de traînée. Pour comprendre et modéliser ce frottement à la paroi, il faut s'intéresser de près à la physique de l'écoulement dans cette région. Cette zone est appelée la couche limite, c'est une zone de forts cisaillements induits par des gradients de vitesse intenses.

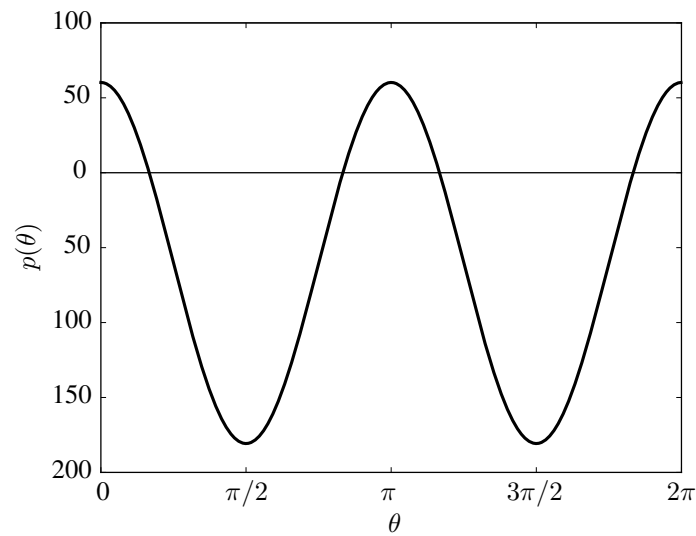


FIGURE 5.6 – Distribution de pression à la paroi le long d'un obstacle circulaire plongé dans un écoulement si l'on ne considère pas la viscosité du fluide. La force est obtenue en intégrant $p(\theta) \cos \theta$ entre 0 et 2π .

2 Concept de couche limite

Une couche limite est une zone de transition entre deux régions de différentes vitesses. Une couche limite s'établit donc entre une paroi où le fluide est à l'arrêt, et un écoulement extérieur à grande vitesse. La *couche limite* est une zone de l'écoulement où s'opèrent les transferts de quantité de mouvement (notions de force de frottement et de traînée), les transferts de chaleur (échauffement ou refroidissement de paroi) et les transferts de masse (évaporation à la surface...). Cette zone peut être considérée comme mince par rapport à la distance totale parcourue par l'écoulement (dimensions de l'obstacle à contourner, longueur d'un jet débouchant...). Une couche limite apparaît lorsque l'écoulement est fortement cisailé dû à la présence de forts gradients transverses. L'étude de la couche limite permet notamment de calculer les forces de frottement subies par une paroi solide (et donc la puissance nécessaire pour mettre en mouvement un avion, une fusée, un navire...) et les échanges de chaleur (échauffement cinétique d'un avion, d'un engin spatial...).

Une application fondamentale de plus grande échelle est l'étude de la couche limite atmosphérique. La présence d'une atmosphère autour de la Terre en rotation crée une couche limite turbulente dont l'épaisseur s'étend sur plusieurs kilomètres (couche d'Ekman). De manière générale, les dynamiques atmosphérique et océanique sont riches en couches limites car les fluides géophysiques sont faiblement visqueux (loin des bords du domaine, les effets visqueux sont faibles devant ceux des autres forces). On retrouve également des couches limites près des côtes. Les forts courants côtiers tels que le *Gulf Stream* près de la côte américaine sont des manifestations de ces couches limites.

Différentes configurations d'écoulements peuvent donner naissance à une couche limite. On peut rassembler ces configurations en trois groupes (figure 5.7) :

1. les couches limites pariétales. Ces couches limites se développent au voisinage d'une

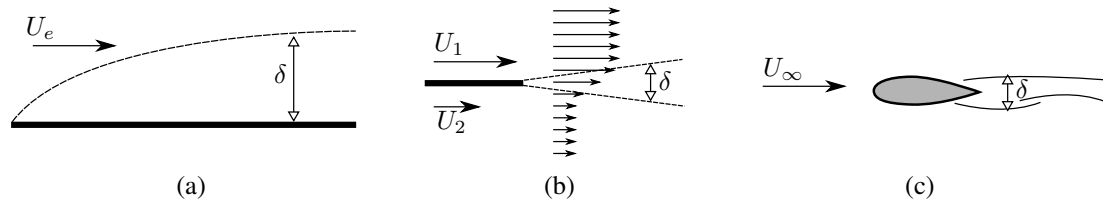


FIGURE 5.7 – Exemples de configurations répondant au concept de couche limite : la zone de fort cisaillement δ est très petite devant les dimensions du système. (a) couche limite pariétale, (b) zone de mélange, (c) sillage derrière un obstacle.

paroi plongée dans un écoulement fluide. Un fluide réel adhère à la paroi de l'obstacle. C'est dans l'épaisseur de la couche limite qu'est réalisée la transition entre une vitesse nulle et la vitesse de l'écoulement. Les propriétés physique et géométrique de la couche limite résultent alors de la compétition entre les forces de viscosité, les forces de pression et les forces cinétiques,

2. les zones de mélange. Une zone de mélange est formée par la rencontre de deux fluides de vitesses différentes. C'est l'exemple d'un jet débouchant dans un milieu au repos ou deux courants qui se rencontrent à l'extrémité d'une plaque de séparation (ex : bord de fuite d'une aile),
3. les sillages. Dans ce cas, le cisaillement du fluide est créé par la différence de vitesse. Le gradient est initialement important, puis le profil s'uniformise supprimant tout gradient transverse.

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse uniquement aux couches limites pariétales sachant que les approximations et les méthodes présentées se généralisent aisément aux zones de mélange et aux sillages.

2.1 Description d'une couche limite

La figure 5.5 montre que le comportement du fluide au voisinage d'un obstacle dépend du nombre de Reynolds. Ce nombre sans dimension quantifie l'importance des effets d'inertie sur les effets visqueux : plus le nombre de Reynolds est grand, plus les effets d'inertie dominent les effets de viscosité. On pourrait donc penser que pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, les effets de viscosité sont négligeables devant les effets d'inertie. Pourtant, sur la figure 5.5, on voit que c'est à faible nombre de Reynolds que le fluide épouse le mieux la forme de l'obstacle et se rapproche du comportement d'un fluide idéal. À grand nombre de Reynolds, les effets de viscosité se manifestent fortement au point de faire décoller le fluide à l'arrière de l'obstacle. On est donc face au paradoxe suivant : plus le nombre de Reynolds est grand, plus les effets de la viscosité sont faibles devant les effets d'inertie et plus le fluide s'éloigne du comportement d'un fluide idéal.

Pour lever cette ambiguïté, il faut faire appel au père du concept de couche limite :

"Pour prendre en compte correctement les phénomènes physiques [...] on fait l'hypothèse que le fluide adhère à la paroi [...]. Si la viscosité est faible [...], alors la vitesse prendra sa valeur normale très près de la paroi. Dans la couche de transition très mince, malgré la faible viscosité, les grandes différences de vitesse conduisent à des effets remarquables."

Ludwig Prandtl, Heidelberg, 1904.

Pour comprendre cette phrase, il faut revenir au problème de Stokes défini à la section [1.2](#). On a vu dans ce problème qu'une paroi solide pouvait influencer le champ de vitesse dans le fluide jusqu'à une distance $y_{1\%}$ proportionnelle à la racine carrée de la viscosité. Cette distance définit la zone de transition entre la paroi, où le fluide est à l'arrêt, et la zone établie où le fluide avance à la vitesse U . À grand nombre de Reynolds, le fluide doit transiter d'une vitesse nulle à la paroi à une vitesse importante U en une distance $y_{1\%}$ d'autant plus petite que la viscosité est faible. En augmentant le nombre de Reynolds, on augmente la vitesse de l'écoulement tout en diminuant la zone de transition. Autrement dit, on crée un gradient de vitesse normal à la paroi de plus en plus important. Or, l'équation [\(5.10\)](#) définit la contrainte dans un fluide comme proportionnelle au gradient de vitesse normal à la paroi. Un fort gradient à la paroi crée une contrainte forte ce qui se matérialise par une force de traînée à la paroi.

Cet enchaînement est résumé dans la phrase de Prandtl : pour correctement prédire le comportement d'un fluide, il faut faire l'hypothèse qu'il adhère à la paroi. Mais plus la viscosité est faible devant l'inertie, plus la zone de transition est mince et plus les effets sont remarquables. Comme on l'a vu au chapitre précédent, à grands nombres de Reynolds la viscosité peut être négligée **sauf** dans une zone très mince (d'autant plus mince que le nombre de Reynolds est grand) à proximité de la paroi. Il faut donc s'intéresser de près aux phénomènes physiques siégeant dans cette zone mince afin de correctement modéliser son influence sur l'ensemble du domaine. Historiquement, c'est Prandtl qui le premier s'est intéressé à la physique de cette zone mince.

Deux conditions caractérisent une couche limite :

1. **le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand devant l'unité.** Dans ces conditions, on a vu que les effets d'inertie l'emportent sur les effets visqueux et que la couche de transition est très mince devant les dimensions du problème,
2. **dans la couche limite, les temps caractéristiques** des phénomènes visqueux et des phénomènes d'inertie sont du même ordre de grandeur.

Ce deuxième point ouvre le champ à une étude qualitative des couches limites extrêmement intéressante. On note δ l'épaisseur de la couche limite. La frontière de la couche limite n'a aucune réalité physique, elle répond à une définition mathématique : l'épaisseur de la couche limite est définie comme la hauteur y à laquelle la vitesse du fluide atteint 99 % de la vitesse du fluide à l'extérieur de la couche limite,

$$u(x, \delta) = 0,99 u_e(x)$$

On note ensuite L la grandeur caractéristique de l'obstacle que rencontre le fluide (pour une sphère, on prendra son rayon, pour une aile sa corde...). Ces grandeurs sont présentées figure [5.8](#). La vitesse du fluide à l'extérieur de la couche limite est notée $u_e(x)$, elle peut varier avec l'abscisse. On note U son ordre de grandeur. Dans ces conditions, le temps caractéristique

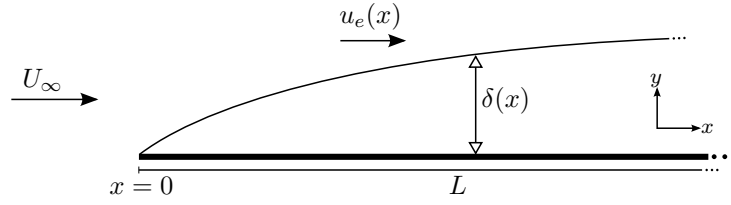


FIGURE 5.8 – Schéma d'une couche limite. On note δ l'épaisseur de la couche limite, L la longueur de l'obstacle, U_∞ la vitesse de l'écoulement en amont de la paroi et $u_e(x)$ l'évolution de la vitesse à l'extérieur de la couche limite.

des phénomènes d'inertie t_c s'exprime comme $t_c \sim L/U$. Le problème de Stokes a permis d'exprimer l'ordre de grandeur du temps caractéristique de la viscosité : $t_v \sim \delta^2/\nu$. Dans la couche limite, ces deux temps sont du même ordre de grandeur, soit

$$\begin{aligned} t_v &\sim t_c \\ \frac{\delta^2}{\nu} &\sim \frac{L}{U} \\ \frac{\delta^2}{L^2} &\sim \frac{\nu}{LU} = \frac{1}{Re_L} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}}} \quad (5.8)$$

On obtient donc, avec une analyse qualitative de la physique de l'écoulement, l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite δ par rapport à l'obstacle rencontré. Comme prévu, cette épaisseur dépend du nombre de Reynolds[‡] : plus le nombre de Reynolds est grand plus la couche limite est mince. On verra plus loin que les solutions exactes de la couche limite confirment cet ordre de grandeur.

La caractérisation de la couche limite a pour objectif de calculer de façon précise ou approchée la traînée créée par le frottement du fluide le long de la paroi. Cette traînée est notée D et s'exprime comme l'intégrale de la contrainte à la paroi (ou contrainte pariétale) le long de la paroi :

$$D = \int_L \tau_w(x) dx \quad \text{avec} \quad \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5.9)$$

La contrainte pariétale n'est rien d'autre que la contrainte telle que définie par l'équation (5.10) calculée à la paroi ($y = 0$). Comme souvent en mécanique des fluides, il est plus utile de définir des nombres sans dimension pour dimensionner une grandeur. On cherche donc à évaluer le terme $\tau_w/\rho u_e^2$ qui est la contrainte adimensionnée. Pour cela, on considère que :

- la dimension caractéristique dans la direction x de l'écoulement est la dimension de l'obstacle L ,

[‡]. On notera que le nombre de Reynolds est ici assorti de la grandeur L qui signifie que le nombre de Reynolds est calculé avec cette longueur. En effet, on pourra rencontrer des nombre de Reynolds calculés avec l'épaisseur de couche limite ou tout autre longueur.

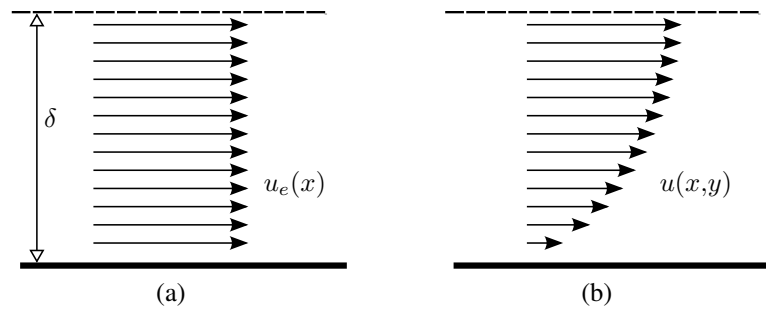


FIGURE 5.9 – Profil de vitesse dans l'épaisseur de la couche limite pour un fluide idéal (a) et un fluide visqueux (b).

- la dimension caractéristique normalement à la paroi est l'épaisseur de la couche limite δ ,
- la vitesse caractéristique dans la direction x est de l'ordre de la vitesse extérieure U .

Ces ordres de grandeur permettent d'estimer la contrainte pariétale adimensionnée :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \sim \mu \frac{U}{\delta}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \sim \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{U \delta} \sim \frac{\nu}{LU} \frac{L}{\delta} \quad \text{soit d'après l'équation (5.8)}$$

$$\boxed{\frac{\tau_w}{\rho U^2} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}}} \quad (5.10)$$

On a vu qu'une couche limite est caractérisée par son épaisseur et la contrainte pariétale qu'elle génère. Deux autres grandeurs sont très utiles pour caractériser une couche limite. Il s'agit de :

- l'épaisseur de déplacement

$$\delta_* = \int_0^\delta 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy$$

- l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy$$

On rappelle que dans ces expressions, u et ρ sont respectivement la vitesse et la masse volumique dans la couche limite, u_e et ρ_e la vitesse et la masse volumique à l'extérieur de la couche limite. Ces expressions possèdent une signification physique intéressante et utile.

Pour comprendre la signification de l'épaisseur de déplacement, il faut s'intéresser au débit massique de fluide dans la couche limite. La figure 5.9(a) montre le profil de vitesse dans la couche limite pour un fluide non-visqueux, la vitesse est constante et égale à $u_e(x)$. La figure 5.9(b) présente le profil de vitesse lorsque l'on prend en compte la viscosité du fluide, la vitesse est nulle à la paroi et tend vers $u_e(x)$ à la frontière de la couche limite. Ces profils montrent que le débit massique à travers la section de hauteur δ est plus faible pour un fluide visqueux que pour un fluide idéal. Par conséquent, si l'on souhaite calculer l'écoulement avec l'hypothèse de

fluide idéal, il faut déplacer la paroi vers le haut d'une distance δ_* pour obtenir le débit réel. Le débit réel (noté $\dot{m}_r$) est le débit idéal à travers δ (noté $\dot{m}_i$) moins le débit idéal à travers δ_* , soit :

$$\begin{aligned}\dot{m}_r &= \dot{m}_i - \rho_e u_e \delta_* \\ \int_0^\delta \rho u \, dy &= \rho_e u_e \delta - \rho_e u_e \delta_* \\ \rho_e u_e \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy &= \rho_e u_e \delta_* \\ \delta_* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy\end{aligned}\tag{5.11}$$

Cette grandeur permet donc de tenir compte de la présence de la couche limite pour calculer l'écoulement extérieur tout en considérant le fluide comme idéal. On voit ici qu'il est nécessaire de connaître la distribution de la vitesse dans la couche limite pour calculer l'épaisseur de déplacement, ce qui va nous occuper dans la suite.

Cette correction de la position de la paroi permet de conserver le débit. On doit naturellement procéder de même avec la quantité de mouvement. Cette grandeur est surestimée si l'on fait l'hypothèse de fluide idéal. Pour corriger cette approximation, on définit l'épaisseur de quantité de mouvement qui fournit la position de la paroi pour conserver la quantité de mouvement réelle :

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \rho u^2 \, dy &= \dot{m}_r u_e - \rho_e u_e^2 \theta = u_e \int_0^\delta \rho u \, dy - \rho_e u_e^2 \theta \\ \int_0^\delta \rho u u_e \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy &= \rho_e u_e^2 \theta \\ \theta &= \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy\end{aligned}\tag{5.12}$$

Ces grandeurs de correction permettent de faire le lien entre le calcul idéal à l'extérieur de la couche limite et le calcul réel dans la couche limite : le calcul avec le fluide idéal fournit le champ u_e qui est nécessaire pour calculer le champ u dans la couche limite, le champ u permet de calculer les corrections de paroi δ_* et θ avec lesquelles un nouveau calcul en fluide idéal donne un nouveau champ u_e qui, cette fois-ci, tient compte de la couche limite. Ainsi, on ne résout jamais les équations de Navier-Stokes ; le problème est scindé en deux : les équations d'Euler permettent d'obtenir le champ de vitesse loin de la paroi, les équations de la couche limite permettent de calculer la dynamique de l'écoulement au voisinage de la paroi et ainsi d'avoir accès aux forces de frottement et de prévoir le décollement éventuel du fluide. La section suivante détaille comment les équations de la couche limite sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes.

3 Équations de la couche limite laminaire

Les équations de la couche limite ne sont rien d'autre que les équations de Navier-Stokes simplifiées grâce à des hypothèses et surtout grâce à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu à l'intérieur des couches limites.

Les hypothèses portent dans un premier temps sur la nature de l'écoulement :

- l'écoulement est **bidimensionnel**. On prendra comme repère le repère traditionnel Oxy .
- l'écoulement est **stationnaire**. On considère que l'on se trouve dans un régime établi, l'écoulement ne varie plus dans le temps.
- l'écoulement est **incompressible**. Ici, même si le fluide est de l'air, on fait l'hypothèse que l'écoulement est suffisamment lent pour pouvoir négliger les effets de compressibilité.

Ces trois hypothèses permettent d'écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.13)$$

$$\underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{v \frac{\partial u}{\partial y}}_{(2)} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{(3)} + \nu \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{(5)} \right) \quad (5.14)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.15)$$

Maintenant, il s'agit d'introduire la physique de la couche limite telle que décrite dans la section précédente. La couche limite est caractérisée par un nombre de Reynolds très grand (ainsi l'épaisseur de la couche limite est très petite devant la dimension de l'obstacle) et les temps caractéristiques de la viscosité et de la convection sont comparables. Pour simplifier les équations de Navier-Stokes, on raisonne sur les ordres de grandeur. Il est possible d'obtenir les équations de la couche limite d'une façon exacte mathématiquement en utilisant les développements asymptotiques. Les ordres de grandeur des dimensions sont δ , l'épaisseur de la couche limite, dans la direction y normale à la paroi et L , la dimension de l'obstacle, dans la direction x de la paroi. De même, les vitesses ont pour ordre de grandeur U la vitesse de l'écoulement externe dans la direction de la paroi et V dans la direction normale à la paroi. On peut alors évaluer l'ordre de grandeur de tous les termes intervenants dans les équations de Navier-Stokes ci-dessus.

Dans l'équation de conservation de la masse, les deux termes doivent être du même ordre de grandeur pour éviter une solution triviale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &\sim \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{U}{L} &\sim \frac{V}{\delta} \\ V &\sim U \frac{\delta}{L} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Comme souvent, l'équation de conservation de la masse permet d'obtenir une information sur la composante transverse de la vitesse. Ici on obtient l'ordre de grandeur de V .

Pour simplifier les termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement projeté sur l'axe x (équation (5.14)), il faut comparer les termes deux à deux pour éliminer les plus petits. Si l'on compare les termes (1) et (2) de cette équation, on obtient :

$$\frac{(1)}{(2)} \sim \frac{U^2/L}{VU/\delta} \sim \frac{U^2/L}{U^2/L} \sim 1$$

Les termes (1) et (2) sont du même ordre de grandeur, on ne peut pas négliger l'un par rapport à l'autre. On procède de même avec les termes (4) et (5) :

$$\frac{(4)}{(5)} \sim \frac{U/L^2}{U/\delta^2} \sim \frac{\delta^2}{L^2} \sim \frac{1}{Re_L} \ll 1$$

Cette analyse des ordres de grandeur montre que le terme (4) est plusieurs ordres de grandeur inférieur à (5), on choisit donc de négliger le terme (4). Enfin, on compare le terme (5) au terme (1) :

$$\frac{(5)}{(1)} \sim \frac{\nu U/\delta^2}{U^2/L} \sim \frac{\nu}{UL} \frac{L^2}{\delta^2} \sim \frac{1}{Re_L} Re_L \sim 1$$

Grâce à ces considérations physiques, on est en mesure de simplifier l'équation (5.14) en supprimant le terme (4). On garde le terme (3) car on sait que la pression joue un rôle essentiel dans les propriétés de la couche limite. On a donc l'équation :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

La même analyse peut être conduite avec les termes de l'équation (5.15). On montre ainsi que tous les termes sont du même ordre de grandeur mais ils sont tous un ordre de grandeur plus petit que les termes (1), (2) et (5) que l'on a conservés. Dans ces conditions, il ne reste plus qu'une information sur le gradient de pression transverse :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Ainsi, les équations de la couche limite sont les trois équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.17)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (5.19)$$

Ces équations soulèvent plusieurs points importants.

1. Pour pouvoir résoudre ces équations différentielles, il est nécessaire de définir les conditions aux limites du champ de vitesse. On associe donc à ce jeu d'équations les conditions d'adhérence du fluide à la paroi et le raccordement de la couche limite à l'écoulement externe en $y = \delta$.

2. D'après l'équation (5.16), la vitesse normale à la paroi dans la couche limite est beaucoup plus faible que la vitesse le long de la paroi. La convection de l'écoulement s'établit essentiellement dans la direction de la paroi. En revanche, on montre que le terme (4) est négligeable devant le terme (5) ce qui signifie que la diffusion visqueuse se déroule principalement suivant la normale à la paroi. On a donc une compétition entre la convection qui tend à faire avancer le fluide le long de la paroi et la diffusion qui tend à écarter le fluide de la paroi. Ce sont ces deux phénomènes qui façonnent la couche limite.
3. Le gradient de pression est nul dans la direction perpendiculaire à la paroi. Ceci montre que la pression reste constante lorsque l'on traverse la couche limite. Elle est identique à la paroi et dans l'écoulement externe à la couche limite.
4. Le gradient de pression longitudinal est imposé par la structure de l'écoulement externe. En effet, l'équation (5.18) est valable dans la couche limite et donc a fortiori sur sa frontière où le fluide atteint la vitesse de l'écoulement externe $u_e(x)$. À cet endroit, le champ de vitesse ne varie plus avec la distance y . Les contraintes disparaissent ce qui permet d'écrire :

$$\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp(x)}{dx} \quad (5.20)$$

Comme la pression ne dépend pas de y , cette expression reste valable dans la couche limite. C'est donc par l'intermédiaire de la pression que l'écoulement externe influence la couche limite.

5. La nature des équations a changé. Les équations de Navier-Stokes sont des équations hyperboliques. Il est nécessaire de connaître les conditions aux limites de tout le domaine pour calculer ce qui se passe en tout point. Les équations de la couche limite sont paraboliques, la connaissance des conditions à la paroi (fluide à l'arrêt) et à l'entrée du domaine (la vitesse du fluide est égale à la vitesse du fluide idéal) suffit pour calculer le champ de vitesse global de proche en proche. Cette propriété permet de considérablement simplifier les calculs dans la zone proche paroi.

En simplifiant les équations de Navier-Stokes, on a établi les équations de la couche limite laminaire. Même si ces équations sont plus simples, leur résolution n'est cependant pas triviale. Les sections suivantes présentent différentes méthodes pour résoudre ces équations. Plusieurs outils peuvent être utilisés :

1. les méthodes numériques : il s'agit d'approcher les solutions du système d'équations en discrétisant les dérivées partielles suivant des schémas numériques plus ou moins compliqués. Ce sont des problèmes d'analyse numérique propres à la résolution de systèmes d'équations différentielles. La nature parabolique des équations offre un spectre relativement large d'outils pour obtenir le champ de vitesse.
2. les méthodes exactes : pour certaines configurations de l'écoulement, les équations disposent d'une solution analytique exacte. Ces cas sont étudiés dans la section 4
3. les méthodes intégrales : dans bien des cas, le champs de vitesse est difficile à résoudre de façon exacte, il est nécessaire d'en avoir une expression approchée pour pouvoir calculer les autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Le principe de ces méthodes est présenté section 5

On rappelle qu'à travers la résolution de ces équations, on cherche à obtenir le champ de vitesse (u, v) dans la couche limite afin de calculer la force de frottement exercée par le fluide sur la paroi et les épaisseurs caractéristiques de la couche limite.

4 Résolutions exactes des équations de la couche limite

Les équations (5.17), (5.18) et (5.19) de la couche limite sont des équations différentielles partielles décrivant l'évolution de la vitesse et de la pression à l'intérieur d'une couche limite laminaire. Comme pour les équations de Navier-Stokes, des solutions exactes existent à condition de se donner des hypothèses supplémentaires qui permettent, soit de supprimer des termes, soit de définir des conditions aux limites conciliantes. Cette section a pour objectif de présenter quelques cas particuliers d'écoulements où les équations de la couche limite offrent des solutions exactes.

4.1 Plaque plane dans un écoulement uniforme

La situation la plus simple que l'on puisse envisager est le cas d'une plaque plane positionnée à l'ordonnée $y = 0$, plongée dans un écoulement uniforme. L'écoulement externe possède une vitesse constante U_e .

La première hypothèse permet de définir de façon explicite la condition de vitesse à la paroi :

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0$$

La seconde hypothèse, $u_e(x) = U_e$ permet de calculer le gradient de pression dans la couche limite. D'après l'expression (5.20),

$$\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} = 0 = -\frac{dp}{dx}$$

Ainsi le gradient de pression est nul, ce qui simplifie les équations de la couche limite puisqu'il ne reste que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.21)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.22)$$

Pour résoudre ce jeu d'équations, la physique de l'écoulement fournit une propriété remarquable : le profil de vitesse axiale est auto-semblable. Ceci signifie que le profil de vitesse $u(x_1, y)$ à l'abscisse x_1 peut être calculé connaissant le profil de vitesse à une autre abscisse x_0 . Autrement dit, il existe une fonction f' unique qui décrit le profil de vitesse en fonction de x et y . Connaissant cette fonction, on peut retrouver le profil de vitesse en tout point de la couche limite. Pour cela on définit la variable de similitude :

$$\eta = y \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{1/2}$$

et l'on cherche la fonction f' telle que :

$$f'(\eta) = \frac{u(x,y)}{u_e}$$

Pour ce faire, il faut écrire l'équation différentielle (5.22) en fonction de f' et de ses dérivées.

La première étape consiste à écrire la composante normale v de la vitesse en fonction de f' et ses dérivées par rapport à η (que l'on note $f, f', f'' \dots$). Pour cela, on utilise la conservation de la masse (5.21) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= -u_e \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{1/2} &= -u_e f'' \left(-\frac{\eta}{2x} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_e \nu}{x} \right)^{1/2} f'' \eta \\ \text{soit } v &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_e \nu}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire v en fonction des nouvelles variables f et η . On réalise le même changement de variables dans l'équation de conservation de quantité de mouvement (5.22) :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u_e^2 f' f'' \left(-\frac{\eta}{2x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_e \nu}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) u_e f'' \left(\frac{u_e}{x \nu} \right)^{1/2} &= \frac{u_e^2}{x} f''' \\ u_e^2 f' f'' \left(-\frac{\eta}{2x} \right) + \frac{1}{2} \frac{u_e^2}{x} (\eta f' - f) f'' &= \frac{u_e^2}{x} f''' \\ \boxed{2f''' + f f'' = 0} & \quad (5.23) \end{aligned}$$

Cette équation est appelée équation de Blasius du nom du mathématicien qui l'a établie en 1908. Cette équation différentielle du troisième ordre doit être accompagnée de trois conditions aux limites pour être correctement posée. Ce sont les conditions de l'écoulement qui nous fournissent ces conditions puisque l'on sait qu'à la paroi la vitesse s'annule (les deux composantes de la vitesse s'annulent) et que la couche limite doit se raccorder avec l'écoulement externe à l'infini. D'où :

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0 &\rightarrow f'(0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 &\rightarrow f(0) = 0 \\ u(x, \infty) = u_e &\rightarrow f'(\infty) = 1 \end{aligned}$$

On a donc une équation différentielle non-linéaire pour laquelle les conditions aux limites ne sont pas toutes données au même point. Le problème est donc mal posé, il n'y a aucune garantie a priori qu'une solution existe. Dans la pratique, une solution existe mais on est obligé

de résoudre numériquement l'équation différentielle, faute d'avoir une solution analytique. La résolution numérique est possible dans le cas d'un problème correctement posé, c'est-à-dire avec des conditions sur f , f' et f'' données au même point. On est donc obligé de choisir une condition initiale pour f'' , soit $f''(0) = s$. Ne connaissant pas s , on va résoudre le problème par tâtonnement jusqu'à trouver le s qui permette de satisfaire $f'(\infty) = 1$. Cette méthode s'appelle la méthode de tir : on connaît la cible à l'infini ($f'(\infty) = 1$) et on ajuste la condition initiale ($f''(0) = s$) pour l'atteindre. Cette méthode peut également s'appliquer à d'autres problèmes mal posés.

Cependant, l'équation de Blasius (5.23) possède une propriété supplémentaire qui permet de déterminer s sans tâtonnement. Il est facile de voir qu'il existe une constante a telle que, si $F(\eta)$ est solution de l'équation (5.23), alors la fonction $f = aF(a\eta)$ est également solution. On a alors pour la dérivée de f :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow +\infty} F'(a\eta) = a^2 \lim_{\eta \rightarrow +\infty} F'(\eta)$$

sachant que $f'(\infty) = 1$ alors :

$$a = \left(\lim_{\eta \rightarrow +\infty} F'(\eta) \right)^{-1/2}$$

Si l'on prend $F(0) = F'(0) = 0$ alors on a $f(0) = f'(0) = 0$ ce qui correspond aux conditions limites de f et f' pour la couche limite. Il reste que :

$$f''(0) = a^3 F''(0) = \left(\lim_{\eta \rightarrow +\infty} F'(\eta) \right)^{-3/2} F''(0) = s$$

Pour éviter une solution triviale, on doit avoir $F''(0) \neq 0$ ce qui permet de déterminer s . Cette analyse permet de déterminer la condition initiale $f''(0)$ et donc de définir correctement le problème de Blasius. On résout dans un premier temps l'équation de Blasius avec les conditions initiales :

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 1$$

ce qui permet d'obtenir la limite de F' à l'infini puis on résout de nouveau l'équation de Blasius avec les conditions initiales

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = s = \left(\lim_{\eta \rightarrow +\infty} F'(\eta) \right)^{-3/2}$$

On résout donc deux fois l'équation de Blasius mais à chaque fois le problème est correctement posé et la solution existe.

Il reste simplement à écrire l'équation différentielle d'ordre 3 de Blasius sous la forme d'un système à trois équations différentielles d'ordre 1, qui est plus simple à résoudre numériquement. Pour cela, on définit le vecteur de fonctions $\mathbf{X} = (x_1 = f, x_2 = f', x_3 = f'')$. L'équation de Blasius est alors équivalente au système :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\eta} &= x_2 & \text{et} & \quad x_1(0) = 0 \\ \frac{dx_2}{d\eta} &= x_3 & \text{et} & \quad x_2(0) = 0 \\ \frac{dx_3}{d\eta} &= -\frac{1}{2}x_1x_3 & \text{et} & \quad x_3(0) = s \end{aligned}$$

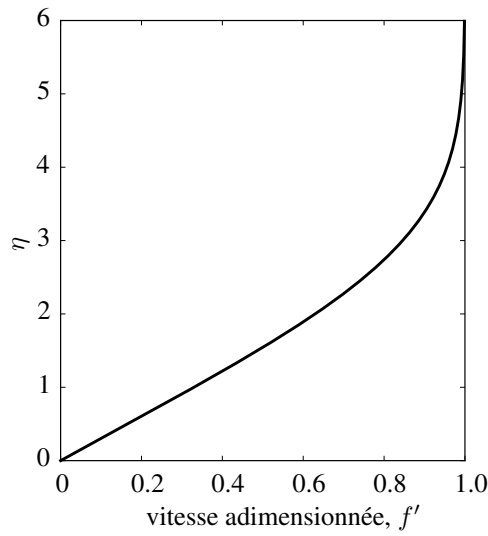


FIGURE 5.10 – Profil de vitesse adimensionnées dans une couche limite laminaire au voisinage d’une paroi plane dans un écoulement uniforme.

Une telle mise en forme permet d’utiliser des méthodes performantes de Runge-Kutta pour la résolution numérique des systèmes d’équations différentielles ordinaires (ODE).

Plus que la fonction f , ce sont bien les trois fonctions f , f' et f'' qui sont utiles dans le cas de la couche limite. Ces fonctions permettent de définir les propriétés de la couche limite qui s’établit le long de la plaque plane ainsi :

$$u = u_e f' \quad (5.24)$$

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{u_e \nu}{x} \right)^{1/2} (\eta f' - f) \quad (5.25)$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu u_e \left(f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_{\eta=0} = \rho u_e^2 \frac{f''(0)}{Re_x^{1/2}} \quad (5.26)$$

$$\delta = \eta_1 \left(\frac{\nu x}{u_e} \right)^{1/2} \quad \text{où } \eta_1 \text{ est tel que } f(\eta_1) = 1 \quad (5.27)$$

$$\delta_* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy = \frac{x}{Re_x^{1/2}} \int_0^\infty (1 - f') d\eta \quad (5.28)$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy = \frac{x}{Re_x^{1/2}} \int_0^\infty f'(1 - f') d\eta \quad (5.29)$$

La figure [5.10](#) présente l’évolution de la vitesse axiale adimensionnée dans la couche limite pour différents η . L’utilisation des grandeurs réelles (à savoir x , y et u) permet de tracer les différents profils de vitesse à différents abscisses (figure [5.11](#)).

La résolution numérique dans le cas de la plaque plane permet d’obtenir des valeurs numériques pour les grandeurs caractéristiques de la couche limite.

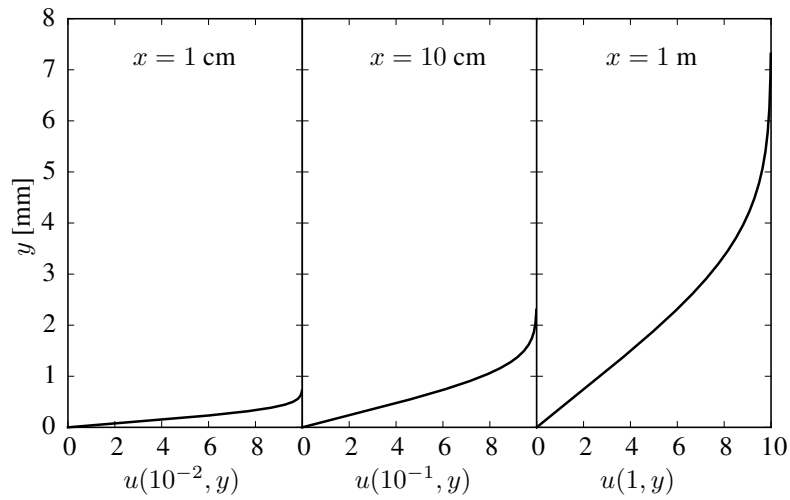


FIGURE 5.11 – Exemples de profils de vitesse axiale calculés à partir de l'équation de Blasius pour différents abscisses. Application numérique réalisée pour de l'air à $U_e = 10$ m/s.

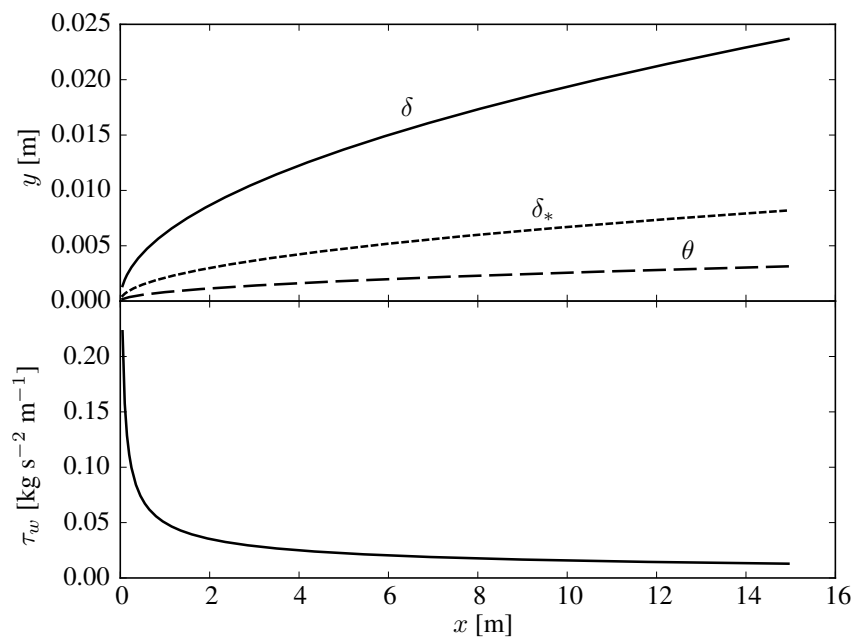


FIGURE 5.12 – Évolution des propriétés d'une couche limite laminaire créée sur une plaque plane dans un écoulement uniforme. On trace l'évolution de l'épaisseur de la couche limite, l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{x} &= \frac{5}{\sqrt{Re_x}} \\
\frac{\delta_*}{x} &= \frac{1,72}{\sqrt{Re_x}} \\
\frac{\theta}{x} &= \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \\
\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} &= \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}
\end{aligned}$$

Ces valeurs sont issues de la résolution exacte des équations de la couche limite, c'est-à-dire qu'aucune hypothèse n'est faite sur le champ de vitesse dans la couche limite. Celui-ci a été résolu en chaque point du domaine. Ce cas de la plaque plane sert, dans la suite, de référence pour comparer les résultats obtenus avec des méthodes moins précises mais plus rapides et surtout moins restrictives.

Bien entendu, des données expérimentales ont permis de valider ces calculs analytiques. L'accord entre la théorie et les mesures est excellent. On remarque à ce propos qu'étant donné les dimensions mises en jeu dans la couche limite, la mesure du vecteur vitesse dans la couche limite est un problème en soi.

4.2 Dièdre dans un écoulement uniforme

L'approche proposée par Blasius dans la partie précédente peut être étendue à quelques situations plus générales. On a vu pour le cas de la plaque plane que l'une des façons de simplifier les équations de la couche limite est de se donner un gradient de pression compatible avec une résolution exacte des équations.

Pour cela, on définit la configuration présentée figure 5.13 où un dièdre de demi-angle au sommet α est placé dans un écoulement uniforme à la vitesse U_∞ . En contournant le dièdre, l'écoulement à l'extérieur de la couche limite est modifié et évolue au fur et à mesure qu'il avance le long du dièdre. On repère par x la distance entre le sommet du dièdre et un point de la surface. La longueur du dièdre est L . Le champ de vitesse du fluide idéal obtenu se met sous la forme :

$$u_e(x) = U_\infty \left(\frac{x}{L} \right)^n \quad \text{avec} \quad n = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}$$

On voit que dans ce cas, le gradient de pression longitudinal n'est pas nul et qu'il faut le prendre en compte dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Pour résoudre ce problème, on procède de la même façon que pour Blasius. Avant de réaliser le changement de variable, il faut utiliser la fonction de courant.

Pour satisfaire l'équation de continuité (5.17), on écrit les composantes u et v du champs de vitesse sous la forme :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

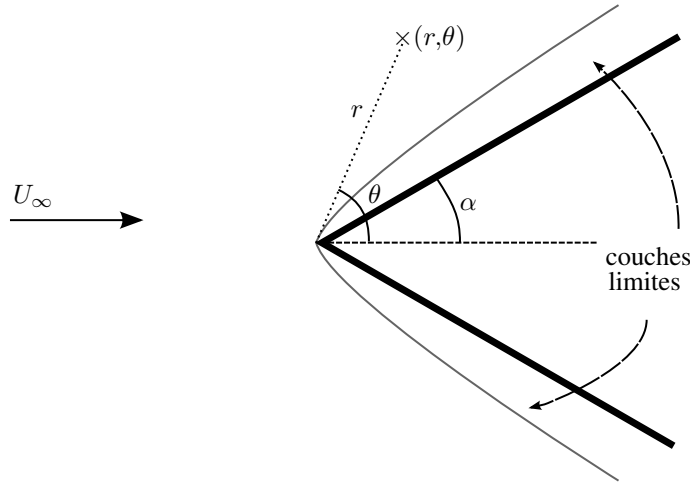


FIGURE 5.13 – Écoulement autour d'un dièdre. La couche limite s'établit le long de la paroi, ses caractéristiques dépendent de l'angle α du dièdre. On cherche le champ de vitesse en tout point repéré par les coordonnées (r, θ) .

On peut alors écrire l'équation de quantité de mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ceci permet d'avoir une équation différentielle de la fonction ψ qu'il faut associer aux conditions aux limites

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, +\infty) = u_e(x)$$

Vient alors le changement de variable qui tient compte de l'auto-similitude de l'écoulement permettant de définir la variable η et la fonction f :

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{1/2} y \\ f(\eta) &= \psi \left(\frac{n+1}{2} \right)^{1/2} (u_e \nu x)^{-1/2} \end{aligned}$$

En réalisant le changement de variable dans l'équation (5.30), on obtient l'équation

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2n}{n+1} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

associée aux conditions aux limites

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(\infty) = 1$$

Pour résoudre cette équation différentielle, il faut procéder comme pour l'équation de Blasius avec une méthode de tir (voir section précédente). Le changement de variable permet d'exprimer directement la vitesse longitudinale u en fonction de f' puisque $u = u_e f'$, comme dans le cas de la plaque plane. On en déduit que les propriétés caractéristiques de la couche limite qui s'établit le long des parois du dièdre s'exprime en fonction de f et de ses dérivées suivant les expressions (5.24) à (5.29).

L'étude de ce cas particulier permet de souligner plusieurs points :

1. Si l'on prend $\beta = 0$, c'est-à-dire un angle au sommet nul, on retrouve bien l'équation de Blasius établie pour la plaque plane.
2. Cette approche a permis de prendre en compte la présence d'un gradient de pression le long de la paroi.

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_\infty^2 n \left(\frac{x}{L} \right)^{2n-1}$$

Ce gradient de pression joue un rôle essentiel dans les caractéristiques de la couche limite. On voit par exemple qu'en changeant n , on modifie le gradient de pression et les épaisseurs de la couche limite sont considérablement altérées.

3. La contrainte pariétale τ_w est essentielle pour prédire le décollement. On a vu de façon phénoménologique que la prise en compte de la viscosité du fluide pouvait entraîner le décollement du fluide. À grand nombre de Reynolds, l'écoulement ne suit plus l'obstacle, autrement dit la contrainte pariétale devient nulle. Pour déterminer la contrainte pariétale, on utilise la fonction f'' :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = \frac{f''(0)}{Re_x^{1/2}}$$

La prise en compte du gradient de pression permet de prédire le décollement de la couche limite. Connaître cette propriété de la couche limite est essentielle. Dans le cas d'une aile d'avion, il est impératif de s'assurer que la couche limite ne décroche pas pour éviter que la portance générée par la circulation de l'air autour de l'aile ne chute dramatiquement. On distingue plusieurs cas :

- $n > 1$: l'écoulement est accéléré, le gradient de pression est négatif et la contrainte pariétale augmente. Dans ces conditions, l'écoulement s'oppose au décollement de la couche limite, on dira que le gradient de pression est favorable.
- $0 < n < 1$: l'écoulement accélère, le gradient de pression est négatif mais la contrainte pariétale diminue. Le gradient de pression reste favorable mais l'écoulement accélère moins vite que ne grossit la couche limite. En fonction de la vitesse à l'infini et de la valeur de $f''(0)$, la contrainte peut s'annuler.
- $n < 0$: l'écoulement ralenti, le gradient de pression est défavorable et la contrainte diminue, il n'y a plus rien pour s'opposer au grossissement de la couche limite. En grossissant, la couche limite diminue la contrainte pariétale, si en plus l'écoulement extérieur ralenti, la contrainte diminue d'autant plus vite, le risque de décollement est grand.

Le point commun entre le problème de la plaque plane et celui du dièdre est que les solutions de la couche limite sont auto-semblables. Cette propriété permet d'utiliser un arsenal de méthodes mathématiques brièvement présentées dans cette section. Les travaux des années 40-50 ont permis de généraliser cette approche à tous les écoulements présentant des solutions auto-semblables, par exemple :

- l'écoulement au-dessus d'une plaque plane
- l'écoulement avec un point d'arrêt
- l'écoulement autour d'un dièdre
- l'écoulement dans une conduite convergente ou divergente
- l'écoulement autour d'un profil poreux où une vitesse de succion aspire une partie du fluide au travers de la paroi. . .

Tous ces cas peuvent se traiter à l'aide de changements de variables et d'une modélisation de l'écoulement avec une vitesse du type $u(x) = U_0 x^n$. Ces méthodes performantes s'appliquent finalement à de nombreux cas pratiques même si leur mise en oeuvre numérique et mathématique peut parfois être lourde. Pour palier à ces difficultés, des méthodes approchées de résolution des équations de la couche limite ont été développées, elle sont moins précises mais extrêmement rapides à mettre en oeuvre et permettent d'avoir une bonne approximation des caractéristiques d'une couche limite à la main.

5 Méthodes intégrales

La résolution exacte des équations de la couche limite pour un écoulement laminaire, stationnaire, bidimensionnel (équations (5.17) à (5.19)) est uniquement possible dans les cas où le profil de vitesse dans la couche limite présente un caractère auto-semblable. Cette propriété est elle-même définie par la nature de l'écoulement externe $u_e(x)$. On a vu dans la section précédente que certains écoulements satisfont à cette condition ce qui permet d'utiliser des changements de variables et résoudre exactement les équations.

Ces méthodes ne s'appliquent cependant pas à une large gamme d'écoulements industriels ou fréquemment rencontrés. Il est alors nécessaire de sacrifier un peu de précision pour gagner en faisabilité. Résoudre la couche limite au voisinage d'une paroi signifie que l'on est capable de calculer (1) le champ de vitesse dans la couche limite $u(x, y)$, (2) l'épaisseur de la couche limite δ , (3) l'épaisseur de déplacement δ_* , (4) l'épaisseur de quantité de mouvement θ et (5) la contrainte pariétale τ_w , tout ceci en connaissant la distribution de vitesse à l'extérieur de la couche limite. En connaissant les vitesses dans la couche limite et à l'extérieur, on peut en déduire l'épaisseur de couche limite puis les trois autres grandeurs. Deux solutions sont possible :

1. on approxime la vitesse de l'écoulement externe par une série de polynômes. Dans ce cas là, on se retrouve dans le cas général où le champ de vitesse $u_e(x)$ s'exprime comme une série de puissance de x . Il est alors possible d'appliquer les méthodes exactes de similitude vues précédemment. On voit que pour avoir une bonne approximation des écoulements complexes, il faut utiliser des polynômes de degrés élevés. La complexité de mise en oeuvre de ces méthodes croît alors avec le degré du polynôme pour conduire à des situations très lourdes. L'avantage de ces méthodes est que l'on commet une seule erreur en modélisant l'écoulement externe.
2. l'autre solution consiste à prendre l'écoulement externe tel qu'il est et d'estimer la distribution de vitesse à l'intérieur de la couche limite. On se donne alors une distribution de vitesse qui satisfait les conditions aux limites de la couche limite et l'on calcule les autres grandeurs. Cette approche est moins précise car l'erreur porte sur la vitesse dans la couche limite mais sa mise en oeuvre est extrêmement facile.

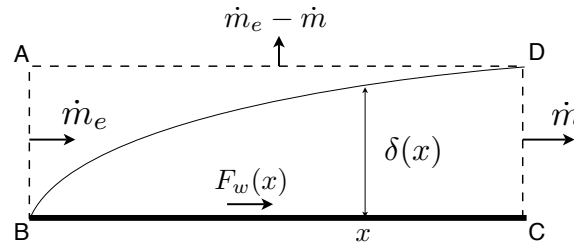


FIGURE 5.14 – Plaque plane

Les méthodes approchées sont des méthodes *intégrales*, on ne cherche pas localement à déterminer les propriétés exactes de l'écoulement mais l'on s'appuie sur les propriétés globales de la couche limite. La première méthode citée conduit à des résultats très bons moyennant des efforts importants, cependant les techniques utilisées ne diffèrent pas de celles présentées dans le cas du dièdre par exemple. On détaille donc ici la deuxième catégorie de méthode où l'on approche la distribution de vitesse dans la couche limite. Cette méthode semble simple en apparence mais des outils supplémentaires sont nécessaires pour mener à bien la démarche.

5.1 Équation intégrale sur une plaque plane à incidence nulle

L'objectif de tout problème de couche limite est de déterminer les cinq grandeurs caractéristiques de la couche limite (les trois épaisseurs, la contrainte pariétale et la vitesse). On fait l'hypothèse dans cette partie que l'on connaît les vitesses dans la couche limite et à l'extérieur. Il reste à déterminer quatre grandeurs alors que l'on ne possède que trois équations : les définitions des épaisseurs de déplacement (équation (5.11)) et de quantité de mouvement (équation (5.12)), et la définition de la contrainte pariétale (équation (5.9)). Il est par conséquent nécessaire de se donner une équation supplémentaire qui permette de relier ces grandeurs. Si l'on regarde de près les résultats obtenus dans le cas de la plaque plane, on peut observer l'égalité :

$$\frac{\theta}{x} = \frac{\tau_w}{1/2 \rho u_e^2}$$

Cette relation fournit un lien entre deux grandeurs caractéristiques de la couche limite et cette relation peut être démontrée de façon rigoureuse.

Pour cela, on effectue un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle défini figure 5.14. Le volume commence au début de la couche limite jusqu'à une abscisse x_C et s'élève d'une hauteur égale à l'épaisseur de la couche limite en C , $\delta(x_C)$. Le débit masse sortant par la section AD est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{m}_e - \dot{m} &= u_e \rho_e \delta - \int_0^\delta u \rho dy \\ &= \int_0^\delta (u_e \rho_e - u \rho) dy \end{aligned}$$

Le débit de quantité de mouvement à travers la section AD est alors :

$$u_e(\dot{m}_e - \dot{m}) = u_e \int_0^\delta (u_e \rho_e - u \rho) dy$$

L'équation de quantité de mouvement sur le volume de contrôle ABCD relie les débits de quantité de mouvement sur les différentes surfaces et les forces surfaciques exercées sur le fluide :

$$\int_{S_{ABCD}} \rho u^2 dS = \int_{S_{ABCD}} (\sigma - p) dS$$

On considère ici que le gradient de pression longitudinal est nul : $p_{AB} = p_{CD}$. On note F_w la force exercée par le fluide sur la paroi, il vient :

$$\underbrace{\int_0^\delta \rho u^2 dy}_{CD} + \underbrace{u_e \int_0^\delta (u_e \rho_e - u \rho) dy}_{AD} - \underbrace{\int_0^\delta \rho_e u_e^2 dy}_{AB} = -F_w$$

$$\int_0^\delta \rho u (u_e - u) dy = F_w$$

$$\rho_e u_e^2 \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = F_w$$

La force F_w exercée par le fluide sur la plaque est liée à l'épaisseur de quantité de mouvement par la relation

$$F_w = \rho_e u_e^2 \theta$$

La force exercée sur une petite distance δx est obtenue en différenciant la relation précédente :

$$\delta F_w(x) = \rho_e u_e^2 (\theta(x + \delta x) - \theta(x))$$

sachant que la contrainte en x s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_w &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta F_w}{\delta x} \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \rho_e u_e^2 \frac{\theta(x + \delta x) - \theta(x)}{\delta x} \end{aligned}$$

Sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression, la contrainte pariétale est liée à l'épaisseur de quantité de mouvement par la relation :

$$\boxed{\tau_w = \rho_e u_e^2 \frac{d\theta}{dx}} \quad (5.31)$$

Cette formule a été obtenue par une analyse macroscopique de la couche limite dans un cas particulier, simple. La section suivante permet d'établir la relation qui lie la contrainte pariétale sur un obstacle aux grandeurs caractéristiques de la couche limite dans le cas général.

5.2 Équation de Von Karman

Les grandeurs que l'on essaie de relier sont des grandeurs intégrées sur l'ensemble de l'épaisseur de la couche limite. On va donc intégrer l'équation de conservation de quantité de mouvement dans la couche limite (équation (5.18)) sur un volume de contrôle reposant sur la paroi jusqu'à une hauteur h , grande devant l'épaisseur de couche limite :

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^h \left(u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dy} \right) dy \quad (5.32)$$

En intégrant de même l'équation de continuité, entre 0 et une hauteur y on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy &= 0 \\ \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy &= 0 \end{aligned}$$

Comme la vitesse est nulle à la paroi, le second terme vaut :

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

En utilisant cette expression pour v dans l'équation (5.32), on obtient l'expression :

$$\begin{aligned} \int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy}_{(1)} - u_e \frac{du_e}{dx} \right) dy &= \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dy} dy \\ &= \frac{\tau_h - \tau_w}{\rho} = -\frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Le terme (1) peut être simplifié en réalisant une intégration par parties avec $u(x,0) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy &= \left[u \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right]_0^h - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= u_e \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned}$$

Cette expression du terme (1) permet d'écrire l'équation (5.33) sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_0^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} \right) dy &= -\frac{\tau_w}{\rho} \\ \int_0^h \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{d(uu_e)}{dx} + \frac{du_e}{dx} (u - u_e) \right) dy &= \\ \int_0^h \frac{\partial u(u - u_e)}{\partial x} dy + \frac{du_e}{dx} \int_0^h (u - u_e) dy &= -\frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned}$$

Avec $h \rightarrow \infty$ les bornes du domaine d'intégration ne dépendent ni de x ni de y , on peut intervertir l'ordre de la dérivation et de l'intégration pour obtenir la relation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_0^h u(u - u_e) dy \right) + \int_0^h (u - u_e) dy \frac{du_e}{dx} &= -\frac{\tau_w}{\rho} \\ \frac{d}{dx} \left(u_e^2 \underbrace{\int_0^h \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy}_{(2)} \right) + u_e \underbrace{\int_0^h \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy}_{(3)} \frac{du_e}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Les termes (2) et (3) s'apparentent respectivement aux épaisseurs de quantité de mouvement et de déplacement pour un écoulement incompressible. L'équation (5.34) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{du_e^2 \theta}{dx} + u_e \delta_* \frac{du_e}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho} \\ u_e^2 \frac{d\theta}{dx} + 2\theta u_e \frac{du_e}{dx} + u_e \delta_* \frac{du_e}{dx} &= \\ u_e^2 \frac{d\theta}{dx} + (\delta_* + 2\theta) u_e \frac{du_e}{dx} &= \frac{\tau_w}{\rho} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}} \quad (5.35)$$

où H est le paramètre de forme égal au rapport δ_*/θ . Cette équation est appelée *équation de Von Karman*, c'est l'équation intégrale de conservation de quantité de mouvement pour une couche limite incompressible bidimensionnelle. Sachant qu'aucune hypothèse n'a été avancée concernant la forme de τ_w , cette relation est valable aussi bien pour un écoulement laminaire que pour un écoulement turbulent. Cette expression fut obtenue pour la première fois par H. Gruschwitz en 1931.

Cette expression est une généralisation de l'équation (5.31) obtenue à la section 5.1. L'écoulement au dessus d'une plaque plane sans gradient de pression est caractérisé par une vitesse constante u_e . Si l'on applique la condition $du_e/dx = 0$ dans l'expression (5.35), on obtient bien l'équation (5.31) :

$$\tau_w = \rho u_e^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Avec cet outil supplémentaire, on dispose maintenant de toutes les équations nécessaires pour résoudre de façon approchée la couche limite.

5.3 Méthode approchée de Karman-Pohlhausen

L'équation intégrale de Von Karman (5.35) permet de lier trois grandeurs caractéristiques de la couche limite, l'épaisseur de quantité de mouvement θ , l'épaisseur de déplacement δ_* , et la contrainte pariétale τ_w connaissant la vitesse externe à la couche limite u_e . Le problème de la couche limite est traité ici d'un point de vue global. Il faut donc exprimer la vitesse dans la

couche limite de façon intégrale, c'est-à-dire non pas exacte en tout point mais satisfaisant les conditions aux frontières de la couche limite.

K. Polhausen proposa en 1921 de chercher un profil de vitesse de la forme polynomiale :

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 \quad (5.36)$$

avec $\eta = y/\delta$ la distance adimensionnée. Les coefficients a , b , c et d qui définissent le profil de vitesse sont déterminés en considérant les conditions aux limites du problème.

En $y = 0$, $u(x,0) = v(x,0) = 0$ donc l'équation de conservation de quantité de mouvement selon l'axe x s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= -\frac{u_e}{\nu} \frac{du_e}{dx} \end{aligned} \quad (5.37)$$

En $y = \delta$, la continuité entre la vitesse dans la couche limite et la vitesse extérieure doit être assurée sans rupture de pente. On a donc les trois conditions suivantes :

$$u(x,\delta) = u_e(x) \quad (5.38)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0 \quad (5.39)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = 0 \quad (5.40)$$

On a ainsi quatre conditions portant sur la vitesse aux limites de la couche limite, qui permettent de déterminer les facteurs a , b , c et d qui interviennent dans la définition du profil de vitesse. Le changement de variable $\eta = y/\delta$ implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_e(x) f(\eta) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u_e}{\delta} f'(\eta) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_e}{\delta^2} f''(\eta) \end{aligned}$$

La condition (5.37) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= \frac{u_e}{\delta^2} f''(0) \\ -\frac{u_e}{\nu} \frac{du_e}{dx} &= \frac{u_e}{\delta^2} 2b \end{aligned} \quad (5.41)$$

La condition (5.38) prend la forme :

$$\begin{aligned} u(x,\delta) &= u_e f(1) \\ 1 &= a + b + c + d \end{aligned} \quad (5.42)$$

La condition (5.39) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} &= \frac{u_e}{\delta} f'(1) \\ 0 &= a + 2b + 3c + 4d \end{aligned} \quad (5.43)$$

et finalement, la dernière condition aux limites (5.40) donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} &= \frac{u_e}{\delta^2} f''(1) \\ 0 &= 2b + 6c + 12d \end{aligned} \quad (5.44)$$

Les quatre équations ci-dessus forment un système à quatre inconnues que l'on résout pour exprimer les paramètres du champ de vitesse $f(\eta)$. Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} \quad (5.45)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} a &= 2 + \frac{\Lambda}{6} \\ b &= -\frac{\Lambda}{2} \\ c &= -2 + \frac{\Lambda}{2} \\ d &= 1 - \frac{\Lambda}{6} \end{aligned}$$

d'où un champ de vitesse adimensionné dans la couche limite qui s'exprime sous la forme :

$$f(\eta) = 1 - (1 - \eta)^3(1 + \eta) + \Lambda \frac{\eta}{6}(1 - \eta)^3 \quad (5.46)$$

Le profil de vitesse est contrôlé par le paramètre Λ qui contient les informations sur le champ de vitesse extérieure et l'épaisseur de la couche limite.

L'obtention du profil de vitesse dans la couche limite nous permet de définir les épaisseurs caractéristiques de la couche limite en fonction de Λ et δ :

$$\frac{\delta_*}{\delta} = \int_0^1 (1 - f(\eta)) d\eta = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \quad (5.47)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 f(\eta)(1 - f(\eta)) d\eta = \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) \quad (5.48)$$

$$\frac{\tau_w \delta}{\mu u_e} = f'(0) = 2 + \frac{\Lambda}{6} \quad (5.49)$$

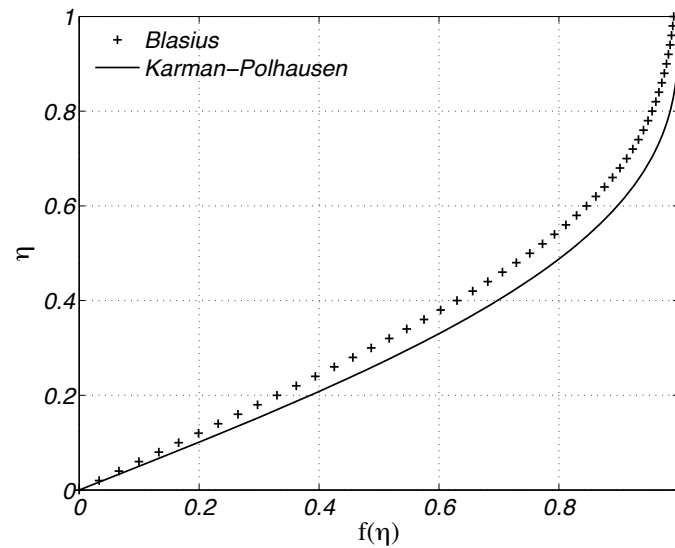


FIGURE 5.15 – Comparaison des profils de vitesse dans la couche limite se développant à proximité d'une paroi plane en l'absence de gradient de pression. La solution exacte représentée par des croix est obtenue en résolvant l'équation de Blasius tandis que la solution approchée est obtenue par la méthode de Karman-Polhausen.

En fonction des valeurs prises par le paramètre Λ , on modifie le champ de vitesse extérieure. Plusieurs cas particuliers peuvent être envisagés :

$\Lambda = 0$

La définition de Λ proposée à l'équation (5.45) montre que $\Lambda = 0$ implique $du_e/dx = 0$. Ceci décrit deux cas particuliers :

1. extremum local : Λ peut s'annuler localement pour une valeur x_0 donnée. Dans ce cas, en x_0 l'écoulement atteint une valeur extrême.
2. gradient de pression nul : si Λ est nulle pour tout x , on est dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane sans gradient de pression longitudinal.

Dans le cas d'une couche limite se développant sur une plaque plane en l'absence de gradient de pression, l'équation de Blasius nous a permis d'obtenir la solution exacte du profil de vitesse (équation 5.23). La figure 5.15 permet de comparer qualitativement la précision de la méthode approchée. Sur cette figure, la solution exacte de Blasius est représentée par des croix tandis que la fonction

$$f(\eta) = 1 - (1 - \eta)^3(1 + \eta)$$

est tracée en trait plein. Il faut bien voir que l'accord est remarquable étant donné la simplification réalisée par les méthodes intégrales comparé aux outils mis en œuvre pour résoudre l'équation de Blasius.

Décollement de la couche limite

La théorie de la couche limite cesse d'être valable lorsque l'écoulement n'adhère plus à la paroi. Si le gradient de pression adverse est trop important, l'écoulement externe à la couche limite ralentit, les contraintes dans le fluide diminuent et finalement la contrainte pariétale s'annule,

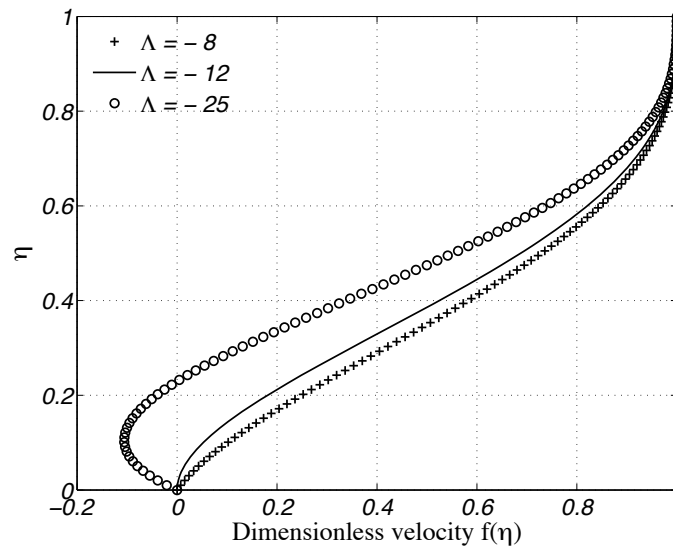


FIGURE 5.16 – Profil de vitesse adimensionnée dans la couche limite en fonction de la valeur de Λ . Pour des valeurs de $\Lambda < -12$, la vitesse dans la couche limite devient négative ce qui n’a pas de sens physique pour un écoulement laminaire incompressible.

synonyme de décrochage de la couche limite. La couche limite laminaire est très sensible au gradient de pression adverse, le décollement intervient très rapidement. Par exemple, le simple fait de créer un écoulement ralentissant linéairement conduit inévitablement au décollement de la couche limite. En pratique, les écoulements transitent vers le régime turbulent avant de décoller. La couche limite turbulente, si elle augmente considérablement la contrainte à la paroi, a le mérite de mieux résister au décollement.

Le décollement a lieu lorsque le fluide cesse d’être en contact avec la paroi, c’est-à-dire que la contrainte pariétale s’annule :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Or on a vu que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_e}{\delta} f'(\eta)$$

La condition de décollement est donc obtenue pour :

$$f'(0) = a = 0$$

soit

$$\Lambda = -12$$

Le tracé de la fonction $f(\eta)$ pour des valeurs voisines de -12 permet de mettre en évidence le phénomène de décollement. La figure [5.16](#) montre le profil de vitesse adimensionnée pour des valeurs de Λ égales à -8 , -12 et -25 .

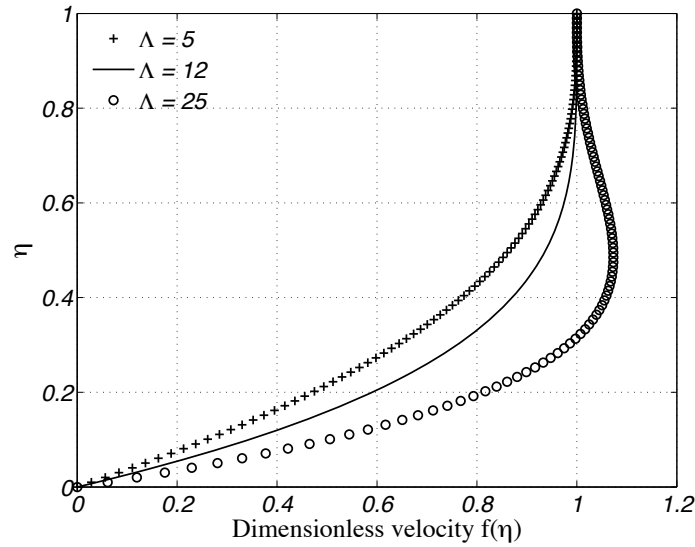


FIGURE 5.17 – Profil de vitesse adimensionnée dans la couche limite en fonction de la valeur de Λ . Pour des valeurs de $\Lambda > 12$, la vitesse dans la couche limite devient localement supérieure à la vitesse de l'écoulement externe ce qui est exclu dans une couche limite laminaire incompressible.

Lorsque $\Lambda = -12$, la tangente du profil de vitesse est verticale à l'origine ($\tau_w = 0$), ce qui représente la valeur limite que peut atteindre la vitesse à la paroi. Pour des valeurs supérieures de Λ (i.e. -8), le profil de vitesse "s'aplatit" à l'origine, le profil de vitesse est celui obtenu dans la couche limite lorsque l'écoulement externe est soumis à un gradient de pression raisonnable. Les valeurs de Λ inférieures à -12 montrent que la vitesse à proximité de la paroi peut devenir négative. Cette possibilité est exclue dans le cas d'une couche limite laminaire incompressible. Les valeurs inférieures à -12 n'ont donc pas de sens physique dans notre cas.

Limite de laminarité

La vitesse dans la couche limite laminaire au voisinage d'une paroi possède deux limitations :

1. la vitesse ne peut pas être négative (cf. paragraphe précédent)
2. la vitesse ne peut pas localement dépasser la vitesse de l'écoulement externe

Pour s'assurer que la vitesse reste toujours inférieure à la vitesse de l'écoulement externe, il faut s'assurer que

$$\forall 0 < \eta < 1, \quad f(\eta) < 1$$

Cette condition sur la distribution de vitesse $f(\eta)$ implique que :

$$\Lambda < 12$$

La figure 5.17 présente trois profils de vitesses différents obtenus pour des valeurs de Λ de 5, 12 et 25. $\Lambda = 12$ représente le cas limite où la vitesse dans la couche reste inférieure à la vitesse de l'écoulement externe. Au-delà de cette valeur, le profil passe par un maximum local dans la couche limite ce qui n'a pas de correspondance avec la réalité.

En conclusion, la distribution de vitesse obtenue par Polhausen dans une couche limite laminaire est valable pour des valeurs de Λ comprises entre -12 et 12 . $\Lambda = 0$ est un cas particulier correspondant à un écoulement au voisinage de la plaque plane en l'absence de gradient de pression longitudinal, lorsque Λ est positif, le champ de pression est favorable, il tend à accélérer et donc à maintenir la couche limite. Lorsque Λ est négatif, le gradient de pression est défavorable, la contrainte à la paroi diminue pour s'annuler lorsque $\Lambda = -12$. On voit que l'approche intégrale est simple à mettre en œuvre mais une étude attentive des solutions proposées s'impose pour définir les limites physiques du modèle.

On a donc déterminé un profil de vitesse intégrale qui dépend du paramètre Λ qui lui même dépend de l'épaisseur de la couche limite δ . On a besoin du profil de vitesse pour calculer l'épaisseur de couche limite mais l'expression que l'on a du profil de vitesse dépend de la couche limite. On va utiliser l'équation intégrale de Von Karman pour obtenir des équations supplémentaires et former un système faisant intervenir les autres grandeurs caractéristiques de la couche limite laminaire. On rappelle cette équation :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2}$$

En multipliant cette équation par la quantité $\theta u_e / \nu$, on obtient

$$\frac{u_e}{2} \frac{d(\theta^2/\nu)}{dx} + (H + 2) \underbrace{\frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}}_{(1)} = \underbrace{\frac{\tau_w \theta}{\mu u_e}}_{(2)} \quad (5.50)$$

Afin de relier cette expression au profil de vitesse de Polhausen, on exprime l'ensemble des termes qui interviennent dans l'équation (5.50) en fonction du paramètre Λ :

$$\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} \quad (5.51)$$

Pour cela on définit un paramètre de forme secondaire K et une quantité Z tels que

$$Z = \frac{\theta^2}{\nu} \quad (5.52)$$

$$K = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} = Z \frac{du_e}{dx} \quad (5.53)$$

K représente le terme (1) dans l'équation (5.50) et peut être exprimé en fonction de Λ grâce à l'expression (5.48) puisque :

$$\begin{aligned} \frac{K}{\Lambda} &= \frac{\theta^2}{\delta^2} \\ \text{d'où } K &= \Lambda \left[\frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (5.54)$$

$H = \delta_*/\theta$, le facteur de forme, intervient dans l'équation intégrale de quantité de mouvement, il faut également l'exprimer en fonction de Λ , ce qui peut facilement être fait grâce aux expressions (5.47) et (5.48) puisque

$$H = \frac{\delta_*}{\theta} = f_1(K) = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}}{\frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right)} \quad (5.55)$$

Le terme (2) de l'équation intégrale s'exprime tout aussi facilement à l'aide des expressions (5.49) et (5.48) :

$$\frac{\tau_w \theta}{\mu u_e} = \frac{\tau_w \delta \theta}{\mu u_e \delta} = f_2(K) = \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right) \frac{1}{63} \left(\frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144}\right) \quad (5.56)$$

Les fonctions $f_1(K)$ et $f_2(K)$ ont été définies pour alléger les écritures. Ces fonctions peuvent indifféremment être considérées comme dépendantes de K ou bien de Λ car pour $\Lambda \in]-12; 12[$, il existe une bijection entre ces deux grandeurs.

Grâce aux expressions que l'on vient d'établir, l'équation (5.50) prend la forme simplifiée

$$\begin{aligned} \frac{u_e}{2} \frac{dZ}{dx} + [f_1(K) + 2]K &= f_2(K) \\ \frac{dZ}{dx} &= \frac{1}{u_e} [2f_2(K) - 2f_1(K)K - 4K] \end{aligned}$$

En posant une dernière fonction

$$F(K) = 2f_2(K) - 2f_1(K)K - 4K$$

on obtient les équations qui permettent de déterminer Z en fonction de l'écoulement extérieur u_e et de sa dérivée du_e/dx

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(K)}{u_e} \quad (5.57)$$

$$K = Z \frac{du_e}{dx} \quad (5.58)$$

L'équation (5.57) peut en général être facilement intégrée entre le point d'arrêt de l'écoulement x_0 (début de la couche limite) et la section courante x . Afin de réaliser cette intégration, il est nécessaire de connaître les grandeurs $Z_0 = Z(x_0)$ et $K_0 = K(x_0)$.

L'équation (5.57) donne la relation entre K et u_e

$$F(K) = u_e(x) \frac{dZ}{dx}$$

Au point d'arrêt de l'écoulement sur un profil, on a $u_e(x_0) = 0$ et la quantité $du_e(x_0)/dx$ est finie et non nulle d'où

$$F(K_0) = u_e(x_0) \frac{dZ}{dx} = 0$$

La racine de F est égale à $K_0 = 0.0770$ soit $\Lambda_0 = 7.052$. On en déduit d'après (5.58)

$$\begin{aligned} Z_0 &= \frac{K_0}{du_e(x_0)/dx} = \frac{0.0770}{du_e(x_0)/dx} \\ \frac{dZ}{dx} &= -0.0652 \frac{d^2 u_e(x_0)/dx^2}{(du_e(x_0)/dx)^2} \end{aligned}$$

Le diagramme présenté figure 5.18 illustre les étapes successives à suivre pour obtenir le profil de vitesse et les grandeurs caractéristiques de la couche limite à partir du profil de vitesse externe u_e et de sa dérivée du_e/dx :

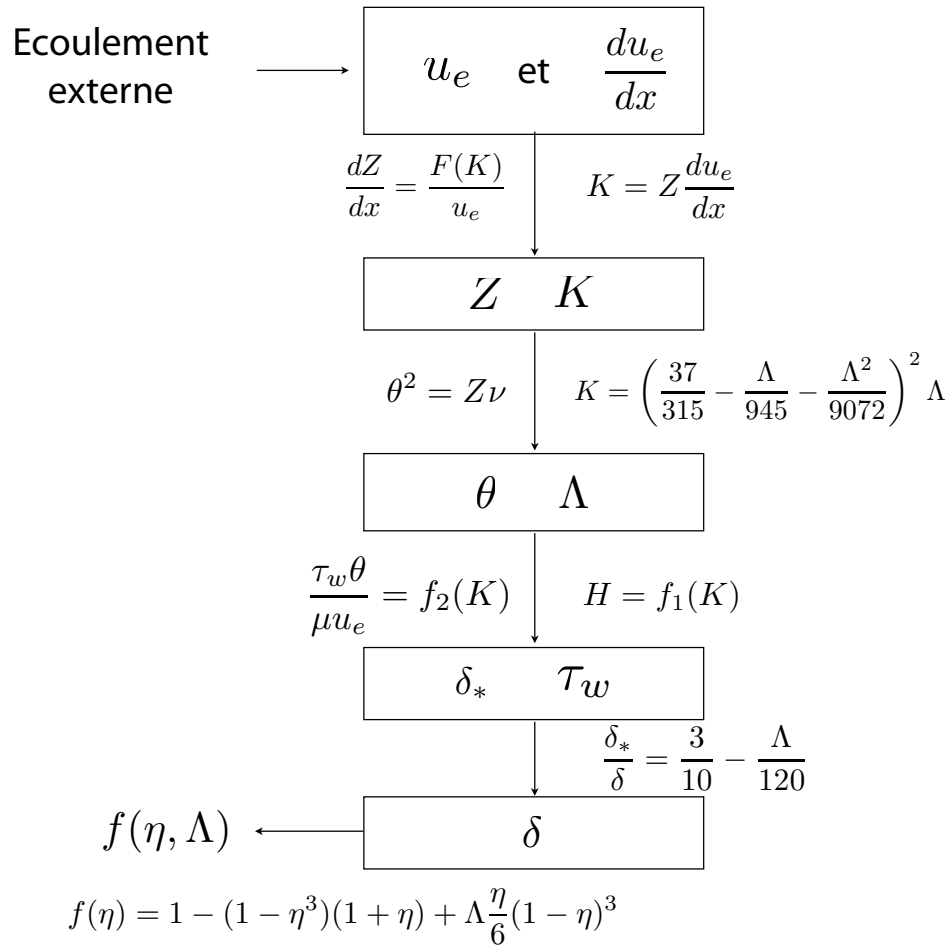


FIGURE 5.18 – Diagramme résumant les étapes successives permettant, à partir du champ de vitesse externe et de sa dérivée, d’obtenir le profil de vitesse dans la couche limite ainsi que toutes les grandeurs caractéristiques par la méthode approchée de Karman-Polhausen.

TABLE 5.1 – Comparaison des valeurs des grandeurs caractéristiques de la couche limite laminaire sur une plaque plane sans gradient de pression par la méthode intégrale de Karman-Polhausen et la méthode exacte de Blasius.

	Méthode intégrale	Équation de Blasius
θ/x	0.686	0.664
δ_*/x	1.752	1.73
$\tau_w/\rho u_e^2$	0.343	0.332
δ/x	5.84	5

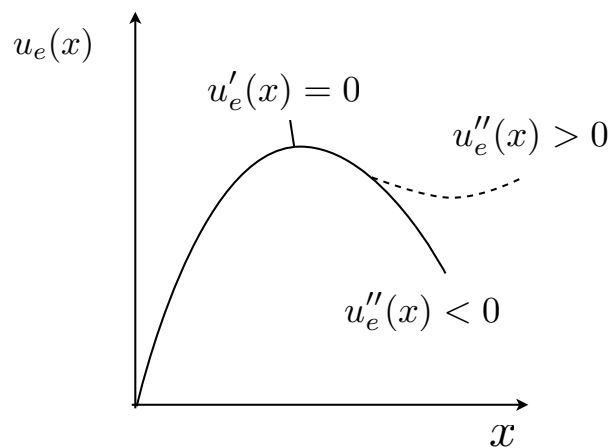


FIGURE 5.19 – Evolution typique de la vitesse externe le long d'un profil mince. La vitesse atteint une valeur maximale puis le signe de la dérivée seconde contrôle le décollement de la couche limite.

1. On intègre les équations [5.57](#) et [5.58](#) depuis le point d'arrêt Z_0 jusqu'au point courant x ce qui permet d'obtenir les expressions de Z et K .
2. Λ et θ sont calculés grâce respectivement aux équations [5.51](#) et [5.52](#)
3. La donnée de θ permet alors d'obtenir δ_* et τ_w
4. La dernière étape consiste à calculer δ puis le profil de vitesse réel $u(x,y)/u_e$

Ce processus permet d'estimer de façon relativement précise les grandeurs caractéristiques de la couche limite au voisinage d'une paroi et d'obtenir le profil de vitesse correspondant.

5.4 Critère de décollement de la couche limite

Nous avons vu précédemment que le décollement de la couche limite était réalisé lorsque $\Lambda = -12$. Après que la vitesse externe ait atteint son maximum (Figure [5.19](#)) la valeur du paramètre

Λ va décroître progressivement avec la vitesse externe. La dérivée seconde de $u_e(x)$ contrôle l'évolution de Λ conduisant ou non au décollement.

Expérimentalement, on montre qu'en amont du point de décollement, le profil de vitesse est tel que $\Lambda = -10$ d'où

$$\begin{aligned} K &= -0.1369 \\ F(K) &= 1.523 \end{aligned}$$

En dérivant l'équation 5.58 et en injectant la dérivée de Z dans l'équation 5.57, on obtient une relation entre l'évolution de la vitesse externe u_e et les grandeurs $F(K)$ et K

$$F(K) = u_e \frac{dZ}{dx} = -K \frac{u_e u_e''}{u_e'^2} = 1.523$$

Un critère nécessaire apparaît à la vue de ces résultats. Pour que la couche limite reste attachée à la paroi il faut que

$$\frac{d^2 u_e}{dx^2} > 0$$

La figure 5.19 illustre les deux évolutions possible de la vitesse le long du profil. Si la dérivée secondaire de la vitesse est négative ou nulle, la couche limite va naturellement se détacher. Il est nécessaire d'avoir une dérivée seconde positive pour éviter le détachement.

Ceci montre que même une lente décroissance linéaire de la vitesse le long du profil conduit inévitablement au décollement de la couche limite. La couche limite laminaire se révèle être extrêmement sensible au moindre gradient de pression adverse (i.e. qui tend à diminuer la vitesse de l'écoulement). La couche limite turbulente, si elle augmente significativement la contrainte sur la paroi, résiste beaucoup mieux aux gradients de pression élevés le long du profil. Dans la pratique, un grand nombre de couche limite transitent vers le régime turbulent avant de décoller (sauf cas où l'on cherche à maintenir la couche limite laminaire pour réduire la traînée de frottement). On s'intéresse donc dans le chapitre suivant aux propriétés de la couche limite turbulente.

Exercice 5.1

Estimer l'épaisseur de la couche limite au bout d'une plaque de 1 m plongée dans un écoulement d'air à la vitesse de 5 m/s. On prendra pour l'air une viscosité dynamique égale à $1,76 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et une masse volumique égale à $1,205 \text{ kg/m}^3$.

Chapitre VI

Introduction aux couches limites turbulentes

Les écoulements turbulents sont des phénomènes physiques difficiles à décrire, à comprendre et à modéliser. Ceci pour plusieurs raisons. Premièrement, ils mettent en jeu des structures fluides de tailles très différentes, chacune ayant sa propre dynamique. Les grandes échelles sont liées aux grandeurs moyennes de l'écoulement tandis que les échelles de Kolmogorov, plus petites échelles de la turbulence, sont liées aux frottements visqueux dans le fluide. Deuxièmement, les interactions entre les structures sont fortement non-linéaires. Les équations de Navier-Stokes mettent en évidence ces relations complexes qui font intervenir les grandeurs moyennes, les grandeurs fluctuantes, les gradients, les propriétés des fluides... Tous ces phénomènes rendent la prédiction de l'évolution des écoulements turbulents très difficile. Enfin, à partir d'une certaine échelle, la turbulence devient complètement tridimensionnelle. Aux grandes échelles, l'écoulement moyen impose en général une direction privilégiée : dans le cas de la couche limite turbulente, l'écoulement moyen le long de la plaque impose la direction des fluctuations de grande échelle. Aux petites échelles, l'effet de l'écoulement moyen est complètement estompé et le mouvement des petites structures est isotrope.

Dans ces conditions, il est illusoire de trouver des solutions analytiques exactes aux équations de la turbulence, même simplifiées dans le contexte de la couche limite. L'une des solutions est de résoudre l'écoulement de façon numérique sur un maillage du domaine. Cependant, la taille des petites structures est directement liée au nombre de Reynolds : plus le nombre de Reynolds est grand, plus les petites échelles sont petites. Ainsi, pour décrire ces petites structures sur un maillage, la taille des cellules doit approcher le micromètre. Dans le cas de la couche limite, la difficulté est encore plus grande car les gradients à la paroi sont intenses et leur résolution nécessite une discrétisation extrêmement fine dans la direction normale à la paroi. Enfin, l'écoulement étant fortement tridimensionnel à ces échelles, il est obligatoire de résoudre l'écoulement en trois dimensions ce qui représente au final un coût de calcul rédhibitoire pour les applications usuelles en ingénierie.

L'autre solution est de décrire la couche limite turbulente de façon macroscopique et approchée. Dans ce cas, les champs de vitesse et de pression ne sont pas calculés avec précision en tout point du domaine. Ils sont approchés suffisamment finement pour permettre d'évaluer correctement les propriétés macroscopiques de l'écoulement, à savoir la contrainte pariétale et l'épaisseur de

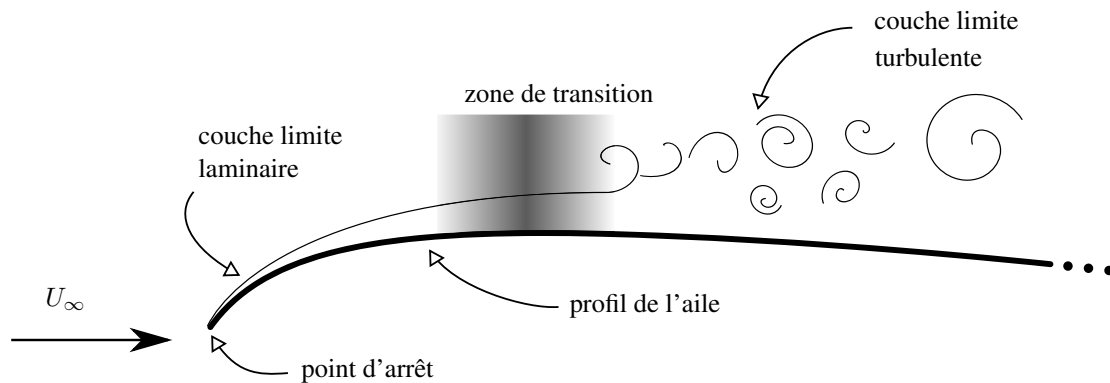


FIGURE 6.1 – Au bord d’attaque, l’écoulement comprend un point d’arrêt. Une couche limite laminaire se développe le long de la paroi puis transite en couche limite turbulente. L’emplacement de la zone de transition est très difficile à prédire.

couche limite. Cette démarche nécessite cependant une excellente compréhension physique de l’écoulement et des phénomènes qui interviennent, afin de modéliser l’écoulement de façon adéquate. Ce chapitre présente les pistes de modélisation ainsi que les approches macroscopiques qui permettent de mener à leur terme des calculs de couche limite turbulente.

On montre en particulier que la contrainte pariétale de la couche limite turbulente est beaucoup plus grande que celle de la couche limite laminaire. Dans l’optique de dimensionner un système fluide, où les couches limites jouent un rôle important, il est essentiel de prédire avec précision la zone de transition entre les écoulements laminaire et turbulent. Cet aspect de la mécanique des fluides fait toujours l’objet de recherches fondamentales visant à décrire et modéliser cette zone de transition. La difficulté étant que les caractéristiques de la transition dépendent de nombreux paramètres dont la dynamique est fortement non-linéaire. Il faut donc, en même temps qu’on l’observe, développer les outils pour la décrire et la caractériser.

1 Notions sur la transition laminaire-turbulent

Rigoureusement, la couche limite le long d’une paroi débute à un point d’arrêt de l’écoulement. Dans le cas de l’écoulement autour d’un profil d’aile, le bord d’attaque est le point d’arrêt à partir duquel la couche limite se développe (Figure 6.1). Au voisinage de ce point d’arrêt, l’écoulement à l’intérieur de la couche limite est laminaire bien que l’écoulement extérieur est en général fortement turbulent. Le chapitre précédent a montré que l’une des hypothèses d’existence de la couche limite est que le nombre de Reynolds de l’écoulement externe est grand devant 1. En s’éloignant du point d’arrêt, la couche limite se développe, c’est-à-dire que l’épaisseur de la couche limite et la vitesse de l’écoulement augmentent jusqu’à la transition vers le régime turbulent. Le comportement du fluide dans la couche limite et à l’extérieur est différent, on utilise des nombres de Reynolds différents dans ces deux régions.

Le nombre de Reynolds, Re , de l’écoulement externe est calculé en utilisant la vitesse moyenne de l’écoulement à l’infini U_∞ , la viscosité cinématique du fluide ν et une dimension caractéristique l de l’objet (dans le cas d’un profil d’aile, c’est en général la corde qui est choisie) :

$$Re = \frac{U_\infty l}{\nu} \quad (6.1)$$

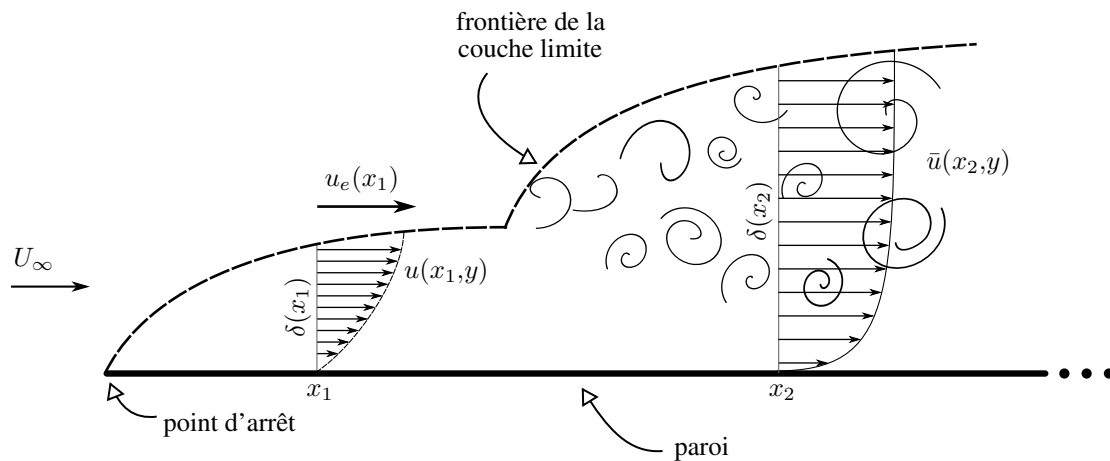


FIGURE 6.2 – Depuis le point d’arrêt, la couche limite laminaire se développe puis transite vers une couche limite turbulente dont le gradient de vitesse à la paroi est plus important.

Quelque soit la position sur l’objet étudié, ce nombre de Reynolds est toujours le même. Il possède une forte influence sur les caractéristiques de la couche limite car il définit la frontière qui structure cette couche limite.

La couche limite apparaît à proximité d’un point d’arrêt à la paroi. Son épaisseur $\delta(x)$ est initialement nulle et croît avec la distance au point d’arrêt. De même, la vitesse est nulle au point d’arrêt puis croît dans la couche limite. En fonction de l’abscisse le long de la paroi (généralement noté x), les dimensions caractéristiques de la couche limite évoluent, ainsi que les vitesses. Il est donc impossible de définir un unique nombre de Reynolds dans la couche limite. La couche limite est alors caractérisée par un nombre de Reynolds Re_x calculé à partir de la vitesse de l’écoulement extérieur $u_e(x)$, la viscosité cinématique ν du fluide et l’abscisse x le long de la paroi,

$$Re_x = \frac{u_e(x)x}{\nu}$$

Ce nombre de Reynolds croît lorsque l’on progresse le long de la paroi. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le facteur de forme $H = \delta_*/\theta$ diminue. Comme son nom l’indique, le facteur de forme caractérise la forme du profil de vitesse dans la couche limite : lorsque le facteur de forme diminue (le facteur de forme diminue de 2.591 dans la couche laminaire à une valeur voisine de 1 dans une couche turbulente), le profil de vitesse moyen se déforme et tend à intensifier le gradient à la paroi (voir Figure 6.2). De ce fait, la zone de transition est caractérisée par une forte augmentation du coefficient de frottement. À l’échelle globale, c’est donc la traînée de frottement qui augmente au moment de la transition.

Dans la pratique, on identifie l’emplacement de la transition par une valeur du nombre de Reynolds Re_x (autour de $5 \cdot 10^5$ pour une plaque plane) ou du facteur de forme (autour de 1). En réalité, la transition entre les écoulements laminaire et turbulent n’est pas ponctuelle ; elle s’étend sur une distance plus ou moins grande. Cette zone de transition est contrôlée par de nombreux paramètres (nombre de Reynolds extérieur, rugosité de la surface, gradient de pression. . .) dont les couplages rendent la localisation imprécise.

Le début de la zone de transition est caractérisé par l’apparition de phénomènes instationnaires au sein de l’écoulement, la turbulence apparaît par déstabilisation de l’écoulement laminaire.

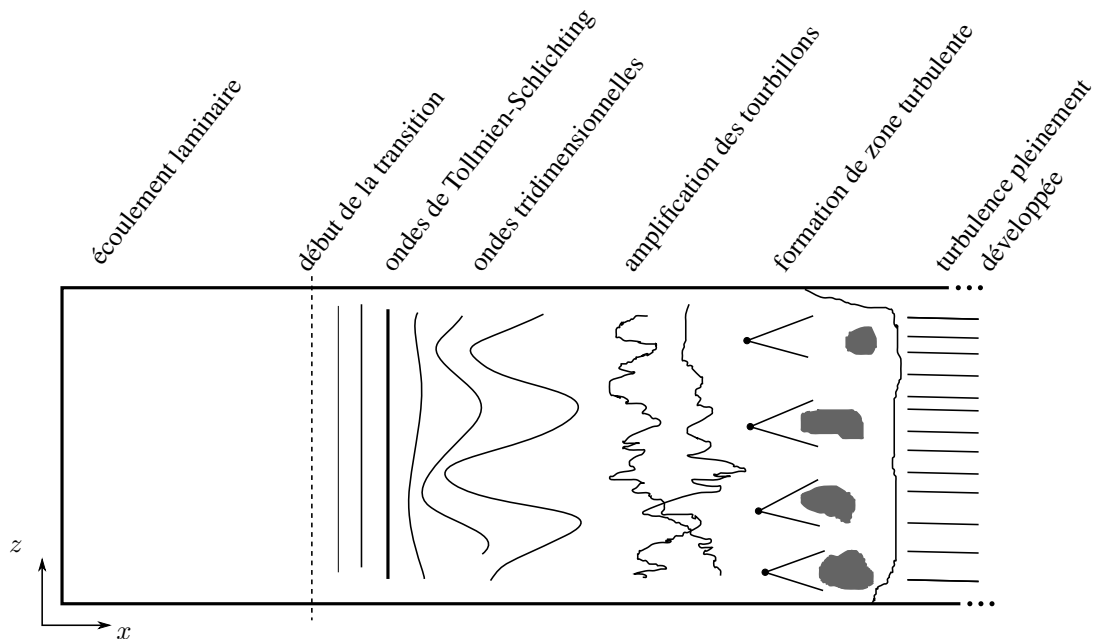


FIGURE 6.3 – Vue de dessus, la zone de transition d'un écoulement le long d'une plaque plane comporte plusieurs zones. L'écoulement laminaire est déstabilisé et les structures instationnaires et tridimensionnelles apparaissent progressivement.

Les *ondes de Tollmien-Schlichting* décrites par la théorie des instabilités des écoulements laminaux permettent d'appréhender l'origine de la transition. La théorie repose sur le développement des équations de Navier-Stokes en petites perturbations. Ces ondes sont dans un premier temps bidimensionnelles sinusoïdales et se déplacent dans le sens de l'écoulement. Elles se déforment et deviennent tridimensionnelles pour finir par interagir. De façon aléatoire en espace et en temps, ces ondes éclatent sous forme de spots turbulents qui grossissent par un effet d'entraînement du fluide qui les entoure. Lorsque l'ensemble des spots occupe toute la couche limite, l'écoulement est devenu turbulent. De nombreux types de transition ont été identifiés en laboratoire, et sont caractérisés par l'apparition de structures dynamiques de fréquences et dimensions très variées. Il existe en réalité autant de transitions que de façons de déstabiliser un écoulement laminaire mais un nombre limité de paramètres permettent de jouer sur la localisation de la transition.

L'écoulement externe à la couche limite est caractérisé par le nombre de Reynolds Re défini par l'équation (6.1). Plus le nombre de Reynolds est grand, plus l'écoulement est turbulent, c'est-à-dire que les fluctuations de vitesse représentent un pourcentage de plus en plus grand de la valeur moyenne. Cette turbulence a un impact direct sur la transition laminaire-turbulent dans la couche limite. De façon générale, **toutes les perturbations que subit la couche limite laminaire favorisent la transition vers le régime turbulent**. La turbulence externe induit des fluctuations à la limite externe de la couche limite. L'effet de ces sollicitations est difficile à prévoir, rendant la localisation de la transition délicate.

La rugosité de la paroi induit, quant à elle, des fluctuations à la limite interne de la couche limite. La rugosité est définie comme la hauteur moyenne des imperfections d'une surface solide,

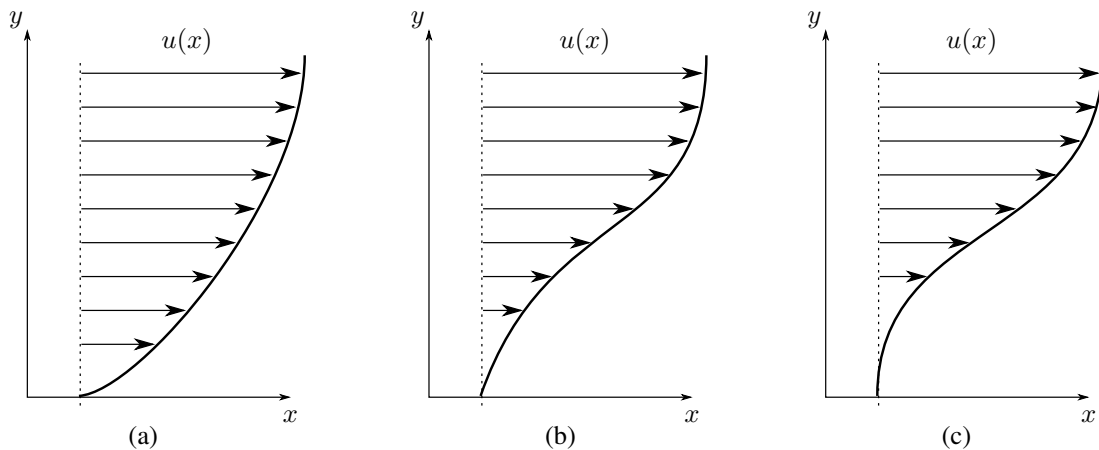


FIGURE 6.4 – Profil de vitesse pour trois gradients de pression différents : (a) gradient de pression favorable ou nul, (b) gradient de pression défavorable, le profil possède un point d'inflexion, (c) le gradient de pression est très défavorable, le profil de vitesse est à la limite du décollement.

c'est une aspérité distribuée le long de la paroi. Plus la rugosité est grande, plus l'écoulement est perturbé et plus la transition turbulente a lieu pour des nombres de Reynolds faibles. Des perturbations locales de l'état de surface de la paroi (petit trou causé par un impact, excroissance due à une soudure...) peuvent également favoriser la transition turbulente. À l'extrême, les expériences et les simulations numériques montrent que si l'aspérité est suffisamment grande, elle peut immédiatement provoquer la transition. L'effet est le même que pour la turbulence externe : la condition limite induit une petite perturbation qui déstabilise l'écoulement laminaire, le rapport entre l'amplitude de la perturbation induite et les instationnarités déjà présentes dans l'écoulement détermine la nature de la transition vers le régime turbulent. Ici encore, la prédiction de la transition en fonction de l'état de surface de la paroi est un problème compliqué qu'il est très difficile de reproduire expérimentalement ou numériquement. En particulier, ces paramètres sont difficiles à reproduire en soufflerie car une légère différence de rugosité produit des comportements très différents. De plus, la similitude du nombre de Reynolds est généralement mise en défaut lorsque l'on s'intéresse à la transition.

L'étude de la couche limite laminaire a montré le rôle que joue le gradient de pression sur la structure de l'écoulement à proximité d'une paroi. Le gradient de pression, que l'on a appelé *favorable* est un gradient de pression négatif qui favorise le maintien du régime laminaire. À l'opposé, **un gradient de pression positif a tendance à accélérer l'apparition de la transition vers le régime turbulent**. En présence d'un gradient de pression positif, les profils de vitesse possèdent un point d'inflexion qui témoigne de l'existence d'une couche de cisaillement d'autant plus intense que le gradient est fort. Ce cisaillement tend à déstabiliser l'écoulement laminaire et peut favoriser la transition. Les différentes formes de profil de vitesse en fonction du gradient de pression (Figure 6.4) ont été obtenues lors de l'étude de la couche limite laminaire par la méthode intégrale. La diminution du paramètre Λ simule une augmentation du gradient de pression, la vitesse à la paroi augmente d'autant jusqu'au décollement pour des valeurs de Λ inférieures à -12 . Sur l'extrados d'un profil d'aile, le gradient de pression est dans un premier temps négatif, l'écoulement accélère et la couche limite est laminaire. Sur la partie avale de l'aile (après le maximum de vitesse), le gradient de pression devient positif, la couche limite transite vers le régime turbulent avant l'apparition éventuelle du décollement.

Bien d'autres phénomènes interviennent dans la transition de régime, on citera entre autre la compressibilité, la courbure de la paroi, le refroidissement ou l'échauffement de la paroi. Cependant, il n'existe aucune théorie capable de prévoir la transition, seuls des *critères* de transition empiriques sont disponibles. La théorie de l'instabilité des écoulements laminaires permet de savoir si une onde de fréquence est stable ou instable, et permet de calculer l'amplification des ondes instables. De nombreux travaux de recherche continuent d'étudier la transition turbulente en essayant dans un premier temps de décrire le plus finement possible les instabilités naissantes afin, dans un second temps, de mettre en évidence les couplages amplifiants les petites perturbations. L'objectif final étant d'être capable de prévoir la transition pour la contrôler.

2 Équations de la couche limite turbulente

2.1 Moyenne de Reynolds

Une couche limite turbulente est caractérisée par des fluctuations de la vitesse dans les trois directions. Ces fluctuations restent cependant faibles devant la valeur moyenne de la vitesse $\bar{u}$ dans la direction longitudinale. Afin de calculer la traînée d'un objet plongé dans un écoulement, les valeurs des perturbations ne sont pas essentielles. C'est la valeur moyenne de la vitesse qui est intéressante. La majorité des études concernant les écoulements turbulents reposent sur une décomposition des propriétés physiques en deux composantes, l'une moyenne, l'autre turbulente. Cette décomposition peut sembler naturelle mais elle est complètement arbitraire et la construction ainsi établie peut être éloignée de la réalité physique de l'écoulement instantané.

Toute propriété f de l'écoulement (vitesse, pression, masse volumique...) est décomposée en une grandeur moyenne $\bar{f}$ et une composante fluctuante f' :

$$f = \bar{f} + f'$$

où $\bar{f}' = 0$. La moyenne $\bar{f}$ est appelée la moyenne de Reynolds, c'est une moyenne temporelle définie en un point x par la relation :

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t_0 + t^*) dt^*$$

où t_0 est le temps du début des mesures. De cette définition, on déduit les propriétés de la moyenne. Si l'on considère deux grandeurs instationnaires f et g , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Lors de l'étude des écoulements turbulents, on s'intéresse en premier lieu aux composantes moyennes de la vitesse ($\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$) et de la pression ($\bar{p}$). L'évolution de ces grandeurs est régie

par les équations de Navier-Stokes moyennes. Le principe est rapidement présenté ici avec l'équation de continuité pour un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dans un premier temps, on prend la moyenne de cette équation :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}} &= \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ceci montre que la moyenne de la vitesse satisfait à l'équation de continuité. On écrit maintenant l'équation de continuité en remplaçant toutes les variables par la somme de leur moyenne et de leur partie fluctuante. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u} + u'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} + v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w} + w'}{\partial z} &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}}_{=0} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dans le cas de l'équation de continuité, les équations des moyennes et des parties fluctuantes sont indépendantes. Pour obtenir le champ moyen, il est inutile de connaître les parties fluctuantes.

En procédant de la même manière avec les équations de conservation du moment, on obtient pour chaque composante i et avec la notation d'Einstein :

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{(1)} - \underbrace{\rho \overline{u'_i u'_j}}_{(2)} \right) \quad (6.4)$$

Le problème fondamental de la turbulence apparaît ici. Les valeurs moyennes de l'écoulement ne sont pas indépendantes des parties fluctuantes. Les *tensions de Reynolds* $-\rho \overline{u'_i u'_j}$ interviennent dans les équations moyennées. Elles sont regroupées sous la forme d'un tenseur dit de Reynolds. Ce tenseur est symétrique. Elles proviennent de la non-linéarité des termes de convection des équations de Navier-Stokes. Physiquement, elles représentent la valeur moyenne des fluctuations (u'_i) des flux de quantité de mouvement ($\rho u'_j$) (voir Figure 6.5). L'équivalence entre une *quantité de mouvement* et une *force* permet de regrouper les tensions visqueuses (terme 1 de l'équation (6.4)) et les tensions turbulentes apparentes (terme 2 de l'équation (6.4)). Le qualificatif *tensions apparentes* est utilisé pour bien insister sur la différence de nature entre les tensions visqueuses et les tensions turbulentes. La viscosité est *une propriété du fluide* qui se manifeste par l'existence de forces dans le fluide lorsque celui-ci est soumis à des déformations :

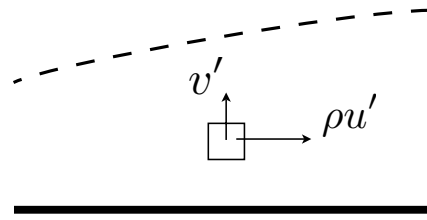


FIGURE 6.5 – Fluctuations de quantité de mouvement longitudinale dues aux fluctuations de vitesse transverse.

la viscosité existe lorsque le fluide est au repos. La turbulence est *une propriété du mouvement* qui disparaît avec lui.

Le système des équations de Navier-Stokes moyennées contient plus d'inconnues (trois composantes de la vitesse, la pression, les six composantes du tenseur symétrique de Reynolds) que d'équations, le système est ouvert. Pour fermer le système, on fait appel à des *modèles de turbulence* qui représentent l'effet de la turbulence sur le mouvement moyen.

Cette brève introduction montre le problème inhérent à l'étude de la turbulence. Les recherches sont encore nombreuses sur le sujet et de nombreux livres abordent de façon très complète cet aspect de la mécanique des fluides. La suite du chapitre s'attache à mettre en évidence la même problématique dans le contexte de la couche limite et à exposer les méthodes de résolution appropriées.

2.2 Équations de la couche limite turbulente

Le problème de la couche limite turbulente est abordé avec la même technique de décomposition vue précédemment. Toute grandeur est décomposée en la somme de sa moyenne et de sa partie fluctuante :

$$u = \bar{u} + u'$$

Comme dans le cas de la couche limite laminaire, les équations de la couche limite turbulente représentent une dégénérescence des équations de Navier-Stokes obtenues en faisant quatre hypothèses :

1. l'écoulement moyen est bidimensionnel,
2. l'écoulement moyen est stationnaire,
3. l'écoulement est incompressible,
4. le nombre de Reynolds de l'écoulement extérieur est grand devant 1.

Il est important de comprendre que ces hypothèses s'appliquent à l'écoulement moyen. L'écoulement instantané reste tridimensionnel et instationnaire tandis que l'écoulement moyen est bidimensionnel et stationnaire. Si l'on suppose que l'écoulement moyen est contenu dans le plan (x,y) , on obtient :

$$\bar{u} \neq 0, \bar{v} \neq 0, \bar{w} = 0$$

Les symétries par rapport à ce même plan imposent que :

$$\overline{u'w'} = 0, \overline{w'v'} = 0$$

On peut alors procéder exactement de la même façon que pour le cas laminaire, en comparant les ordres de grandeurs des différents termes des équations de Navier-Stokes moyennées, équations (6.2) et (6.4), d'où :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (6.5)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (6.7)$$

où la contrainte τ s'écrit :

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$$

Formellement, les équations de la couche limite turbulente et de la couche limite laminaire sont identiques. Seule la contrainte τ s'exprime différemment puisqu'elle comprend un terme *visqueux* et un terme *turbulent*. L'interprétation physique de la contrainte turbulente est la même que pour un écoulement turbulent général. La tension $-\rho \overline{u'v'}$ est due à une fluctuation de vitesse verticale v' qui emporte une quantité de mouvement longitudinale $\rho u'$.

Les équations de la couche limite turbulente ont donc trois inconnues : les composantes de la vitesse moyenne $\bar{u}(x,y)$, $\bar{v}(x,y)$ et la contrainte turbulente $\overline{u'v'}(x,y)$. La pression est une donnée extérieure, et malgré cela, tout comme les écoulements généraux, **les équations de la couche limite turbulente constituent un système ouvert qui nécessite un modèle de turbulence pour pouvoir être résolu.**

Les conditions aux limites du système sont très proches de celles vues pour le cas laminaire :

$$\text{à la paroi} \quad \bar{u}(x,0) = 0, \bar{v}(x,0) = 0$$

$$\text{à la frontière extérieure} \quad \bar{u}(x,\delta) = \bar{u}_e$$

Comme pour la couche limite laminaire, le gradient de pression se déduit du champ de vitesse extérieure :

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\rho \bar{u}_e \frac{d\bar{u}_e}{dx}$$

Les tensions de Reynolds sont également nulles aux limites de la couche limite. En particulier, à la frontière externe de la couche limite, l'écoulement extérieur est considéré comme idéal donc sans viscosité :

$$\text{à la paroi} \quad \overline{u'v'}(x,0) = 0$$

$$\text{à la frontière extérieure} \quad \overline{u'v'}(x,\delta) = 0$$

Les équations de la couche limite turbulente ainsi que les conditions aux limites ont une forme très proche des équations de la couche limite laminaire avec une difficulté supplémentaire créée par l'apparition de la contrainte turbulente. Comme à chaque fois en mécanique des fluides,

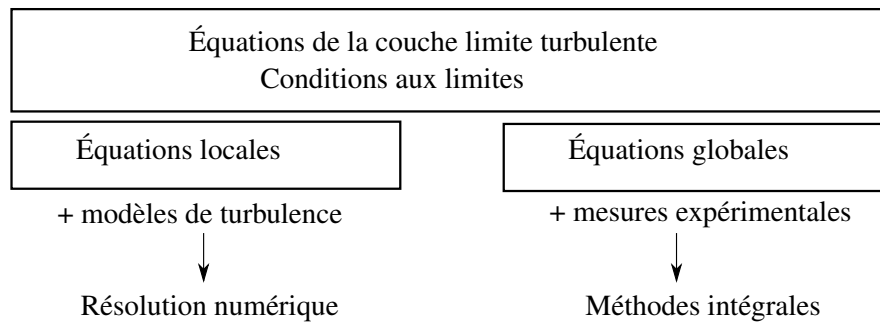


FIGURE 6.6 – À partir des équations de la couche limite, plusieurs stratégies sont possibles pour obtenir les propriétés de l'écoulement.

plusieurs approches sont possibles pour résoudre ces équations et obtenir les valeurs moyennes de l'écoulement dans la couche limite : les solutions analytiques, numériques ou intégrales.

L'approche analytique n'est pas réalisable à ce stade de complexité. Dans le cas laminaire, seules les situations où le gradient de pression est nul possèdent une solution analytique car les profils de vitesse sont auto-semblables. Le terme de contrainte turbulente dans les équations turbulentes exclut cette approche.

La figure 6.6 présente graphiquement les deux autres voies disponibles pour obtenir la structure de l'écoulement avec plus ou moins de précision. Dans les deux situations, il faut associer, un jeu d'équations incomplet à un modèle ou une loi empirique.

Numériquement, il est toujours possible de discrétiser les équations différentielles sur un maillage du domaine. Cependant, le système étant mal posé dès le départ, un effort supplémentaire est nécessaire pour fermer les équations. Il faut établir un modèle qui exprime les contraintes turbulentes en fonction des valeurs moyennes afin de réduire le nombre d'inconnues. Plusieurs modèles sont apparus au cours des dernières décennies afin de décrire la turbulence. Les modèles reposent en général sur des observations expérimentales et sur des corrélations entre les grandeurs fluctuantes et les grandeurs moyennes. De nombreux travaux de recherche continuent d'être menés dans le domaine pour obtenir des modèles de plus en plus précis. La section suivante présente trois modèles de turbulence par ordre chronologique. Ces modèles relativement simples offrent l'occasion de décrire plus précisément la structure de la couche limite turbulente.

Autrement, la couche limite turbulente peut être résolue de façon approchée par des méthodes intégrales. L'idée est de se donner un profil de vitesse dans la couche limite et des lois empiriques. Cette association permet de calculer les grandeurs macroscopiques que sont les épaisseurs caractéristiques et le frottement pariétal. La dernière section de ce chapitre présente ces méthodes intégrales.

3 Modélisation de la turbulence

Le problème de la résolution de la couche limite turbulente étant mal posé, il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires pour exprimer les contraintes de Reynolds en fonction des grandeurs moyennes de l'écoulement. Ces hypothèses doivent reposer sur des résultats

expérimentaux et sur une excellente compréhension des écoulements turbulents. On détaille le concept de viscosité turbulente qui permet de fermer simplement les équations de Navier-Stokes moyennées. L'évolution de ce concept conduit à la notion de longueur de mélange présentée ensuite. La dernière partie montre comment à partir d'une compréhension physique de la couche limite turbulente, on peut établir une loi de vitesse.

3.1 Viscosité turbulente

Les équations de la couche limite turbulente font apparaître le terme de contrainte turbulente $-\rho \overline{u'v'}$. Pour pouvoir résoudre les équations, il faut exprimer cette contrainte en fonction des grandeurs moyennes $\bar{u}$ et $\bar{v}$. La première solution est proposée par Boussinesq qui suggère de s'inspirer de l'expression de la contrainte visqueuse pour exprimer la contrainte turbulente. La contrainte totale τ est la somme de la contrainte visqueuse et de la contrainte turbulente :

$$\tau = \underbrace{\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{\text{viscosité}} \quad \underbrace{-\rho \overline{u'v'}}_{\text{turbulence}}$$

L'hypothèse est que l'on peut écrire la contrainte turbulente sous la forme :

$$-\rho \overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (6.8)$$

où μ_t est la **viscosité turbulente**, c'est-à-dire un coefficient de proportionnalité entre le gradient de la vitesse axiale moyenne $\bar{u}$ et le terme de contrainte turbulente. Cette expression permet d'exprimer un terme faisant intervenir les grandeurs fluctuantes en fonction d'une grandeur moyenne.

L'équation de conservation de quantité de mouvement selon l'axe x pour la couche limite (Equation (6.6)) s'écrit alors :

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + (\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \quad (6.9)$$

Cette expression est similaire à l'équation de la couche limite laminaire. Connaissant μ_t , les techniques utilisées pour résoudre la couche limite laminaire peuvent être réutilisées, en particulier l'équation de Blasius dans le cas où le gradient de pression est nul.

Comme souvent en modélisation de la turbulence, le problème a simplement été déplacé puisqu'il reste la question de déterminer la viscosité turbulente μ_t . Cette viscosité artificielle a l'inconvénient de ne pas être une caractéristique du fluide mais de la turbulence. La viscosité "naturelle" μ est une propriété du fluide. Même au repos le fluide possède sa viscosité propre qui varie avec la température. La viscosité turbulente caractérise la turbulence de l'écoulement, sa valeur dépend de l'écoulement, elle n'est donc pas calculable *a priori*.

Boussinesq a dans un premier temps fait l'hypothèse que la viscosité turbulente est la même dans toute la couche limite. En comparant les ordres de grandeur entre les contraintes visqueuses et turbulentes, on obtient une valeur approchée de μ_t . Cette hypothèse est cependant très forte car, au voisinage d'une paroi, la vitesse devient nulle et la turbulence disparaît. Inversement, à l'extérieur de la couche limite, les effets de la viscosité sont très faibles par rapport à la

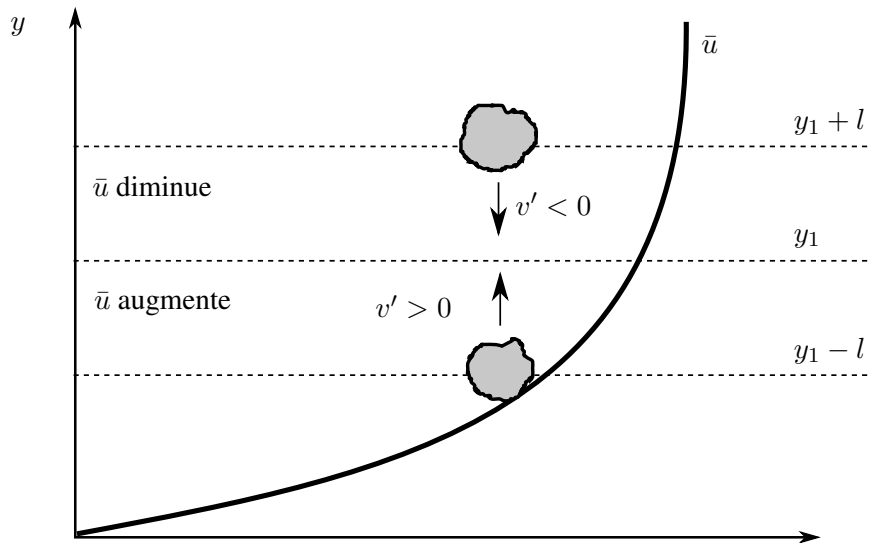


FIGURE 6.7 – Le modèle de longueur de mélange rend compte de la variation de la vitesse moyenne axiale lorsqu'une particule fluide est déplacée par une perturbation v' .

turbulence. Ceci rend ce modèle inadapté à l'étude des couches limites turbulentes au voisinage d'une paroi. En revanche, il présente de bons résultats pour l'étude des couches de cisaillement ou des courants marins, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de paroi.

Pour l'étude des couches limites turbulentes, il est nécessaire d'affiner ce modèle en reliant la viscosité turbulente à une propriété de l'écoulement.

3.2 Longueur de mélange

Le concept de longueur de mélange a pour objectif d'exprimer la viscosité turbulente en fonction des propriétés moyennes de l'écoulement dans le cas de l'étude des couches limites.

La première hypothèse suppose que le champ moyen de vitesse est constitué de lignes de courant parallèles les unes aux autres, à l'image d'un écoulement laminaire. Dans ces conditions :

$$\bar{v} \ll \bar{u}$$

La valeur de la vitesse est constante le long d'une ligne de courant et change d'une ligne à l'autre. Les fluctuations transverses de vitesse v' induisent des déplacements de grosses structures fluides entre les lignes de courant (Figure 6.7).

Soit une structure fluide évoluant à l'ordonnée $y_1 + l$ avec la vitesse $\bar{u}(y_1 + l)$, une perturbation de vitesse transverse $v' < 0$ fait descendre la structure fluide à l'ordonnée y_1 où la vitesse moyenne $\bar{u}(y_1)$ est plus faible. Lors de ce transfert, la structure fluide doit conserver sa quantité de mouvement tout en "adaptant" sa vitesse moyenne à sa nouvelle ordonnée. La vitesse moyenne va donc diminuer et la vitesse fluctuante va augmenter. Ainsi la différence de vitesse s'exprime comme :

$$\Delta u_1 = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \sim l \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y_1}$$

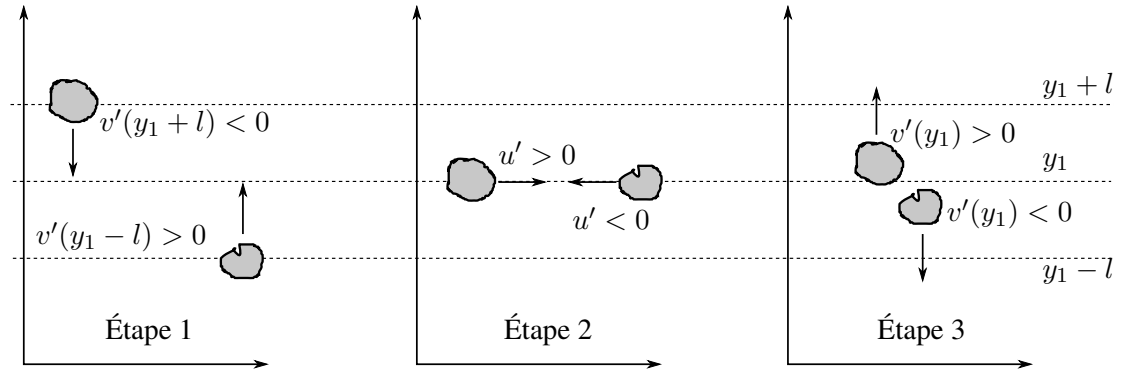


FIGURE 6.8 – Pour exprimer l'ordre de grandeur de la fluctuation v' , on étudie le mouvement d'une structure. Si les deux structures se rencontrent sur l'axe y_1 , leur choc transfère leur vitesse dans la direction normale.

le dernier terme étant le premier ordre de la série de Taylor de la vitesse moyenne en y_1 , et l est une longueur caractéristique. Le développement en série de Taylor impose donc que la longueur l soit petite devant l'épaisseur de la couche limite :

$$l \ll \delta$$

À l'inverse, si l'on considère une structure fluide à l'ordonnée $y_1 - l$ avec la vitesse $\bar{u}(y_1 - l)$ et une perturbation transverse $v' > 0$, la structure se déplace à l'ordonnée y_1 où la vitesse moyenne est supérieure. Il y a donc une différence de vitesse :

$$\Delta u_2 = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) \sim l \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y_1}$$

La norme de la fluctuation de vitesse axiale a donc pour moyenne temporelle :

$$\overline{|u'|} = \frac{1}{2} (|\Delta u_1| + |\Delta u_2|) = l \left| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y_1} \right| \quad (6.10)$$

Cette expression propose une relation entre les perturbations de vitesse et le champ moyen.

La différence de vitesse entre les deux ordonnées crée (si $v' < 0$) ou absorbe (si $v' > 0$) une fluctuation de vitesse u' en y_1 . Selon cette approche, le produit $u'v'$ est en permanence négatif. Pour exprimer la contrainte turbulente, il faut également une approximation de la fluctuation de vitesse transverse v' . Cette fluctuation est créée en y_1 lorsque deux structures fluides se rejoignent, l'une venant de l'ordonnée $y_1 + l$ et l'autre venant de $y_1 - l$ (Figure 6.8). La première structure a été déplacée par la vitesse $v'(y_1 + l) < 0$, en arrivant en y_1 elle possède donc une vitesse fluctuante $u' > 0$. En y_1 , elle rencontre la deuxième structure déplacée depuis $y_1 - l$ par la vitesse $v'(y_1 - l) > 0$. Cette structure absorbe une partie de la vitesse fluctuante pour compenser son déficit de vitesse axiale. Les deux structures s'entrechoquent donc avec une vitesse relative $2u'$ créant dans la direction perpendiculaire deux composantes v' positive et négative de part et d'autre de l'ordonnée y_1 . En fonction de leur ordre d'arrivée, les structures peuvent aussi s'éloigner à la vitesse $2u'$. Dans ce cas, le vide laissé entre les deux structures crée deux composantes verticales positive et négative de part et d'autre de l'axe y_1 .

Ce mécanisme montre que l'intensité de la fluctuation de vitesse v' est du même ordre de grandeur que u' . On écrit alors :

$$|\overline{v'}| = K_1 |\overline{u'}| = K_1 l \left| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y_1} \right|$$

où K_1 est une constante. On peut alors exprimer le terme de contrainte turbulente comme :

$$\overline{u'v'} = -K_2 \overline{u'} |\overline{v'}| = -K_2 K_1 l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = -l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

K_2 est une constante comprise entre 0 et 1. Le signe négatif signale que le produit $u'v'$ est toujours négatif et l_m est la longueur de mélange. Le sens physique de la longueur de mélange est identique à celui de l . D'après l'expression (6.10), la longueur de mélange est la distance qu'une structure fluide doit parcourir dans la direction transverse à la paroi pour que la différence entre sa vitesse moyenne initiale et sa nouvelle vitesse moyenne finale soit égale à la vitesse fluctuante moyenne.

Finalement, il est possible d'écrire la contrainte turbulente globale :

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

En réalité, la contrainte turbulente doit changer de signe avec le gradient de la vitesse. On préfère donc écrire la contrainte sous la forme :

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

Si l'on rapproche cette expression de l'équation proposée par Boussinesq (6.8), la théorie de la longueur de mélange permet d'exprimer explicitement la viscosité turbulente en fonction des grandeurs moyennes de la vitesse :

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right|$$

Ce modèle de turbulence est très bien adapté aux calculs de couches limites turbulentes. Il propose un modèle de fermeture pour les équations de Navier-Stokes moyennées simple à mettre en œuvre. Il reste à choisir la longueur de mélange l_m .

Comme la viscosité turbulente, la longueur de mélange n'est pas une propriété du fluide mais une caractéristique de l'écoulement. Pour chaque écoulement, il est possible de relier la longueur de mélange à une longueur caractéristique de l'écoulement comme une fraction de l'épaisseur de couche limite. En particulier, il est important que la longueur de mélange s'annule à la paroi où le mouvement transverse est impossible.

La simplicité du modèle souffre bien entendu de limitations qui peuvent être préjudiciables pour le calcul de certains écoulements. L'un des principaux inconvénients est que la longueur de mélange s'annule lorsque la vitesse moyenne atteint un extremum. Les résultats expérimentaux montrent que l'intensité de la turbulence ne diminue pas significativement lorsque le gradient de vitesse moyenne s'annule. Depuis ces premiers travaux, de nombreux modèles ont été proposés pour exprimer les contraintes turbulentes, chacun ayant ses avantages et limitations à prendre en considération au moment du choix d'un modèle.

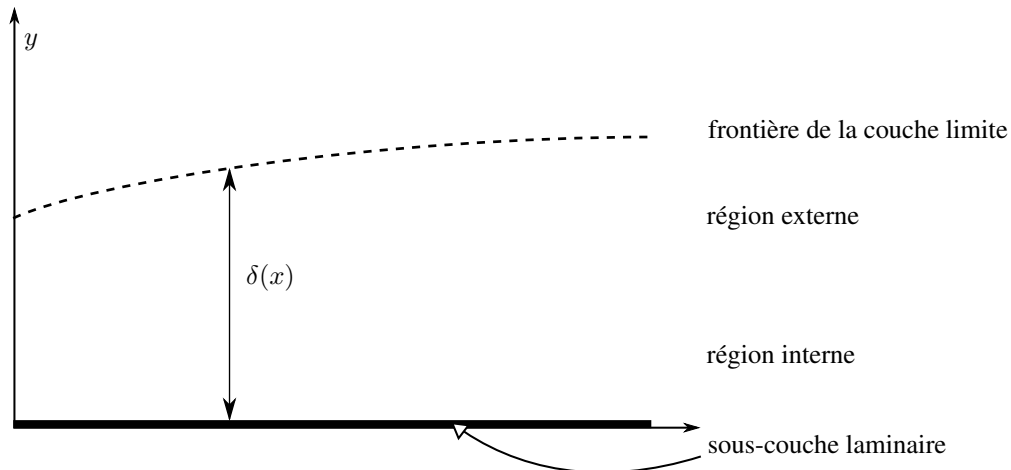


FIGURE 6.9 – La physique contrôlant l'évolution de la vitesse au voisinage d'une paroi change en fonction de la distance à la paroi. Dans la région externe, la turbulence domine. Dans la sous-couche laminaire, la viscosité est prépondérante.

4 Méthodes intégrales pour la couche limite turbulente

La section précédente présente les équations moyennées de la couche limite et explicite le modèle de longueur de mélange nécessaire à la résolution de ces équations. Cette approche permet de résoudre numériquement la couche limite turbulente avec une précision dépendante du nombre de points de maillage que l'on choisit de positionner dans l'épaisseur de couche limite. Cette dernière étant très faible, il faut une résolution spatiale très fine pour décrire l'évolution de la vitesse avec une précision raisonnable. Cette démarche tend à augmenter considérablement les temps de calcul.

Pour contourner cette difficulté, il faut connaître *a priori* et de façon approchée l'évolution de la vitesse dans la couche limite ce qui permet de ne pas résoudre numériquement la couche limite ou au moins une partie de celle-ci. Cette section montre comment est conçue une loi de vitesse à la paroi pour décrire l'évolution de la vitesse et comment, avec une approche intégrale, l'ensemble des propriétés de la couche limite peuvent être calculées "à la main".

4.1 Loi de distribution de vitesse

L'évolution de la vitesse moyenne dans l'épaisseur de la couche limite est contrôlée par différents phénomènes physiques en fonction de la distance à la paroi. Ceci amène à décomposer la couche limite en sous-couches dans lesquelles la physique est différente. Une première décomposition définit :

la région interne, proche de la paroi, dans laquelle la contrainte visqueuse est prédominante par rapport à la contrainte turbulente. Cette région est aussi appelée *sous-couche visqueuse*.

la région externe, éloignée de la paroi, dans laquelle la contrainte turbulente est prépondérante. C'est dans cette zone que l'essentiel du transport de quantité de mouvement est réalisé. Cette région est qualifiée de *pleinement turbulente*.

La sous-couche interne est encore divisée en plusieurs zones. La première est appelée **sous-**

couche laminaire. Cette sous-couche est quasiment insensible à l'écoulement extérieur et la vitesse moyenne dépend uniquement de la contrainte pariétale τ_w , des propriétés du fluide (ρ et μ) et de la distance y à la paroi : $\bar{u} = \bar{u}(\tau_w, \rho, \mu, y)$. Cette équation fait intervenir cinq variables et trois unités fondamentales. D'après le théorème de Vashy-Buckingham, il existe :

- deux nombres sans dimension u^+ et y^+ reliant les grandeurs du problème, et
- une fonction F telle que $u^+ = F(y^+)$.

On forme alors les deux nombres sans dimension :

$$u^+ = \bar{u} \left(\frac{\rho}{\tau_w} \right)^{1/2} = \frac{\bar{u}}{v_*}$$

$$y^+ = \frac{v_* \rho}{\mu} y$$

avec

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{la vitesse de frottement}$$

Le nombre sans dimension y^+ a la forme d'un nombre de Reynolds. Il donne une information de la distance à la paroi par rapport aux effets visqueux du fluide. Connaître la distance à la paroi dans l'absolu n'a pas d'intérêt pour décrire la couche limite, il faut connaître y^+ qui rend compte de la distance en fonction des propriétés du fluide.

Très près de la paroi, la contrainte τ est uniquement due à la viscosité et est pratiquement égale à la contrainte pariétale, soit :

$$\tau \sim \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim \tau_w$$

En introduisant les nombres sans dimension, on obtient :

$$\tau_w = \frac{\partial u^+ v_*}{\partial (y^+ \mu / \rho v_*)} = v_*^2 \rho \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \tau_w \frac{\partial u^+}{\partial y^+}$$

La vitesse adimensionnée satisfait donc à l'équation :

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1 \quad \text{et} \quad u^+(0) = 0$$

soit

$$\boxed{u^+ = y^+} \quad (6.11)$$

Dans la sous-couche laminaire, l'évolution de la vitesse est donc donnée par cette relation linéaire simple. Les expériences montrent que cette loi est valable pour $y^+ < 3$.

Dans la partie supérieure de la région interne, l'importance de la viscosité a fortement diminué (Figure 6.10), la vitesse moyenne ne dépend plus que de la contrainte pariétale et des propriétés du fluide : $\bar{u} = \bar{u}(\tau_w, \rho, y)$. Dans ces conditions, il existe un unique nombre sans dimension constant permettant de décrire le problème. Cette hypothèse conduit cependant à écrire la vitesse comme constante ce qui évidemment n'a pas de sens. Il est préférable d'écrire que la contrainte dans le fluide dépend de ces mêmes paramètres :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(\tau_w, y, \rho)$$

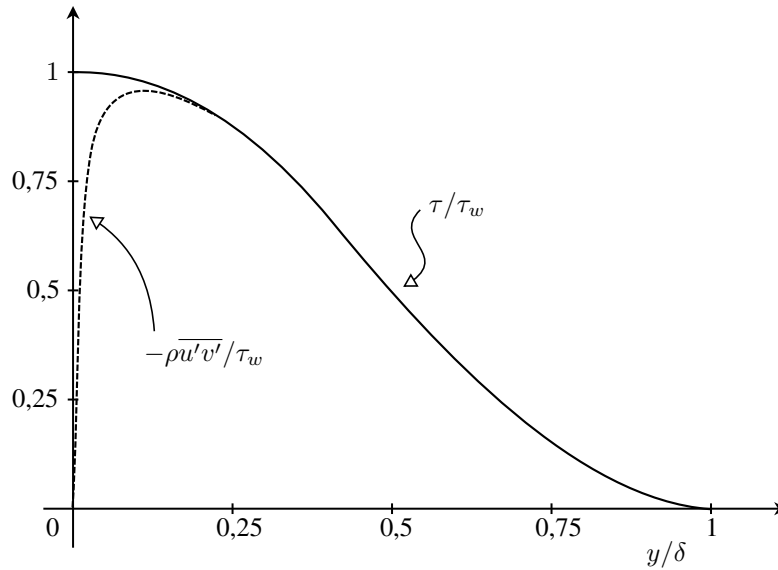


FIGURE 6.10 – Proche de la paroi, la contrainte turbulente est négligeable. Rapidement, l'ensemble de la contrainte est d'origine turbulente, l'effet de la viscosité devient négligeable.

Il existe donc un paramètre sans dimension constant :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{y}{v_*} = \text{cste}$$

En utilisant les nombres sans dimension u^+ et y^+ , on obtient :

$$\frac{\frac{\partial u^+ v_*}{\partial (y^+ \mu / \rho v_*)} \frac{y}{v_*}}{v_*} = \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \frac{y v_* \rho}{\mu} = y^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \text{cste}$$

soit

$$u^+ = \frac{1}{\chi} \ln y^+ + C \quad (6.12)$$

Cette région de la sous-couche interne est appelée **la sous-couche logarithme inertielle**. La vitesse moyenne adimensionnée évolue comme le logarithme de la distance y^+ . Pour un écoulement incompressible le long d'une plaque plane sans gradient de pression, les constantes d'intégration valent $\chi = 0,41$ et $C = 5$. Cette expression est valable pour des valeurs de y^+ allant environ de 40 à 400, au-delà, on entre dans la région externe.

Il est finalement possible de décomposer la sous-couche interne en trois régions : (1) près de la paroi, dans la sous-couche visqueuse la vitesse suit la loi linéaire donnée par l'équation (6.11), ensuite (2) une région tampon assure la transition entre les phénomènes visqueux proche de la paroi et les phénomènes inertiels, enfin (3) dans la sous-couche logarithme inertielle la vitesse suit l'évolution donnée par l'équation (6.12).

Une loi de paroi est une équation de description du profil de vitesse moyenne dans la couche limite. Elle permet d'obtenir la vitesse en fonction de la distance à la paroi sans avoir besoin de

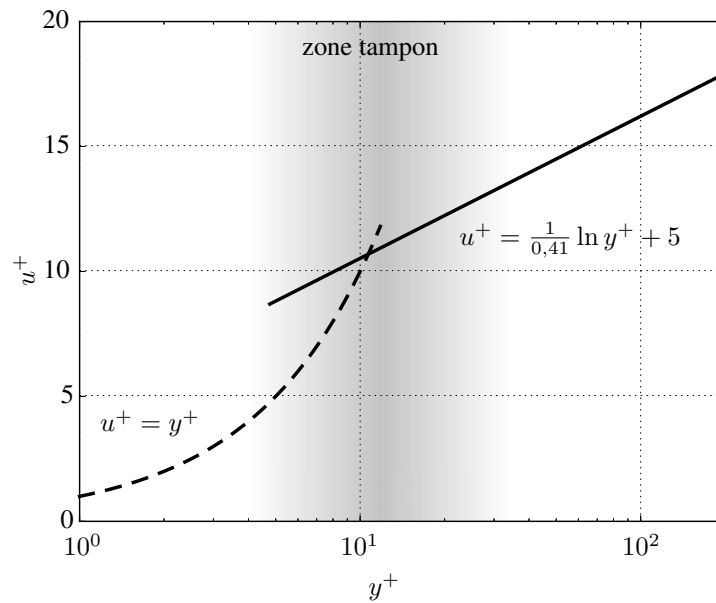


FIGURE 6.11 – Dans la sous-couche laminaire ($y^+ < 3$), l'évolution de la vitesse adimensionnée est laminaire. Au-delà, la vitesse suit la loi logarithmique.

la calculer. Une loi de paroi doit donc, pour représenter convenablement la vitesse, suivre les deux lois précédentes dans les sous-couches respectives.

Au-delà de la région interne, **la région externe représente entre 80 et 90% de l'épaisseur de la couche limite**. On considère que l'ordre de grandeur de la direction transverse est l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche : $y \sim \delta$. L'évolution de la vitesse n'est pas sensible à la présence de la paroi ; c'est principalement l'écoulement externe qui contrôle la distribution de vitesse. On exprime donc la vitesse dans la couche limite comme une différence par rapport à la vitesse u_e à l'extérieur de la couche limite : on parle de *loi de vitesse déficitaire*.

Dans cette sous-couche, les effets de la viscosité sont pratiquement inexistantes. La vitesse caractéristique de la turbulence v_* est identique à la vitesse caractéristique de la région interne. On s'intéresse à l'ordre de grandeur du gradient de vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &\sim \frac{v_*}{\delta} \quad \text{soit} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \frac{v_*}{\delta} \underbrace{\Phi' \left(\frac{y}{\delta} \right)}_{O(1)} \end{aligned}$$

Φ' est une fonction d'ordre 1 qui dépend de paramètres extérieurs à la couche limite. En intégrant cette relation entre le point courant dans la couche limite et l'extérieur de la couche limite

(à l'infini), on obtient :

$$\int_y^\infty \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy = \frac{v_*}{\delta} \int_y^\infty \Phi' \left(\frac{y}{\delta} \right) dy \quad \text{puis avec } \eta = y/\delta$$

$$u_e - \bar{u} = v_* \underbrace{\int_{y/\delta}^\infty \Phi'(\eta) d\eta}_{\Phi(\eta)}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{u_e - \bar{u}}{v_*} = \Phi(\eta)$$

$\Phi(\eta)$ est la loi de vitesse déficitaire, c'est-à-dire la perte de vitesse dans la couche limite par rapport à la vitesse extérieure. Pour exprimer la fonction Φ , on s'attache à raccorder la loi de vitesse déficitaire de la région externe quand $\eta \rightarrow 0$ avec la loi de paroi de la région interne donnée par l'équation (6.12) quand $y^+ \rightarrow +\infty$. Le raccordement des lois de vitesse des deux régions se fait en égalant les gradients transverses des vitesses.

Pour la région interne, la fonction f lie les grandeurs adimensionnées :

$$u^+ = f(y^+)$$

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = f\left(\frac{yv_*}{\nu}\right) \quad \text{soit en dérivant par rapport à } y$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{v_*^2}{\nu} \frac{df}{dy^+}$$

Pour la région externe,

$$\frac{u_e - \bar{u}}{v_*} = \Phi\left(\frac{y}{\delta}\right) = \Phi(\eta)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{v_*}{\delta} \frac{d\Phi}{d\eta}$$

L'égalité des deux gradients conduit donc à l'expression

$$\frac{v_*^2}{\nu} \frac{df}{dy^+} = -\frac{v_*}{\delta} \frac{d\Phi}{d\eta}$$

$$\frac{v_* y}{\nu} \frac{df}{dy^+} = -\frac{y}{\delta} \frac{d\Phi}{d\eta}$$

$$y^+ \frac{df}{dy^+} = -\eta \frac{d\Phi}{d\eta}$$

Les deux variables y^+ et η sont indépendantes donc les deux membres de l'égalité précédente sont égaux à une constante près. On obtient donc les expressions :

$$f = K_1 \ln y^+ + K_2 = \frac{1}{\chi} \ln y^+ + C$$

$$\Phi = -K_1 \ln \eta + K_3 = -\frac{1}{\chi} \ln \eta + B$$

La première expression permet de retrouver la loi de paroi établie pour la sous-couche logarithmique inertielle. Cette loi reste donc valable quand $y^+ \rightarrow +\infty$ et est compatible avec un raccordement à la région externe.

La deuxième expression impose une condition sur la loi de vitesse déficitaire Φ lorsque $\eta \rightarrow 0$. La loi est déterminée à une constante près qui dépend des conditions de l'écoulement extérieur à la couche limite.

La loi de paroi et la loi de vitesse déficitaire permettent de décrire très précisément l'évolution de la vitesse moyenne dans la couche limite. Des résultats expérimentaux restent cependant nécessaires pour déterminer les constantes d'intégration qui jouent un rôle essentiel dans la précision des expressions. Ces lois permettent d'approcher au mieux la vitesse et donc de réduire la résolution spatiale nécessaire lors d'une simulation numérique. Cependant, ces fonctions restent relativement compliquées pour être utilisées analytiquement. Les méthodes intégrales utilisent des approximations moins rigoureuses pour décrire le profil de vitesse mais qui permettent une résolution directe des propriétés de la couche limite.

4.2 Méthode intégrale pour la couche limite turbulente

L'objectif principal de l'étude d'une couche limite est de calculer le coefficient de frottement ou la contrainte pariétale τ_w , d'un objet plongé dans un écoulement. Pour cela il est nécessaire de calculer les propriétés globales de la couche limite, c'est-à-dire l'évolution de son épaisseur δ , de son épaisseur de déplacement δ_* et de son épaisseur de quantité de mouvement θ , et de la vitesse moyenne longitudinale $\bar{u}$. On a donc cinq inconnues couplées. La méthode de résolution est semblable à celle utilisée pour la couche limite laminaire.

Les définitions des différentes épaisseurs fournissent deux équations :

$$\delta_* = \int_0^\delta 1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy \quad (6.13)$$

$$\theta = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \quad (6.14)$$

La troisième équation est l'équation intégrale de Von Karman. L'équation (5.35) obtenue dans le cadre de la couche limite laminaire reste valable dans le cas de la couche limite turbulente car aucune hypothèse relative à la nature de l'écoulement n'a été nécessaire pour l'établir :

$$\frac{d\theta}{dx} + (H + 2) \frac{\theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_e^2} \quad (6.15)$$

où $H = \delta_*/\theta$ est le facteur de forme et u_e la vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite.

Les deux dernières équations nécessaires à la résolution intégrale de la couche limite sont obtenues expérimentalement. Pour chaque configuration, on cherche les lois qui approchent le mieux les mesures de vitesses et de coefficients de frottement. Ces lois sont en général très restrictives. Elles sont valables pour une configuration donnée dans une certaine gamme de nombres de Reynolds. Ces lois donnent la vitesse moyenne adimensionnée en fonction de la distance adimensionnée :

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

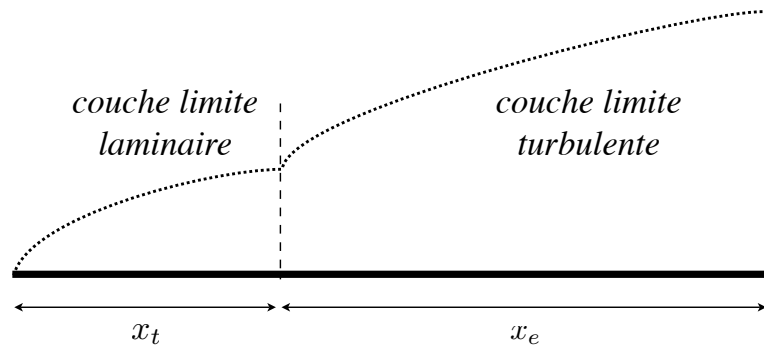


FIGURE 6.12 – Schéma représentant la transition entre une couche limite laminaire et turbulente et les longueurs correspondantes x_t et x_e .

Si la fonction f approche au mieux le profil de vitesse, elle ne permet pas en général de calculer la contrainte pariétale en calculant le terme $\partial \bar{u} / \partial y$. Il est nécessaire de se donner une deuxième loi expérimentale qui exprime la contrainte pariétale τ_w en fonction du nombre de Reynolds Re_x .

Pour améliorer la précision des calculs, il faut utiliser des lois empiriques élaborées qui rendent les calculs analytiques compliqués. Cependant, avec ces lois, il est possible d'obtenir les propriétés de la couche limite avec une précision de 5%. De nombreuses lois existent dans la littérature en fonction de la géométrie étudiée et des nombres de Reynolds rencontrés. Étant donnée la complexité de la turbulence, il est remarquable de pouvoir approcher avec une relativement grande précision les propriétés macroscopique d'une couche limite turbulente.

En mélangeant les notions de transition et de méthode intégrale, on peut résoudre la couche limite qui se développe au voisinage d'une paroi.

Exercice 6.1

Les mesures de profils de vitesse dans la couche limite sur une plaque plane peuvent être approchées par la loi :

$$\frac{\bar{u}}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (6.16)$$

pour des nombres de Reynolds compris entre $5 \cdot 10^5$ et 10^7 , c'est-à-dire pour des niveaux de turbulence relativement faibles. Cette expression est une bonne approximation du profil de vitesses mais elle ne peut pas être utilisée pour calculer la contrainte pariétale définie par $\tau_w = \mu (\partial \bar{u} / \partial y)_{y=0}$. En effet, la dérivée de la loi en puissance 1/7ème tend vers l'infini en $y = 0$, il est donc nécessaire de se donner une loi d'évolution du coefficient de frottement à partir de résultats expérimentaux. Dans la même gamme de nombres de Reynolds et pour une plaque plane, le coefficient de frottement est correctement approché par l'expression :

$$C_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho u_e^2} = 0,0456 \left(\frac{\nu}{u_e \delta} \right)^{0,25} \quad (6.17)$$

Exercice 6.2*Calcul de la traînée d'une plaque plane dans un écoulement turbulent*

Cet exercice a pour objectif de comparer la force de traînée exercée sur une plaque plane par une couche limite laminaire et turbulente.

Dans la couche limite laminaire, le profil de vitesse est donné par la relation

$$\frac{u}{u_e} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) \quad \text{où} \quad \eta = y/\delta.$$

Pour exprimer le profil de vitesse dans la couche limite turbulente qui se développe au voisinage de la plaque, on choisit la loi en puissance 1/7. Autrement dit, la vitesse est donnée par la relation

$$\frac{u}{u_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

De plus, la contrainte pariétale est donnée en fonction du nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de couche limite :

$$\frac{\tau_w}{\rho u_e^2} = 0.0225 Re_\delta^{-\frac{1}{4}}$$

Annexe A

Écoulements complexes

1 Définition des grandeurs complexes

Cette annexe présente brièvement la notion d'écoulement complexe, très utile dans le cadre des écoulements potentiels bidimensionnels. Par définition, ces écoulements possèdent un champ de vitesse à deux dimensions (u,v) . Dans le cadre des écoulements potentiels, ce champ de vitesse peut être associé à deux fonctions ; la fonction potentielle ϕ et la fonction de courant ψ , telles que :

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}$$

L'objectif de l'approche par écoulement complexe est de profiter des facilités de calcul offertes par les nombres complexes pour décrire l'écoulement dans le plan complexe. La position physique (x,y) est alors définie dans l'espace complexe par le nombre z , tel que :

$$z = x + iy$$

De même, le potentiel complexe est défini par :

$$w(z) = \phi + i\psi$$

Connaissant le potentiel complexe, il est aisé de retrouver les deux composantes du champ de vitesse puisque :

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\&= \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{dw}{dz} &= u - iv\end{aligned}$$

Profitant de la formulation complexe, il est également possible d'écrire la dérivée du potentiel complexe comme :

$$\frac{dw}{dz} = q e^{-i\chi}$$

avec q la vitesse de l'écoulement et χ la direction de l'écoulement.

2 Transformée conforme de Joukowski

La transformée de Joukowski (notée f) associe à un nombre complexe z , le nombre complexe Z défini par :

$$Z = f(z) = z + \frac{R^2}{z}$$

avec R un nombre réel appelé le paramètre de la transformée. Cette opération transforme un cercle de rayon r centré en $(0,0)$ en une ellipse de demi-axes $r - R^2/r$ et $r + R^2/r$. En effet, le cercle de rayon r est défini, dans le plan complexe, par $z = re^{i\theta}$, d'où :

$$\begin{aligned} Z &= re^{i\theta} + \frac{R^2}{r}e^{-i\theta} \\ &= \underbrace{\left(r + \frac{R^2}{r}\right)}_X \cos \theta + i \underbrace{\left(r - \frac{R^2}{r}\right)}_Y \sin \theta \end{aligned}$$

Ainsi, la transformée de z satisfait à la relation :

$$\frac{X^2}{\left(r + \frac{R^2}{r}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(r - \frac{R^2}{r}\right)^2} = 1$$

c'est-à-dire une ellipse.

Un cas particulier est le cas où $r = R$. On a alors $Z = 2R \cos \theta$, c'est-à-dire le segment sur l'axe des abscisses entre $X = -2R$ et $X = 2R$. La transformée associe donc un cercle de rayon R à un segment de longueur $4R$. Ceci permet, connaissant la fonction potentielle dans l'espace (x,y) de retrouver facilement le potentiel dans le plan (X,Y) , par transformée de Joukowski. Inversement, si l'on connaît la fonction potentielle dans l'espace (X,Y) , la transformée inverse permet d'écrire la fonction potentielle dans l'espace (x,y) .

Dans l'espace (X,Y) , l'écoulement de vitesse U_∞ , au voisinage de la plaque plane de longueur $4R$, est l'écoulement uniforme dont le potentiel complexe est :

$$W(Z) = U_\infty Z$$

Dans le plan (x,y) , l'écoulement est celui autour d'un cercle de rayon R :

$$w(z) = W(f(z)) = U_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (\text{A.1})$$

ce qui permet d'écrire les fonctions potentielle et de courant pour un écoulement autour d'un cercle de rayon R (Figure A.1) :

$$\phi(r,\theta) = U_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad \text{et} \quad \psi(r,\theta) = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta$$

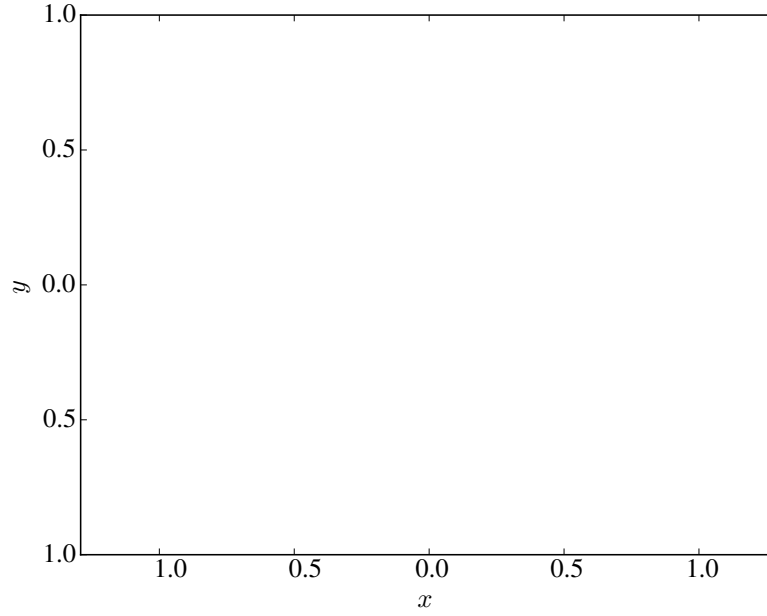


FIGURE A.1 – Lignes de courant autour d'un cercle de rayon 0.2, obtenues à partir de la transformée de Joukowski d'une plaque plane.

Avec la même démarche, il est possible de calculer l'écoulement autour d'un cylindre dont l'écoulement arrive obliquement avec un angle α . Il suffit de remplacer z dans l'équation (A.1) du potentiel complexe par $ze^{-i\alpha}$. La transformation conforme conserve les angles. L'angle d'incidence dans le plan (X,Y) sera donc le même.

La transformée de Joukowski permet également de calculer les lignes de courant autour d'une ellipse à partir du potentiel complexe. L'ellipse est définie dans le plan (X,Y) . Elle est l'image d'un cercle défini dans le plan (x,y) par l'équation :

$$z = R_0 e^{i\theta}$$

où R_0 est le rayon du cercle. Le potentiel complexe du cercle est calculé dans la section précédente (équation A.1) et s'écrit :

$$w(z) = U_\infty \left(z + \frac{R_0^2}{z} \right)$$

Le potentiel complexe de l'ellipse est alors $W(Z) = w(z)$. Il faut donc exprimer la transformée inverse de Joukowski :

$$z = f^{-1}(Z) = \frac{1}{2} \left(Z + \sqrt{Z^2 - 4R^2} \right)$$

avec R le paramètre de la transformée de Joukowski. Soit :

$$W(Z) = U_\infty \left[\frac{1}{2} \left(Z^2 + \sqrt{Z^2 - 4R^2} \right) + \frac{2R_0^2}{Z + \sqrt{Z^2 - 4R^2}} \right]$$

Avec $Z = re^{i\theta}$, la fonction de courant autour de l'ellipse est donnée par

$$\Phi(r, \theta) = \text{Im}[W(Z)]$$

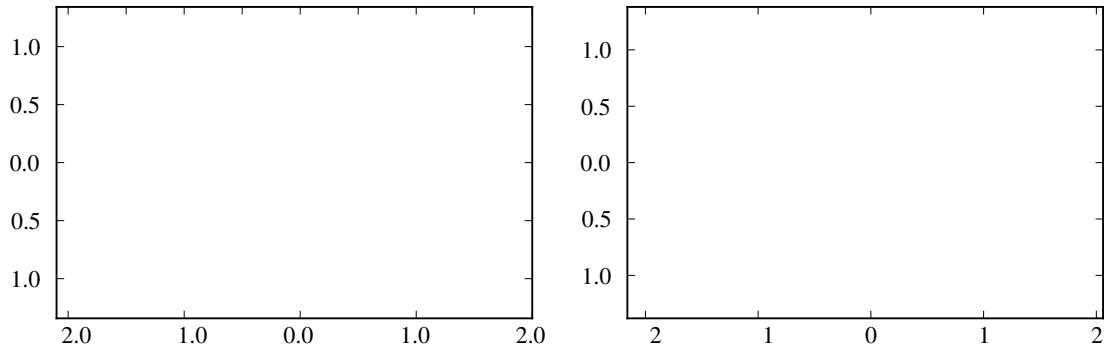


FIGURE A.2 – À gauche, le cercle de centre $z_0 = -0,05$ et de rayon $R_0 = 1,07$. La transformée de Joukowski (avec $R = 1$) de ce cercle donne un profil symétrique épais (à droite).

Ceci montre que l'on peut générer la fonction de courant associée à l'écoulement autour de n'importe quelle ellipse à partir du potentiel complexe d'un cylindre. Pour étudier les écoulements portants, il faut faire apparaître une circulation dans l'écoulement.

3 Lignes de courant autour d'un profil portant

Pour générer une force de portance, un profil plongé dans un écoulement uniforme doit avoir, soit une incidence non nulle, soit une cambrure. La transformée de Joukowski permet de générer des profils portants à partir d'un cercle. Pour cela, il faut déplacer le centre du cercle. On utilise toujours la transformée de Joukowski mais avec un cercle centré en $z_0 = x_0 + iy_0$ dont le rayon R_0 est différent du paramètre de Joukowski R . L'équation du cercle dans le plan complexe est alors

$$z = R_0 e^{i\theta} + z_0$$

On peut alors observer plusieurs configurations :

1. la partie imaginaire du centre du cercle est nulle. Le profil généré est symétrique et possède une épaisseur (Figure A.2 pour $z_0 = -0,05$).
2. la partie réelle du centre du cercle est nulle. Le profil n'a pas d'épaisseur mais possède une cambrure (Figure A.3 pour $z_0 = i0,3$).
3. le centre du cercle n'est sur aucun des axes du repère alors le profil généré par transformation de Joukowski est un profil cambré et épais (Figure A.4 pour $z_0 = -0,07 + i0,05$).

Le potentiel complexe de l'écoulement autour d'un cercle de rayon R_0 centré en $(0,0)$ est donné par l'équation :

$$w(z) = U_\infty \left(z + \frac{R_0^2}{z} \right)$$

Le décentrage en z_0 fournit le potentiel :

$$w(z) = U_\infty \left(z + z_0 + \frac{R_0^2}{z + z_0} \right)$$

Cependant, pour générer de la portance, il est nécessaire d'introduire une circulation dans la

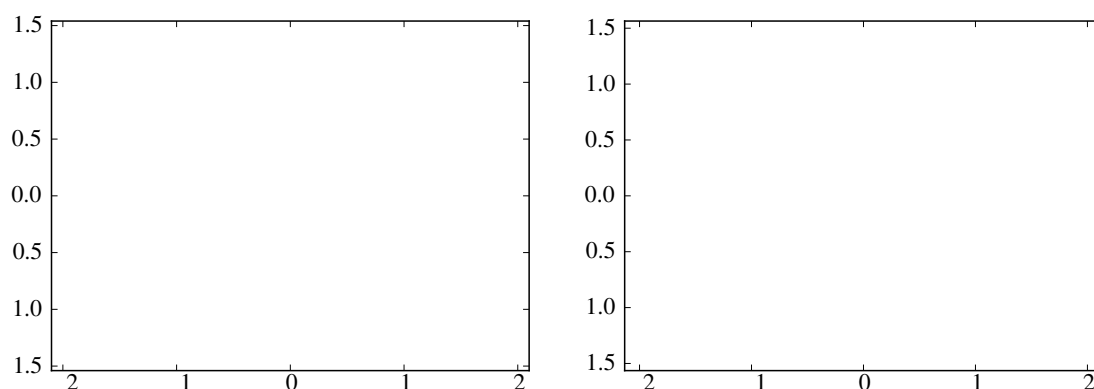


FIGURE A.3 – À gauche, le cercle de centre $z_0 = i 0,3$ et de rayon $R_0 = 1,07$. La transformée de Joukowski (avec $R = 1$) de ce cercle donne un profil cambré (à droite).

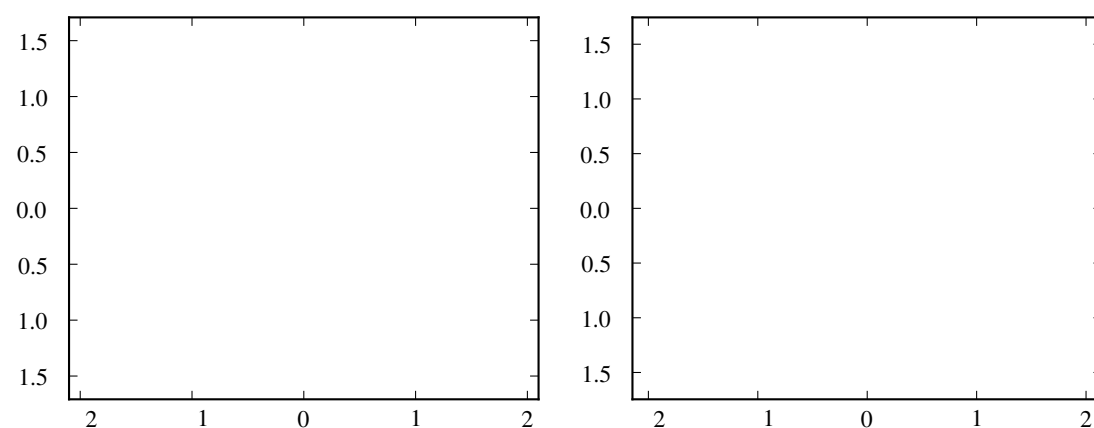


FIGURE A.4 – À gauche, le cercle de centre $z_0 = -0,07 + i 0,05$ et de rayon $R_0 = 1,07$. La transformée de Joukowski (avec $R = 1$) de ce cercle donne un profil cambré et épais (à droite).

fonction potentielle. On écrit donc le potentiel autour du cylindre comme :

$$w(z) = U_{\infty} \left(z + z_0 + \frac{R_0^2}{z + z_0} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z + z_0)$$

La circulation Γ est déterminée grâce à la condition de Kutta qui impose que le bord de fuite soit un point d'arrêt. La transformée de Joukowski concerne l'emplacement des points d'arrêt, on peut donc indifféremment calculer les points d'arrêt dans l'espace (x, y) ou dans l'espace (X, Y) . Pour le cercle, la vitesse complexe $u - iv$ est obtenue en différenciant le potentiel complexe :

$$\frac{dw}{dz} = U_{\infty} \left(1 - \frac{R_0^2}{(z + z_0)^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi(z + z_0)}$$

Le point d'arrêt du profil est à l'intersection du profil et de l'axe réel. On peut donc écrire :

$$z_F + z_0 = R_0 e^{-i\beta}$$

avec z_F le point de fuite du profil. Il faut donc que la vitesse s'annule au point de fuite soit :

$$\begin{aligned} U_{\infty} \left(1 - \frac{R_0^2}{(z_F + z_0)^2} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi(z_F + z_0)} &= 0 \\ U_{\infty} \left(1 - \frac{R_0^2}{R_0^2 e^{-2i\beta}} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi R_0 e^{-i\beta}} &= 0 \\ U_{\infty} (1 - e^{2i\beta}) - i \frac{\Gamma}{2\pi R_0} e^{i\beta} &= 0 \\ U_{\infty} (1 - \cos 2\beta) + \frac{\Gamma}{2\pi R_0} \sin \beta - i \left(U_{\infty} \sin 2\beta + \frac{\Gamma}{2\pi R_0} \cos \beta \right) &= 0 \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée si :

$$\Gamma = -4\pi U_{\infty} R_0 \sin \beta$$

En fixant la position du centre (z_0 et donc β) et le rayon R_0 du cercle, on peut calculer le potentiel complexe $w(z)$ du cercle. Avec la transformation inverse de Joukowski, on exprime z en fonction de Z pour obtenir le potentiel complexe $W(Z)$ du profil portant.

4 Théorème de Blasius

Le théorème de Blasius permet de démontrer rigoureusement le théorème de Kutta-Joukowski, il s'appuie sur les écoulements complexes et le théorème Bernoulli.

Pour obtenir ce théorème, on reprend la notation de la vitesse complexe :

$$\frac{dw}{dz} = u - iv = q e^{-i\chi}$$

où q est le module de la vitesse et χ l'angle du vecteur vitesse. Avec ces notations, le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho q^2$$

avec p_0 la pression dynamique constante :

$$p_0 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$$

Dans le contexte des écoulements potentiels, la vitesse est tangente à la paroi du profil en tout point. L'angle χ définit donc également la direction de la paroi. Le vecteur tangent et le vecteur normal à la paroi du profil sont alors définis comme $\mathbf{t} = (\cos \chi, \sin \chi)$ et $\mathbf{n} = (\sin \chi, -\cos \chi)$. Ceci peut aussi s'écrire de façon complexe :

$$\mathbf{t} = e^{i\chi} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = -ie^{i\chi}$$

On cherche à exprimer la force $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ qui s'exerce sur un profil, soit :

$$\mathbf{F} = - \int_C p \mathbf{n} ds$$

avec ds un élément du contour de C .

Pour continuer à exprimer les grandeurs vectorielles comme des nombres complexes, on peut définir la force complexe :

$$F = F_x + iF_y$$

et l'élément de contour complexe :

$$dz = dx + i dy = \left(\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right) ds = \mathbf{t} ds = e^{i\chi} ds$$

La force F s'exprime alors comme :

$$F = F_x + iF_y = - \int_C p(\sin \chi - i \cos \chi) ds$$

Il est plus commode de travailler avec le conjugué de la force, soit :

$$\begin{aligned} \overline{F} &= F_x - iF_y = - \int_C p(\sin \chi + i \cos \chi) ds \\ &= -i \int_C p(\cos \chi - i \sin \chi) ds \\ &= -i \int_C p e^{-i\chi} ds = -i \int_C (p_0 - \frac{1}{2}\rho q^2) e^{-i\chi} ds \end{aligned}$$

L'intégrale sur l'ensemble du contour d'une constante p_0 est nulle. Il reste donc :

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= i \frac{\rho}{2} \int_C q^2 e^{-i\chi} ds \\ &= i \frac{\rho}{2} \int_C q^2 e^{-2i\chi} dz = i \frac{\rho}{2} \int_C (q e^{-i\chi})^2 dz \end{aligned}$$

soit :

$$F_x - iF_y = i \frac{\rho}{2} \int_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

Cette expression constitue le théorème de Blasius. Il permet d'exprimer la force en fonction du potentiel complexe.

Si on applique cette formule à l'écoulement autour d'un cylindre portant (c'est-à-dire avec une circulation), le potentiel complexe est :

$$w(z) = U_{\infty}z + U_{\infty}\frac{R^2}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\log z \quad \text{d'où}$$

$$\frac{dw}{dz} = U_{\infty} - U_{\infty}\frac{R^2}{z^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi z}$$

D'après le théorème de Blasius, la force s'exprime comme :

$$F_x - iF_y = i\frac{\rho}{2} \int_C \left(U_{\infty} - U_{\infty}\frac{R^2}{z^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi z} \right)^2 dz$$

Le développement du carré apporte des termes en z^{-4} . Or, d'après le théorème des résidus :

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{dz}{z^n} = 0 \quad \text{pour } n > 1$$

d'où :

$$F_x - iF_y = i\rho U_{\infty}\Gamma$$

soit le théorème de Kutta-Joukowski, $L' = \rho U_{\infty}\Gamma$.