



ÉCOLE CENTRALE PARIS

2^{ème} ANNÉE d'ÉTUDES

Enseignement de Sciences des Transferts :

MECANIQUE DES FLUIDES

Sébastien CANDEL

La majeure partie de ce document est issue d'un ouvrage publié par les éditions DUNOD
sous le titre MECANIQUE DES FLUIDES par Sébastien Candel.

©BORDAS, Paris, 1989 - 1995.

Réalisé dans le cadre du cours qui y est actuellement enseigné, le présent polycopié est strictement
réservé aux Elèves et aux Enseignants de l'Ecole Centrale de Paris ; en accord avec l'éditeur il est mis à
leur disposition par la Caisse de Secours des Elèves.

2003 - 2004

Tome 1

MECANIQUE DES FLUIDES

SOMMAIRE

Préface de Marcel Barrère	vii
Avant-propos	ix
Guide de lecture	xi
Table des matières détaillée	xiii
Nomenclature	xxi
CHAPITRE I : Introduction et principes fondamentaux	1
II : Cinématique	43
III : Rotation et déformation d'une particule fluide	55
IV : Théorèmes de transport	77
V : Equations fondamentales de la dynamique des fluides I.	87
VI : Equations fondamentales de la dynamique des fluides II.	117
VII : Bilans macroscopiques et approximation unidimensionnelle	127
VIII : Le théorème de Bernoulli et ses applications	137
IX : Bilans macroscopiques de quantité de mouvement	173
X : Ecoulement isentropique unidimensionnel avec changement de section	203
XI : Ondes de choc droites	229
XII : Ondes de choc obliques	255
XIII : Ecoulements dans les tuyères et les souffleries	267
XIV : Quelques solutions exactes des équations de Navier-Stokes. Ecoulements parallèles visqueux	281
XV : Analyse dimensionnelle	299
XVI : Introduction à la théorie de la couche limite	321
XVII : Couche limite laminaire en écoulement incompressible	341
XVIII : Couche limite laminaire en écoulement incompressible avec gradient de pression	371
XIX : Ecoulements turbulents	383
Tables d'écoulement	422
Bibliographie	433
Index thématique	441

AVANT-PROPOS

La mécanique des fluides est une science relativement ancienne, mais qui a connu dans les années récentes un essor remarquable. Ses développements théoriques et expérimentaux actuels sont passionnants et ses applications technologiques couvrent des gammes très vastes dans beaucoup de secteurs : énergie, exploration pétrolière, propulsion, aéronautique, espace, génie océanique, génie des procédés, biotechnologie, environnement, météorologie etc. Ainsi la compréhension et la maîtrise de la mécanique des fluides apparaissent particulièrement importantes pour les ingénieurs.

Ce livre est issu de l'enseignement dispensé depuis plusieurs années en deuxième année à l'Ecole Centrale Paris. Il contient une introduction à la mécanique des fluides et peut être adopté comme texte de référence pour un cours de base destiné à des étudiants de maîtrise ou à des élèves-ingénieurs en première ou deuxième année d'étude. Il ne suppose pas de connaissances préalables dans ce domaine. Pour aborder sa lecture il suffit d'avoir des notions d'analyse différentielle et vectorielle, de thermodynamique et de mécanique des milieux continus.

Pour écrire ce livre je me suis appuyé sur la littérature très abondante qui existe dans chacun des domaines abordés. Toutes ces sources sont citées en référence dans le texte et une bibliographie complémentaire est proposée à la fin du livre. Je me suis efforcé d'obtenir un maximum de cohérence et d'homogénéité dans l'exposé. L'accent est mis sur les problèmes rencontrés couramment dans les applications de l'ingénieur, mais la présentation garde un caractère fondamental. Un équilibre a été constamment recherché entre les discussions d'aspects qualitatifs, les considérations physiques, l'explication élémentaire des concepts, la modélisation, l'écriture mathématique rigoureuse des équations et leur résolution analytique.

L'objectif visé est de permettre une compréhension opérationnelle de ce qui est essentiel en mécanique des fluides. Pour cette raison, les analyses et les calculs sont développés de façon détaillée, trop peut-être au goût de certains. Ce choix devrait faciliter la lecture et éviter les difficultés techniques qui font souvent obstacle à la compréhension du sujet. Pour que le texte puisse tenir dans un nombre de pages limité, j'ai été amené à faire de nombreux compromis dans le choix de la matière et dans l'étendue des analyses mais les références de certains thèmes importants non retenus sont citées dans le texte. Le lecteur trouvera en particulier un exposé des problèmes de transferts thermiques et de mécanique des fluides anisotherme dans le livre de J. Taine et J.-P. Petit paru dans la même collection.

Les problèmes traités ici doivent apporter au lecteur une connaissance fondamentale solide et suffisamment diversifiée pour apprécier l'étendue du domaine et la variété des applications pratiques.

Pour aider le lecteur qui souhaiterait entreprendre une étude indépendante de la mécanique des fluides sans suivre un enseignement plus formel sur ce sujet, j'ai inclus un guide de

lecture comportant 13 séquences. Ces modules ne correspondent pas aux 19 chapitres qui composent le livre et toute la matière n'est pas couverte dans ce premier parcours. Le lecteur pourra en particulier passer rapidement sur un certain nombre de notions de base rappelées au chapitre I. Il pourra aussi parcourir les chapitres II et III. Les chapitres IV, V et VI méritent une étude plus approfondie, car, ils traitent des équations fondamentales de la mécanique des fluides et présentent des méthodes générales particulièrement utiles pour l'écriture de relations de bilan. Après avoir bien assimilé cette partie, le lecteur pourra aborder les chapitres VII, VIII et IX et voir comment on peut utiliser l'approximation unidimensionnelle et les bilans macroscopiques pour traiter des problèmes typiques rencontrés par l'ingénieur (écoulements dans des canalisations, calcul des vitesses et des pressions, estimation des pertes de charge, évaluation de forces, de moments et de couples). Suivant ses préoccupations, le lecteur pourra ensuite choisir d'étudier les effets de compressibilité et la dynamique des gaz, qui font l'objet des chapitres X à XIII, ou passer directement aux chapitres XIV à XVIII qui traitent des effets de viscosité et introduisent la notion essentielle de couche limite. Ces deux modes de lecture des chapitres X à XVIII sont possibles et peuvent être logiquement envisagés. Le dernier chapitre traite de la turbulence, un sujet de grande importance scientifique et technique et qui requiert une étude approfondie. A l'issue de ce parcours le lecteur aura acquis une bonne base, mais il sera loin d'avoir fait le tour des connaissances disponibles dans le domaine. Il pourra alors aborder sans trop de difficultés des problèmes pratiques et poursuivre son apprentissage à l'aide d'ouvrages plus avancés ou d'articles scientifiques spécialisés.

Sébastien Candel,
18 Avril 1990

GUIDE DE LECTURE

1- Concepts généraux (chapitres I, II, III, IV et V).

Introduction à l'étude des écoulements. Le concept de milieu continu. Quelques types d'écoulements. Méthodes générales de résolution des problèmes de mécanique des fluides. Systèmes matériels et description du mouvement. Vitesse et accélération d'une particule fluide. Lignes de courant, trajectoires, lignes d'émission. Théorèmes de transport. Equation de conservation de la masse.

2-Equations de bilan (chapitres V et VI).

Mouvement général d'une particule fluide. Taux de déformation. Notions sur l'analyse des contraintes dans un fluide. Relations entre les contraintes et des taux de déformation pour un fluide newtonien. L'équation de conservation de la quantité de mouvement. Equations d'Euler. Equations de Navier-Stokes. Théorème de Bernoulli.

3-Equations de bilan. Le théorème de Bernoulli et ses applications (chapitres VI et VIII).

Equation de bilan pour l'énergie cinétique. Equation de conservation de l'énergie. Ecoulements unidimensionnels. Le théorème de Bernoulli et ses applications. Bilan d'énergie mécanique. Analyse d'écoulements incompressibles dans des conduites. Pertes de charges. Le diagramme de Moody. Pertes de charge singulières.

4-Bilans macroscopiques de quantité de mouvement (chapitres VII et IX).

Bilan de quantité de mouvement pour les écoulements permanents. Le théorème du moment angulaire. Poussée d'un moteur à réaction. Poussée d'un moteur fusée.

5-Dynamique des gaz. Ecoulements isentropiques unidimensionnels (chapitre X).

Ecoulements adiabatiques de fluides compressibles. Ecoulements isentropiques de gaz réels. Ecoulements isentropiques de gaz parfaits. Equations fondamentales. Tables d'écoulements isentropiques.

6-Ondes de choc (chapitres XI et XII).

Equations fondamentales pour les chocs droits. Ondes de choc droites dans les gaz parfaits. Détermination des propriétés de l'écoulement. Tables de choc. Variation d'entropie au travers d'un choc droit. Ondes de choc obliques. Equations fondamentales. Perturbations faibles des écoulements supersoniques.

7-Ecoulements dans les tuyères (chapitre XIII).

Introduction, fonctionnement d'une tuyère pour diverses valeurs du rapport de détente. Souffleries supersoniques.

8-Solutions exactes des équations de Navier-Stokes (chapitre XIV).

Equations générales pour les écoulements parallèles. Ecoulement de Couette. Ecoulement de Poiseuille. Tourbillon à noyau visqueux. Le premier problème de Stokes.

9-Analyse dimensionnelle (chapitre XV).

Utilisation de l'analyse dimensionnelle pour effectuer des estimations a priori. Le théorème π . Traînée d'une sphère et d'une plaque plane. Analyse dimensionnelle des équations de bilan. Notion de similitude.

10-Introduction à l'étude de la couche limite (chapitre XVI).

Ecoulements cisailés. Notion de couche limite. Estimations de grandeurs caractéristiques de la couche limite. Echelles caractéristiques de la couche limite. Décollement et transition. Equations de la couche limite sur une plaque plane.

11-Couche limite laminaire en écoulement incompressible (chapitres XVII et XVIII).

Les équations de la couche limite laminaire sur une plaque plane. Solution exacte des équations de la couche limite. Equations intégrales pour les couches limites. L'équation intégrale de Kármán. Notions sur les couches limites en présence d'un gradient de pression.

12-Introduction à l'étude de la turbulence (chapitre XIX).

Ecoulements turbulents d'importance technologique. Nature de la turbulence. Estimations des échelles caractéristiques et des temps caractéristiques d'écoulements turbulents. Transport de chaleur et de quantité de mouvement dans les écoulements turbulents. Traitement statistique des équations du mouvement : les équations de Reynolds.

13-Introduction à la modélisation de la turbulence (chapitre XIX).

Nécessité des modèles de turbulence. Modèle de turbulence basé sur la notion d'échelle de mélange. Equation de bilan pour l'énergie cinétique de la turbulence. Modèle de Prandtl. Equation de bilan pour la fonction de dissipation. Modèle (k, ϵ) . Exemples d'applications des modèles.

TABLE DES MATIERES

	Pages
Nomenclature	xxi
CHAPITRE I : Introduction et principes fondamentaux	1
I.1. Introduction	1
I.2. Le concept de milieu continu	2
Densité en un point d'un milieu continu	
Vitesse en un point d'un fluide	
Contrainte en un point d'un milieu fluide	
Application du concept de milieu continu aux gaz	
I.3. Types d'écoulements	6
Écoulements incompressibles et compressibles	
Écoulements laminaires et écoulements turbulents	
Écoulements stationnaires et instationnaires	
Écoulements unidimensionnels	
I.4. Quelques principes et résultats de la thermodynamique	18
Systèmes thermodynamiques	
Variables d'état	
Premier principe de la thermodynamique	
Second principe de la thermodynamique	
Equations d'état, énergie et enthalpie libres	
I.5. Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits	23
Equation d'état	
Énergie interne d'un gaz parfait	
Enthalpie d'un gaz parfait	
Chaleurs spécifiques des gaz parfaits	
Entropie d'un gaz parfait	
Mélanges de gaz parfaits	
Énergie interne et enthalpie d'un mélange de gaz parfaits	
Entropie d'un mélange de gaz parfaits	
I.6. Propriétés physiques des fluides	32
Viscosité	
Conductivité thermique	
Compressibilité, dilatation thermique et chaleurs spécifiques	
I.7. Méthodes de résolution des problèmes de mécanique des fluides	40

II : Cinématique	43
II.1. Introduction	43
II.2. Systèmes matériels et description du mouvement	44
II.3. Déplacement et vitesse	45
II.4. Taux de variation dans le temps d'une fonction quelconque	47
II.5. Accélération d'une particule	49
II.6. Lignes de courant, trajectoires, lignes d'émission	52
III : Rotation et déformation d'une particule fluide	55
III.1. Introduction	55
III.2. Translation	56
III.3. Rotation	57
III.4. Dilatation	62
III.5. Déformation angulaire ou cisaillement	64
III.6. Mouvement général d'une particule fluide en deux dimensions	66
III.7. Mouvement général d'une particule fluide en trois dimensions	67
III.8. Le taux de déformation	68
IV : Théorèmes de transport	77
IV.1. Introduction	77
IV.2. Volumes de contrôle et surfaces de contrôle	78
IV.3. Théorèmes de transport et équations de bilan	79
Théorème de transport en une dimension	
Théorème de transport pour un volume	
Corollaires du théorème de transport	
Première application	
Deuxième application	
V : Equations fondamentales de la dynamique des fluides I...	87
V.1. Introduction	87
V.2. Conservation de la masse	88
Forme locale	
Autre démonstration, bilan de masse sur un volume élémentaire	
Formes macroscopiques	
V.3. Une forme spéciale du théorème de transport. Le théorème de Reynolds	92
V.4. Equation de la conservation de la quantité de mouvement	92
Introduction	
Résultats principaux de l'analyse de l'état des contraintes dans un milieu fluide	
Première forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement	
Ecoulements non visqueux : équations d'Euler	
Seconde forme locale : forme conservative	
Autre démonstration, bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire	
Forme macroscopique	

ANNEXE A : Les contraintes dans un milieu fluide	103
1. Le vecteur contrainte	103
2. Composantes des contraintes en un point	106
3. Contrainte appliquée à une surface quelconque	107
4. Symétrie du tenseur des contraintes	109
5. Le tenseur des contraintes visqueuses	111
6. Expression du tenseur des contraintes visqueuses dans le cas des fluides newtoniens	112
 VI : Equations fondamentales de la dynamique des fluides II...	117
VI.1. Equations de Navier-Stokes	117
VI.2. Equations de bilan pour l'énergie cinétique	118
VI.3. Equations de conservation de l'énergie	119
VI.4. Equations de bilan pour l'entropie	123
 VII : Bilans macroscopiques et approximation unidimensionnelle	127
VII.1. Introduction	127
VII.2. Conditions d'application de l'approximation unidimensionnelle	128
VII.3. Bilans macroscopique de masse	130
Cas général	
Ecoulement unidimensionnel en entrée et sortie	
VII.4. Bilan macroscopique d'énergie	133
Cas général	
Ecoulement unidimensionnel en entrée et sortie	
 VIII : Le théorème de Bernoulli et ses applications	137
VIII.1. Introduction	137
VIII.2. Expression du théorème de Bernoulli	137
Fluides incompressibles	
Ecoulements irrotationnels d'un fluide incompressible	
Fluides barotropes	
VIII.3. Applications du théorème de Bernoulli	142
Ecoulement par des orifices	
Ecoulement à partir d'un réservoir en surpression	
Pression sur un obstacle placé dans un écoulement uniforme	
Mesures de pression dans un fluide. Tube de Pitot	
Ecoulement dans un Venturi et application à la mesure des débits	
Diffuseurs de turbines hydrauliques	
VIII.4. Analyse de systèmes de canalisations	151
Extensions du théorème de Bernoulli à l'analyse des écoulements dans les canalisations	
Une canalisation comportant un ensemble de sections	
Interprétation graphique du théorème de Bernoulli	

VIII.5. Le théorème de Bernoulli et le premier principe de la thermodynamique	157
VIII.6. Formules pour l'évaluation des pertes de charge.....	158
Pertes de charge associées au frottement pariétal dans un conduit cylindrique	
Canalisations industrielles : le diagramme de Moody	
Pertes de charge singulières	
 ANNEXE A : Le bilan d'énergie mécanique pour un fluide	
incompressible	167
 IX : Bilans macroscopiques de quantité de mouvement.....	173
IX.1. Introduction	173
IX.2. Le théorème des quantités de mouvement pour les écoulements permanents ...	174
Écoulements sans frottement	
Écoulements avec frottement	
IX.3. Le théorème du moment angulaire pour les écoulements permanents.....	183
IX.4. Poussée d'un moteur à réaction	186
IX.5. Poussée d'un moteur fusée	190
IX.6. L'hélice propulsive	193
IX.7. Écoulement à travers une éolienne	196
IX.8. Évaluation de la perte de charge dans une conduite présentant un	
élargissement brusque	198
IX.9. Analyse d'un éjecteur	200
 X : Écoulement isentropique unidimensionnel avec changement	
de section	203
X.1. Introduction	203
X.2. Écoulement isentropique unidimensionnel de gaz réels dans des conduits de	
section variable	206
Equations fondamentales	
Processus isentropiques et processus adiabatiques réels	
Effets des changements de section	
Conditions critiques	
X.3. Écoulement isentropique unidimensionnel de gaz parfaits dans des conduits de	
section variable	215
Equations fondamentales	
Tables d'écoulements isentropiques de gaz parfaits	
Effets des changements de section sur les caractéristiques de l'écoulement d'un gaz	
parfait	
X.4. Première application : la poussée d'un moteur fusée.....	223
 XI : Ondes de choc droites	229
XI.1. Introduction	229
XI.2. Equations fondamentales pour les chocs droits.....	234
XI.3. Ondes de choc droites dans les gaz parfaits	236

Equations fondamentales	
Détermination des propriétés de l'écoulement	
Tables de choc	
La relation d'Hugoniot pour les ondes de choc droites	
La ligne de Rayleigh	
La relation de Prandtl-Meyer	
Variation d'entropie au travers d'une onde de choc droite	
XI.4. Equation d'Hugoniot pour les ondes de choc droites dans les gaz réels	246
XI.5. Ondes de choc droites en translation uniforme	247
Formules pour les ondes de choc droites en translation uniforme	
ANNEXE A : Une estimation de l'épaisseur des ondes de choc	250
XII : Ondes de choc obliques	255
XII.1. Introduction	255
XII.2. Equations fondamentales pour les ondes de choc obliques	256
XII.3. Ondes de choc obliques dans les gaz parfaits	258
XII.4. Utilisation des tables de choc droites pour le calcul de chocs obliques	262
XII.5. Lignes de Mach ou ondes de Mach	262
XII.6. Ondes de choc faibles	263
XIII : Ecoulements dans les tuyères et les souffleries	267
XIII.1. Introduction	267
XIII.2. Relation entre la section et le rapport de détente pour un écoulement isentropique	268
XIII.3. Régimes d'écoulements dans les tuyères	270
XIII.4. Recompression au travers d'un choc droit	273
XIII.5. Souffleries subsoniques et supersoniques	275
XIV : Quelques solutions exactes des équations de Navier-Stokes.	
Ecoulements parallèles visqueux	281
XIV.1. Introduction	281
XIV.2. Equations générales des écoulements parallèles	282
XIV.3. Exemples d'écoulements parallèles	285
Ecoulement parallèle dans un canal bidimensionnel (Ecoulement de Poiseuille plan)	
Ecoulement de Couette	
Ecoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique	
XIV.4. Deux écoulements instationnaires	290
Tourbillons à noyau visqueux (tourbillon self-similaire)	
Le premier problème de Stokes	
XV : Analyse dimensionnelle	299
XV.1. Introduction	299
XV.2. Quelques estimations a priori	300

XV.3. Le théorème π ou théorème de Vaschy-Buckingham	303
Le théorème π	
Détermination systématique des nombres sans dimension	
XV.4. Quelques applications du théorème π	304
Traînée d'une sphère	
Traînée d'une plaque plane	
Portance et traînée d'une voiture	
XV.5. Analyse dimensionnelle des équations de bilan	310
XV.6. Similitude	312
Géométrie des maquettes	
Conditions de similitude	
Conditions de similitude pour les écoulements de fluides incompressibles	
Conditions de similitude pour les écoulements de fluides compressibles	
ANNEXE A : Principaux nombres sans dimensions	318
XVI : Introduction à la théorie de la couche limite.....	321
XVI.1. Les zones de cisaillement dans les fluides en écoulement	321
XVI.2. Le concept de couche limite	325
XVI.3. Estimations de quelques grandeurs caractéristiques	326
XVI.4. Echelles et paramètres caractéristiques de la couche limite	329
Epaisseur de couche limite	
Epaisseur de déplacement	
Epaisseur de quantité de mouvement	
Facteur de forme H	
Epaisseurs d'énergie cinétique, d'enthalpie d'arrêt et d'enthalpie	
XVI.5. Décollement	334
XVI.6. Transition vers la turbulence	338
XVII : Couche limite laminaire en écoulement incompressible	341
XVII.1. Introduction	341
XVII.2. Equations de la couche limite laminaire sur une plaque plane	342
XVII.3. Solution exacte des équations de la couche limite	346
Principe	
Une méthode d'intégration numérique des équations de la couche limite	
XVII.4. Résultats principaux	352
XVII.5. Equations intégrales pour les couches limites	359
Equation intégrale pour l'entraînement	
La vitesse d'entraînement	
Equation intégrale pour la quantité de mouvement (équation de Kármán)	
Analyse de la couche limite pour la méthode de Kármán-Polhausen	
ANNEXE A : Démonstration de l'équation intégrale de Von Kármán	367

XVIII : Couche limite laminaire en écoulement incompressible avec gradient de pression	371
XVIII.1. Introduction	371
XVIII.2. Equations de la couche limite laminaire en présence d'un gradient de pression axial	373
XVIII.3. Recherche de solutions semblables La méthode de Falkner-Skan Grandeurs caractéristiques de la couche limite	374
XVIII.4. Solutions de l'équation de Falkner-Skan	378
XIX : Ecoulements turbulents	383
XIX.1. Introduction	383
XIX.2. Considérations générales	384
XIX.3. Echelles caractéristiques de la turbulence et cascade de Kolmogorov	387
XIX.4. Traitement statistique des écoulements turbulents. Les équations de Reynolds Opérateurs de moyenne Décomposition de Reynolds Les équations de Reynolds	390
XIX.5. Ecoulements turbulents cisailés Equations de Reynolds pour des écoulements cisailés minces Recherche de solutions auto-semblables pour une couche de cisaillement libre Solution pour le modèle de Goertler	397
XIX.6. Modèles de turbulence Le concept de viscosité turbulente Généralisation du concept de viscosité turbulente Le modèle de longueur de mélange de Prandtl Modèle à une équation de transport (Prandtl-Komogorov) Le modèle $k - \epsilon$	405
ANNEXE A : Equation de bilan pour l'énergie cinétique de la turbulence	415
Tables d'écoulement	422
Bibliographie	433
Index thématique	440

NOMENCLATURE

Caractères usuels

a	Accélération	LT^{-2}
a	Diffusivité thermique	L^2T^{-1}
$A, A_a(t), A_m(t)$	Surface de contrôle fixe, arbitraire, matérielle	L^2
$dA, \delta A$	Éléments de surface	L^2
b	Dimension transversale	L
c	Célérité sonore	LT^{-1}
c_p, c_v	Chaleurs spécifiques à pression et volume constants	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
C_i	Concentration molaire de l'espèce i	$(Mole)L^{-3}$
d	Diamètre, diamètre efficace de molécules	L
D	Diffusivité moléculaire	L^2T^{-1}
D	Force de traînée	MLT^{-2}
d	Tenseur des taux de déformations	T^{-1}
d_{ij}	Composantes du tenseur des taux de déformation	T^{-1}
E, e	Energie interne, énergie interne par unité de masse	ML^2T^{-2} L^2T^{-2}
e_f, e_s	Pertes de charge	L^2T^{-2}
F, f	Energie libre, énergie libre par unité de masse	ML^2T^{-2} L^2T^{-2}
F, F_p, F_e	Force, force pariétale, force extérieure	MLT^{-2}
$\mathcal{F}$	Impulsion	MLT^{-2}
$\mathcal{F}'$	Impulsion modifiée	MLT^{-2}
δf	Travail non compensé	ML^2T^{-2}
$f(x, t)$	Fonction de l'espace et du temps	
g	Résultante des forces massiques, accélération de la pesanteur	LT^{-2}
G, g	Enthalpie libre, enthalpie libre par unité de masse	ML^2T^{-2} L^2T^{-2}
H, h	Enthalpie, enthalpie par unité de masse	ML^2T^{-2} L^2T^{-2}
h_i	Enthalpie d'arrêt	L^2T^{-2}
H	Facteur de forme	
h	Coefficient de transfert convectif	$WL^{-2}T^{-1}\Theta^{-1}$
k	Conductivité thermique	$WL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1}$
k	Energie cinétique turbulente	L^2T^{-2}
l	Dimension	L

L	Portance (sustentation), portance par unité d'envergure	MLT^{-2} MT^{-2}
$m, dm, \delta m$	Masse, élément de masse	M
M, M_i	Masse molaire, masse molaire de l'espèce i	$M (Mole)^{-1}$
n, n_i	Nombre de moles, nombre de moles de l'espèce i	$Mole$
$\mathbf{n}$	Vecteur unitaire normal	
$\mathbf{N}$	Vecteur unitaire normal orienté dans la direction de l'écoulement	
p	Pression	$ML^{-1}T^{-2}$
p_i	Pression partielle de l'espèce i , pression d'arrêt isentropique	$ML^{-1}T^{-2}$
$\mathbf{P}$	Quantité de mouvement	MLT^{-1}
$\mathbf{q}$	Flux de chaleur	$WL^{-2}T^{-1}$
Q, q	Chaleur échangée, chaleur échangée par unité de masse	ML^2T^{-2} L^2T^{-2}
$\dot{Q}$	Chaleur échangée par unité de temps	ML^2T^{-3}
R	Constante molaire des gaz parfaits	$W\Theta^{-1}(Mole)^{-1}$
r	Constante des gaz parfaits par unité de masse	$W\Theta^{-1}M^{-1}$
$\mathbf{r}, r$	Position, rayon	L
$\mathbf{s}$	Vecteur unitaire tangent	
S, s	Entropie, entropie par unité de masse	$W\Theta^{-1}$ $WM^{-1}\Theta^{-1}$
$\mathbf{T}$	Tenseur des contraintes	$ML^{-1}T^{-2}$
T	Poussée	MLT^{-2}
T, T_i	Température, température d'arrêt	Θ
t	Temps	T
U	Vitesse typique	LT^{-1}
u, v, w	Composantes du vecteur vitesse (coordonnées cartésiennes)	LT^{-1}
$\mathbf{u}$	Vecteur déplacement	L
$\mathbf{v}, v_i$	Vecteur vitesse, composantes du vecteur vitesse	LT^{-1}
v_s	Vitesse de translation d'une onde de choc	LT^{-1}
V, V_a, V_m	Volume de contrôle fixe, arbitraire, matériel	L^3
$dV, \delta V$	Éléments de volume	L^3
$\mathbf{w}$	Vitesse d'un élément de surface de contrôle	LT^{-1}
W, w	Travail échangé, travail échangé par unité de masse	ML^2T^{-2} L^2T^{-2}
$\dot{W}$	Travail échangé par unité de temps	ML^2T^{-3}
W'	Travail des forces autre que les forces de pression en entrée et sortie d'un système ouvert	ML^2T^{-2}
W_{cin}, W_{pot}	Énergie cinétique, énergie potentielle	ML^2T^{-2}
w_{cin}, w_{pot}	Énergie cinétique, énergie potentielle par unité de masse	L^2T^{-2}

$\mathbf{x}(x, y, z)$	Coordonnées spatiales	L
$\mathbf{X}(X, Y, Z)$	Coordonnées matérielles	L
X_i	Fraction molaire de l'espèce i	
Y_i	Fraction massique de l'espèce i	

Indices

a	Conditions ambiantes
c	Conditions au col
e	Conditions d'éjection
e	Conditions à l'extérieur de la couche limite
$g, 0$	Conditions génératrices
i	Conditions d'arrêt isentropique
$*$	Conditions critiques
1	Conditions en amont d'un choc
2	Conditions en aval d'un choc
n	Composante normale
t	Composante tangentielle

Opérateurs

∇	Opérateur différentiel
$\nabla\phi$	Gradient de ϕ
$\nabla \cdot \mathbf{a}$	Divergence de $\mathbf{a}$
$\nabla^2\phi$	Laplacien de ϕ
$\nabla \times \mathbf{v}$	Rotationnel de $\mathbf{v}$
d/dt	Dérivée matérielle
$\partial/\partial t$	Dérivée par rapport au temps
$\partial/\partial x_i$	Dérivée spatiale

Caractères grecs

α	Diffusivité thermique	L^2T^{-1}
α	Angle d'incidence d'un profil	
β	Coefficient de dilatation thermique	Θ^{-1}
β	Angle d'un choc oblique avec la nouvelle direction d'écoulement	
Γ	Facteur intervenant dans le calcul du débit masse	
Γ	Facteur d'écoulement	
Γ	Circulation des vitesses	L^2T^{-1}
γ	Rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = c_p/c_v$	
δ_{ij}	Symbole δ ($= 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$)	
δ	Angle	
δ	Epaisseur de couche limite	L
δ_*	Epaisseur de déplacement	L
δ_3	Epaisseur d'énergie cinétique	L

Δ, Δ_2	Epaisseur d'enthalpie d'arrêt, d'enthlapie	L
δ	Deflexion angulaire d'un écoulement	
ϵ	Angle d'un choc mesuré par rapport à la direction initiale de l'écoulement	
ϵ	Dimension des rugosités de paroi	L
ϵ	Angle d'un choc oblique avec la direction initiale d'écoulement	
ϵ	Taux de dissipation	L^2T^{-3}
ϵ_s	Taux d'étirement	T^{-1}
λ	Libre parcours moyen	L
μ	Viscosité	$ML^{-1}T^{-1}$
μ_t	Viscosité turbulente	$ML^{-1}T^{-1}$
ν	Viscosité cinématique	L^2T^{-1}
ν	Vecteur unitaire	
η	Coordonnée réduite	
η_{is}	Rendement isentropique	
θ	Angle polaire	
θ	Epaisseur de quantité de mouvement	L
π_i	Nombres sans dimensions	
ρ	Masse volumique	ML^{-3}
$\Sigma, d\Sigma$	Surface latérale, élément de surface	L^2
σ	Tension superficielle	MT^{-2}
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	Nombres de Schmidt turbulents	
τ, τ_{ij}	Tenseur des contraintes visqueuses, composantes du tenseur des contraintes visqueuses	$ML^{-1}T^{-2}$
τ^t, τ_{ij}^t	Tenseur des contraintes turbulentes, composantes du tenseur des contraintes turbulentes	$ML^{-1}T^{-2}$
τ_p, τ_w	Contrainte pariétale	$ML^{-1}T^{-2}$
ω	Vecteur tourbillon	T^{-1}
Ω	Taux de rotation instantané	T^{-1}
Φ	Potentiel des forces volumiques	L^2T^{-2}
φ	Potentiel des vitesses	L^2T^{-1}
$\hat{\Phi}$	Fonction de dissipation visqueuse	T^{-2}
ψ	Fonction de courant	L^2T^{-1}

Nombres sans dimensions

C_p	Coefficient de pression	$\Delta p / \frac{1}{2} \rho v^2$
C_f	Coefficient de frottement local	$\tau_w / \frac{1}{2} \rho v^2$
C_L	Coefficient de portance	$L / \frac{1}{2} \rho v^2 A$
C_M	Coefficient de moment	$M / \frac{1}{2} \rho v^2 A l$
C_D	Coefficient de traînée	$D / \frac{1}{2} \rho v^2 A$
Eu	Nombre d'Euler	$(p - p_o) / \rho v^2$ ou $(p - p_o) / \frac{1}{2} \rho v^2$
Fr	Nombre de Froude	v^2 / gl
Gr	Nombre de Grashof	$gl^3 \beta \Delta T / \nu^2$
Le	Nombre de Lewis	$k / \rho c_p D$
M	Nombre de Mach	v / c
Nc	Nombre de cavitation	$(p - p_s) / \frac{1}{2} \rho v^2$
Nu	Nombre de Nusselt	hl / k
Pe	Nombre de Peclet	lv / α
Pr	Nombre de Prandtl	$\mu c_p / k$
Re	Nombre de Reynolds	$\rho v d / \mu$
Sc	Nombre de Schmidt	$\mu / \rho D$
St	Nombre de Stanton	$h / \rho c_p v$
St	Nombre de Strouhal	fl / v
We	Nombre de Weber	$\rho v^2 l / \sigma$

FORMULAIRE D'ANALYSE VECTORIELLE

- 1 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
- 2 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- 3 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
- 4 $\nabla \times \nabla \Phi = 0$
- 5 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$
- 6 $\nabla(\Phi\psi) = \Phi\nabla\psi + \psi\nabla\Phi$
- 7 $\nabla \cdot \Phi\mathbf{a} = \Phi\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\Phi$
- 8 $\nabla \times \Phi\mathbf{a} = \nabla\Phi \times \mathbf{a} + \Phi\nabla \times \mathbf{a}$
- 9 $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$
- 10a $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$
- 10b $\nabla(a^2) = 2\mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{a} + 2\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})$
- 11 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$
- 12 $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b}$
- 13 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dA$ Green-Ostrogradsky
- 14 $\int_V \nabla\Phi dV = \int_A \Phi \mathbf{n} dA$
- 15 $\int_V \nabla \times \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \times \mathbf{a} dA$
- 16 $\int_A (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ Stokes
- 17 $\int_A \mathbf{n} \times \nabla\Phi dA = \int_C \Phi d\mathbf{l}$
- 18 $\int_V (\Phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\Phi) dV = \int_A (\Phi\nabla\psi - \psi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} dA$ Green

CHAPITRE I

INTRODUCTION ET PRINCIPES FONDAMENTAUX

I.1. Introduction

La mécanique des fluides est intéressante comme science fondamentale mais elle donne aussi lieu à de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénieur. Les problèmes rencontrés sont extrêmement variés. Il importe, très souvent, de comprendre la structure de l'écoulement et de calculer les répartitions de variables comme la pression, la vitesse, la température et la masse volumique dans le milieu fluide. Dans les applications technologiques, le fluide s'écoule autour de corps solides et la connaissance des distributions de pression et de vitesse au voisinage des parois est particulièrement utile. On cherche aussi dans beaucoup de cas à déterminer les contraintes, les flux de chaleur, certains flux d'espèces chimiques ou des quantités intégrées comme la force et le moment hydrodynamiques qui s'exercent sur un corps solide fixe ou en mouvement.

Dans d'autres applications propres au domaine du génie des procédés, on souhaite établir des bilans macroscopiques de masse et d'énergie.

D'autres questions plus qualitatives font aussi l'objet d'études détaillées : stabilité de l'écoulement, transition vers la turbulence, décollement des couches limites.

Ce premier chapitre sert d'introduction à l'étude des problèmes de mécanique des fluides. Il rassemble des éléments de nature diverse dont certains sont généralement connus. Nous avons pourtant jugé utile de les rappeler pour faciliter la lecture de l'ouvrage. Le concept de milieu continu est présenté dès la section 2. Ce concept permet de décrire le mouvement d'un fluide sans faire l'analyse détaillée de la dynamique des particules discrètes qui le composent.

La section 3 donne quelques descriptions d'écoulements typiques. On introduit, de façon qualitative, les notions d'écoulements stationnaires ou instationnaires, incompressibles ou compressibles, laminaires ou turbulents.

Les principes et quelques résultats de thermodynamique macroscopique sont regroupés dans les sections 4 et 5. La section 6 contient une revue des propriétés physiques principales qui caractérisent les fluides les plus courants.

Enfin, on trouvera à la section 7 une discussion générale des méthodes de résolution des problèmes de mécanique des fluides.

Bibliographie

Le concept de milieu continu est présenté dans un grand nombre d'ouvrages de base, par exemple Zukrow et Hoffman 1976, Whitaker 1968, Shapiro 1953, Bird, Stewart et Lighfoot 1960. Vincenti et Kruger 1965 donnent une belle introduction à l'étude statistique de la dynamique des gaz.

On trouvera des exposés complets de thermodynamique macroscopique dans les livres de Callen 1966, Kling 1980, Borel 1984.

Le calcul des propriétés de transport dans les fluides est traité en détail par les méthodes statistiques par Hirschfelder, Curtiss et Bird 1964. Un exposé plus succinct est donné par Barrère et Prud'homme 1973. Des tables et des données de base sont rassemblées dans Perry 1950, Reid, Prausnitz et Sherwood 1977, Holman 1976, Reynolds 1979, Cebeci et Bradshaw 1984.

I.2. Le concept de milieu continu

Dans les conditions habituelles les fluides apparaissent comme continus, mais ils sont en fait composés de particules discrètes en très grand nombre. L'étude du mouvement des fluides peut évidemment s'effectuer en partant des lois du mouvement pour les particules élémentaires, molécules ou atomes, qui les composent, puis en utilisant des méthodes statistiques pour déterminer la dynamique d'ensemble des particules.

Cette approche statistique est celle adoptée en théorie cinétique des fluides ou en mécanique statistique (voir Delcroix 1963, Vincenti et Kruger 1965, Ferziger et Kaper 1972, Brun 1986).

Dans la plupart des problèmes pratiques, on s'intéresse au mouvement d'ensembles composés d'un très grand nombre de molécules et la matière peut alors être considérée comme un **milieu continu**. Ce concept n'est utile que si les dimensions caractéristiques du problème considéré sont grandes par rapport à la distance moyenne qui sépare les molécules composant le milieu. Lorsqu'il en est ainsi, on peut utiliser le concept de milieu continu pour définir les densité, vitesse, contrainte en un point et plus généralement toutes les variables qui caractérisent un écoulement.

I.2.1. Densité en un point d'un milieu continu

Considérons un milieu continu fluide à l'intérieur d'un volume V et soit δV un volume élémentaire défini autour d'un point P du volume V . Désignons par δm la masse de fluide contenue dans le volume δV . Le rapport $\bar{\rho} = \delta m / \delta V$ représente la **masse spécifique moyenne** du fluide contenu dans le volume δV . Si on diminue progressivement le volume δV , le rapport $\bar{\rho}$ commence par changer, puis pour une valeur suffisamment faible de δV , ce rapport passe par un palier (figure 1). Dans cette situation, le fluide contenu dans le volume δV est pratiquement homogène et le rapport $\delta m / \delta V$ prend une valeur constante ρ qui sert de définition à la densité. Si on diminue encore le volume δV , le rapport $\delta m / \delta V$ se met à fluctuer de façon aléatoire lorsque δV devient inférieur à un volume δV_l de l'ordre du

cube de quelques libres parcours moyens. Dans cette situation, le volume δV ne contient plus que quelques molécules et la masse correspondante fluctue fortement. Les observations précédentes nous conduisent à définir la densité au point P par :

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V_l} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (I, 1)$$

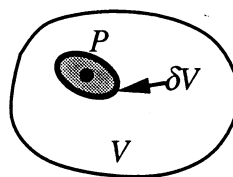
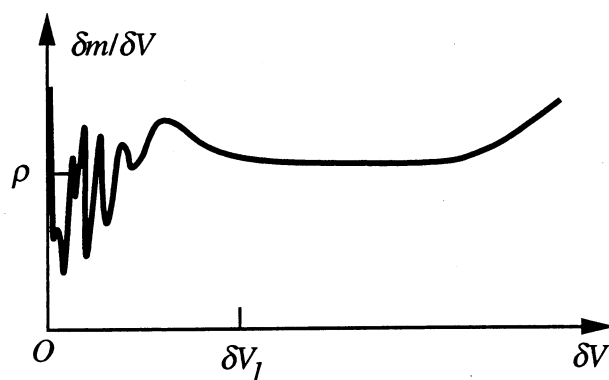


Figure 1. Lorsque δV diminue progressivement, le rapport $\delta m / \delta V$ passe par un palier, qui définit la masse spécifique locale.

I.2.2. Vitesse en un point d'un fluide

Un raisonnement analogue au précédent peut être fait pour définir la vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ en un point $\mathbf{r}$. Si N est le nombre de particules qui se trouve dans le volume δV , $\mathbf{v}$ est la vitesse du barycentre de ces N particules (figure 2).

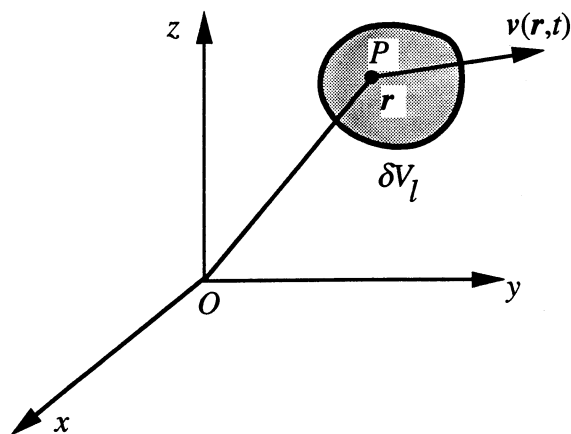


Figure 2. La vitesse au point P est la vitesse du barycentre des N particules contenues dans δV .

Ainsi :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (I, 2)$$

On peut encore écrire :

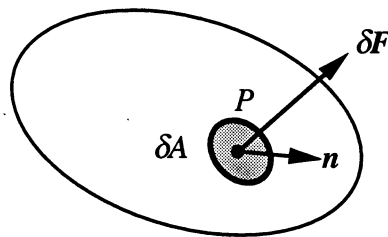
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V_i} \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta m} \quad (I, 3)$$

où $\delta \mathbf{P}$ représente la quantité de mouvement des particules contenues dans le volume δV .

I.2.3. Contrainte en un point d'un milieu fluide

Considérons un milieu fluide continu. Soit V un volume fluide de ce milieu et A la frontière de ce volume. Le fluide qui se trouve à l'extérieur du volume V exerce sur celui-ci des tensions qui se transmettent à travers la surface A . Soit P un point de cette surface, δA un élément de surface autour de P et $\mathbf{n}$ la normale en ce point tournée vers l'extérieur (figure 3). Nous supposons que la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément δA est proportionnelle à δA .

$$\delta \mathbf{F} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n}) \delta A \quad (I, 4)$$



$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow \delta A_i} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta A}$$

Figure 3. Définition de la contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ au point P .

Ici $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n})$ désigne la **contrainte moyenne** qui s'exerce sur l'élément de surface δA dont la normale est $\mathbf{n}$. Lorsque δA tend vers δA_i , le rapport $\delta \mathbf{F} / \delta A$ tend vers une limite finie indépendante de la forme de l'élément δA . La valeur de cette limite constitue la contrainte au point P .

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow \delta A_i} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta A} \quad (I, 5)$$

Notons que la contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ ne s'exerce pas obligatoirement dans la direction normale. Il est généralement commode de décomposer cette contrainte $\mathbf{t}$ en ses composantes normale et tangentielle (figure 4).

$$\mathbf{t} = t_n \mathbf{n} + t_s \mathbf{s} \quad (I, 6)$$

où

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \text{ et } t_s = t - (t_n) \mathbf{n} \quad (I, 7)$$

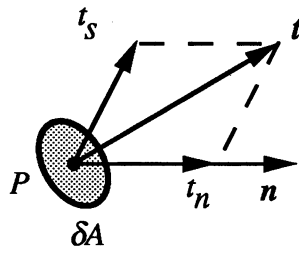


Figure 4. Contraintes normale et tangentielle.

I.2.4. Application du concept de milieu continu aux gaz

Le domaine d'application du concept de milieu continu peut être facilement déterminé dans le cas des gaz.

Dans les conditions de pression et de température normales, la distribution des vitesses des molécules dans un gaz suit la loi de Maxwell. Dans cette situation et pour le cas de collisions élastiques entre les molécules, le libre parcours moyen est donné par :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi N d^2} \quad (I, 8)$$

où N est le nombre de molécules par unité de volume et d représente le diamètre efficace des molécules. On peut encore écrire l'expression précédente en introduisant la masse m des molécules et la densité ρ du gaz (I,8) :

$$\lambda = \frac{m}{\sqrt{2}\pi \rho d^2} \quad (I, 9)$$

Le libre parcours moyen calculé à l'aide des expressions précédentes dans les conditions standard de température et de pression ($p = 1 \text{ atm}$, $T = 298.15 \text{ K}$) est donné au tableau 1 pour quelques gaz. Les diamètres moléculaires utilisés pour ce calcul sont donnés par Moore 1972.

Tableau 1. Libres parcours moyens dans les conditions standard de température et pression (STP).

Gaz	Diamètre moléculaire $d \text{ (nm)}$	Libre parcours moyen $\lambda \text{ (nm)}$
Hélium	0.200	209
Hydrogène	0.218	176
Azote	0.316	83
Oxygène	0.296	95
Gaz carbonique	0.460	39

Les valeurs de λ sont de l'ordre de 100 nm (où un $\text{nm} = 10^{-9}\text{ m}$) dans ces conditions, et le libre parcours moyen est beaucoup plus petit que l'échelle caractéristique de la plupart des problèmes pratiques.

Considérons à présent la situation extrême d'un véhicule spatial naviguant à une altitude de 100 km . A cette altitude, $\lambda \sim 0.3\text{ m}$ et le libre parcours moyen est de l'ordre de l'échelle caractéristique du problème (la dimension du véhicule). L'hypothèse de milieu continu n'est plus utilisable dans ce cas.

I.3. Types d'écoulements

Nous allons maintenant donner une description qualitative rapide de quelques types d'écoulements. Cette première présentation est très incomplète et nous réservons les détails et les développements analytiques pour la suite de l'exposé. Divers autres types d'écoulements sont étudiés dans le livre de physique des fluides dû à Tritton 1977. De belles visualisations de fluides en mouvement sont rassemblées dans un album publié par Van Dyke 1982. Une série de films de mécanique des fluides distribués par l'Encyclopedia Britannica, Chicago Illinois 60611 illustre de façon remarquable de nombreux phénomènes d'écoulement. Les expériences présentées dans ces films sont illustrées et commentées dans un ouvrage édité par les presses du MIT (Illustrated Experiments in Fluid Mechanics, MIT Press, Cambridge, Mass.).

I.3.1. Ecoulements incompressibles et compressibles

On dit qu'un fluide est incompressible si sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. Ainsi la variation relative de masse spécifique pour l'eau est $\Delta\rho/\rho = 5.10^{-4}$ pour une variation de température $\Delta T = 1\text{ K}$ et $\Delta\rho/\rho = 2.10^{-4}$ pour une variation de pression $\Delta p = 1\text{ bar}$.

On peut donc souvent traiter l'eau comme un fluide incompressible et utiliser dans les équations du mouvement une densité $\rho = \rho_0 = \text{constante}$.

Cependant, dans un certain nombre de situations, cette hypothèse n'est pas justifiée et il faut prendre en compte les très faibles variations de densité produites par un gradient de température ou de pression. Ainsi, dans les écoulements de convection naturelle, une différence de température introduite aux limites du domaine produit une variation naturelle de densité du fluide et cette variation de densité induit le mouvement. Ce type d'écoulement appartient à l'expérience courante, il intervient par exemple lorsqu'on réchauffe de l'eau dans un récipient. La figure 5 montre un autre cas de convection naturelle. L'écoulement est produit par un cylindre horizontal dont la température T_s est supérieure à celle du fluide ambiant. Le cylindre est entouré par une **couche limite** de fluide chaud et un panache se développe verticalement au-dessus du cylindre. Le panache initialement **laminaire** présente une **instabilité** et l'écoulement devient **turbulent** à partir d'une certaine distance. La figure 6 correspond à une autre configuration de convection naturelle. Il s'agit cette fois d'une plaque verticale dont la température est supérieure à celle du milieu ambiant.

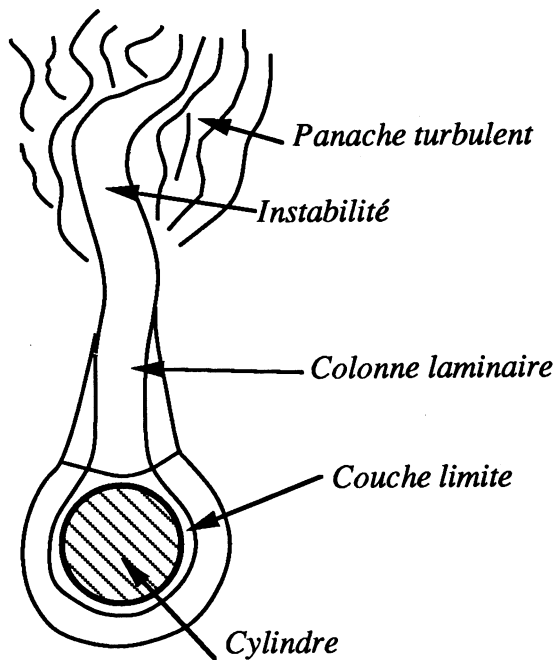


Figure 5.
Schématisation d'une strioscopie
d'écoulement autour d'un cylindre porté
à une température supérieure à celle du
fluide ambiant.

Une autre situation dans laquelle on ne peut négliger la compressibilité de l'eau est celle de la propagation d'ondes de choc hydrauliques ("coups de bélier"). Ce phénomène apparaît lorsque l'on ferme rapidement une vanne sur une ligne d'eau. La perturbation produite par la fermeture de la vanne se propage à une vitesse qui dépend du coefficient de compressibilité de l'eau et des coefficients d'élasticité de la tuyauterie; le phénomène ne peut être décrit par les équations utilisées pour les écoulements incompressibles.

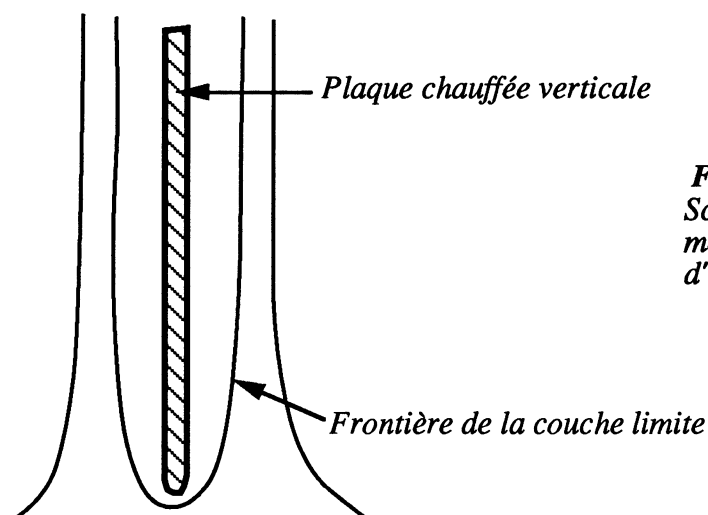


Figure 6.
Schématisation d'une ombroscopie
montrant la convection libre autour
d'une plaque chauffée verticale.

Considérons à présent le cas des gaz. Très généralement, les gaz sont traités comme des fluides compressibles. Cependant nous verrons qu'aux faibles vitesses d'écoulement (aux nombres de Mach petits devant un $M \ll 1$; la définition du nombre de Mach est donnée dans l'encadré 1), les variations de densité sont faibles et de l'ordre de grandeur du carré du nombre de Mach.

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim M^2, \quad M \ll 1$$

Dans ces conditions, on peut traiter l'écoulement à l'aide des équations qui régissent les écoulements incompressibles.

En définitive, la distinction incompressible/compressible se rapporte plutôt au type d'écoulement considéré qu'au fluide lui-même.

Encadré 1. Le nombre de Mach.

Le nombre de Mach est défini comme le rapport de la vitesse du fluide v à la vitesse locale des perturbations acoustiques c .

$$M = \frac{v}{c}$$

La vitesse acoustique c est donnée par l'expression :

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Dans le cas d'un gaz parfait, $p = \rho^\gamma e^{s/c_v}$ et on obtient facilement $c^2 = \gamma p / \rho$ ou encore $c^2 = \gamma r T$.

Le nombre de Mach pour un gaz parfait a donc pour expression :

$$M = v / (\gamma r T)^{1/2}$$

La signification physique du nombre de Mach peut être perçue en portant l'expression précédente au carré :

$$M^2 = v^2 / (\gamma r T)$$

Le numérateur v^2 est proportionnel à l'énergie cinétique par unité de masse. Le dénominateur $\gamma r T$ est proportionnel à l'énergie thermique (l'énergie interne) associée au mouvement aléatoire des molécules composant le gaz.

Ainsi pour un gaz :

$$M^2 \sim \frac{\text{énergie cinétique du gaz}}{\text{énergie interne du gaz}}$$

I.3.2. Écoulements laminaires et écoulements turbulents

On dit qu'un écoulement est **laminaire** lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est **turbulent** lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide. Les deux types d'écoulements peuvent être observés par exemple dans le cas d'un filet d'eau s'échappant d'un simple robinet. Lorsque la vitesse est faible, l'écoulement est régulier et laminaire. Au contraire, pour des débits importants et à vitesse plus élevée, on constate que les filets d'eau oscillent autour d'une position moyenne et l'écoulement prend un aspect irrégulier et turbulent.

Une autre situation bien connue est celle de l'écoulement de convection naturelle autour d'une cigarette allumée. La fumée dégagée permet de visualiser le panache formé par les gaz chauds issus de la cigarette. Les filets de fumée sont d'abord laminaires, puis une instabilité apparaît et précède la transition vers la turbulence (figure 7). L'écoulement devient finalement irrégulier et désorganisé.

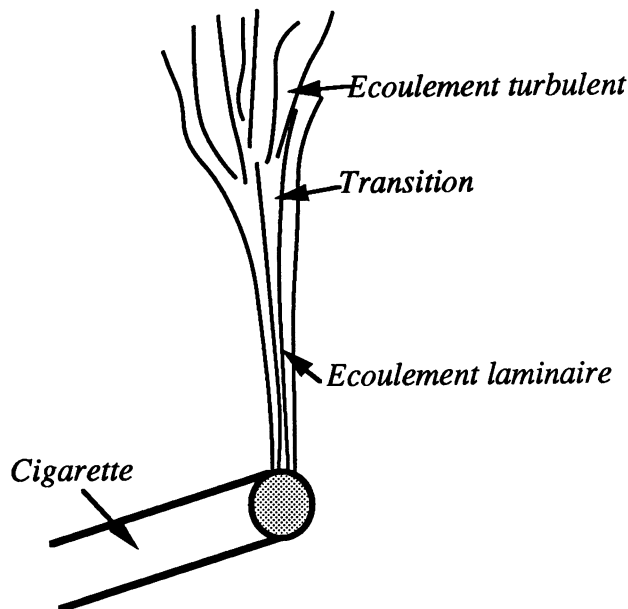


Figure 7. Convection naturelle au voisinage d'une cigarette. Les particules de fumée permettent la visualisation du panache laminaire puis turbulent issu de la zone incandescente.

Pour mieux définir les conditions dans lesquelles la turbulence apparaît, nous allons maintenant décrire quelques expériences classiques. Les deux géométries envisagées sont celles d'un conduit cylindrique et d'un obstacle cylindrique placé dans un écoulement initialement uniforme.

Écoulement dans un conduit cylindrique

L'une des premières analyses de la transition vers la turbulence est basée sur des observations d'écoulements en conduit cylindrique effectuées par Reynolds 1983.

Le montage expérimental comporte un réservoir de liquide sous pression débouchant sur un conduit cylindrique allongé. Un tube mince permet l'injection de colorant (figure 8). Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre (figure 9). En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé

(figure 10). Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale (par fil chaud ou vélocimétrie laser) montre que celle-ci fluctue de façon aléatoire dans l'espace et le temps (figure 11).

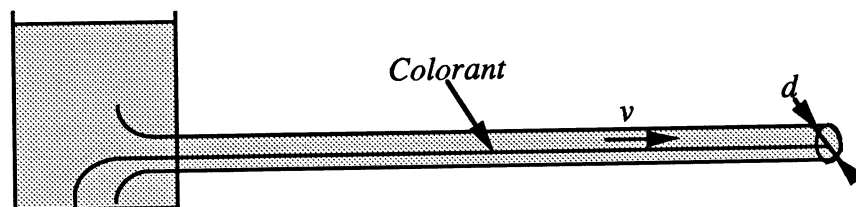


Figure 8. Appareil permettant l'étude de la transition vers la turbulence de l'écoulement dans un conduit cylindrique.

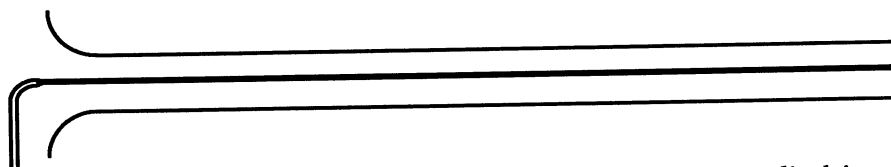


Figure 9. Écoulement laminaire dans le conduit cylindrique.

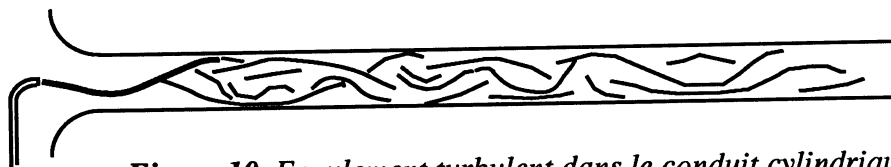


Figure 10. Écoulement turbulent dans le conduit cylindrique.

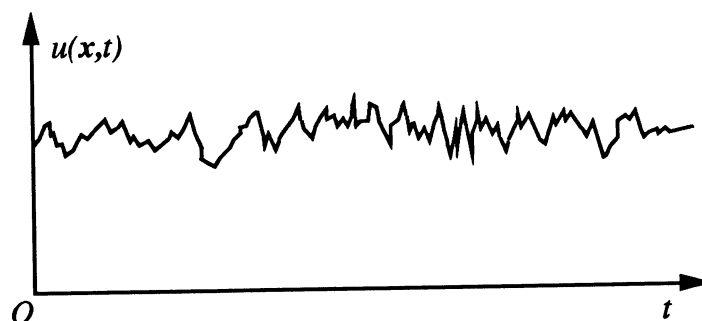


Figure 11. Fluctuations de la composante axiale de la vitesse en un point du conduit lorsque l'écoulement est turbulent.

L'expérience qui vient d'être décrite fait intervenir quatre paramètres principaux :

ρ la densité du fluide (ML^{-3}), $\bar{v}$ la vitesse moyenne (LT^{-1}), d le diamètre du tube (L), μ la viscosité du fluide ($ML^{-1}T^{-1}$).

Les quatre paramètres précédents s'expriment tous en fonction des trois dimensions fondamentales M , L et T et on peut former un seul nombre sans dimension à l'aide de ces variables :

$$Re = \frac{\rho \bar{v} d}{\mu}$$

Cette expression définit le **nombre de Reynolds**. Ce nombre permet de corréler les observations expérimentales effectuées sur l'écoulement en conduit cylindrique. On constate généralement que la transition vers la turbulence s'effectue lorsque $Re \sim 2100$ à 2500 . Pour $Re < 2000$, l'écoulement reste laminaire et une perturbation localisée introduite dans l'écoulement est progressivement dissipée.

Dans un intervalle de Re de 2000 à 3000 , des "paquets" turbulents sont convectés dans le conduit de façon intermittente. Ces paquets sont séparés par des poches laminaires et la vitesse axiale prend l'allure de la figure 12.

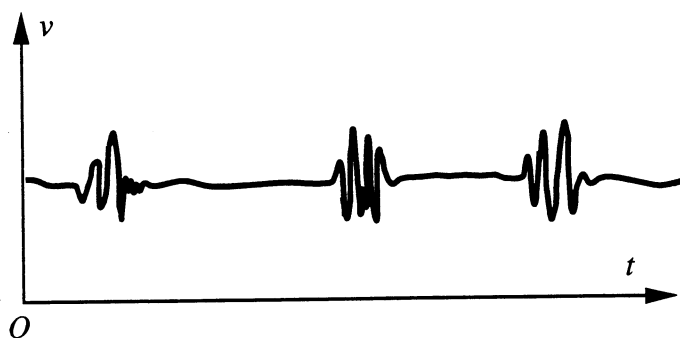


Figure 12. La vitesse axiale en un point d'un écoulement en conduit cylindrique pour un nombre de Reynolds $Re=2800$. Des paquets turbulents sont convectés dans le conduit. Ces paquets sont séparés par des poches laminaires.

Aux nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement devient turbulent dans son ensemble. Si l'on prend des précautions particulières (dégazage du liquide en écoulement, amélioration géométrique de l'entrée du canal), on peut maintenir un écoulement laminaire jusqu'à $Re \sim 10000$.

Écoulement autour d'un cylindre

Un très grand nombre de phénomènes importants apparaissent dans l'observation de l'écoulement autour d'un cylindre. (On trouvera une description plus détaillée de cet écoulement dans Tritton 1977). Le type d'écoulement observé est là encore déterminé par la valeur du nombre de Reynolds.

Les expériences effectuées sur cette configuration couvrent une gamme de Reynolds s'étendant de 10^{-1} à 10^7 . En pratique, pour obtenir un nombre de Reynolds de 0.1 dans l'air, il faudrait utiliser un cylindre de 10μ plongé dans un écoulement de vitesse 0.15 m/s . Pour

cette valeur très faible de Re , il est plus commode d'utiliser de la glycérine s'écoulant à 20 mm/s autour d'un cylindre de 5 mm de diamètre. Pour obtenir $Re = 10^5$ dans l'air, il faut un diamètre de 0.15 m et une vitesse de 10 m/s . Les conditions d'expérimentation permettant de couvrir l'intervalle de nombre de Reynolds considéré sont donc nécessairement très variées.

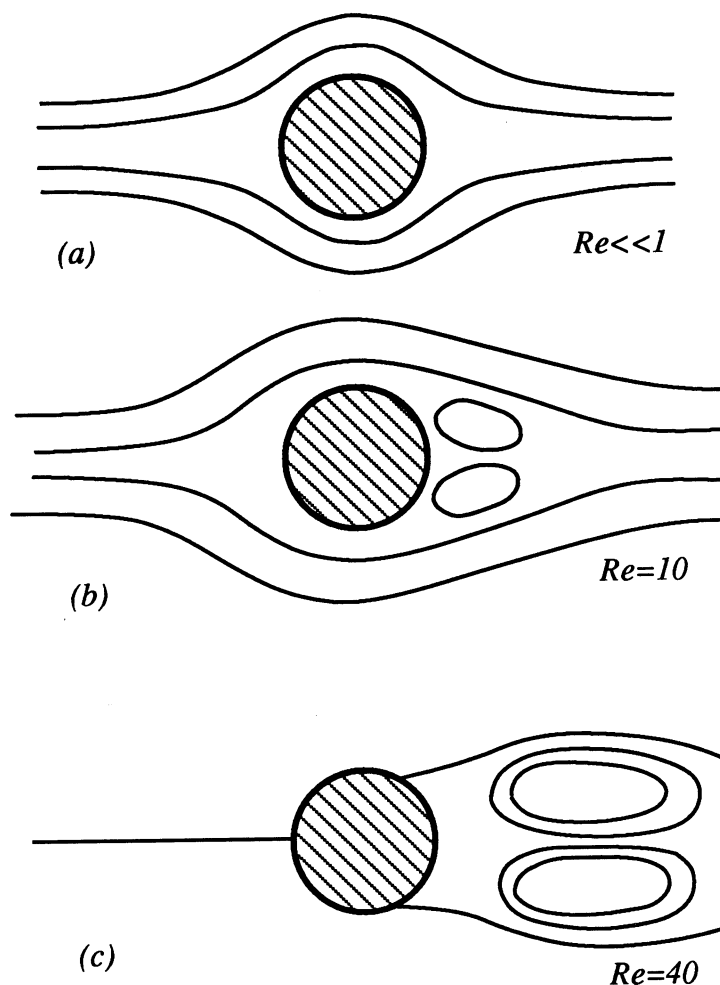


Figure 13. Structure de l'écoulement autour d'un cylindre pour des nombres de Reynolds faibles. Aux très faibles valeurs de Re , l'écoulement est symétrique. Des zones de recirculation apparaissent lorsque Re est de l'ordre de 10.

Aux nombres de Reynolds très faibles $Re \ll 1$, l'écoulement est **laminaire** et essentiellement déterminé par les forces visqueuses. Les lignes de courant sont symétriques par rapport à l'axe Oy et la présence du cylindre influence l'écoulement sur plusieurs diamètres à partir de l'origine. L'écoulement est représenté sur la figure 13a.

Aux nombres de Reynolds de 10 à 40, deux zones de recirculation apparaissent derrière le cylindre. Dans ces deux régions, l'écoulement change de sens. La symétrie par rapport à Oy a disparu, mais la symétrie par rapport à Ox subsiste. Les deux zones de recirculation s'allongent lorsque le nombre de Reynolds augmente (figures 13b et 13c).

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 40, l'écoulement devient **instationnaire**. L'instationnarité apparaît même si l'on maintient toutes les conditions amont stationnaires. Une **instabilité** se développe dans le **sillage** du cylindre (figure 14). Aux nombres de Reynolds de l'ordre de 40, on observe une oscillation quasi-sinusoïdale du sillage avec une lente augmentation de l'amplitude avec la distance. Pour $Re \sim 40$, l'oscillation devient plus intense et son amplitude augmente rapidement.

Aux nombres de Reynolds compris entre 50 et 100, le sillage donne naissance à deux rangées de **tourbillons** de part et d'autre de l'axe Ox . Les tourbillons sont alternés et les deux rangées de tourbillons tournent dans des directions opposées. Ce type d'écoulement a été analysé pour la première fois par Von Kármán et les tourbillons sont appelés tourbillons de Kármán (figure 15). On parle aussi "d'allées tourbillonnaires" de Von Kármán.

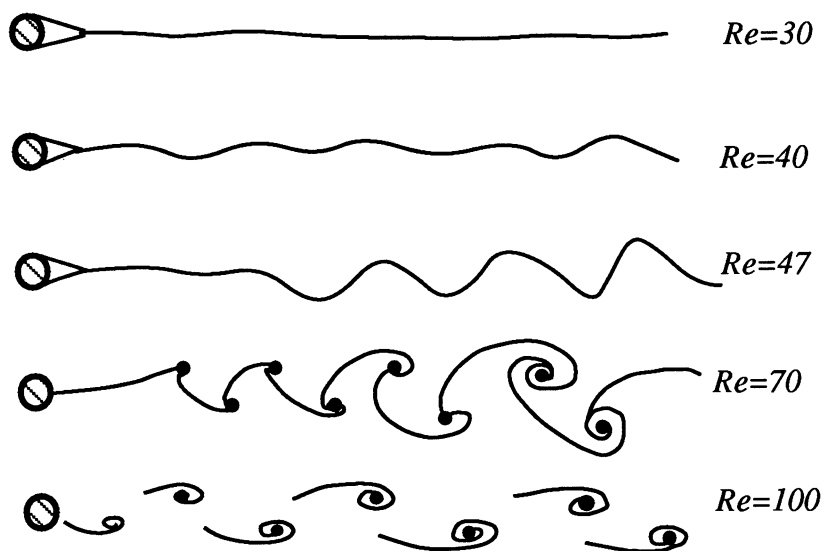


Figure 14. Structure du sillage formé derrière un cylindre. Le nombre de Reynolds varie entre 40 et 100.

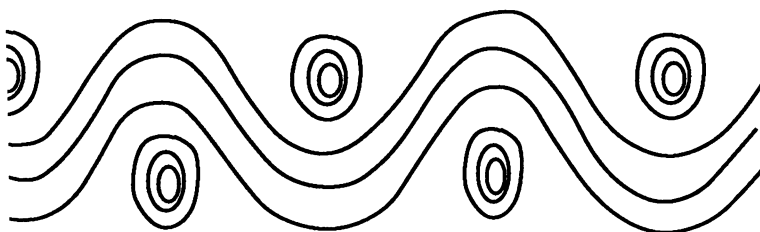


Figure 15. Allée de tourbillons de Kármán dans le sillage d'un cylindre mis en translation uniforme dans un fluide. Le nombre de Reynolds est ici égal à 200. Les lignes de courant sont représentées sur cette figure à un instant du temps.

L'observation expérimentale de la vitesse dans le sillage du cylindre montre que les fluctuations du signal sont quasi-sinusoïdales à petite distance du cylindre et deviennent plus

aléatoires aux distances plus grandes (figure 16). La fréquence fondamentale f du passage des tourbillons est facilement déterminée à l'aide d'une analyse spectrale du signal. Pour corrélérer les phénomènes qui viennent d'être décrits, il est commode d'introduire un nouveau paramètre sans dimension.

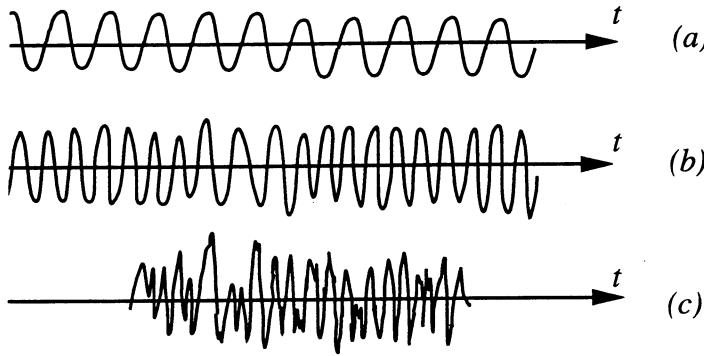


Figure 16. Fluctuations de la vitesse axiale en un point du sillage d'un cylindre placé dans un écoulement uniforme. (a) $Re=80$, $x/d=6$; (b) $Re=180$, $x/d=6$; (c) $Re=300$, $x/d=30$.

$$St = \frac{fd}{v_o}$$

Cette expression définit le **nombre de Strouhal**. Ce nombre sans dimensions joue un rôle important dans l'analyse des écoulements instationnaires. La valeur de St évolue faiblement avec Re . Elle est typiquement de l'ordre de 0.14, pour $Re = 60$ et de 0.20 pour $200 \leq Re \leq 10^4$ (voir par exemple Blake 1986).

Aux nombres de Reynolds supérieurs à 200, les rangées de tourbillons existent sur une distance finie, et un sillage turbulent remplace progressivement la structure ordonnée initiale. La transition vers la turbulence n'empêche pas le processus de lâchage périodique de tourbillons alternés et ce phénomène est encore observé à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^7 . La régularité du mécanisme de formation des tourbillons n'est pas constante sur tout l'intervalle de nombres de Reynolds et on observe par exemple une perte de périodicité dans l'intervalle $3 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$.

Pour $Re = 3 \cdot 10^5$, un phénomène nouveau apparaît. Le comportement du sillage est déterminé par les caractéristiques de la **couche limite pariétale**. La couche limite est la région de l'écoulement située à proximité de la paroi du cylindre. Dans cette région, le profil de vitesse varie rapidement et l'écoulement dans cette zone est essentiellement déterminé par la compétition des forces d'inertie et de viscosité. A l'extérieur de la couche limite, les forces visqueuses peuvent être négligées et l'écoulement ne dépend plus du nombre de Reynolds. Si $Re < 3 \cdot 10^5$, la couche limite formée sur le cylindre reste laminaire dans son ensemble. Dans cette situation, l'écoulement décolle du cylindre au voisinage de $\theta \sim 110^\circ$ (figure 17). En ce point la direction de l'écoulement au voisinage de la paroi s'inverse (figure 18) et les particules fluides provenant de l'amont et passant au voisinage de la paroi s'éloignent de celle-ci.

Lorsque $Re > 3.10^5$, la couche limite formée à la paroi du cylindre devient turbulente et le point de décollement se déplace vers l'aval (figure 19). Dans cette situation, l'écoulement qui pénètre dans le sillage formé derrière le cylindre est déjà turbulent, et il n'y a plus de transition laminaire-turbulent dans ce sillage. On voit ici que les mécanismes qui déterminent la structure de la couche limite influencent aussi notablement l'écoulement dans le sillage.

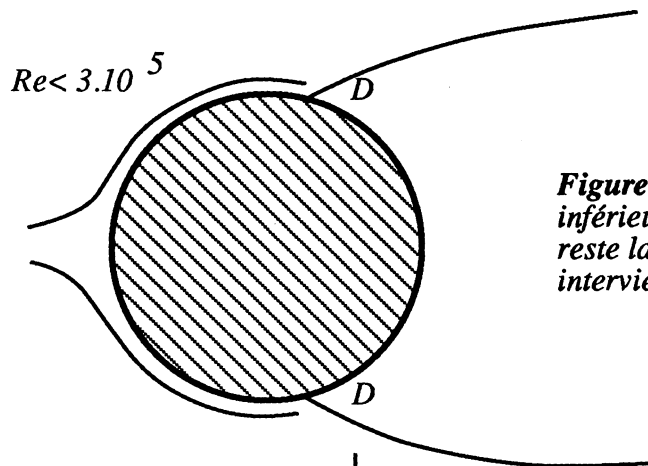


Figure 17. Le nombre de Reynolds est inférieur à 3.10^5 . La couche limite reste laminaire et le décollement intervient au voisinage de $\theta = 110^\circ$.

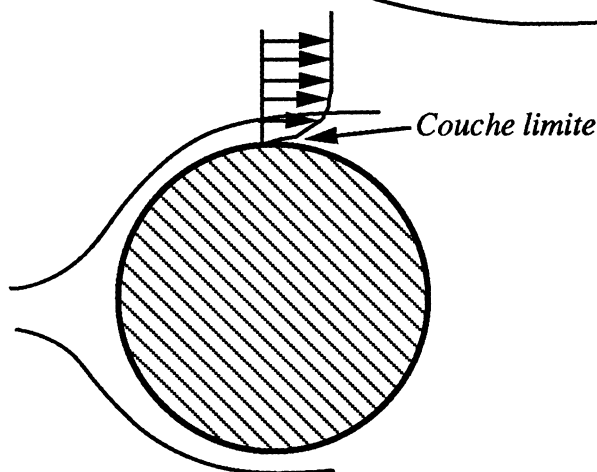


Figure 18. (a)
La couche limite est formée à proximité de la paroi du cylindre.

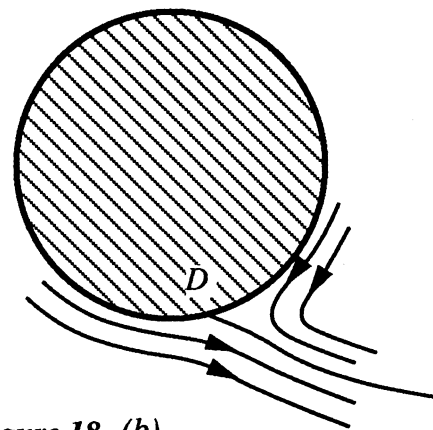


Figure 18. (b)
Au point de décollement la direction de l'écoulement s'inverse.

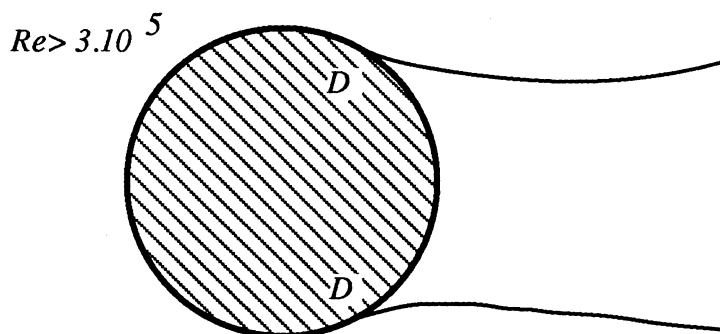


Figure 19. Le nombre de Reynolds dépasse 3.10^5 . La couche limite devient turbulente et le point de décollement se déplace vers l'aval.

I.3.3. Écoulements stationnaires et instationnaires

On dit qu'un écoulement est stationnaire si toutes les variables décrivant le mouvement **sont indépendantes du temps**. Ainsi la pression p , la vitesse v , la densité ρ , l'énergie e d'un écoulement stationnaire sont des quantités indépendantes du temps. Un écoulement est dit instationnaire si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps. Tous les phénomènes de propagation d'onde dans les fluides appartiennent à cette catégorie (figure 20), les écoulements atmosphériques sont aussi essentiellement instationnaires.

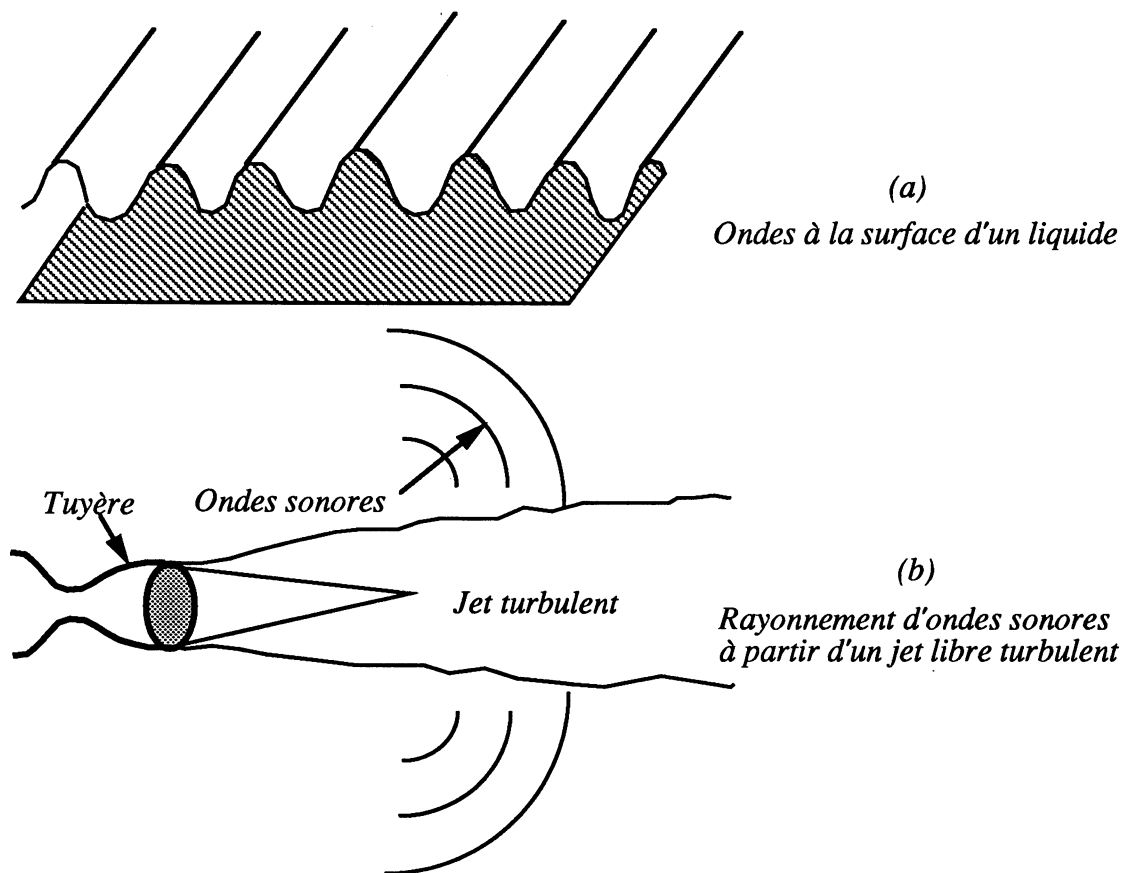


Figure 20. Deux exemples de propagation d'onde dans les fluides. Ces deux écoulements sont instationnaires.

Les écoulements turbulents sont aussi par nature instationnaires, cependant on dit qu'un écoulement turbulent est stationnaire si les variables moyennes sont indépendantes du temps et si les corrélations d'ordre deux constituées à partir de ces variables sont invariantes par translation.

I.3.4. Écoulements unidimensionnels

On dit qu'un écoulement est unidimensionnel si dans chaque section de l'écoulement, toutes les variables sont des constantes. En d'autres termes, dans un écoulement unidimensionnel, toutes les variables dépendent d'une coordonnée d'espace unique (figure 21).

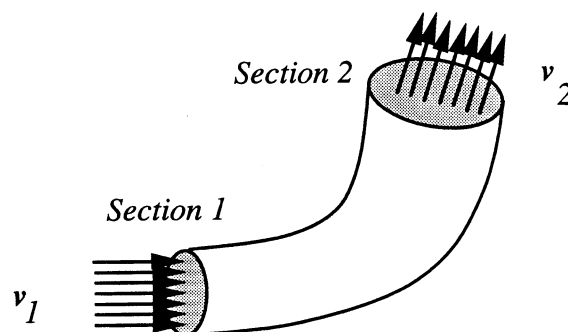


Figure 21. Dans un système unidimensionnel toutes les variables de l'écoulement ne dépendent que d'une seule coordonnée d'espace.

Un grand nombre d'écoulements dans des systèmes pratiques peuvent être considérés comme unidimensionnels. Le concept d'écoulement unidimensionnel apporte une simplification considérable à l'analyse et cette notion est par conséquent très utile.

Dans certains cas, l'écoulement ne peut être considéré comme unidimensionnel dans tout le système mais seulement en entrée et sortie (figure 22). Cette propriété plus restrictive est cependant très utile lorsque l'on souhaite établir uniquement des bilans globaux.

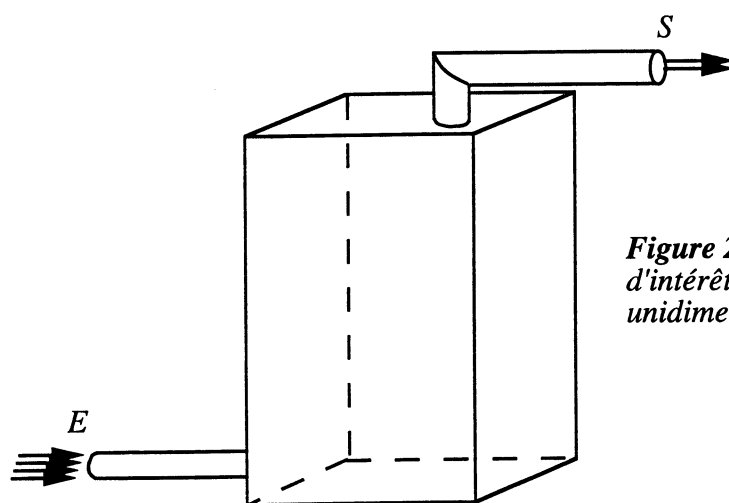


Figure 22. Beaucoup de systèmes d'intérêt technologique sont unidimensionnels en entrée et sortie.

I.4. Quelques principes et résultats de la thermodynamique

I.4.1. Systèmes thermodynamiques

Un système thermodynamique est un **système matériel** séparé de l'environnement par une **frontière**. La frontière doit être une surface fermée, mais elle peut laisser pénétrer de la matière, de la chaleur ou du travail.

I.4.2. Variables d'état

Si on considère un système thermodynamique isolé, ce système tend vers un état d'équilibre après un temps suffisamment long. Les variables qui ne dépendent que de l'état atteint par le système à l'équilibre sont appelées variables d'état. La pression p et le volume V du système sont des variables d'état. Une description complète de l'état du système nécessite l'introduction d'une variable d'état nouvelle, la température T . Pour un grand nombre de systèmes, l'état peut être représenté par une relation de la forme :

$$p = p(V, T)$$

On fait très souvent la distinction entre les variables d'état **extensives** et **intensives**.

Une variable est dite **extensive** si elle dépend de la masse du système considéré. Le volume, la masse ou l'énergie interne d'un système sont des variables extensives. Les variables d'état qui sont indépendantes de la masse sont **intensives**. Ainsi par exemple, la pression ou la température sont des variables intensives. L'énergie interne rapportée à l'unité de masse, l'entropie par unité de masse ou le volume spécifique sont aussi des variables intensives.

I.4.3. Premier principe de la thermodynamique

Soit un système matériel limité par une surface fermée A au travers de laquelle ne s'effectuent que des échanges de travail et de chaleur (figure 23). Si W et Q désignent le travail et la chaleur reçus par le système dans une transformation qui l'amène de l'état 1 à l'état 2, on peut écrire :

$$(W + Q)_{1 \rightarrow 2} = E_{t2} - E_{t1} \quad (I, 10)$$

où E_t désigne l'énergie totale du système.

Dans un très grand nombre de situations, l'énergie totale est la somme de trois types d'énergie : l'énergie interne E , l'énergie cinétique E_{cin} et l'énergie potentielle E_{pot} .

$$E_t = E + E_{cin} + E_{pot} \quad (I, 11)$$

et l'expression (I,10) s'écrit dans ce cas :

$$(W + Q)_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 + (E_{cin})_2 - (E_{cin})_1 + (E_{pot})_2 - (E_{pot})_1 \quad (I, 12)$$

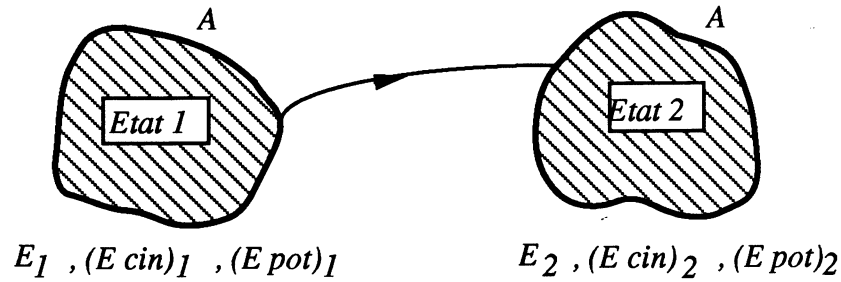


Figure 23. Système matériel fermé.

L'énergie interne E est une fonction qui ne dépend que de l'état du système et on dit que E est une **fonction d'état**.

L'énergie potentielle E_{pot} peut être associée à des forces diverses : forces de pesanteur, forces électrostatiques, forces électromagnétiques. E_{pot} peut aussi représenter un potentiel chimique.

Le travail W est celui des forces autres que celles qui dérivent d'un potentiel.

On peut encore écrire l'expression (I,12) pour une unité de masse du système :

$$(w + q)_{1 \rightarrow 2} = e_2 - e_1 + (e_{cin})_2 - (e_{cin})_1 + (e_{pot})_2 - (e_{pot})_1$$

Pour une transformation élémentaire et en supposant que l'énergie potentielle est celle de la pesanteur, on peut écrire :

$$\delta w + \delta q = de + d\frac{v^2}{2} + g dz \quad (I, 13)$$

Il est très souvent utile d'écrire le premier principe pour un **système ouvert** en régime permanent (figure 24). On considère dans ce cas une surface fermée Σ comportant une section d'admission et une section d'échappement. On suppose en outre que toutes les variables décrivant l'écoulement et l'état thermodynamique sont constantes sur toute la section d'entrée et sur toute la section de sortie (le système est unidimensionnel en entrée et en sortie). Dans ces conditions, on peut écrire :

$$(W' + Q)_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1 + (E_{cin})_2 - (E_{cin})_1 + (E_{pot})_2 - (E_{pot})_1 \quad (I, 14)$$

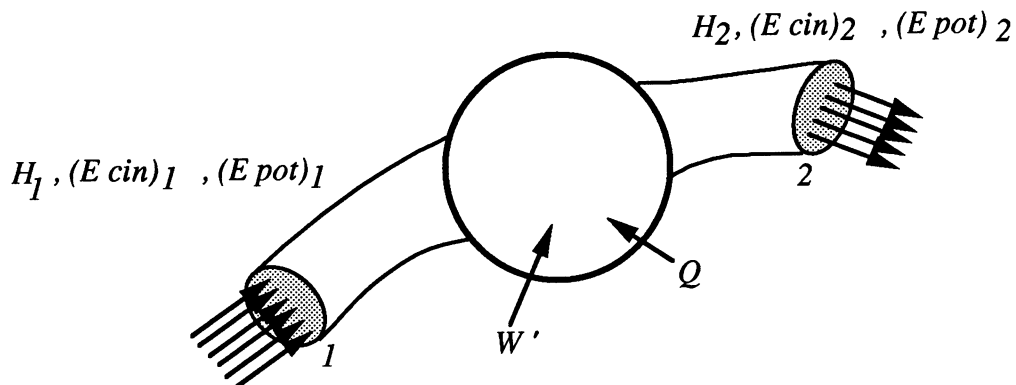


Figure 24. Système ouvert.

Ici E_{cin} et E_{pot} représentent les énergies cinétique et potentielle, H est une nouvelle fonction d'état, l'enthalpie, et W' désigne le travail autre que celui des forces de pression en entrée et sortie du système et des forces qui dérivent d'un potentiel.

Par unité de masse passant dans le système considéré, on peut écrire :

$$(w' + q)_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 + (e_{cin})_2 - (e_{cin})_1 + (e_{pot})_2 - (e_{pot})_1 \quad (I, 15)$$

Pour une transformation élémentaire, l'expression précédente devient :

$$\delta w' + \delta q = dh + d\frac{v^2}{2} + g dz \quad (I, 16)$$

L'énergie interne E et l'enthalpie sont reliées par : $H = E + pV$ où V désigne le volume du système. Par unité de masse, cette relation devient : $h = e + p/\rho$.

I.4.4. Second principe de la thermodynamique

Le second principe de la thermodynamique peut s'énoncer en deux parties :

- (1) Il existe une fonction d'état appelée entropie S
- (2) Dans une transformation élémentaire, la variation d'entropie s'exprime comme une somme de deux termes :

$$dS = \delta_e S + \delta_i S \quad (I, 17)$$

où $\delta_e S$ représente la variation d'entropie résultant des apports extérieurs et $\delta_i S$ est l'entropie produite à l'intérieur du système.

Dans toutes les transformations réelles, on a $\delta_i S \geq 0$. Lorsque $\delta_i S = 0$, on dit que la transformation est réversible. L'expression du deuxième principe se met sous une forme simple dans le cas d'un **système fermé**. Dans cette situation :

$$\delta_e S = \frac{\delta Q}{T} \quad (I, 18)$$

et on peut donc écrire :

$$\delta Q = T dS - T \delta_i S \quad (I, 19)$$

On désigne le second terme de cette expression sous le nom de "travail non compensé", $\delta f = T \delta_i S$.

Avec cette définition :

$$\delta Q = T dS - \delta f, \quad \delta f \geq 0 \quad (I, 20)$$

La relation précédente, due à Jouguet, exprime de façon élégante le second principe pour un système matériel fermé.

I.4.5. Equations d'état, énergie et enthalpie libres

A l'aide des deux premiers principes on peut montrer que :

$$de = Tds - pd\frac{1}{\rho} \quad (I, 21)$$

et on peut immédiatement déduire de la définition de l'enthalpie h :

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp \quad (I, 22)$$

Les deux expressions précédentes ne font intervenir que des variables d'état et on peut écrire :

$$T = \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_\rho, \quad \frac{p}{\rho^2} = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_s, \quad \text{ou} \quad T = \left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s \quad (I, 23)$$

Les expressions de l'énergie interne e en fonction des variables s et ρ ou de l'enthalpie h en fonction des variables s et p sont appelées équations d'état canoniques. Si l'on connaît $e = e(s, \rho)$ ou $h = h(s, p)$, on peut directement déduire une relation entre p, ρ et T (l'équation d'état thermique) et une relation entre e, T et ρ ou entre h, T et p (l'équation d'état calorifique).

A titre d'exemple, considérons le cas d'un **gaz parfait**. Pour un tel gaz, on peut écrire l'énergie interne e sous la forme :

$$e = e(s, \rho) = \frac{c_v}{r} \rho^{\gamma-1} e^{s/c_v} \quad (I, 24)$$

où $c_v = r/(\gamma - 1)$

Dans cette situation, les expressions (I, 23) donnent :

$$T = \frac{1}{r} \rho^{\gamma-1} e^{s/c_v} = \frac{e}{c_v} \quad (I, 25)$$

et

$$\frac{p}{\rho^2} = \frac{(\gamma - 1)c_v}{r} \rho^{\gamma-2} e^{s/c_v} \quad (I, 26)$$

soit encore :

$$\frac{p}{\rho} = (\gamma - 1)e \quad (I, 27)$$

On déduit alors facilement :

$$\frac{p}{\rho} = (\gamma - 1)c_v T = rT \quad (\text{équation d'état thermique}) \quad (I, 28)$$

et

$$e = c_v T \quad (\text{équation d'état calorifique}) \quad (I, 29)$$

Deux autres fonctions d'état apparaissent naturellement, en particulier dans l'étude de systèmes chimiques. Ces fonctions sont l'énergie libre F et l'enthalpie libre G (ou fonction de Gibbs).

Ces fonctions sont définies par :

$$F = e - Ts \quad (I, 30)$$

$$G = h - Ts \quad (I, 31)$$

En combinant (I,30) et (I,21), on obtient facilement :

$$dF = de - sdT - Tds = -sdT - pd\frac{1}{\rho} \quad (I, 32)$$

et de façon analogue :

$$dG = -sdT + \frac{1}{\rho}dp \quad (I, 33)$$

Les formes canoniques pour F et G sont respectivement :

$$F = F(T, \rho) \quad (I, 34)$$

$$G = G(T, p) \quad (I, 35)$$

Pour un gaz parfait, on peut montrer que l'enthalpie libre par unité de masse a pour expression :

$$G = \int c_p dT - T \int c_p \frac{dT}{T} + rT \ln p + h_o - Ts_o \quad (I, 36)$$

où $G_o = h_o - Ts_o$ est une enthalpie libre de référence.

Tableau 2. Premier principe (système fermé).

Pour l'ensemble du système :

$$(W + Q)_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 + (E_{cin})_2 - (E_{cin})_1 + (E_{pot})_2 - (E_{pot})_1$$

Par unité de masse :

$$(w + q)_{1 \rightarrow 2} = e_2 - e_1 + (e_{cin})_2 - (e_{cin})_1 + (e_{pot})_2 - (e_{pot})_1$$

Pour une évolution élémentaire, w_{pot} associé à la pesanteur :

$$\delta w + \delta q = de + d\frac{v^2}{2} + g dz$$

Tableau 3. Premier principe (système ouvert en régime permanent).

Pour une masse m :

$$(W' + Q)_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1 + (E_{cin})_2 - (E_{cin})_1 + (E_{pot})_2 - (E_{pot})_1$$

Par unité de masse :

$$(w' + q)_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 + (e_{cin})_2 - (e_{cin})_1 + (e_{pot})_2 - (e_{pot})_1$$

Pour une évolution élémentaire :

$$\delta w' + \delta q = dh + d\frac{v^2}{2} + g dz$$

Relation entre h et e : $h = e + p/\rho$

Tableau 4. Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits.

Equation d'état :	$p = \rho r T$
Energie interne :	$e = e_o + \int_{T_o}^T c_v dT$
Enthalpie :	$h = h_o + \int_{T_o}^T c_p dT$
Entropie :	$s = s_o + \int_{T_o}^T c_p \frac{dT}{T} - r \ln\left(\frac{p}{p_o}\right) = s_o + \int_{T_o}^T c_v \frac{dT}{T} + r \ln\left(\frac{p_o}{p}\right)$

I.5. Propriétés thermodynamiques des gaz parfaits

Nous rappelons ici les principales propriétés thermodynamiques des gaz parfaits.

I.5.1. Equation d'état

Un gaz parfait est un gaz idéal dont l'équation d'état a pour forme :

$$p = \rho r T \quad (I, 37)$$

Dans cette expression p , ρ et T représentent les pression, masse spécifique et température absolue et r est la constante du gaz considéré. La constante r peut être exprimée à l'aide de la constante universelle des gaz parfaits $\bar{R}$ et de la masse molaire M du gaz étudié :

$$r = \bar{R}/M \quad (I, 38)$$

La constante $\bar{R}$ a pour valeur : $\bar{R} = 8314.3 \text{ J/kmol} - K$.

Pour obtenir r en $J/kg - K$, il faut exprimer M en $kg/kmol$. Ainsi pour l'air, $M = 28.964 \text{ kg/kmol}$ et la constante r a pour valeur $r = \frac{8314.3}{28.964} = 287.06 \text{ J/kg} - K$.

Les constantes r de quelques autres gaz sont données au tableau 5. L'expression (I,37) peut encore s'écrire en fonction du volume V occupé par le gaz et du nombre N de $kmol$ dans ce volume. On peut en effet écrire : $\rho = m/V$ et $r = \bar{R}/M$ et en substituant dans l'expression (I,37), on obtient :

$$p = \frac{m}{V} \frac{\bar{R}}{M} T \quad (I, 38)$$

soit :

$$pV = n\bar{R}T \quad (I, 39)$$

où V est le volume occupé par le gaz, n représente le nombre de $kmol$ dans le volume et $\bar{R}$ est exprimé en $J/kmol - K$.

L'expression (I,37) est la plus pratique et c'est elle que nous utiliserons dans l'analyse des écoulements compressibles. L'expression (I,39) est surtout utilisée par les physico-chimistes.

Tableau 5. Constantes thermodynamiques de quelques gaz.

Gaz	Symbole chimique	Masse molaire M $kg/kmol$	γ , Rapport des chaleurs spécifiques à la température de 298.15 K	Constante $r = \bar{R}/M$ $J/kg - K$	c_p , chaleur spécifique à 298.15 K $J/kg - K$
Air		28.96	1.400	287.06	1004.00
Argon	Ar	39.94	1.658	208.15	524.61
Oxyde de Carbone	CO	28.01	1.398	296.83	1042.50
Gaz carbonique	CO_2	44.01	1.288	188.92	845.73
Hélium	He	4.00	1.659	2078.20	5233.50
Hydrogène	H_2	2.01	1.405	4124.20	14315.00
Méthane	CH_4	16.04	1.304	518.25	2223.20
Azote	N_2	28.01	1.400	296.80	1038.30
Oxygène	O_2	32.00	1.395	259.82	916.90
Eau	H_2O	18.01	1.329	461.50	1863.10

I.5.2. Energie interne d'un gaz parfait

On peut facilement montrer, en utilisant par exemple les relations de Clapeyron, que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

On a en général :

$$de = \delta q + \delta w = c_v dT + (l - p) d\frac{1}{\rho} \quad (I, 40)$$

avec :

$$l = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \quad (I, 41)$$

Pour un gaz parfait :

$$l = T(\rho r) = p \quad (I, 42)$$

et :

$$de = c_v dT \quad (I, 43)$$

Il nous reste à montrer que la chaleur massique c_v ne dépend pas de ρ .

On peut utiliser pour cette démonstration la relation :

$$\frac{\partial c_v}{\partial(1/\rho)} = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_\rho \quad (I, 44)$$

On obtient facilement :

$$\frac{\partial c_v}{\partial(1/\rho)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial c_v}{\partial \rho} = 0$$

Pour un gaz parfait, c_v ne peut être fonction que de la température $c_v = c_v(T)$ et l'énergie interne prend la forme

$$e = e_o + \int_{T_o}^T c_v dT \quad (I, 45)$$

où e_o désigne l'énergie interne à la température de référence T_o .

Si la chaleur massique c_v est indépendante de la température, on dit que le gaz est **caloriquement parfait**. Dans cette situation :

$$e = e_o + c_v(T - T_o) \quad (I, 46)$$

I.5.3. Enthalpie d'un gaz parfait

Pour obtenir l'expression de l'enthalpie h , on peut partir de la définition $h = e + p/\rho$.

Pour un gaz parfait, on peut écrire :

$$h = e + rT = e_o + rT + \int_{T_o}^T c_v dT \quad (I, 47)$$

ou encore :

$$h = h_o + \int_{T_o}^T (c_v + r) dT \quad (I, 48)$$

L'enthalpie ne dépend que de la température. L'expression (I,48) fait apparaître la chaleur massique à pression constante :

$$c_p = c_v + r \quad (I, 49)$$

I.5.4. Chaleurs spécifiques des gaz parfaits

Il est souvent commode d'exprimer les chaleurs massiques à pression et volume constants en fonction de r et du rapport $\gamma = c_p/c_v$. On a d'après (I,49) : $c_p - c_v = r$ et $\gamma = c_p/c_v$.

On tire facilement de ces deux relations :

$$c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{r}{\gamma - 1} \quad (I, 50)$$

I.5.5. Entropie d'un gaz parfait

Pour obtenir l'expression de l'entropie d'un gaz parfait, on peut partir des relations de Clapeyron ou encore des expressions canoniques;

$$de = Tds - pd\frac{1}{\rho}$$

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp$$

Pour un gaz parfait, $de = c_v dT$ et $dh = c_p dT$ et on tire des expressions précédentes :

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} d\frac{1}{\rho} = c_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} \quad (I, 51)$$

et :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{1}{\rho T} dp = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \quad (I, 52)$$

L'intégration de (I,51) et (I,52) conduit à :

$$s = \int c_v \frac{dT}{T} - r \ln \rho + \text{const.} \quad (I, 53)$$

et :

$$s = \int c_p \frac{dT}{T} - r \ln p + \text{const.} \quad (I, 54)$$

Il est souvent commode d'exprimer l'entropie en fonction de p et ρ . Pour cela, on peut prendre la différentielle logarithmique de l'équation d'état :

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho}$$

puis substituer cette relation dans (I,51) par exemple. On obtient ainsi :

$$ds = c_v \frac{dp}{p} - (c_v + r) \frac{d\rho}{\rho} \quad (I, 55)$$

soit :

$$ds = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} = c_v \left(\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (I, 56)$$

Si la chaleur massique c_v est constante, l'expression précédente peut s'intégrer :

$$s = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + \text{const.} \quad (I, 57)$$

Cette relation peut encore se mettre sous la forme :

$$p = C \rho^\gamma e^{s/c_v} \quad (I, 58)$$

où C est une constante.

L'évolution isentropique d'un gaz parfait s'effectue donc à $p/\rho^\gamma = \text{constante}$.

I.5.6. Mélanges de gaz parfaits

Considérons à présent un mélange de N gaz parfaits. Chaque gaz est repéré par l'indice i et il est caractérisé par sa masse molaire M_i et sa constante r_i . Le mélange se trouve dans un volume V sous la pression p et la température T .

Désignons par m_i la masse du gaz i contenue dans le volume V et par n_i le nombre de moles du gaz i dans ce même volume. La masse totale contenue dans V est :

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad (I, 59)$$

et le nombre total de moles a pour expression :

$$n = \sum_{i=1}^N n_i \quad (I, 60)$$

On définit la masse volumique du gaz i par :

$$\rho_i = \frac{m_i}{V} \quad (I, 61)$$

et la concentration molaire de ce gaz par :

$$c_i = \frac{n_i}{V} \quad (I, 62)$$

La masse volumique du mélange se déduit facilement de l'expression (I,59) :

$$\rho = \frac{m}{V} = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad (I, 63)$$

et la concentration molaire globale c est donnée par :

$$c = \frac{n}{V} = \sum_{i=1}^N c_i \quad (I, 64)$$

Dans l'analyse des écoulements réactifs, la variable la plus utile et celle qui apparaît le plus naturellement est la **fraction massique** Y_i du gaz ou de l'espèce i :

$$Y_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (I, 65)$$

On fait aussi intervenir les fractions molaires :

$$X_i = \frac{n_i}{n} = \frac{c_i}{c} \quad (I, 66)$$

La pression partielle p_i de l'espèce i est la pression qu'aurait cette espèce si elle occupait seule le volume V . Si l'espèce i est un gaz parfait, la pression partielle est donnée par :

$$p_i = \rho_i r_i T \quad (I, 67)$$

La loi de Dalton indique que la **pression du mélange de N gaz parfaits est donnée par la somme de toutes les pressions partielles des gaz qui composent le mélange :**

$$p = \sum_{i=1}^N p_i \quad (I, 68)$$

On peut écrire dans ces conditions :

$$p = \sum_{i=1}^N \rho_i r_i T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{V} r_i T \quad (I, 69)$$

Pour faire apparaître la masse spécifique globale $\rho = m/V$, multiplions le numérateur et le dénominateur par m :

$$p = \frac{m}{V} T \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} r_i \quad (I, 70)$$

soit :

$$p = \rho T \sum_{i=1}^N Y_i r_i \quad (I, 71)$$

On peut donc écrire une équation d'état pour le mélange sous la forme :

$$p = \rho r T \quad (I, 72)$$

où :

$$r = \sum_{i=1}^N Y_i r_i = \sum_{i=1}^N Y_i \frac{\bar{R}}{M_i} \quad (I, 73)$$

La constante du mélange est ainsi donnée par :

$$r = \bar{R} \sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{M_i}$$

Ainsi la masse molaire du mélange peut être définie par :

$$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{M_i}} \quad (I, 74)$$

Une autre notion utilisée dans la description de mélanges de gaz est celle de **volume partiel**. Le volume partiel V_i du gaz i est le volume que ce gaz occuperait s'il était sous la pression p et à la température T :

Ainsi :

$$pV_i = m_i r_i T = n_i \bar{R} T \quad (I, 75)$$

Comme d'autre part :

$$pV = n \bar{R} T \quad (I, 76)$$

la combinaison de ces deux expressions conduit à :

$$\frac{V_i}{V} = \frac{n_i}{n} = X_i \quad (I, 77)$$

On a aussi :

$$p_i V = n_i \bar{R} T \quad (I, 78)$$

et on peut donc déduire de (I,75) et (I,78) :

$$\frac{p_i}{p} = \frac{V_i}{V}$$

En définitive les fractions molaires et volumiques sont identiques et elles sont égales au rapport entre les pressions partielle et totale.

I.5.7. Energie interne et enthalpie d'un mélange de gaz parfaits

L'énergie interne du mélange de gaz est la somme des énergies internes de chacun des gaz. Pour une unité de masse :

$$e = \sum_{i=1}^N e_i Y_i = \sum_{i=1}^N Y_i [e_{i0} + \int_{T_0}^T c_{vi} dT] \quad (I, 79)$$

soit :

$$e = \sum_{i=1}^N Y_i e_{i0} + \int_{T_0}^T \left[\sum_{i=1}^N Y_i c_{vi} \right] dT \quad (I, 80)$$

On peut donc définir la chaleur massique à volume constant du mélange par :

$$c_v = \sum_{i=1}^N Y_i c_{vi} \quad (I, 81)$$

De la même manière :

$$h = \sum_{i=1}^N Y_i [h_{io} + \int_{T_o}^T c_{pi} dT] \quad (I, 82)$$

et :

$$c_p = \sum_{i=1}^N Y_i c_{pi} \quad (I, 83)$$

I.5.8. Entropie d'un mélange de gaz parfaits

Pour calculer l'entropie d'un mélange de gaz, on peut procéder en deux étapes.

L'état initial de chaque espèce étant p_o, T_o , on amène chacune des espèces à la pression p et à la température T . La variation d'entropie par unité de masse de l'espèce i est pour cette transformation :

$$\Delta s_i = \int_{T_o}^T c_{pi} \frac{dT}{T} - r_i \ln \frac{p}{p_o}$$

Pour la masse $m = \sum_{i=1}^N m_i$ de gaz, la variation d'entropie correspondant à cette première transformation est :

$$\Delta S_1 = \sum_{i=1}^N m_i \left[\int_{T_o}^T c_{pi} \frac{dT}{T} - r_i \ln \frac{p}{p_o} \right] \quad (I, 84)$$

La deuxième transformation consiste à amener chaque espèce de la pression p à la pression partielle p_i . La variation d'entropie correspondant à cette opération est associée au mélange des espèces. Pour l'espèce i , la variation d'entropie par unité de masse est :

$$\Delta s_i = -r_i \ln \frac{p_i}{p} \quad (I, 85)$$

La variation d'entropie pour le mélange de toutes les espèces est :

$$\Delta S_{mel} = - \sum_{i=1}^N m_i r_i \ln \frac{p_i}{p} \quad (I, 86)$$

et la variation d'entropie pour la masse totale m est la somme des expressions (I,84) et (I,86) :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_{mel} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\int_{T_o}^T c_{pi} \frac{dT}{T} - r_i \ln \frac{p_i}{p_o} \right] \end{aligned} \quad (I, 87)$$

On en déduit, par unité de masse du mélange :

$$\Delta s = \frac{\Delta S}{m} = \sum_{i=1}^N [Y_i \int_{T_o}^T c_{pi} \frac{dT}{T} - Y_i r_i \ln \frac{p_i}{p_o}] \quad (I, 88)$$

soit encore :

$$\Delta s = \int_{T_o}^T c_p \frac{dT}{T} - \sum_{i=1}^N Y_i r_i \ln \frac{p_i}{p_o} \quad (I, 89)$$

où c_p représente la chaleur massique du mélange.

Exemple : L'air traité comme un mélange de gaz parfaits

La composition de l'air sec est donnée en volume dans la table 6. Pour simplifier les calculs, on a retenu les trois gaz les plus importants N_2 , O_2 et Ar et leurs fractions volumiques ont été ajustées pour que l'on puisse négliger les autres espèces. Les calculs seront effectués en supposant que l'air est un mélange de gaz parfaits et on se placera dans les conditions standard $T = 298.15 \text{ K}$ et $p = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Déterminer successivement (1) les pressions partielles de chaque gaz, (2) les masses volumiques, (3) les fractions massiques, (4) la constante r du mélange, (5) la masse molaire du mélange, (6) les chaleurs massiques c_p et c_v .

Solution

- (1) Le tableau 6 donne la composition volumique de l'air, c'est-à-dire les fractions volumiques V_i/V . Les pressions partielles sont facilement obtenues à partir de $p_i = p(V_i/V)$.

Tableau 6. Propriétés des trois composants principaux de l'air.

Espèce	Masse molaire M_i	Pourcentage en volume	γ	c_p $J/kg - K$	c_v $J/kg - K$	$r_i = R/M_i$ $J/kg - K$
N_2	28.01	78.1	1.40	1038	742	296.8
O_2	32.00	21.	1.39	917	657	259.8
Ar	39.94	0.9	1.66	525	316	208.1

$$p_{N_2} = (1.013 \cdot 10^5)(0.781) = 79120 \text{ Pa}$$

$$p_{O_2} = (1.013 \cdot 10^5)(0.21) = 21120 \text{ Pa}$$

$$p_{Ar} = (1.013 \cdot 10^5)(0.09) = 911 \text{ Pa}$$

On peut vérifier que la pression totale est bien égale à la somme des pressions partielles.

- (2) Les densités de chaque gaz s'obtiennent à l'aide des équations d'état écrites pour chaque espèce : $\rho_i = p_i/(r_i T)$. On obtient facilement : $\rho_{N_2} = 0.894 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{O_2} = 0.274 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{Ar} = 0.015 \text{ kg/m}^3$.

La masse volumique du mélange est égale à la somme des trois valeurs précédentes : $\rho = 1.183 \text{ kg/m}^3$.

(3) Les fractions massiques sont déduites des résultats précédents suivant $Y_i = \rho_i/\rho$. On a : $Y_{N_2} = 0.755$, $Y_{O_2} = 0.231$, $Y_{Ar} = 0.013$.

(4) Pour déterminer r , on pondère les constantes r_i par les fractions massiques Y_i :

$$r = \sum_{i=1}^3 Y_i r_i = Y_{N_2} r_{N_2} + Y_{O_2} r_{O_2} + Y_{Ar} r_{Ar}$$

soit : $r = (296.8)(0.755) + (259.8)(0.232) + (208.1)(0.013) = 287.0 \text{ J/kg} - K$

(5) La masse molaire du mélange est donnée par : $M = \bar{R}/r = 8314.3/287 = 28.97 \text{ kg/kmole}$.

(6) Les chaleurs massiques c_p et c_v peuvent être calculées à partir de : $c_p = \sum_{i=1}^N Y_i c_{pi}$ et $c_v = \sum_{i=1}^N Y_i c_{vi}$. On trouve $c_p = 1003 \text{ J/kg} - K$, $c_v = 716 \text{ J/kg} - K$ et $\gamma = c_p/c_v = 1003/716 = 1.40$.

I.6. Propriétés physiques des fluides

I.6.1. Viscosité

Un milieu fluide soumis à des contraintes extérieures se déforme de façon continue. La déformation du fluide se poursuit tant que la contrainte est appliquée. Ce comportement diffère notablement de celui d'un solide soumis à une contrainte extérieure. La déformation du solide tend vers une valeur indépendante du temps.

Dans ces conditions, la déformation du fluide doit être caractérisée par le **taux de déformation**, c'est-à-dire par la **variation relative de la distance entre deux points par unité de temps**. (Dans un solide, la déformation est simplement caractérisée par la variation relative de distance entre deux points).

Lorsqu'on soumet un fluide réel à une contrainte de cisaillement, le fluide se déforme avec un certain taux. Si le **fluide est newtonien**, la relation entre la contrainte et le taux de déformation est linéaire, et on peut définir le coefficient de viscosité (ou encore la viscosité dynamique) comme le rapport de la contrainte de cisaillement au taux de déformation associé au cisaillement.

$$\mu = \frac{\text{contrainte de cisaillement}}{2(\text{taux de déformation associé au cisaillement})} \quad (I, 90)$$

Une définition élémentaire de la viscosité peut être donnée à partir de l'expérience représentée à la figure 25.

Un fluide au repos se trouve entre deux plaques parallèles de grandes dimensions et initialement au repos. On applique à la plaque supérieure une force F qui met cette plaque

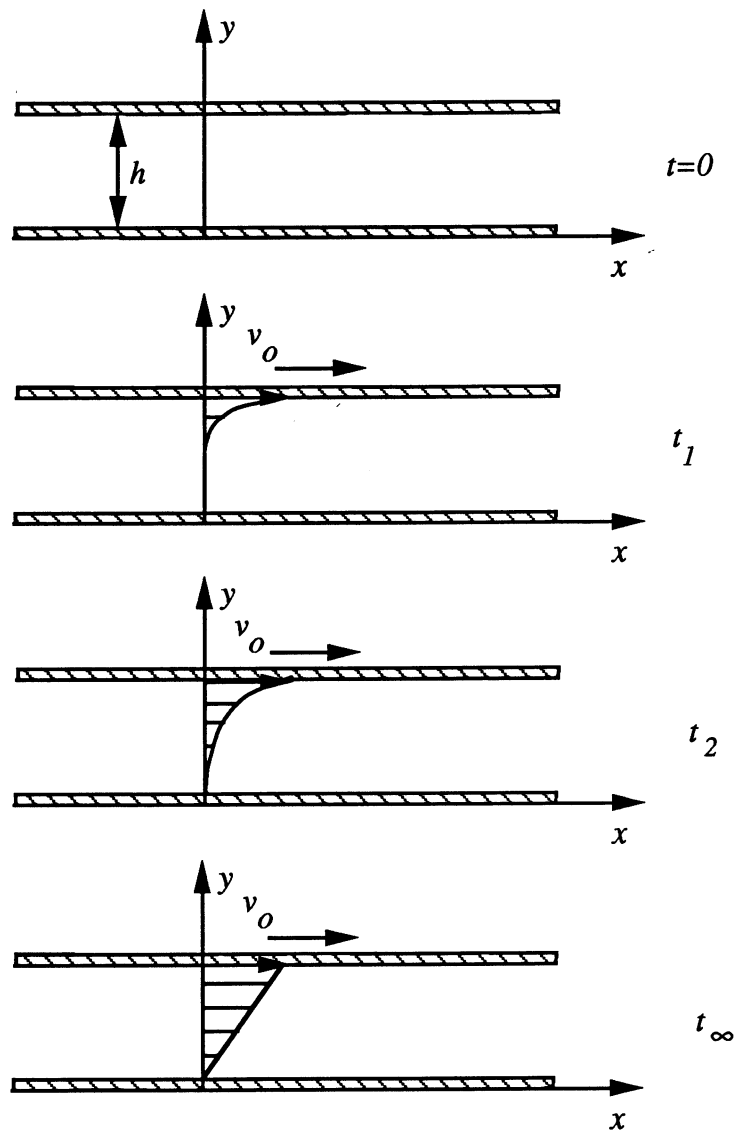


Figure 25. Evolution du profil de vitesse entre deux plaques parallèles infinies. La plaque supérieure est mise en translation à vitesse uniforme à l'instant $t=0$.

en mouvement à une vitesse constante v_o . Les particules fluides en contact avec la plaque supérieure se déplacent à la vitesse v_o et celles qui se trouvent contre la plaque inférieure restent immobiles. Les particules fluides se déforment et un profil de vitesse se développe par transfert de quantité de mouvement entre les couches adjacentes. Après un certain temps, le profil de vitesse devient linéaire et la vitesse est proportionnelle à la cote y :

$$v(y) = v_o \frac{y}{h} \quad (I, 91)$$

Lorsque le régime stationnaire est atteint, on constate que la force F est proportionnelle à la surface A . Cette force est aussi une fonction monotone croissante du rapport v_o/h . Si

le fluide est newtonien, la relation entre ces deux quantités est linéaire et on peut écrire :

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{v_o}{h} \quad (I, 92)$$

Le rapport F/A est dans cette expérience la contrainte de cisaillement appliquée au fluide. On désigne cette contrainte par τ_{yx} où l'indice y désigne la normale à la surface sur laquelle la contrainte est appliquée et x représente la composante de la contrainte suivant l'axe des x . Ici donc :

$$\tau_{yx} = \frac{F}{A} \quad (I, 93)$$

d'autre part, on peut remplacer v_o/h par dv_x/dy et l'expression (I,92) devient :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (I, 94)$$

Nous verrons plus loin que le taux de déformation associé au cisaillement s'exprime dans le cas général sous la forme :

$$d_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (I, 95)$$

Ici $\partial v_y / \partial x = 0$, et la relation (I,94) prend la forme : $\tau_{yx} = 2\mu d_{yx}$.

Cette relation est identique à la définition donnée pour le coefficient de viscosité (I,90).

Cette expression est généralisée plus loin à des situations de contrainte/taux de déformation quelconques (voir chapitre V). Les dimensions du coefficient de viscosité sont celles d'une force par unité de surface divisée par un taux de déformation :

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{[dv_x/dy]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{T^{-1}} \quad (I, 96)$$

soit $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$. Dans le système international, μ est donné en $kgm^{-1}s^{-1}$ et cette unité a reçu le nom de Poiseuille.

Dans beaucoup de problèmes où les contraintes visqueuses doivent être prises en compte, il est plus commode d'utiliser, au lieu du coefficient de viscosité μ , la **viscosité cinématique** ν obtenue en divisant μ par la densité : $\nu = \mu/\rho$. Les dimensions de la viscosité cinématique sont : $[\nu] = [\mu]/[\rho] = ML^{-1}T^{-1}/(ML^{-3}) = L^2T^{-1}$. Dans le système international, la viscosité ν s'exprime en m^2/s .

Exemple

On considère un axe de rayon $R = 2\text{ cm}$ en rotation à $n = 7200\text{ t/mn}$ dans un palier lubrifié. On supposera que l'espacement entre l'axe et le palier est constant et égal à $h = 0.04\text{ mm}$. La viscosité de l'huile est 0.020 Poiseuille et sa masse spécifique est $\rho = 920\text{ kg/m}^3$. Le palier mesure 5 cm de longueur (figure 26).

On suppose que la charge sur l'axe est très faible, de telle sorte que les forces de frottement associées à la viscosité soient seules importantes. Calculer la force de frottement développée sur l'axe, le couple correspondant et la puissance nécessaire pour faire tourner l'axe.

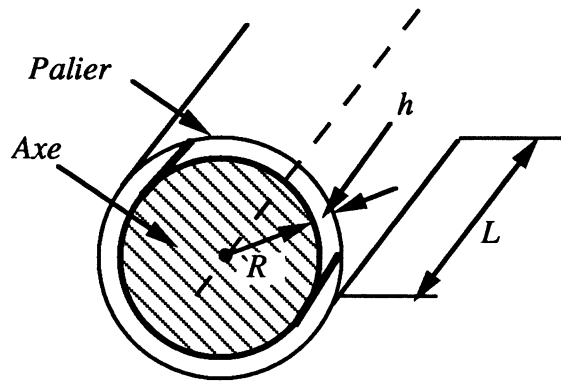


Figure 26. Géométrie du palier. $R=2\text{cm}$, $L=5\text{cm}$, $h=0.04\text{mm}$.

Solution

La vitesse périphérique de l'axe est $v_\theta = 2\pi Rn$. Ici $R = 0.02\text{m}$, $n = 120\text{ tours/s}$ et $v_\theta = 15.08\text{ m/s}$. La contrainte agissant sur le fluide au niveau de l'axe est donnée (approximativement) par $\tau = \mu v_\theta / h = (0.020)(15.08)/(4.10^{-5}) = 7539\text{ Pa}$.

La force appliquée à l'axe est : $F = \tau A = \tau 2\pi RL = (7539)\pi(0.04)(0.05) = 47.3\text{ N}$ et le couple correspondant est $C = FR = 0.95\text{ N}\cdot\text{m}$.

La puissance nécessaire pour faire tourner l'axe est $P = Fv_\theta = \omega C$.

Ici $P = (47.3)(15.08) = 713\text{ W}$.

I.6.2. Conductivité thermique

La conductivité thermique k (on utilise aussi très souvent le symbole λ) intervient dans l'analyse des transferts énergétiques dans les systèmes fluides. Ce coefficient joue, pour les transferts de chaleur, un rôle très proche de celui de la viscosité pour les transferts de quantité de mouvement.

On peut donner une définition opérationnelle de la conductivité thermique à partir d'une expérience semblable à celle utilisée plus haut pour la viscosité (figure 27).

On considère un milieu fluide au repos borné par deux surfaces parallèles de très grandes dimensions. Avant l'instant initial ($t < 0$), on porte la plaque supérieure à une température T_1 . Le profil de température à l'intérieur du milieu évolue avec le temps et tend asymptotiquement vers une distribution linéaire.

Dans cette situation, le flux de chaleur requis pour maintenir une distribution de température linéaire est proportionnel à la différence de température et à l'inverse de l'épaisseur du milieu. Ce flux est dirigé en sens inverse du gradient de température et il peut être exprimé sous la forme :

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{(T_1 - T_o)}{h} \quad (I, 97)$$

Le coefficient k est la conductivité thermique. L'expérience de la figure 27 est facilement réalisée dans le cas d'un milieu solide. Pour des liquides ou des gaz, le flux de chaleur peut

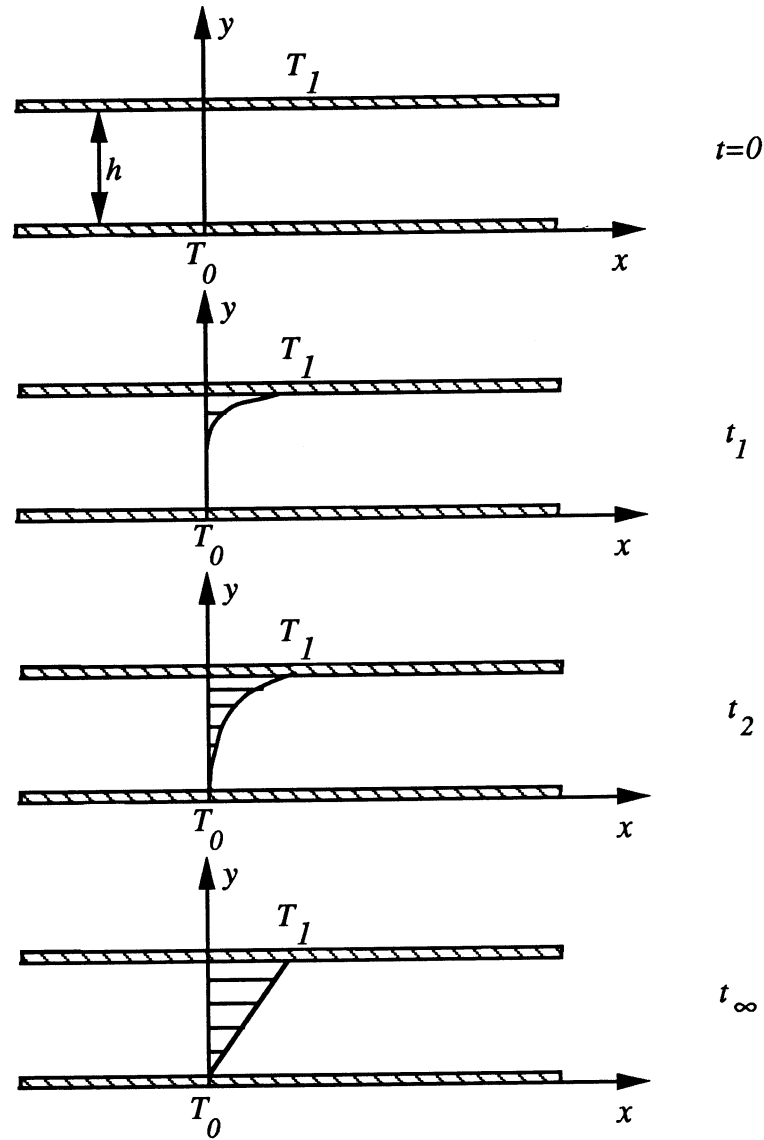


Figure 27. Evolution du profil de température dans un fluide au repos situé entre deux plaques parallèles infinies.

aussi être associé à des phénomènes convectifs ou radiatifs. Ces mécanismes doivent être éliminés ou tout au moins minimisés si l'on souhaite étudier la conduction pure.

L'expression (I,97) définit, du moins en principe, la conductivité thermique k . On peut remplacer cette relation par la forme équivalente : $q_y = -k \partial T / \partial y$ dont la généralisation à une distribution de température quelconque constitue la **loi de Fourier** :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (\text{I,98})$$

où ∇T représente le gradient de température. Le flux de chaleur $\mathbf{q}$ a les dimensions d'une énergie par unité de surface et de temps : $[q] = WL^{-2}T^{-1}$. Les dimensions de la

conductivité thermique k sont par conséquent :

$$[k] = \frac{[q]}{[\nabla T]} = \frac{WL^{-2}T^{-1}}{\Theta L^{-1}}$$

soit : $[k] = WL^{-1}\Theta^{-1}T^{-1}$.

Dans un grand nombre de problèmes, il est commode d'utiliser à la place de k la diffusivité thermique définie par : $a = k/(\rho c_p)$. Les dimensions de a sont :

$$[a] = \frac{[k]}{[\rho c_p]} = \frac{WL^{-1}\Theta^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}WM^{-1}\Theta^{-1}}$$

soit $[a] = L^2T^{-1}$.

La diffusivité thermique s'exprime dans le système international en m^2/s . **Cette quantité a les mêmes dimensions que la viscosité cinématique.**

Les valeurs de la viscosité cinématique et de la diffusivité thermique sont comparées entre elles à l'aide du nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k} \quad (I, 99)$$

Le tableau 7 donne les valeurs de la viscosité, de la conductivité et du nombre de Prandtl pour l'air sec à diverses températures.

Le nombre de Prandtl pour l'air reste proche de 0.75 et les variations de ν et a avec la température sont semblables (a augmentant seulement un peu plus vite que ν). Le nombre de Prandtl compare les transferts de quantité de mouvement et de chaleur. Pour les gaz, ces deux processus ont le même ordre de grandeur car ils résultent des mêmes phénomènes de collisions moléculaires et le nombre de Prandtl reste de l'ordre de l'unité (tableau 8).

Tableau 8. Valeur du nombre de Prandtl $c_p\mu/k$ pour quelques gaz sous la pression atmosphérique et à $T = 273 K$

Gaz	Pr	Gaz	Pr
<i>Ne</i>	0.66	<i>CO</i> ₂	0.78
<i>Ar</i>	0.67	<i>SO</i> ₂	0.86
<i>H</i> ₂	0.70	<i>NH</i> ₃	0.85
<i>N</i> ₂	0.73	<i>C</i> ₂ <i>H</i> ₄	0.80
<i>O</i> ₂	0.74	<i>C</i> ₂ <i>H</i> ₆	0.77
<i>Air</i>	0.73	<i>CCl</i> ₄	0.81
<i>CO</i>	0.76	<i>H</i> ₂ <i>O</i> (à 373 K)	0.94
<i>NO</i>	0.77		
<i>Cl</i> ₂	0.76		

Tableau 7. Propriétés physiques de l'air sec.

Température $T(K)$	Densité $\rho (kg.m^{-3})$	Viscosité $\mu (kg.m^{-1}s^{-1})$ $\times 10^5$	Viscosité cinématique $\nu (m^2/s)$ $\times 10^5$	Conductivité thermique $k (Jm^{-1}s^{-1}K^{-1})$ $\times 10^2$	Diffusivité thermique $a (m^2/s)$ $\times 10^5$	Chaleur massique $c_p (Jkg^{-1}K^{-1})$	Nombre de Prandtl $Pr = \mu c_p / k$
100	3.601	0.692	0.192	0.924	0.250	1026.	0.77
150	2.367	1.028	0.434	1.373	0.574	1010.	0.75
200	1.768	1.329	0.749	1.809	1.016	1006.	0.74
250	1.413	1.488	0.949	2.227	1.316	1005.	0.72
300	1.177	1.983	1.568	2.624	2.216	1005.	0.71
350	0.998	2.075	2.076	3.003	2.983	1009.	0.69
400	0.882	2.286	2.590	3.365	3.760	1014.	0.69
500	0.705	2.671	3.790	4.038	5.564	1029.	0.68
600	0.587	3.018	5.134	4.659	7.512	1055.	0.68
700	0.503	3.332	6.625	5.230	9.672	1075.	0.68
800	0.440	3.625	8.220	5.779	11.951	1098.	0.69
900	0.392	3.899	9.93	6.279	14.271	1121.	0.69
1000	0.352	4.152	11.78	6.675	16.78	1142.	0.70
1200	0.294	4.69	15.91	7.82	22.51	1179.	0.71
1400	0.251	5.17	20.55	8.91	29.20	1214.	0.70
1600	0.221	5.63	25.45	10.0	36.09	1248.	0.70
1800	0.197	6.07	30.81	11.1	43.79	1287.	0.70
2000	0.176	6.50	36.9	12.4	52.6	1338.	0.70
2400	0.146	7.35	50.4	16.1	70.2	1574.	0.72

Le tableau 9 rassemble les valeurs de la viscosité, de la conductivité thermique et du nombre de Prandtl pour l'eau liquide à diverses températures.

Tableau 9. Propriétés physiques de l'eau liquide.

Température T (0°)	Densité ρ ($kg.m^{-3}$)	Viscosité μ ($kg.m^{-1}s^{-1}$) $\times 10^3$	Viscosité cinématique ν (m^2/s) $\times 10^6$	Conductivité thermique k ($Jm^{-1}s^{-1}K^{-1}$)	Diffusivité thermique a (m^2/s) $\times 10^7$	Chaleur massique c_p ($Jkg^{-1}K^{-1}$)	Nombre de Prandtl $Pr = \mu c_p / k$
0	1002.3	1.792	1.788	0.552	1.308	4.218	13.6
20	1000.5	1.007	1.006	0.597	1.430	4.182	7.02
40	994.6	0.654	0.658	0.628	1.512	4.178	4.34
60	985.5	0.471	0.478	0.652	1.554	4.184	3.02
80	974.1	0.354	0.364	0.668	1.636	4.196	2.22
100	960.6	0.283	0.295	0.680	1.680	4.216	1.74
200	866.8	0.138	0.160	0.665	1.706	4.505	0.94
300	714.3	0.096	0.150	0.540	1.324	5.720	1.02

I.6.3. Compressibilité, dilatation thermique et chaleurs spécifiques

Le coefficient de compressibilité isotherme d'un fluide est défini par :

$$\kappa_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

Ce coefficient a pour dimensions $[\kappa_T] = 1/ML^{-1}T^{-2}$.

On utilise souvent un coefficient de compressibilité isentropique dans lequel la dérivée par rapport à la pression est prise à entropie constante :

$$\kappa_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad \text{et} \quad [\kappa_s] = 1/ML^{-1}T^{-2}$$

Le coefficient de dilatation défini par :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad [\alpha] = \Theta^{-1}$$

est surtout utilisé dans l'analyse des écoulements de convection naturelle.

Ces trois coefficients sont généralement très faibles pour les liquides, et les effets de la température et de la pression sur la densité peuvent être négligés dans la plupart des cas.

Le tableau 10 donne les valeurs de κ_T et α pour quelques liquides.

Tableau 10. Compressibilité et dilatation de quelques fluides.

Fluide	$\kappa_T (\text{bar}^{-1})$	$\alpha (K^{-1})$
Eau	$52 \cdot 10^{-6}$	$0.18 \cdot 10^{-3} \quad (t = 20^\circ C)$
Mercure	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$0.18 \cdot 10^{-3} \quad (t = 20^\circ C)$
Benzène	$90 \cdot 10^{-6}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$
Alcool éthylique	$120 \cdot 10^{-6}$	$1.12 \cdot 10^{-3}$

Les chaleurs spécifiques à pression et volume constants sont liées par la relation de Mayer au coefficient de dilatation. On peut montrer en effet, que :

$$c_p - c_v = -T \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \left[\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \right]^2 \quad (I, 100)$$

soit encore en utilisant κ_T et α :

$$c_p - c_v = -T \frac{\alpha^2}{\kappa_T \rho} \quad (I, 101)$$

I.7. Méthodes de résolution des problèmes de mécanique des fluides

Pour conclure ce chapitre il est intéressant de présenter la méthodologie de résolution des problèmes de mécanique des fluides. Les problèmes rencontrés en pratique peuvent être rangés en deux grandes classes. Dans les problèmes directs on souhaite déterminer les caractéristiques d'un écoulement particulier dans une géométrie donnée a priori. Les problèmes inverses consistent à définir la géométrie en fonction de caractéristiques à atteindre. On souhaite par exemple obtenir une distribution de pression particulière en modifiant la forme d'un profil portant. Dans les deux cas, l'analyse des problèmes de mécanique des fluides s'appuie en général sur :

- (1) les principes fondamentaux (conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment angulaire de l'énergie, deuxième principe de la thermodynamique).
- (2) les lois de comportement (lois de Newton, Fourier, Fick), les équations d'état et des informations expérimentales supplémentaires.
- (3) les méthodes de l'analyse mathématique (analyse vectorielle, théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles...)
- (4) les méthodes numériques (éléments finis, différences finies, méthodes spectrales...)
- (5) des méthodes d'approximation très diverses issues de considérations d'ordre de grandeur et d'estimations des mécanismes dominants.

Les principes fondamentaux permettent l'écriture des équations du problème. Ces principes ont pour forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de la masse du} \\ \text{système matériel} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Apport de masse au système} \\ \text{matériel considéré} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de la quantité} \\ \text{de mouvement du système matériel} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Apport de quantité de mouvement} \\ \text{au système considéré par applica-} \\ \text{tion de forces extérieures} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation du moment} \\ \text{angulaire du système matériel} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Apport de moment angulaire} \\ \text{au système considéré par appli-} \\ \text{cation de couples extérieurs} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de l'énergie du} \\ \text{système matériel} \end{array} \right\} = \{ \text{Apport d'énergie au système considéré} \}$$

Ces bilans peuvent être exprimés sous forme locale (chapitres V et VI), ou sous forme macroscopique (chapitres VII, IX). Nous verrons plus loin que l'écriture détaillée des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie fait intervenir des lois de comportement comme la loi de Newton, qui relie les contraintes visqueuses et les taux de déformation, ou la loi de Fourier qui exprime le flux de chaleur en fonction du gradient de température.

Le système d'équations dynamiques doit être complété par l'équation d'état du fluide (ou les équations d'état pour des mélanges polyphasiques).

On obtient ainsi un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaire et un ensemble de conditions initiales et de conditions aux limites pour la configuration envisagée. La solution du problème peut être recherchée en procédant à des approximations fondées sur une analyse d'ordre de grandeur. On sait traiter, par exemple, une grande classe d'écoulements unidimensionnels (voir chapitres VIII et X), des écoulements de couche limite (chapitres XVII et XVIII), des écoulements linéarisés (aérodynamique des profils, des surfaces portantes et des corps élancés) ou des écoulements irrotationnels.

Très souvent, le problème ne peut être résolu par des méthodes analytiques et il faut utiliser des techniques numériques. On procède alors à une discrétisation des équations de bilan sur un maillage adapté à la configuration géométrique du problème. Les équations discrétisées sont ensuite intégrées numériquement (voir par exemple Roache 1972, Holt 1977, Peyret et Taylor 1983, Anderson, Tannehill et Pletcher 1984, Cebeci et Bradshaw 1984, Fletcher 1988).

Dans tous les cas, l'intuition physique joue un rôle important et il faut faire appel à des connaissances préalables correspondant à des problèmes semblables, à des informations expérimentales et à l'évaluation a priori des ordres de grandeur.

CHAPITRE II

CINEMATIQUE

II.1. Introduction

La description du mouvement d'un milieu fluide peut être fondée sur deux types d'approches. Dans la **représentation lagrangienne**, on envisage la dynamique de particules de matière discrètes et on restitue les trajectoires des particules en fonction de l'espace et du temps. Les équations du mouvement sont écrites, dans cette représentation, pour une particule discrète dont l'identité est fixée.

Dans la **représentation eulerienne**, le problème est considéré d'une façon fondamentalement différente. On envisage, cette fois, les variations dans le temps des caractéristiques de l'écoulement en des points fixes de l'espace. On s'intéresse, par exemple, à l'évolution de la masse volumique, de la pression ou de la vitesse en un point du milieu.

La représentation eulerienne est la plus commode en mécanique des fluides et elle est utilisée dans toute la suite et dans la majeure partie des applications. La représentation lagrangienne permet cependant une définition rigoureuse de certaines variables comme la vitesse ou l'accélération d'une particule. Cette représentation est aussi intéressante lorsque l'on considère la dynamique de milieux chargés en particules ou encore l'évolution de surfaces de discontinuité séparant des masses de fluides distinctes.

Ce chapitre introduit les deux types de représentations. Le déplacement, la vitesse et le taux de variation d'une variable quelconque sont ensuite envisagés. L'analyse aboutit à une notion fondamentale en mécanique des fluides : la **dérivée matérielle**.

La dérivée matérielle est utilisée pour déterminer l'expression de l'accélération d'une particule fluide. Les notions de ligne de courant, trajectoire et ligne d'émission sont l'objet de la dernière section. Ces lignes particulières permettent la description qualitative de configurations d'écoulement. Ces notions sont aussi utiles à l'interprétation de visualisations d'écoulements.

Bibliographie

Les notions de cinématique présentées dans ce chapitre sont envisagées dans tous les ouvrages de base. Des analyses plus approfondies sont données par Serrin 1959, Truesdell et Toupin 1960, et Germain et Muller 1986.

II.2. Systèmes matériels et description du mouvement

Nous désignons par $(e_i, i = 1, 2, 3)$ les vecteurs unitaires d'une base de coordonnées cartésiennes fixe d'origine O . Tous les mouvements seront étudiés par rapport à ce système de référence fixe.

Supposons à présent qu'à l'instant $t = 0$, la région D_0 de l'espace soit occupée par un système matériel continu (chaque point de D_0 est occupé par une particule de matière). Nous désignons par X la position de la particule de matière située en P_0 . Les composantes de X seront représentées par X_r (figure 1).

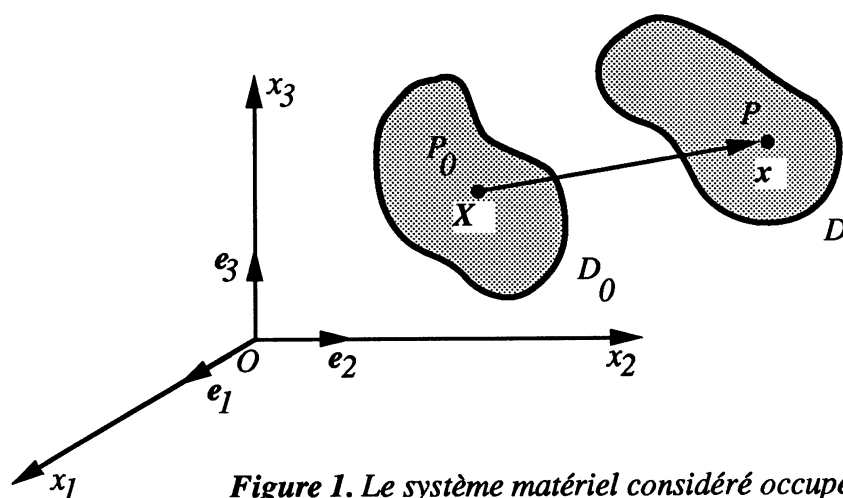


Figure 1. Le système matériel considéré occupe la région D_0 à l'instant $t=0$ et la région D au temps t .

La matière qui occupe la région D_0 au temps $t = 0$ se déplace et elle occupe la région D à l'instant t .

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, on peut supposer que chaque point P de la région D peut être identifié à une particule matérielle qui se trouvait à l'instant $t = 0$ en un point P_0 de D_0 . Désignons par x le vecteur position du point P .

Dans ces conditions le mouvement du système matériel peut être décrit en spécifiant l'ensemble des positions x à l'instant t en fonction des positions X à l'instant $t = 0$:

$$x = x(X, t) \quad (II, 1)$$

pour tout X appartenant à D_0 et tout x appartenant à D .

En projection sur les trois axes de référence, on peut encore écrire :

$$x_i = x_i(X_k, t) \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3 \quad (II, 2)$$

Nous appellerons les coordonnées X_k **coordonnées matérielles** et les coordonnées x_i **coordonnées spatiales**. La configuration du système matériel à l'instant initial $t = 0$

sera la **configuration de référence**. La configuration du système à l'instant t sera la **configuration courante**.

Pour les mouvements réalisables, il est en principe possible d'inverser les relations (II,1) (II,2) pour déterminer les X_r en fonction des x_i et de t :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad \text{ou} \quad X_r = X_r(x_i, t) \quad \text{pour} \quad i, r = 1, 2, 3 \quad (\text{II}, 3)$$

Les problèmes de mécanique des milieux continus peuvent être formulés en prenant comme variables indépendantes les **coordonnées matérielles** X_r ou les **coordonnées spatiales** x_i . Le premier type de formulation est encore appelé **formulation lagrangienne** et le second type **formulation eulerienne**. En **variables de Lagrange** on s'intéresse à l'histoire d'une particule matérielle déterminée. En **variables d'Euler** on considère plutôt l'évolution en un point de l'espace des caractéristiques du milieu.

La formulation mathématique des lois du mouvement est souvent plus facile en variables de Lagrange, mais la résolution des problèmes pratiques est généralement plus simple en variables d'Euler. Nous utiliserons principalement ce dernier type de description dans toute la suite.

II.3. Déplacement et vitesse

Le vecteur déplacement d'une particule de position initiale $\mathbf{X}$ et de position $\mathbf{x}$ dans la position courante est défini par (figure 2) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (\text{II}, 4)$$

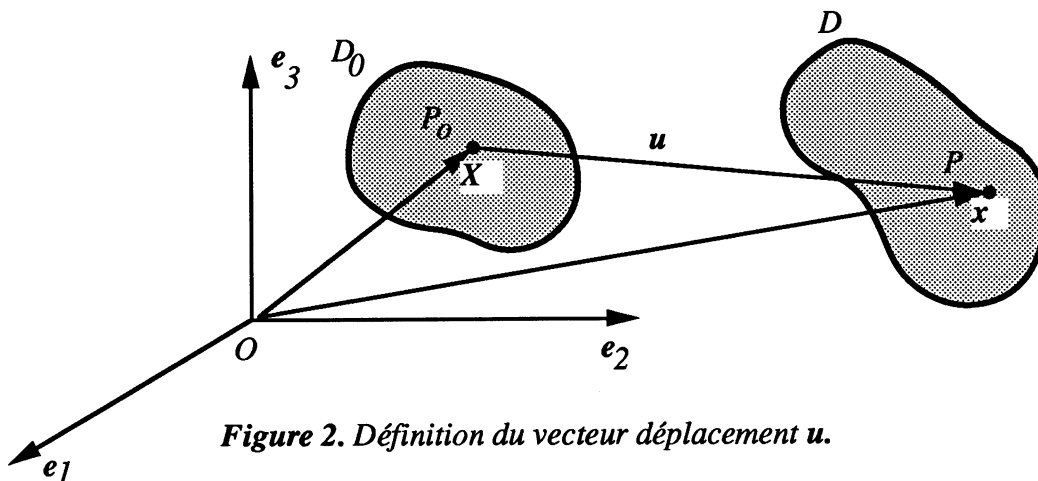


Figure 2. Définition du vecteur déplacement $\mathbf{u}$.

En variables matérielles $\mathbf{u}$ est une fonction de $\mathbf{X}$ et t :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (\text{II}, 5)$$

et en variables spatiales $\mathbf{u}$ est considérée comme étant fonction de $\mathbf{x}$ et t :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (II, 6)$$

Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule matérielle est égal au taux de variation du vecteur déplacement. Comme $\mathbf{X}$ est une constante pour une particule donnée le vecteur vitesse est donné par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (II, 7)$$

où la dérivation par rapport à t est effectuée en gardant $\mathbf{X}$ constant.

En projection sur les trois axes, on peut encore écrire :

$$v_i(X_r, t) = \frac{\partial x_i(X_r, t)}{\partial t} \quad i = 1, 2, 3 \quad (II, 8)$$

Dans cette formulation **lagrangienne** les composantes du vecteur vitesse sont données à l'instant t pour une particule qui se trouvait en $\mathbf{X}$ à $t = 0$.

Très souvent cependant on souhaite déterminer la vitesse au point $\mathbf{x}$. Pour cela il faut utiliser l'expression de $\mathbf{X}$ en fonction de $\mathbf{x}$. Pour illustrer cet aspect, considérons l'exemple suivant :

Exemple 1. Un système matériel effectue le mouvement suivant :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 f(t) \\ x_2 &= X_2 \\ x_3 &= X_3 \end{aligned} \quad (II, 9)$$

où $f(t)$ est une fonction du temps t avec $f(0) = 1$. Déterminer le déplacement et la vitesse en fonction des variables matérielles et spatiales.

D'après (II,6) on a :

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 - X_1 = X_1 f(t) - X_1 = X_1 [f(t) - 1] \\ u_2 &= x_2 - X_2 = 0 \\ u_3 &= x_3 - X_3 = 0 \end{aligned} \quad (II, 10)$$

Ces expressions donnent le déplacement à l'instant t en variables matérielles. Pour obtenir les expressions de $\mathbf{u}$ en variables spatiales, il faut remplacer X_1 par $x_1/f(t)$.

On obtient ainsi :

$$u_1 = x_1 [f(t) - 1] / f(t)$$

Pour obtenir la vitesse, il faut dériver les expressions (II,10) en gardant X_1, X_2, X_3 constantes. On obtient :

$$v_1 = X_1 f'(t), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

et en variables spatiales :

$$v_1 = x_1 f'(t) / f(t), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

II.4. Taux de variation dans le temps d'une fonction quelconque

Considérons une fonction Φ de l'espace et du temps. On peut exprimer Φ en fonction de t et de $\mathbf{X}$ ou en fonction de $\mathbf{x}$ et de t :

$$\Phi = \Phi(X_k, t) = \varphi(x_i, t)$$

Le taux de variation de Φ lorsque l'on suit une particule dans son mouvement peut être obtenu en dérivant cette fonction par rapport au temps, à X_k constant : $\partial\Phi(X_k, t)/\partial t$.

Nous désignerons par $d\Phi/dt$ ce taux de variation. (Dans un certain nombre d'ouvrages le taux de variation obtenu en suivant une particule dans son mouvement est représenté par $D\Phi/Dt$. Nous n'adoptons pas cette notation ici). Dans ces conditions :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi(X_k, t)}{\partial t} \quad (II, 11)$$

Si l'on souhaite exprimer ce taux de variation en fonction des coordonnées spatiales x_i , il faut partir de :

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi(x_i, t) = \varphi[x_i(X_k, t), t] \\ &= \varphi[x_1(X_k, t), x_2(X_k, t), x_3(X_k, t), t] \end{aligned} \quad (II, 12)$$

On peut maintenant différencier par rapport à t tout en gardant X_k constant :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t}(X_k, t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t}(X_k, t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t}(X_k, t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (II, 13)$$

Nous avons vu plus haut que $\partial x_i(X_k, t)/\partial t$ étaient les composantes du vecteur vitesse de la particule considérée :

$$v_i = \frac{\partial x_i(X_k, t)}{\partial t} \quad (II, 14)$$

Dans ces conditions :

$$\frac{d\Phi}{dt} = v_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (II, 15)$$

ou encore :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (II, 16)$$

où le gradient est calculé par rapport aux coordonnées spatiales x_i .

Nous venons d'établir de façon rigoureuse l'expression du taux de variation $d\Phi/dt$. On peut obtenir une interprétation physique de cette expression à l'aide du raisonnement suivant. Considérons (figure 3) une particule située en x_i à l'instant t . Cette particule sera à l'instant $t + \delta t$ en $x_i + v_i \delta t$. Soit Φ une fonction associée à la particule considérée. La variation de cette fonction dans l'intervalle δt est donnée par :

$$\delta\Phi = \varphi(x_i + v_i \delta t, t + \delta t) - \varphi(x_i, t)$$

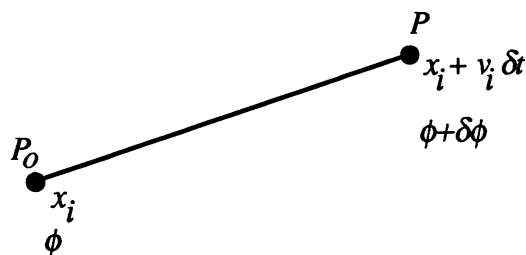


Figure 3. La particule située à l'instant t en x_i passe à l'instant $t + \delta t$ en $x_i + v_i \delta t$.

et le taux de variation de la fonction ϕ en suivant la particule est obtenu en prenant la limite $\delta t \rightarrow 0$ de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta\Phi}{\delta t} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_i + v_i \delta t, t + \delta t) - \varphi(x_i, t)}{\delta t} \\ &= v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{aligned} \quad (II, 17)$$

La dérivée $d\Phi/dt$ est encore appelée **dérivée matérielle** ou **dérivée particulière** de Φ . Cette quantité intervient souvent en mécanique des fluides et il est important de bien comprendre sa signification.

Il est logique d'utiliser des notations différentes pour représenter la fonction Φ en fonction des variables matérielles X_r , ou spatiales x_i . Cependant nous utiliserons dans toute la suite le même symbole Φ pour ces deux représentations. Pour éviter toute confusion on pourra faire apparaître de façon explicite les arguments de la fonction par exemple :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi(X_k, t)}{\partial t} \quad (II, 18)$$

ou encore

$$\frac{d\Phi}{dt} = v_i \frac{\partial \Phi(x_i, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi(x_i, t)}{\partial t} \quad (II, 19)$$

Cette précaution ne sera pas nécessaire en général.

Pour mieux comprendre la notion de dérivée matérielle, considérons l'exemple suivant :

Exemple 2. Mesure de température par une fusée sonde

On considère une fusée sonde effectuant un vol vertical dans une atmosphère dans laquelle la température décroît linéairement à partir du sol jusqu'à l'altitude de 10000 pieds.

$$T(x, y, z) = T_o - bz \quad \text{où } b = 8.10^{-3} K/m \quad (II, 20)$$

L'engin est muni d'un capteur de température. Calculer le taux de variation de la température mesurée par ce capteur lorsque la fusée s'élève avec une vitesse de 360 km/h.

Solution

Le calcul du taux de variation de la température peut être directement effectué à l'aide de la formule de dérivation matérielle :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (II, 21)$$

Ici $v_x = v_y = 0, v_z = 360.10^3/3600 = 100 \text{ m/s}$, $\partial T/\partial t = \partial T/\partial x = \partial T/\partial y = 0, \partial T/\partial z = -b$.

On a donc :

$$\frac{dT}{dt} = -bv_z = (-8.10^{-3})(100) = -0.8 \text{ K/s}$$

La température mesurée par le capteur varie donc de -0.8 K toutes les secondes.

II.5. Accélération d'une particule

L'accélération d'une particule matérielle est égale au taux de variation de la vitesse de cette particule. Il s'agit donc de la dérivée matérielle de la vitesse de la particule. Nous désignerons l'accélération par $\mathbf{a}$.

En utilisant la description lagrangienne on a :

$$x_i = x_i(X_k, t) \quad (II, 22)$$

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}(X_k, t) \quad (II, 23)$$

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}(X_k, t) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}(X_k, t) \quad (II, 24)$$

ou encore en notation vectorielle :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t) \quad (II, 25)$$

L'expression (II,24) est particulièrement simple, mais elle n'est pas la plus utile. On peut aussi écrire :

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t}(x_j, t) + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(x_j, t) \quad (II, 26)$$

ou encore :

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (II, 27)$$

Pour bien comprendre la structure des expressions (II,26) (II,27), nous allons les écrire sous forme explicite :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ a_2 &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ a_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (II, 28)$$

Ces expressions font apparaître l'opérateur de dérivation :

$$v_k \frac{\partial}{\partial x_k} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (II, 29)$$

que l'on peut représenter en notation de Gibbs sous la forme : $\mathbf{v} \cdot \nabla$. Cet opérateur est, en coordonnées cartésiennes, donné par l'expression (II,29).

Dans d'autres systèmes de coordonnées, il faut utiliser des expressions spéciales obtenues à partir d'une représentation intrinsèque de l'opérateur $\mathbf{v} \cdot \nabla$. Les tableaux 1,2 et 3 donnent les expressions de l'accélération pour trois systèmes de coordonnées utilisés couramment. Ici encore on peut donner une interprétation physique de l'expression obtenue pour l'accélération. Pour cela nous considérons une particule située à l'instant t en x_k et dotée d'une vitesse $v_i(x_k, t)$ (figure 4).

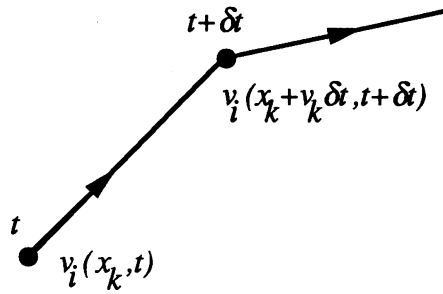


Figure 4. Variation de la vitesse d'une particule au cours d'un intervalle de temps δt .

A l'instant $t + \delta t$ cette particule se trouve en $x_k + v_k \delta t$ et sa vitesse est $v_i(x_k + v_k \delta t, t + \delta t)$. La variation de la vitesse de la particule est :

$$\delta v_i = v_i(x_k + v_k \delta t, t + \delta t) - v_i(x_k, t) \quad (II, 30)$$

et l'accélération de la particule est donnée par :

$$a_i = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta v_i}{\delta t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (II, 31)$$

Nous allons maintenant illustrer les expressions obtenues pour l'accélération à l'aide de plusieurs exemples.

Exemple 3.

Considérons d'abord le mouvement déjà étudié plus haut : $x_1 = X_1 f(t)$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$ avec $f(0) = 1$. Pour cet écoulement, calculer l'accélération à l'aide des expressions (II,24) et (II,26) et montrer que les résultats obtenus sont équivalents.

Solution

En variables de Lagrange les composantes de la vitesse sont : $v_1 = X_1 f'(t)$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

L'accélération est donnée par (II,24) : $a_1 = X_1 f''(t)$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

Pour calculer l'accélération en variable d'Euler, il faut d'abord exprimer la vitesse en variables d'Euler : $v_1 = x_1 f' / f$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

Dans ces conditions :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = +x_1 \frac{f''}{f} - x_1 \frac{(f')^2}{f^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{f'}{f}$$

Toutes les autres dérivées sont nulles. On a donc :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ &= x_1 \frac{f''}{f} - x_1 \frac{f'^2}{f^2} + x_1 \frac{f'^2}{f^2} = x_1 \frac{f''}{f} \end{aligned}$$

et :

$$a_2 = a_3 = 0$$

Les expressions obtenues pour l'accélération sont bien identiques.

Exemple 4. On considère l'écoulement accéléré d'un fluide dans un conduit convergent. Nous supposons que le conduit est axisymétrique d'axe x et que l'écoulement est stationnaire (figure 5). Donner l'expression de l'accélération d'une particule matérielle dont la trajectoire est l'axe du conduit.

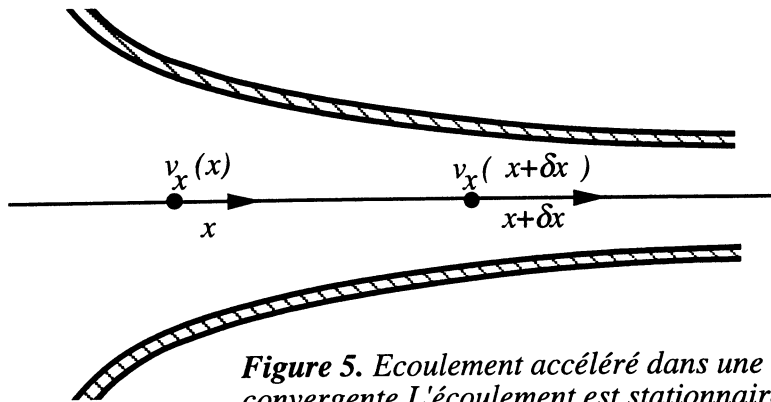


Figure 5. Ecoulement accéléré dans une section convergente. L'écoulement est stationnaire mais l'accélération des particules fluides est non-nulle.

Solution

Considérons une particule fluide se déplaçant sur l'axe et passant en x à l'instant t avec une vitesse v_x . A l'instant $t + \delta t$ cette particule sera en $x + \delta x$, sa vitesse sera $v_x(x + \delta x)$. Le temps de parcours de la distance δx aura été : $\delta t = \delta x / \bar{v}_x$ où $\bar{v}_x$ désigne une moyenne des vitesses v_x sur l'intervalle δx .

L'accélération de la particule dans la direction x est donnée par :

$$\begin{aligned} a_x &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(x + \delta x) - v_x(x)}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}_x [v_x(x + \delta x) - v_x(x)]}{\delta x} \end{aligned}$$

Soit :

$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (II, 32)$$

Maintenant, comparons ce résultat avec celui que l'on peut déduire de l'expression générale de l'accélération en coordonnées cylindriques (Tableau 2).

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (II, 33)$$

Pour un écoulement stationnaire $\partial v_x / \partial t = 0$. Comme l'écoulement est axisymétrique $v_\theta = 0$ et v_x est indépendant de θ . D'autre part sur l'axe $v_r = 0$. Seul le dernier terme subsiste dans l'expression (II,33). :

$$a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (II, 34)$$

et on retrouve l'expression obtenue plus haut.

II.6. Lignes de courant, trajectoires, lignes d'émission

Les notions de ligne de courant, trajectoire et ligne d'émission sont extrêmement utiles dans la visualisation de la géométrie d'écoulements fluides.

Une **ligne de courant** est une ligne tangente en tout point au vecteur vitesse local (figure 6).

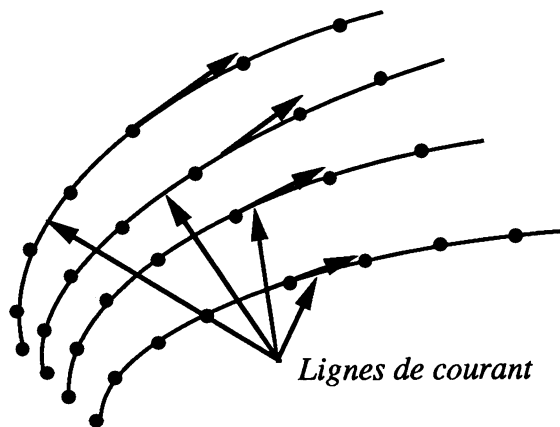


Figure 6. Lignes de courant observées en prenant une photographie d'un ensemble de particules avec un temps de pose très court. Les particules parcourent des distances proportionnelles à leur vecteur vitesse pendant le temps d'exposition.

A l'instant t les lignes de courant sont données par des équations de la forme : $dx_i/d\tau = v_i(x_j, t)$ où τ est un paramètre d'intégration pour le système différentiel précédent.

Une **trajectoire** est la ligne formée par les positions successives d'une particule donnée. Les équations de la trajectoire correspondant à la particule située en X_k à l'instant $t = 0$ sont :

$$x_i = x_i(X_k, t)$$

où X_k est fixe et t est un paramètre. Sous forme différentielle la trajectoire précédente est donnée par :

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(X_k, t)$$

ou encore :

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i[X_k(x_i, t), t]$$

Une **ligne d'émission** est obtenue en observant à un instant donné l'ensemble des particules qui sont passées ou ont été émises par un point fixe de l'espace à tous les instants précédant t . Les lignes d'émission sont obtenues par exemple en injectant de façon continue et en un point un colorant (figure 7).

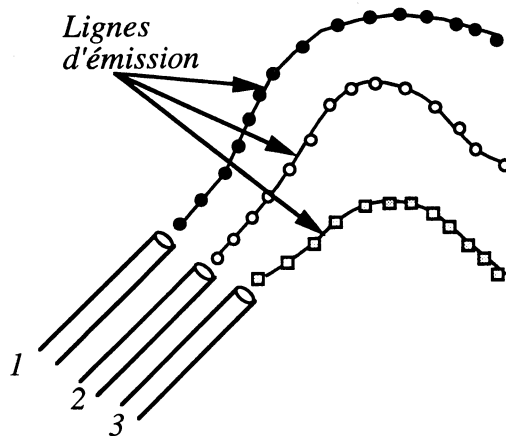


Figure 7. Lignes d'émission obtenues en prenant une photographie instantanée de toutes les particules émises en quelques points de l'écoulement.

Dans les écoulements permanents (stationnaires), les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission sont confondues.

Tableau 1. Accélération en coordonnées rectangulaires (x, y, z)

Direction x	$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$
Direction y	$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$
Direction z	$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Tableau 2. Accélération en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

Direction r	$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$
Direction θ	$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$
Direction z	$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Tableau 3. Accélération en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Direction r	$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}$
Direction θ	$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r}$
Direction ϕ	$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r}$

CHAPITRE III

ROTATION ET DEFORMATION D'UNE PARTICULE FLUIDE

III.1. Introduction

Nous avons envisagé au chapitre précédent les représentations classiques permettant la description cinématique du mouvement d'un fluide. Cette analyse nous a en particulier conduit à la notion de dérivée matérielle.

L'étude que nous allons maintenant entreprendre va nous permettre d'introduire les éléments qui caractérisent les taux de rotation et de déformation d'une particule fluide. La nécessité d'une telle analyse n'est pas évidente a priori, mais nous verrons plus loin que les résultats obtenus ont une signification physique importante. Ainsi, par exemple, nous montrerons que l'état des contraintes en un point peut être décrit à l'aide du **tenseur des taux de déformation**. On sait d'autre part que la rotation d'un fluide, caractérisée ici par le tenseur des taux de rotation ou encore par le vecteur tourbillon, joue un rôle central en dynamique des fluides. Cette notion est à la base de l'étude aérodynamique des profils et des surfaces portantes.

La signification physique des tenseurs des taux de rotation et de déformation est d'abord dégagée par des analyses de mouvements simples bidimensionnels (sections 3, 4 et 5). L'étude du mouvement général d'une particule fluide en deux et trois dimensions permet de retrouver les termes caractéristiques des translation, rotation, dilatation et déformation (sections 6 et 7).

Bibliographie

L'analyse des taux de rotation et de déformation dans un milieu continu est envisagée de façon détaillée dans Serrin 1959, Truesdell et Toupin 1960, Batchelor 1970, Germain et Muller 1986. Une présentation plus élémentaire et plus proche du point de vue adopté ici est donnée par Tsien 1958, Whitaker 1968 et Le Mehauté 1976.

III.2. Translation

Dans le mouvement de translation, chaque particule matérielle subit un même déplacement. Le mouvement peut être décrit par l'équation suivante :

$$x_i = X_i + d_i(t) \quad (III, 1)$$

ou encore sous forme vectorielle :

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{d}(t) \quad (III, 2)$$

où $\mathbf{d}(t)$ est un vecteur quelconque indépendant de la position.

Le déplacement des particules est donné dans ce cas par :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{d}(t) \quad (III, 3)$$

et le vecteur vitesse a pour forme :

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_X = \dot{\mathbf{d}}(t) \quad (III, 4)$$

Ainsi toutes les particules matérielles ont au même instant le même vecteur vitesse. Le mouvement de translation est représenté schématiquement à la figure 1.

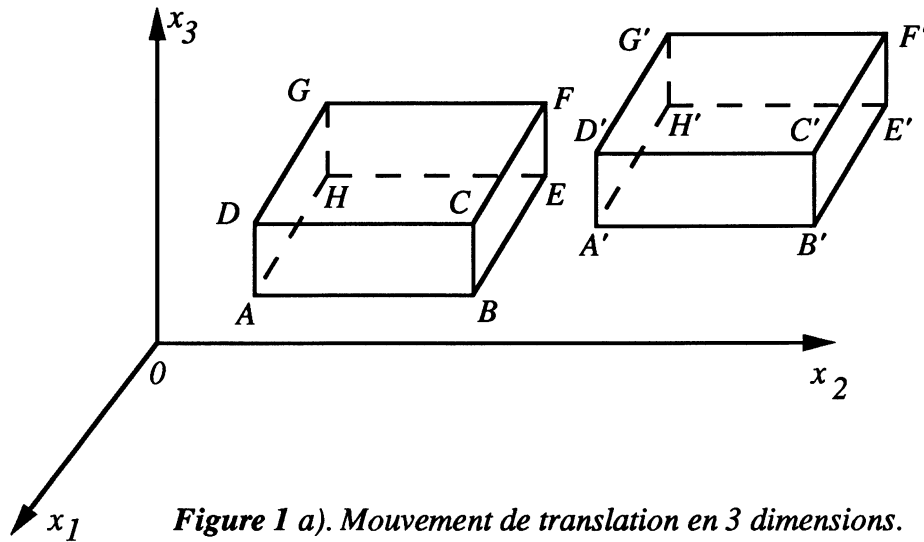


Figure 1 a). Mouvement de translation en 3 dimensions.

Le volume matériel initial $AB....H$ se trouve après translation en $A'B'...H'$. Il conserve sa forme initiale car le déplacement est le même pour toutes les particules qui le composent. Le mouvement de translation s'effectue **sans déformation**.

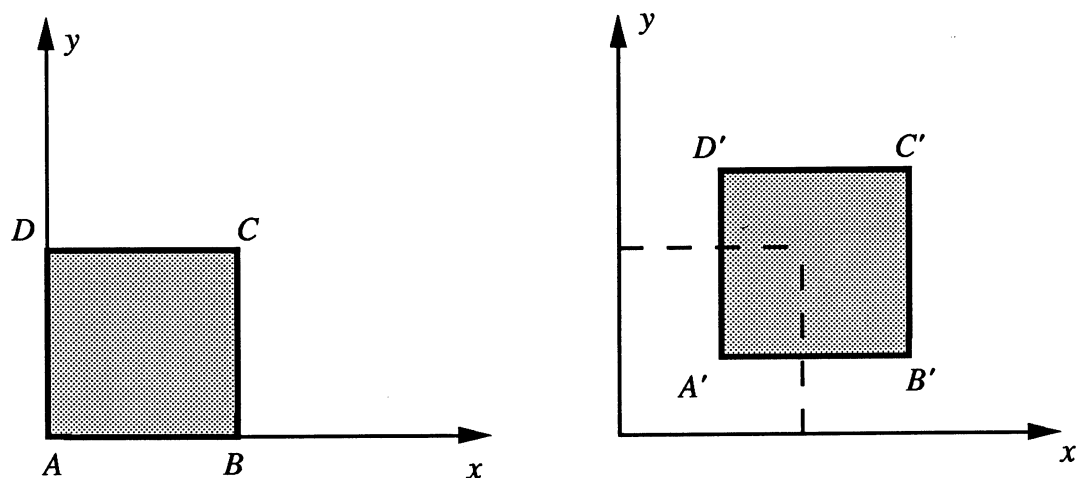


Figure 1 b). Mouvement de translation en deux dimensions.

III.3. Rotation

Un système matériel effectue un mouvement de rotation pure si toutes les particules qui le composent tournent d'un même angle autour d'un axe donné.

Considérons par exemple la rotation d'un angle $\theta(t)$ autour de l'axe x_3 (figure 2). Une particule située initialement en M_0 se déplace au point M de manière que les distances NM_0 et NM soient égales. L'angle entre NM_0 et NM est θ et on peut écrire les relations suivantes entre les coordonnées initiales et les coordonnées courantes de particules matérielles :

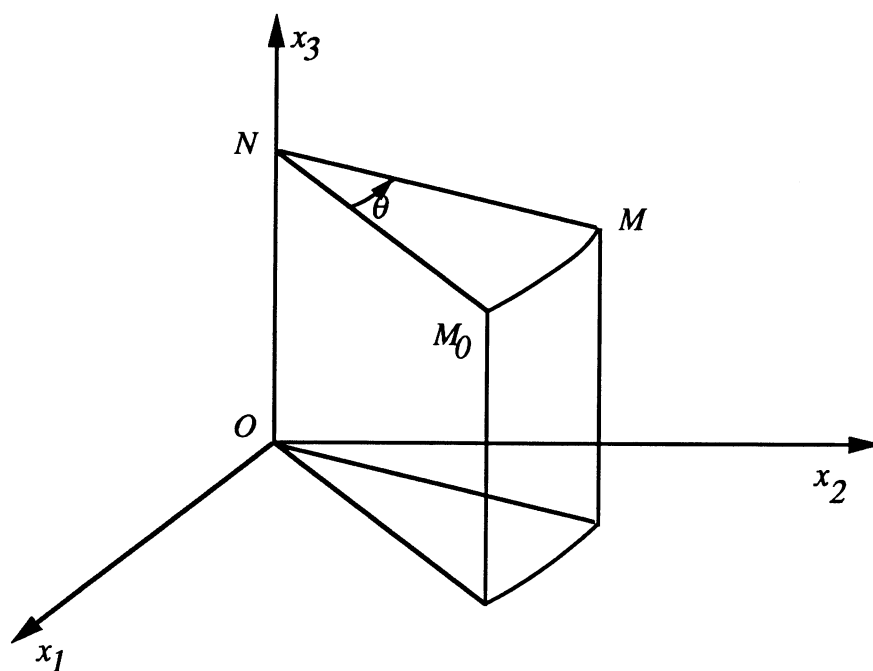


Figure 2. Rotation autour de l'axe x_3 .

$$\begin{aligned}
 x_1 &= X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta \\
 x_2 &= X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta \\
 x_3 &= X_3
 \end{aligned}
 \tag{III, 5}$$

Le mouvement peut être représenté sous forme matricielle par :

$$\mathbf{x} = T\mathbf{X} \quad \text{où} \quad T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \tag{III, 6}$$

Le mouvement de rotation pure est illustré par la figure 3. La particule fluide $ABCD$ tourne sans déformation autour de l'axe Ox_3 . On peut déterminer par un raisonnement simple le **taux de rotation** autour de cet axe.

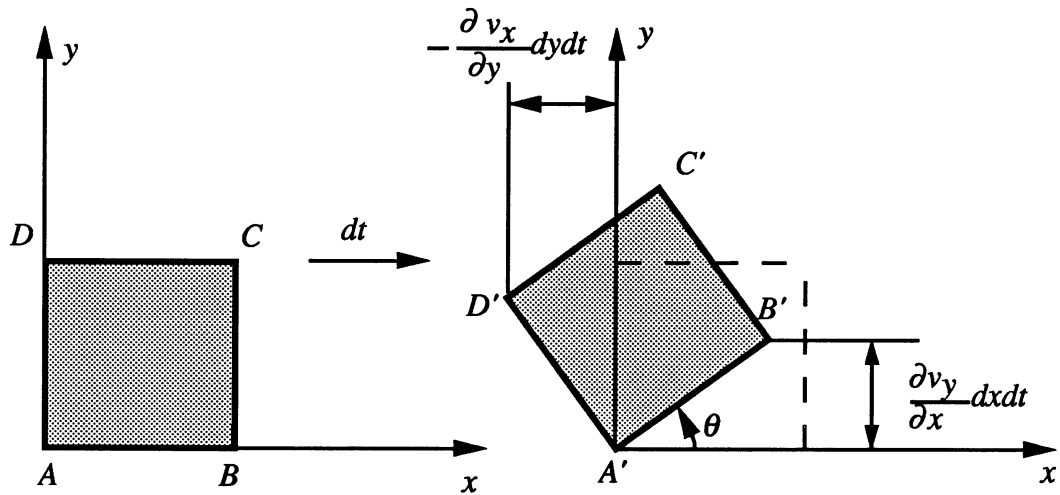


Figure 3. Mouvement de rotation en deux dimensions.

Considérons d'abord la ligne matérielle AB . Si v_y est la vitesse du point A perpendiculairement à l'axe AB , la vitesse du point B est $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx$. La distance parcourue par le point B pendant l'intervalle de temps dt est $v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt$ et le taux de rotation instantané de l'axe AB est :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt / dx dt = \frac{\partial v_y}{\partial x}
 \tag{III, 7}$$

De même le taux de rotation instantané de l'axe AD est :

$$-\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt / dy dt = -\frac{\partial v_x}{\partial y}
 \tag{III, 8}$$

Ces deux expressions permettent la détermination du taux de rotation moyen autour de l'axe x_3 :

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (III, 9)$$

Pour un mouvement de rotation tridimensionnel nous verrons plus loin que le taux de rotation instantané a pour forme :

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (III, 10)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (III, 11)$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (III, 12)$$

Les composantes du taux de rotation instantané Ω sont obtenues en prenant la moitié du rotationnel du champ des vitesses :

$$\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (III, 13)$$

Le rotationnel du champ des vitesses joue un rôle important en mécanique des fluides. Ce vecteur est représenté par la lettre ω et il est appelé vecteur tourbillon.

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (III, 14)$$

Ainsi le taux de rotation instantané est égal à la moitié du vecteur tourbillon

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega \quad (III, 15)$$

Écoulements rotationnels et irrotationnels.

Les mouvements qui s'effectuent sans rotation ($\omega = 0, \Omega = 0$) sont appelés **écoulements irrotationnels**. Ils jouent un rôle théorique important et permettent une bonne approximation de nombreux écoulements réels.

Lorsque le rotationnel des vitesses est nul, le champ de vitesse dérive d'un potentiel :

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (III, 16)$$

et l'analyse de l'écoulement peut être effectuée à l'aide de la seule fonction Φ . Lorsque l'écoulement est incompressible on peut facilement montrer que Φ est solution de l'équation de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$. L'étude des écoulements incompressibles irrotationnels est ainsi ramenée à la résolution d'un problème aux limites pour l'équation de Laplace. Pour concrétiser les notions précédentes nous envisageons deux exemples classiques dont l'un correspond à un taux de rotation constant et l'autre à une rotation nulle.

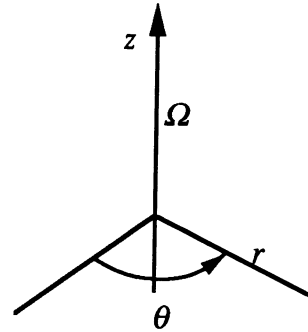
Exemple 1

On considère un fluide tournant à la manière d'un corps solide avec une vitesse angulaire Ω . Déterminer le champ de vitesse et le vecteur tourbillon correspondant. Représenter l'écoulement et envisager le mouvement d'une particule fluide.

Solution

Le champ de vitesse pour un corps solide en rotation à la vitesse Ω est donné par :

$$\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$$

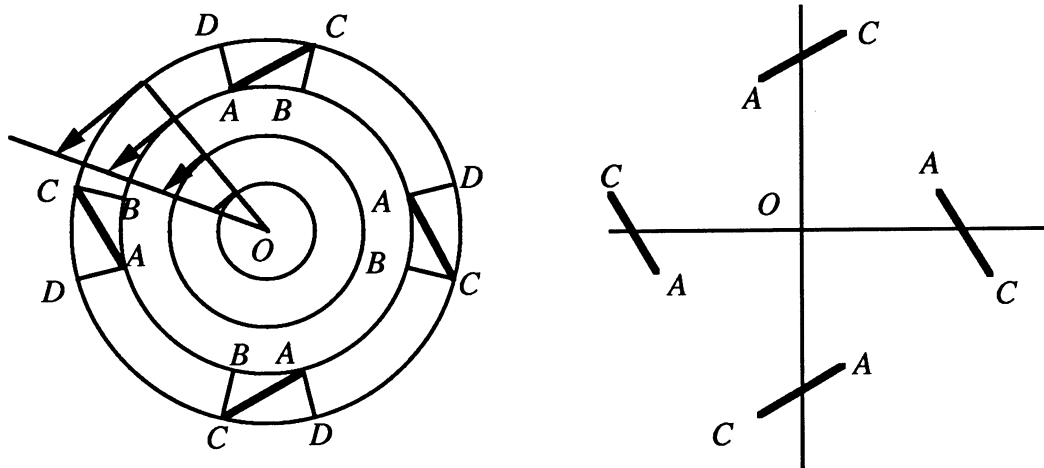


Il est commode d'adopter ici un système de coordonnées cylindriques dont l'axe des z est aligné avec Ω . Dans ce système, les composantes de la vitesse ont pour forme : $v_r = 0$, $v_\theta = \Omega r$, $v_z = 0$. La composante tangentielle v_θ augmente linéairement avec le rayon polaire.

Les composantes du vecteur tourbillon peuvent être déterminées à l'aide des expressions rassemblées au tableau 6. On obtient facilement $\omega_r = 0$, $\omega_\theta = 0$, $\omega_z = 2\Omega$.

Le module du vecteur tourbillon est exactement le double du taux de rotation instantané $\omega = 2\Omega$. Ce résultat est en accord avec l'expression (III,15).

L'écoulement correspondant à cet exemple est représenté sur la figure suivante.



Chaque particule fluide de cet écoulement tourne avec une vitesse angulaire Ω . Les particules ne sont pas déformées, mais leur orientation par rapport à un système d'axe fixe change constamment.

Exemple 2

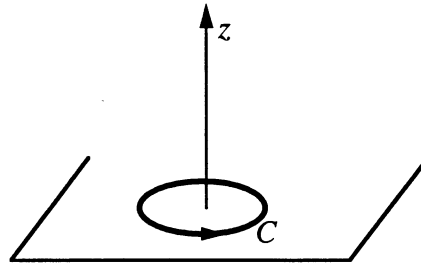
On considère un écoulement tournant autour d'un axe z . Le champ des vitesses a pour expression $v_r = 0, v_\theta = C/r, v_z = 0$ où C est une constante. Calculer le vecteur tourbillon correspondant. Que peut-on dire du mouvement des particules fluides?

Solution

Les composantes du vecteur tourbillon sont facilement calculées à l'aide des expressions du tableau 6 : $\omega_r = 0, \omega_\theta = 0, \omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) = 0$.

Les trois composantes du vecteur tourbillon sont identiquement nulles en tout point $r \neq 0$. A l'origine même, le vecteur tourbillon est indéterminé. Cependant la valeur de ω en ce point peut être précisée en utilisant le théorème de Stokes. En effet on peut écrire :

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_A \omega \cdot \mathbf{n} dA$$

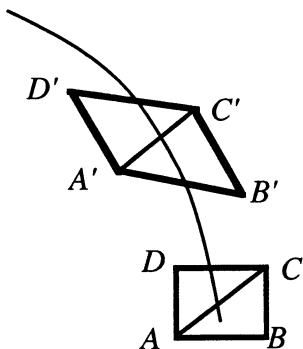


Si C est un cercle perpendiculaire à l'axe z et A la surface plane qui s'appuie sur ce cercle, on peut écrire : $2\pi C = \int_A \omega_z dA$.

Comme ω_z est nul pour tout $r \neq 0$, ω_z doit prendre une valeur infinie à l'origine. Le vecteur tourbillon se comporte ici comme une fonction de Dirac : $\omega_z = 2\pi C \delta(\mathbf{r})$.

L'écoulement est irrotationnel partout sauf à l'origine. Il s'agit d'une configuration idéale, mais il existe cependant des écoulements réels dans lesquels le vecteur tourbillon est concentré au voisinage d'une ligne et dont le comportement est proche de celui que nous venons d'étudier.

Si l'on considère à présent une particule fluide à deux instants dans le temps, on note déjà que la particule initialement rectangulaire est déformée dans son mouvement autour de l'axe z . Pour un petit déplacement autour de cet axe, on peut montrer que la diagonale AC ne change pas d'orientation.



Les côtés AB et AD tournent en sens opposé et la diagonale conserve une direction constante, ce qui correspond bien au fait que le vecteur tourbillon (et par conséquent le taux de rotation) est identiquement nul à l'extérieur de l'origine.

Il est intéressant de noter qu'un écoulement tournant autour d'un axe peut cependant correspondre à une rotation et un vecteur tourbillon identiquement nul.

III.4. Dilatation

La dilatation ou déformation normale est observée lorsque la vitesse des particules change dans la direction du mouvement. Les figures 4 et 5 représentent des mouvements de dilatation dans la direction des x . Si v_x désigne la vitesse du point A , la vitesse du point B sera : $v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$. La longueur du segment $A'B'$ sera après un temps dt : $dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$. La variation relative de longueur du segment AB sera donc :

$$\frac{1}{dx} [(dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt) - dx] = \frac{\partial v_x}{\partial x} dt \quad (III, 17)$$

et la variation de longueur par unité de longueur et de temps sera : $\partial v_x / \partial x$.

Nous appellerons **taux de déformation** cette quantité. Le taux de déformation dans la direction x est donné par $\partial v_x / \partial x$. La figure 5b représente une dilatation pure dans la direction y . Le taux de déformation est dans ce cas : $\partial v_y / \partial y$.

Le mouvement de dilatation que nous venons de décrire est observé par exemple lorsqu'une particule fluide rentre dans une section de conduit convergente (figure 4). La vitesse de la particule augmente dans la direction de l'écoulement et la particule se dilate dans cette direction et se contracte dans la direction transverse.

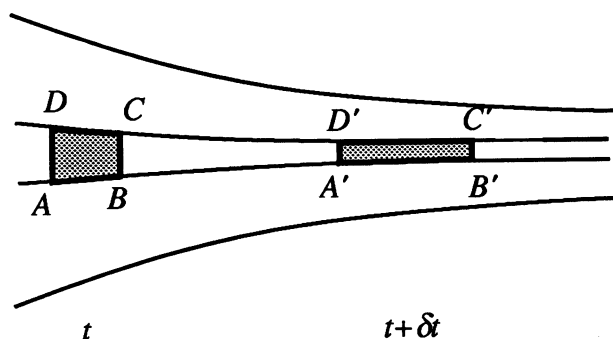


Figure 4 a). L'accélération de l'écoulement dans le conduit convergent produit une dilatation des particules fluides dans la direction axiale.

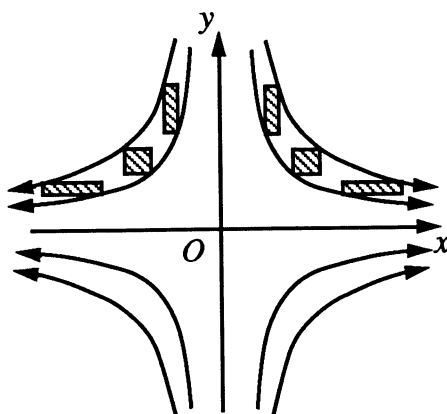


Figure 4 b). Ecoulement d'un fluide incompressible au voisinage d'un point d'arrêt. Les particules fluides se contractent uniformément dans la direction y et se dilatent uniformément dans la direction x .

Un autre exemple particulièrement important est celui de l'écoulement au voisinage d'un point d'arrêt (figure 4). Dans le cas d'un fluide incompressible en écoulement bidimensionnel le champ de vitesse à proximité du point d'arrêt a la forme

$v_x(x, y) = \epsilon x$, $v_y(x, y) = -\epsilon y$ où ϵ est une constante positive.

En un point du fluide le taux de déformation $\partial v_x / \partial x = \epsilon$ est une constante et les particules fluides subissent une dilatation uniforme dans la direction des x . Le taux de déformation $\partial v_y / \partial y = -\epsilon$ est aussi une constante et les particules fluides se contractent uniformément dans la direction des y .

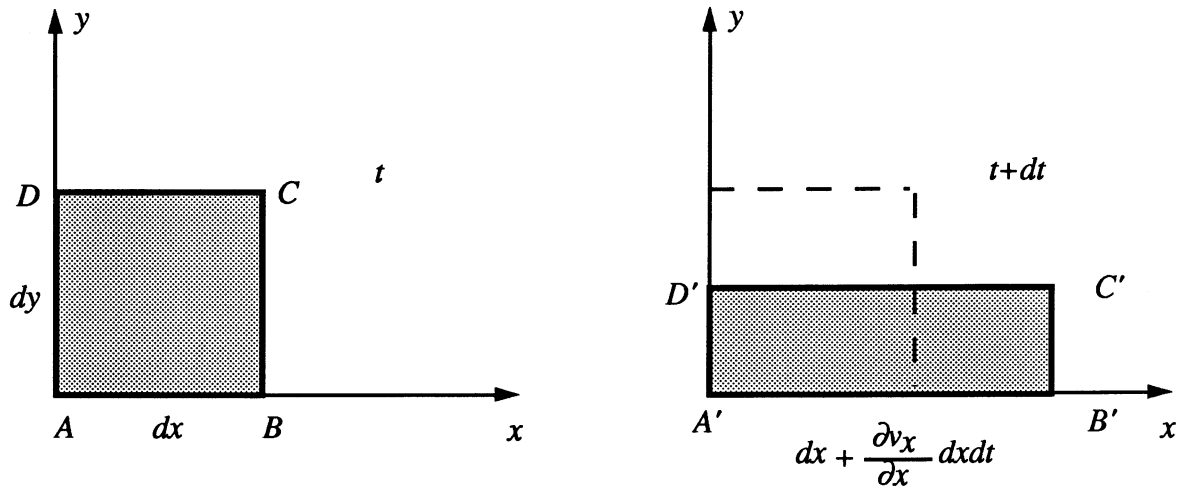


Figure 5 a). Dilatation en deux dimensions. (Dilatation suivant l'axe des x).

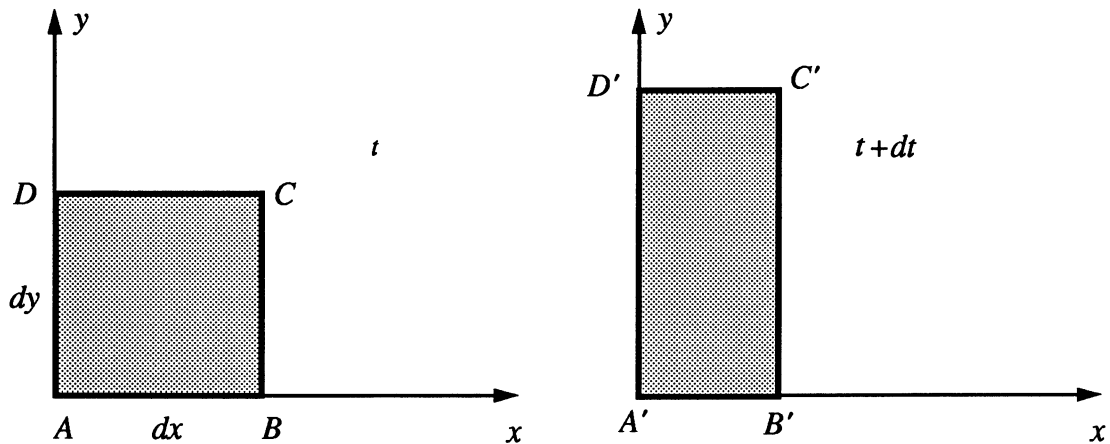


Figure 5 b). Dilatation en deux dimensions. (Dilatation suivant l'axe des y).

III.5. Déformation angulaire ou cisaillement

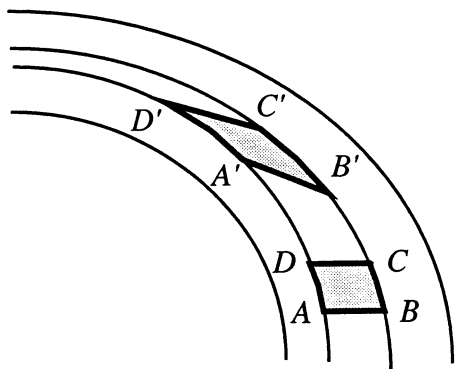


Figure 6. Déformation angulaire ou cisaillement dans un conduit coudé.

La déformation angulaire ou cisaillement est observée, par exemple, lorsqu'une particule fluide pénètre dans une conduite coude (figure 6).

L'écoulement est dans ce cas plus rapide sur les lignes de courant internes et moins rapide vers l'extérieur du coude. Si la particule fluide $ABCD$ est initialement rectangulaire, le côté AD avance plus rapidement que le côté BC et, après un laps de temps, la particule subit une déformation angulaire.

Cette déformation est proportionnelle à la différence des vitesses de AD et BC .

Considérons par exemple la déformation angulaire représentée sur la figure 7a). Si v_x représente la vitesse du côté AB , $v_x + (\partial v_x / \partial y)dy$ représente celle du côté CD . Pendant un intervalle de temps dt la distance parcourue par le point A est $v_x dt$, et celle parcourue par D est $v_x dt + (\partial v_x / \partial y)dy dt$.

Dans ces conditions, la vitesse angulaire du côté AD est :

$$\frac{1}{dydt} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt \right] = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (III, 18)$$

et cette vitesse est la vitesse de déformation de l'angle DAB .

De la même manière, si la vitesse du côté BC diffère de celle du côté AD , le côté AB tourne avec une vitesse $\partial v_y / \partial x$.

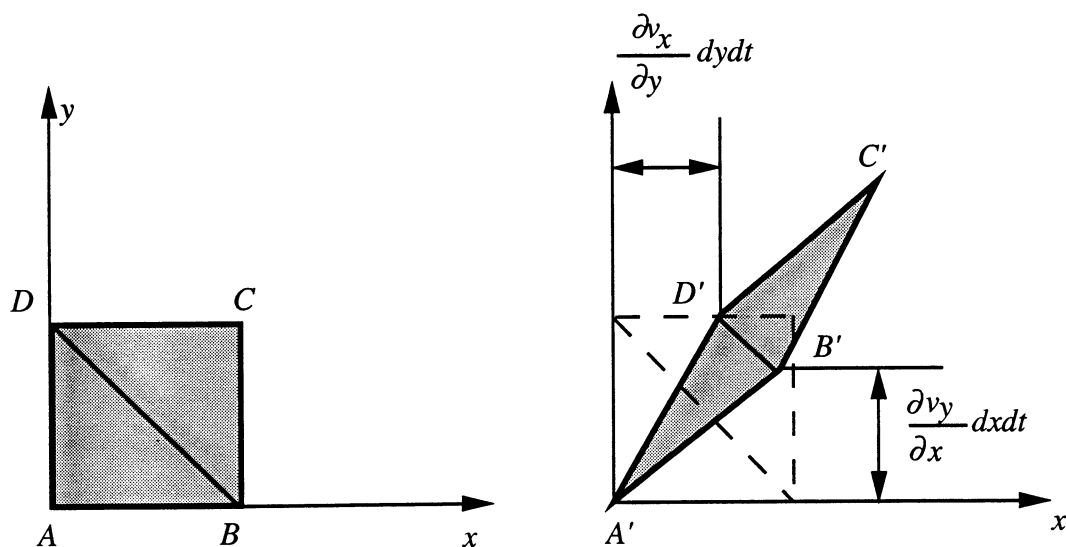


Figure 7 a) . Cisaillement sans rotation.

Dans la situation de la figure 7a) le taux de déformation de l'angle BAD est donc la somme de ces deux taux de déformation : $\partial v_y/\partial x + \partial v_x/\partial y$. Sur cette figure nous avons pris $\partial v_y/\partial x$ et $\partial v_x/\partial y$ égaux. Dans ce cas particulier, la bissectrice de l'angle $D'A'B'$ reste parallèle à celle de l'angle DAB et nous savons d'autre part que la rotation moyenne $\frac{1}{2}(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}) = \Omega_z$ est nulle. La particule fluide subit dans ce cas un cisaillement pur.

Si les deux taux de déformation $\partial v_y/\partial x$ et $\partial v_x/\partial y$ ne sont pas égaux, la particule fluide subit à la fois une rotation et une déformation.

La figure 7 illustre les trois mouvements possibles : cisaillement sans rotation, rotation sans cisaillement, rotation avec cisaillement.

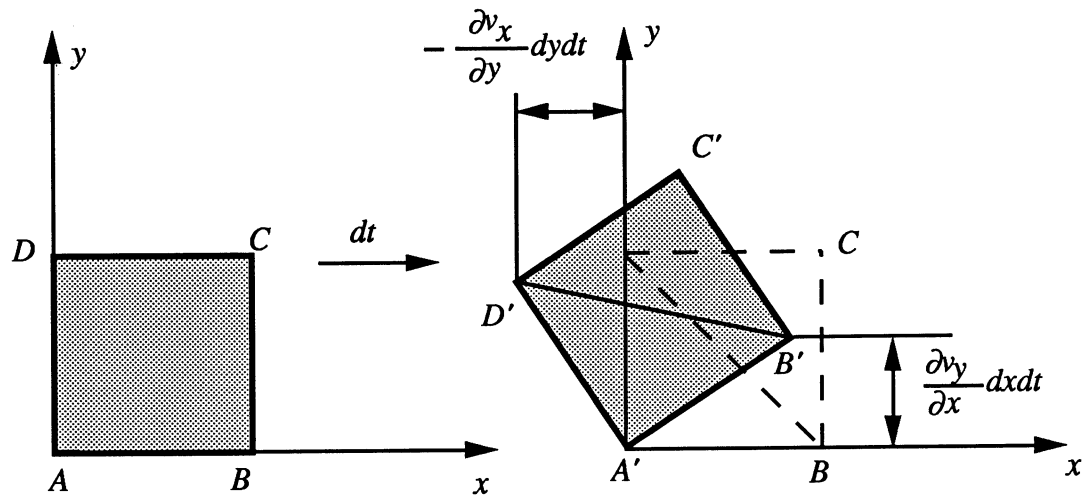


Figure 7 b). Rotation sans cisaillement.

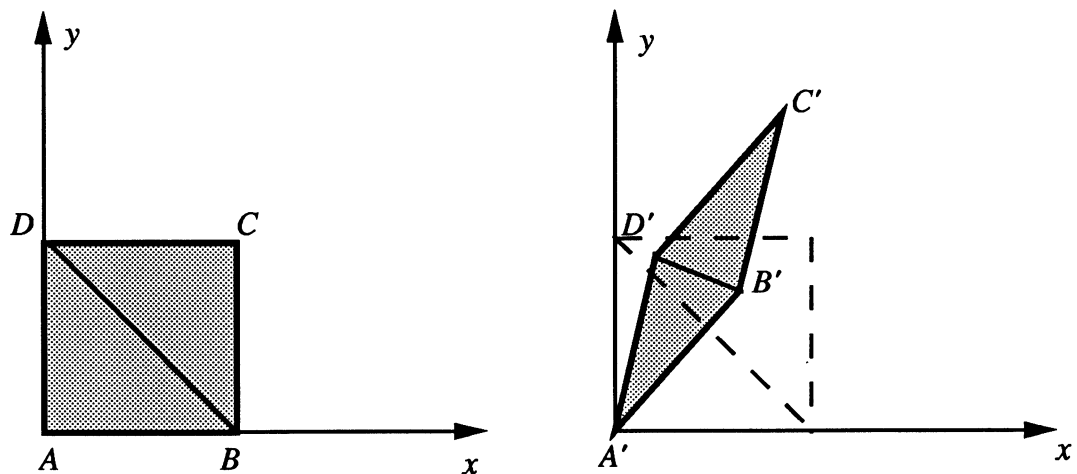


Figure 7 c). Rotation avec cisaillement.

III.6. Mouvement général d'une particule fluide en deux dimensions

On peut retrouver les expressions précédentes à l'aide d'une analyse plus formelle (Le Mehauté 1976). Pour cela, considérons encore l'élément fluide $ABCD$ au temps t (figure 8).

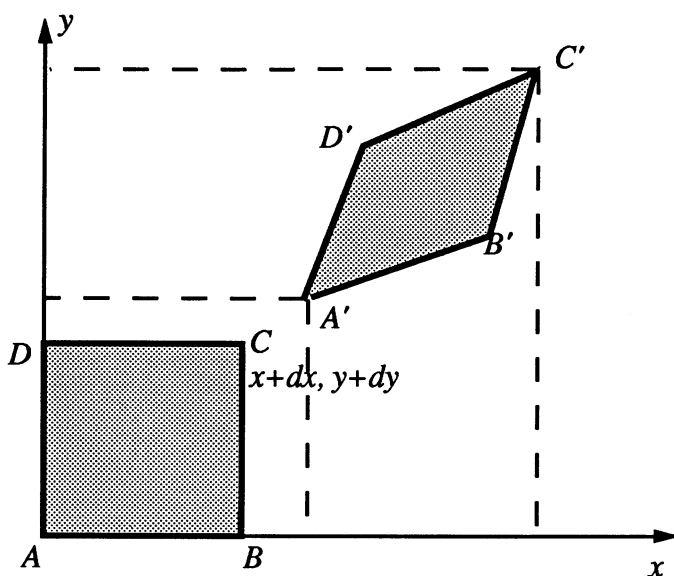


Figure 8.
Mouvement général d'une particule fluide en deux dimensions.

Le vecteur vitesse au point A a pour composantes v_x, v_y . En C le vecteur vitesse a pour composantes :

$$\begin{aligned} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy \\ v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (III, 19)$$

A l'instant $t + dt$ le point A est passé en A' et ses coordonnées sont :

$$\begin{aligned} x + v_x dt \\ y + v_y dt \end{aligned} \quad (III, 20)$$

et le point C se trouve en C' en :

$$\begin{aligned} x + dx + (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy) dt \\ y + dy + (v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy) dt \end{aligned} \quad (III, 21)$$

On peut encore écrire les coordonnées du point C' sous la forme :

$$x + dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy dt - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy dt$$

Coordonnée initiale	Trans- lation	Dilatation	Déformation angulaire	Rotation
------------------------	------------------	------------	--------------------------	----------

(III,22)

$$y + dy + v_y dt + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx dt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx dt$$

Coordonnée initiale	Trans- lation	Dilatation	Déformation angulaire	Rotation
------------------------	------------------	------------	--------------------------	----------

Ces expressions sont obtenues en ajoutant et en retranchant $(1/2)(\partial v_y/\partial x)dydt$ à la coordonnée x et $(1/2)(\partial v_x/\partial y)dxdt$ à la coordonnée y .

Les expressions que nous venons d'établir mettent en évidence les déplacements associés aux mouvements de translation, dilatation, déformation angulaire ou cisaillement et rotation. Le mouvement général du point matériel C apparaît comme la superposition des mouvements simples étudiés plus haut de façon séparée.

III.7. Mouvement général d'une particule fluide en trois dimensions

Le raisonnement précédent se généralise facilement au cas tridimensionnel. Nous considérons le mouvement d'un point C dont les coordonnées sont $x + dx, y + dy, z + dz$. A l'instant $t + dt$, ce point se trouve en C' et ses coordonnées ont pour expression :

$$\begin{aligned} x + dx + v_x dt + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \right) dt \\ y + dy + v_y dt + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz \right) dt \\ z + dz + v_z dt + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dt \end{aligned} \quad (III, 23)$$

On peut maintenant ajouter et soustraire à la première coordonnée : $\frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} dy dt$ et $\frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} dz dt$ et cette opération conduit à :

$$\begin{aligned} x + dx + v_x dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \right] dt \\ + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dy \right] dt \end{aligned} \quad (III, 24)$$

On obtient des expressions semblables pour les deux autres coordonnées. Les trois expressions obtenues sont rassemblées au tableau 2.

On reconnaît dans ces expressions les termes associés aux mouvements de translation, dilatation, déformation angulaire et rotation.

III.8. Le taux de déformation

L'expression des taux de déformation a été introduite en examinant les mouvements généraux de particules fluides en deux ou trois dimensions. Nous allons maintenant démontrer que les expressions définies plus haut permettent effectivement de déterminer le **taux de variation de la longueur d'un segment matériel par unité de longueur et de temps**. La démonstration élémentaire que nous allons présenter est adaptée de Whitaker 1968. On trouvera des exposés plus détaillés dans les traités de mécanique des milieux continus (par exemple Fung 1965, Germain et Muller 1986).

Pour déterminer le **taux de déformation** en un point nous considérons un segment matériel élémentaire de longueur δs . Les extrémités de ce segment sont M et N , la position courante du point M est représentée par x_i et celle du point N par $x_i + \delta x_i$. Si le fluide considéré effectuait un mouvement identique à celui d'un solide, le segment MN subirait une translation et une rotation mais sa longueur resterait constante. Dans le cas général, la longueur de l'élément MN varie. Nous allons ici calculer le taux de déformation de ce segment, c'est-à-dire le taux de variation de la longueur du segment par unité de longueur et de temps. Le taux de déformation au point M dépend de la direction matérielle considérée. Soit $\mathbf{b}$ le vecteur unitaire tangent à la ligne matérielle MN . Les composantes b_i de ce vecteur sont données par :

$$b_i = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta x_i}{\delta s} \quad (III, 25)$$

Nous définissons le taux de déformation pour la direction $\mathbf{b}$ par l'expression suivante :

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta s} \frac{d}{dt} (\delta s) \right] \quad (III, 26)$$

où d/dt représente la dérivée matérielle.

Pour calculer ϵ , nous utilisons :

$$(\delta s)^2 = \delta x_i \delta x_i \quad (III, 27)$$

et une variante de (III,26) :

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta s)^2} \frac{d}{dt} (\delta s)^2 \right] \quad (III, 28)$$

On a donc :

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(\delta s)^2} \frac{d}{dt} (\delta x_i \delta x_i) \right] \quad (III, 29)$$

soit en développant :

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{(\delta s)^2} \left[\delta x_i \frac{d}{dt} (\delta x_i) + \delta x_i \frac{d}{dt} (\delta x_i) \right] \right\} \quad (III, 30)$$

Les deux termes entre crochets sont identiques de telle sorte que :

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\delta s)^2} \delta x_i \frac{d}{dt} (\delta x_i) \right] \quad (III, 31)$$

Considérons à présent $d(\delta x_i)/dt$. Nous savons que δx_i représente la différence des positions des points matériels M et N :

$$\delta x_i = x_i(N) - x_i(M) \quad (III, 32)$$

et on peut donc écrire :

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \frac{d}{dt}x_i(N) - \frac{d}{dt}x_i(M) = v_i(N) - v_i(M) \quad (III, 33)$$

où $v_i(M)$ et $v_i(N)$ sont les composantes des vitesses des points M et N .

Pour évaluer cette différence, nous effectuons un développement en série de Taylor autour du point N :

$$v_i(N) - v_i(M) = \delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j + T.O.S.* \quad (III, 34)$$

Dans ces conditions, l'expression de ϵ devient :

$$\epsilon = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\delta s)^2} \delta x_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \right] \quad (III, 35)$$

soit, en utilisant la définition du vecteur unitaire $\mathbf{b}$ tangent à la direction matérielle considérée :

$$\epsilon = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} b_i b_j \quad (III, 36)$$

Ainsi le taux de déformation dans la direction $\mathbf{b}$ est déterminé par le gradient de vitesse local $\partial v_i/\partial x_j$ et par les composantes b_i de la direction considérée.

L'expression obtenue est très semblable à celle de la contrainte qui s'exerce sur un plan de normale n_i suivant la direction de la normale elle-même. En effet, la contrainte qui agit sur un plan de direction normale n_i a pour expression :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_i T_{ij} \mathbf{e}_j \quad (III, 37)$$

et la projection de cette contrainte suivant la normale est :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = n_i T_{ij} n_j = T_{ij} n_i n_j \quad (III, 38)$$

Ainsi l'état des contraintes dans un fluide est déterminé par le tenseur T_{ij} et l'état des taux de déformation par le tenseur $\partial v_i/\partial x_j$.

Il est intéressant de réécrire le tenseur $\partial v_i/\partial x_j$ en faisant apparaître ses parties symétrique et antisymétrique :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (III, 39)$$

* Note : *T.O.S.* signifie termes d'ordre supérieur

Le premier terme est précisément le tenseur des taux de déformation et il est symétrique :

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ d_{ij} &= d_{ji} \end{aligned} \quad (III, 40)$$

Le second terme est le tenseur des taux de rotation et ce tenseur est antisymétrique :

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \Omega_{ij} &= -\Omega_{ji} \end{aligned} \quad (III, 41)$$

On peut facilement montrer que seul d_{ij} intervient dans la détermination du taux de déformation ϵ . On a en effet :

$$\epsilon = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} b_i b_j = d_{ij} b_i b_j + \Omega_{ij} b_i b_j \quad (III, 42)$$

Considérons à présent le terme $\Omega_{ij} b_i b_j$. Ce terme peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega_{ij} b_i b_j = \frac{1}{2} \Omega_{ij} b_i b_j + \frac{1}{2} \Omega_{ij} b_i b_j \quad (III, 43)$$

ou encore en permutant les indices muets i et j du second terme du membre de droite :

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} b_i b_j &= \frac{1}{2} \Omega_{ij} b_i b_j + \frac{1}{2} \Omega_{ji} b_j b_i \\ &= \frac{1}{2} (\Omega_{ij} + \Omega_{ji}) b_i b_j \end{aligned} \quad (III, 44)$$

Comme Ω_{ij} est antisymétrique $\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0$ et par conséquent $\Omega_{ij} b_i b_j = 0$.

En définitive le taux de déformation dans la direction b_i est déterminé uniquement par le tenseur des taux de déformation d_{ij} :

$$\epsilon = d_{ij} b_i b_j \quad (III, 45)$$

Les composantes des tenseurs des taux de déformation et de rotation sont données aux tableaux 3,4,5.

Exemple : les taux de déformation pour l'écoulement de Couette

Pour illustrer le résultat obtenu plus haut, considérons le taux de déformation dans l'écoulement de Couette.

Dans ce type d'écoulement, le vecteur vitesse reste dans un plan et la vitesse varie linéairement :

$$\begin{aligned} v_x &= u_o(y/h) \\ v_y &= v_z = 0 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer les taux de déformation pour les trois directions représentées sur la figure 9.

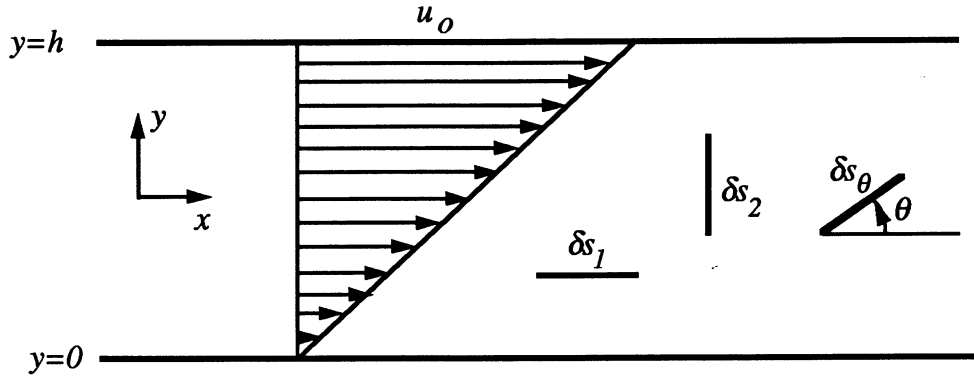


Figure 9. Écoulement de Couette plan. Le profil de vitesse est linéaire.

Pour la première direction, le vecteur $\mathbf{b}$ unitaire est parallèle à l'axe des x : $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$.

Ce taux de déformation dans cette direction est donné par : $\epsilon_1 = d_{ij}b_i b_j = d_{11}$, soit :

$$\epsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Le taux de déformation dans cette direction est identiquement nul :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\delta s_1} \frac{d}{dt}(\delta s_1) = 0$$

Considérons à présent la direction 2 parallèle à l'axe y . Cette fois $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 0$ et $\epsilon_2 = d_{ij}b_i b_j = d_{22}$, soit :

$$\epsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Le taux de déformation suivant cette direction est aussi identiquement nul.

Considérons maintenant la direction θ . Les composantes du vecteur unitaire dans cette direction sont : $b_1 = \cos \theta$, $b_2 = \sin \theta$, $b_3 = 0$ et le taux de déformation a pour expression : $\epsilon_\theta = d_{11}b_1^2 + d_{12}b_1 b_2 + d_{21}b_2 b_1 + d_{22}b_2^2$, soit :

$$\epsilon_\theta = d_{11} \cos^2 \theta + (d_{12} + d_{21}) \sin \theta \cos \theta + d_{22} \sin^2 \theta$$

ou encore :

$$\epsilon_\theta = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin^2 \theta$$

Cette expression donne finalement :

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{\delta s_\theta} \frac{d}{dt}(\delta s_\theta) = \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin \theta \cos \theta$$

Le taux de déformation est nul pour les directions $\theta = 0$ et $\pi/2$ et passe par un maximum pour $\theta = \pi/4$:

$$\epsilon_{\theta=\pi/4} = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{2} \frac{u_0}{h}$$

Tableau 1 . Mouvement d'une particule fluide en deux dimensions.

$x + dx + udt + \frac{\partial u}{\partial x} dxdt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dydt - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dydt$				
$y + dy + vdt + \frac{\partial v}{\partial x} dydt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdt$				
Coordonnées initiales	Trans- lation	Dilatation	Déformation (cisaillement)	Rotation
$d_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad d_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad d_{xx} = d_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$				

Tableau 3 . Le tenseur des taux de déformation en coordonnées rectangulaires.
Représentation matricielle.

$$d = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Tableau 4 . Le tenseur des taux de rotation en coordonnées rectangulaires.
Représentation matricielle.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

Tableau 2. Mouvement d'une particule fluide en trois dimensions

$x + dx$	+	$u dt$	+	$\frac{\partial u}{\partial x} dx dt$	+	$[\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) dy + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) dz - \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) dy] dt$	
$y + dy$	+	$v dt$	+	$\frac{\partial v}{\partial y} dy dt$	+	$[\frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) dx + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) dx - \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) dz] dt$	
$z + dz$	+	$w dt$	+	$\frac{\partial w}{\partial z} dz dt$	+	$[\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) dx + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) dy + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) dy - \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) dx] dt$	
Coordonnées initiales		Translation		Dilatation		Déformation (cisaillement)	Rotation

Tableau 5 . Composantes du tenseur des taux de déformation.

Coordonnées rectangulaires (x, y, z)

$$d_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, d_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, d_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$d_{xy} = d_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), d_{xz} = d_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), d_{yz} = d_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$$

Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, d_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$d_{r\theta} = d_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right],$$

$$d_{\theta z} = d_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right), d_{zr} = d_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}, d_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}$$

$$d_{r\theta} = d_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right], d_{\theta\phi} = d_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right],$$

$$d_{\phi r} = d_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} v_r + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]$$

Tableau 6 . Composantes du rotationnel des vitesses.

Coordonnées cartésiennes

$$\omega_x = (\nabla \times \mathbf{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\omega_y = (\nabla \times \mathbf{v})_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Coordonnées cylindriques

$$\omega_r = (\nabla \times \mathbf{v})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$\omega_\theta = (\nabla \times \mathbf{v})_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

Coordonnées sphériques

$$\omega_r = (\nabla \times \mathbf{v})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}$$

$$\omega_\theta = (\nabla \times \mathbf{v})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi)$$

$$\omega_z = (\nabla \times \mathbf{v})_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}$$

CHAPITRE IV

THEOREMES DE TRANSPORT

IV.1. Introduction

L'écriture des équations de bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour un fluide en mouvement peut être effectuée de façons très diverses. On peut par exemple définir un système fluide isolé séparé du milieu extérieur par une surface imaginaire, considérer les interactions entre ce système et le milieu extérieur qui l'entoure. On déduit ainsi les équations de bilan qui régissent ce système.

On peut aussi utiliser comme base la notion de **volume de contrôle**. Le volume de contrôle peut être fixe ou mobile, il peut suivre le fluide en écoulement. Son mouvement peut également être arbitraire. Une fois le volume de contrôle spécifié, on peut écrire les équations du mouvement à l'aide des théorèmes de transport. Ces théorèmes ont la forme d'expressions générales dont le domaine d'application dépasse largement celui de la mécanique des fluides.

L'écriture des équations de bilan est facilement effectuée à l'aide de ces théorèmes. La méthode est systématique et elle peut être généralisée à des situations plus complexes comme celles des écoulements diphasiques et polyphasiques, des milieux hétérogènes et réactifs.

La notion de volume de contrôle et les théorèmes de transport sont présentés dans ce chapitre en vue de leurs applications à l'analyse des bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie qui sont envisagés aux chapitres V et VI.

Bibliographie

Les théorèmes de transport sont démontrés de façon rigoureuse par Aris 1962 et par Truesdell et Toupin 1960. L'utilisation de ces relations pour l'écriture des bilans fondamentaux est bien illustrée par Whitaker 1968. On trouvera des applications aux écoulements diphasiques dans le livre d'Ishii 1975.

IV.2. Volumes de contrôle et surfaces de contrôle

Un volume de contrôle est un volume imaginaire limité par une surface fermée. La surface qui limite le volume de contrôle est appelée surface de contrôle. Le volume et la surface de contrôle peuvent être fixes ou mobiles. Le fluide peut entrer et sortir du volume de contrôle.

La figure 1 illustre le concept de volume de contrôle. La figure 1a) représente un volume de contrôle **fixe** dans l'espace. Nous désignerons ce type de volume par V et la surface de contrôle fixe qui le limite par A .

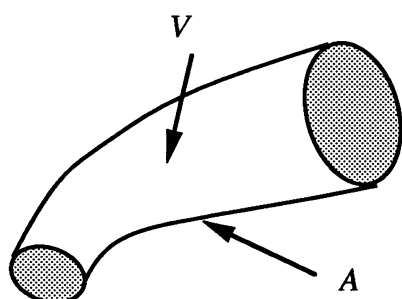


Figure 1 a). Un volume de contrôle fixe et la surface de contrôle qui le définit.

La figure 1b) montre un volume de contrôle matériel. Ce volume se déplace avec le fluide, et la vitesse en un point de la surface est égale à la vitesse locale du fluide V . Les volumes matériels seront désignés par $V_m(t)$ et les surfaces de contrôle matérielles par $A_m(t)$.

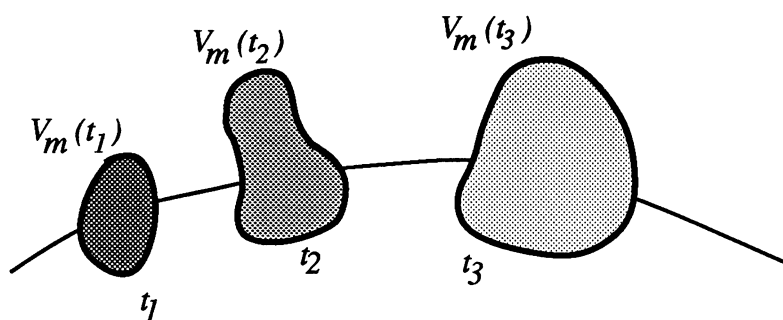


Figure 1 b). Un volume matériel à trois instants dans le temps. La vitesse de la surface de contrôle est égale à la vitesse locale du fluide.

Dans certains problèmes, il est commode d'utiliser un volume de contrôle mobile et arbitraire que nous désignerons par $V_a(t)$. La surface de contrôle associée sera représentée par $A_a(t)$ et la vitesse de la surface sera w .

La figure 1c) donne un exemple de volume de contrôle arbitraire.

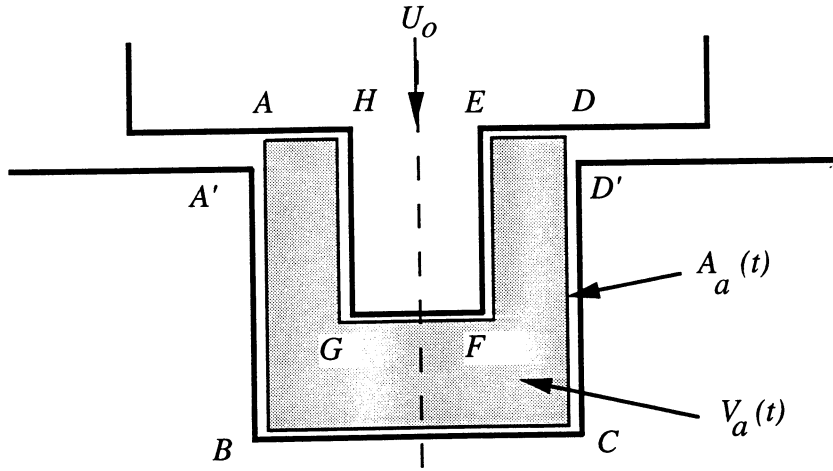


Figure 1 c). Un volume de contrôle arbitraire $V_a(t)$. La surface de contrôle $A'BCD'$ est fixe, la surface $A'HGFEDD'$ est mobile.

IV.3. Théorèmes de transport et équations de bilan

A partir de la notion de volume de contrôle nous allons maintenant formuler des théorèmes de transport. Ces théorèmes ont un intérêt très général et constituent un outil particulièrement utile dans beaucoup de problèmes de mécanique des fluides. Ces théorèmes permettent par exemple d'établir les équations du mouvement de manière concise. Ces théorèmes sont aussi utiles quand on considère des situations d'écoulement nouvelles, par exemple lorsque le fluide est constitué par deux ou plusieurs phases (écoulements diphasiques ou polyphasiques).

Pour rendre l'exposé plus progressif, nous donnerons l'expression du théorème de transport en une dimension, puis nous présenterons le théorème de transport pour un volume $V_a(t)$ arbitraire. Le cas particulier d'un volume matériel sera ensuite envisagé.

IV.3.1. Théorèmes de transport en une dimension

Soit $f(x, t)$ une fonction dépendant de la coordonnée spatiale x et du temps t . Nous considérons un intervalle de l'axe réel $[a(t), b(t)]$. Le théorème de transport en une dimension a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt} \quad (IV, 1)$$

Démonstration : Pour démontrer cette expression on peut remonter à la définition de l'opération de différentiation. Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right] \quad (IV, 2)$$

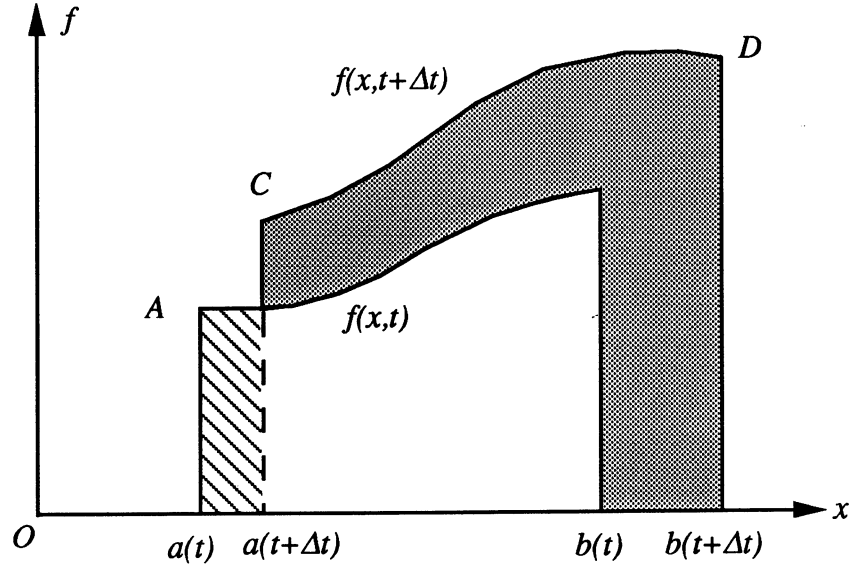


Figure 2. Dans l'intervalle Δt , l'intégrale de la fonction $f(x, t)$ augmente de la surface représentée en grisé et diminue de la surface hachurée.

Cette relation est représentée graphiquement sur la figure 2 :

On peut maintenant ajouter et retrancher du second membre :

$$\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx \quad (IV, 3)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right] \end{aligned} \quad (IV, 4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx - \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x, t) dx \right] \end{aligned} \quad (IV, 5)$$

Nous avons à prendre la limite de trois termes. Considérons le premier terme :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)] dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx \quad (IV, 6)$$

Le deuxième terme devient :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t) dx = f(b, t) \frac{db}{dt} \quad (IV, 7)$$

et de façon analogue le troisième terme prend la forme :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x, t) dx = f(a, t) \frac{da}{dt} \quad (IV, 8)$$

En définitive :

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f(b, t) \frac{db}{dt} - f(a, t) \frac{da}{dt} \quad (IV, 9)$$

et on retrouve l'expression à démontrer. La relation précédente est facile à interpréter :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de} \\ \text{l'intégrale de } f \text{ sur} \\ \text{l'intervalle } [a, b] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intégrale sur } [a, b] \\ \text{du taux de variation} \\ \text{de } f \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de } f \text{ en } b \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de } f \text{ en } a \end{array} \right\} \quad (IV, 10)$$

IV.3.2. Théorème de transport pour un volume

Le théorème de transport pour un volume est parfois appelé règle de Leibnitz. Soit un volume de contrôle $V_a(t)$ limité par une surface de contrôle $A_a(t)$. f est une fonction $f(\mathbf{x}, t)$ définie sur le volume $V_a(t)$. Le taux de variation dans le temps de l'intégrale

$$\int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (IV, 11)$$

est donné par l'expression :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 12)$$

où $\mathbf{w}$ désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et $\mathbf{n}$ est la **normale extérieure**. L'expression que nous venons de donner est directement interprétable sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de} \\ \text{l'intégrale de } f \\ \text{sur le volume } V_a(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intégrale sur } V_a(t) \\ \text{de la variation de } f \\ \text{par rapport au temps} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Flux de } f \text{ à travers la surface } A_a(t) \end{array} \right\}$$

Cette expression est aussi très proche de celle que nous avons déjà donnée en une dimension (comparer (IV,12) et (IV,1)).

Démonstration : La démonstration de (IV,12) est très semblable à celle que nous avons présentée plus haut. Il faut d'abord remonter à la définition de la dérivée :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_a(t+\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \right] \quad (IV,13)$$

Une représentation graphique de la relation précédente est donnée à la figure 3.

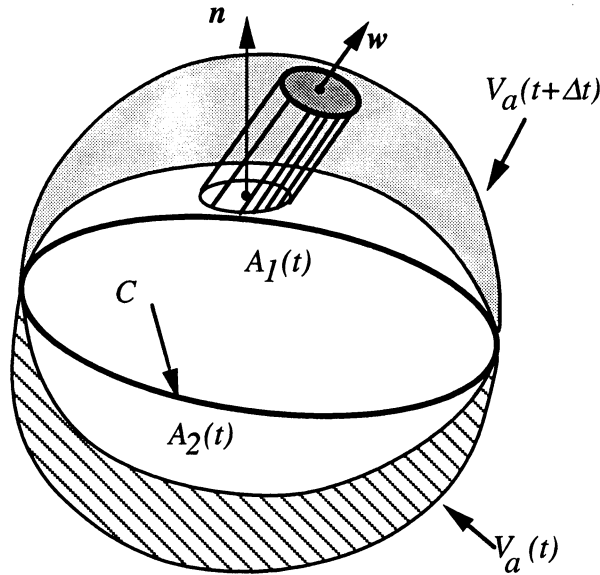


Figure 3. Le volume de contrôle aux instants t et $t + \Delta t$. Sur la ligne C , le produit $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}$ est nul.

Nous désignons par $V_2(\Delta t)$ le volume balayé par la surface $A_a(t)$ et qui se retrouve à l'instant $t + \Delta t$ à l'intérieur du volume de contrôle $V_a(t + \Delta t)$.

Nous désignons par $V_1(\Delta t)$ le volume balayé par la surface $A_a(t)$ et qui se retrouve à l'instant $t + \Delta t$ à l'extérieur du volume de contrôle $V_a(t + \Delta t)$. On peut donc écrire : $V_a(t + \Delta t) = V_a(t) + V_2(\Delta t) - V_1(\Delta t)$.

La surface de contrôle peut être divisée en deux parties $A_1(t)$ et $A_2(t)$. $A_1(t)$ est la surface qui balaie le volume $V_1(\Delta t)$, $A_2(t)$ est celle qui balaie $V_2(\Delta t)$.

Ces deux parties de la surface $A_a(t)$ sont séparées par la ligne sur laquelle $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$. Sur $A_1(t)$, on a $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} < 0$ et au contraire sur $A_2(t)$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} > 0$.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} & \left[\int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV + \int_{V_2(\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \right. \\ & \left. - \int_{V_1(\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \right] \end{aligned} \quad (IV, 14)$$

En combinant les premier et quatrième termes de cette expression :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(1) - (4)] = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV \quad (IV, 15)$$

Considérons à présent le second terme :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V_2(\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \quad (IV, 16)$$

Nous allons remplacer l'intégrale de volume par une intégrale sur la surface $A_2(t)$. Pour cela on peut noter que l'élément de volume dV est balayé par un élément de surface dA_2 pendant l'intervalle de temps Δt (figure 4) :

$$dV = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \Delta t) dA_2 \quad (IV, 17)$$

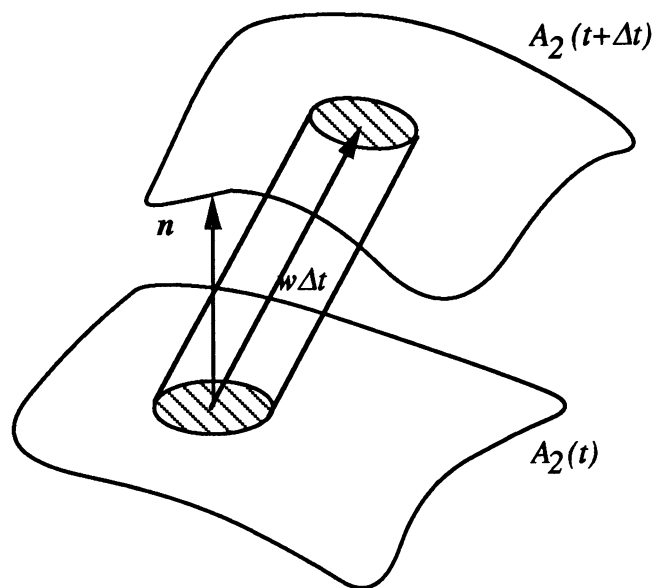


Figure 4. Volume élémentaire balayé dans le mouvement de la surface de contrôle.

et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{A_2(t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \Delta t \\ &= \int_{A_2(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA\end{aligned}\quad (IV, 18)$$

De même :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3) = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V_1(\Delta t)} f(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV = \int_{A_1(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 19)$$

En rassemblant les expressions (IV,15, IV,16 et IV,19) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_2(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A_1(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 20)$$

soit encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 21)$$

IV.3.3. Corollaires du théorème de transport

(1) Considérons d'abord un volume de contrôle fixe. Dans ce cas $\mathbf{w} = 0$ et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV \quad (IV, 22)$$

(2) Le volume de contrôle est maintenant un volume matériel. Dans cette situation $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, la vitesse de la surface est la vitesse locale du fluide. On a alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_m} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 23)$$

(3) Considérons à présent un volume arbitraire $V_a(t)$ et un volume matériel $V_m(t)$ et supposons qu'à l'instant t les deux volumes coïncident. On peut écrire d'une part :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 24)$$

et d'autre part :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 25)$$

Comme $V_a(t) = V_m(t)$ et $A_a(t) = A_m(t)$ à l'instant t on peut en retranchant (IV,24) de (IV,23) écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV + \int_{A_a(t)} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 26)$$

(4) Le second membre du théorème de transport peut s'écrire sous forme d'une intégrale de volume. Pour effectuer cette transformation il suffit d'utiliser le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot (f \mathbf{v}) dV \quad (IV, 27)$$

et le théorème de transport devient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{V_m(t)} \nabla \cdot f \mathbf{v} dV \quad (IV, 28)$$

IV.3.4. Première application

Considérons la fonction $f(\mathbf{x}, t) = 1$. On peut spécialiser le théorème de transport (IV,23) à cette fonction :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} dV = \int_{A_m(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (IV, 29)$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} dV = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dV \quad (IV, 30)$$

L'intégrale du premier membre n'est autre que le volume $V_m(t)$. Ainsi :

$$\frac{d}{dt} V_m(t) = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \mathbf{v} dV \quad (IV, 31)$$

Considérons à présent un volume de contrôle élémentaire $\delta V_m(t)$. L'expression précédente s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} \delta V_m(t) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta V_m(t) \quad (IV, 32)$$

soit :

$$\frac{1}{\delta V_m(t)} \frac{d}{dt} \delta V_m(t) = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (IV, 33)$$

Le taux de variation relatif du volume élémentaire δV_m est donné par la divergence de la vitesse $\mathbf{v}$. Lorsque la divergence de la vitesse est positive, le volume matériel augmente, et le mouvement correspond à une détente; lorsque la divergence est négative, le volume matériel diminue et le fluide est comprimé.

IV.3.5. Deuxième application

Les théorèmes de transport ont été établis pour une fonction scalaire f . Nous aurons besoin, par la suite, du théorème de transport pour un vecteur. Considérons ici un vecteur $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ et cherchons à déterminer :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV \quad (IV, 34)$$

La procédure la plus simple consiste à projeter le vecteur $\mathbf{b}$ sur un système d'axes cartésien fixe : $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ puis à écrire le transport de chacune des composantes :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \mathbf{b} dV = \mathbf{e}_1 \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} b_1 dV + \mathbf{e}_2 \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} b_2 dV + \mathbf{e}_3 \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} b_3 dV \quad (IV, 35)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \mathbf{b} dV = & \mathbf{e}_1 \int_{V_a} \frac{\partial b_1}{\partial t} dV + \mathbf{e}_2 \int_{V_a} \frac{\partial b_2}{\partial t} dV + \mathbf{e}_3 \int_{V_a} \frac{\partial b_3}{\partial t} dV \\ & + \mathbf{e}_1 \int_{A_a} b_1(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dA + \mathbf{e}_2 \int_{A_a} b_2(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dA + \mathbf{e}_3 \int_{A_a} b_3(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dA \end{aligned} \quad (IV, 36)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \mathbf{b} dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} \mathbf{b}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (IV, 37)$$

Le théorème de transport pour $\mathbf{b}$ présente une forme semblable à celui obtenu pour f .

Le tableau 1 récapitule les principaux résultats de ce chapitre.

Tableau 1. Théorèmes de transport

1. Volume de contrôle arbitraire

Soit $f = f(\mathbf{x}, t)$ et un volume de contrôle $V_a(t)$ limité par la surface de contrôle $A_a(t)$. $\mathbf{w}$ désigne la vitesse de la surface $A_a(t)$.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA$$

2. Volume de contrôle matériel

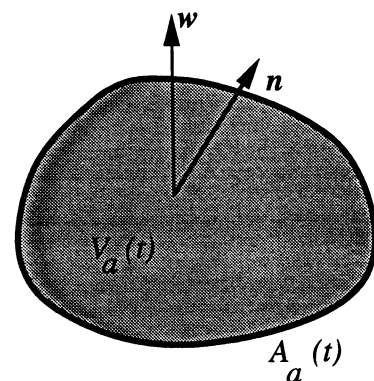
$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$$

3. Volume fixe

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV$$

4. Le volume matériel V_m et le volume V_a coïncident à l'instant t

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV + \int_{A_a(t)} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dV$$



CHAPITRE V

EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES. I

V.1. Introduction

Les équations de bilan de la mécanique des fluides sont établies dans ce chapitre et le suivant. Pour écrire ces équations, on doit faire appel à la notion de dérivée matérielle introduite au chapitre II, aux expressions du tenseur des taux de déformation du chapitre III et aux théorèmes de transport du chapitre IV. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour obtenir les équations fondamentales de la mécanique des fluides. Nous suivrons ici deux approches. Dans la première, on considère un volume de contrôle matériel et on analyse la variation dans le temps de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie contenues dans ce volume. L'écriture d'équations locales à partir des bilans globaux correspondant à un volume matériel quelconque nécessite la transformation de tous les termes en intégrales de volume. Cette opération est facilement effectuée à l'aide des théorèmes de transport et de la relation de Green-Ostrogradsky. Dans la deuxième approche on considère un volume de contrôle élémentaire fixe. On utilise en pratique un pavé élémentaire dont les côtés sont $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ et dont l'un des sommets se trouve au point (x, y, z) . On exprime pour cet élément les flux entrant et sortant par les facettes ainsi que la variation instationnaire dans le pavé de la propriété dont on souhaite établir le bilan. Cette méthode élémentaire est facilement appliquée dans un système de coordonnées cartésiennes mais on peut aussi utiliser des volumes élémentaires adaptés à des géométries particulières (par exemple une couronne si l'on s'intéresse à un écoulement axisymétrique). Les équations obtenues dans un système de coordonnées particulières peuvent être écrites sous forme intrinsèque à l'aide des opérateurs vectoriels classiques. On retrouve ainsi les équations de conservation déduites de façon plus générale par l'analyse des bilans sur un volume matériel quelconque.

Le bilan de masse est développé à la section 2. Une forme spéciale du théorème de transport, le théorème de Reynolds est présentée à la section 3. Le bilan de quantité de mouvement est analysé à la section 4. Ce bilan fait intervenir le vecteur contrainte qu'il faut exprimer en fonction de la pression et du tenseur des contraintes visqueuses. On doit pour cela utiliser les résultats de l'analyse de l'état des contraintes dans un fluide. Cette analyse est menée dans l'annexe A.

Les équations de Navier-Stokes, l'équation de bilan pour l'énergie cinétique et les diverses formes du bilan d'énergie sont présentées au chapitre VI.

Bibliographie

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides sont établies dans de nombreux ouvrages de base. La méthode la plus couramment utilisée est celle du volume de contrôle élémentaire comme par exemple dans Bird, Stewart et Lightfoot 1960, Cebeci et Bradshaw 1977, Shapiro 1953, Tsien 1958, Liepmann et Roshko 1957. Whitaker 1968, Barrère et Prud'homme 1972, Kuethe et Chow 1986 utilisent des volumes de contrôle fixes ou matériels.

V.2. Conservation de la masse

V.2.1. Forme locale

Considérons un volume matériel $V_m(t)$. La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{V_m(t)} \rho dV \quad (V,1)$$

où ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans $V_m(t)$ est constante et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt}m = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0 \quad (V,2)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume $V_m(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (V,3)$$

et d'après (V,2) on peut écrire :

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (V,4)$$

Si le volume $V_m(t)$ ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur la surface A_m peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\int_{A_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_m(t)} \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV \quad (V,5)$$

Dans ces conditions, (V,4) devient :

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] dV = 0 \quad (V,6)$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrande doit être identiquement nul :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0} \quad (V, 7)$$

Cette équation locale exprime la conservation de la masse. Elle est applicable en tout point d'un fluide continu ne contenant pas de sources ou de puits.

L'équation (V,7) est souvent désignée sous le nom d'**équation de continuité**. On peut l'écrire sous une forme légèrement différente en développant $\nabla \cdot \rho \mathbf{v}$.

D'après une identité vectorielle classique :

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (V, 8)$$

En substituant cette relation dans (V,7), on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (V, 9)$$

Cette expression fait apparaître la dérivée matérielle :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \quad (V, 10)$$

et on peut écrire (V,7) sous la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (V, 11)$$

V.2.2. Autre démonstration, bilan de masse sur un volume élémentaire

Nous allons donner ici une autre démonstration de l'équation de continuité qui ne s'appuie pas sur le théorème de transport. Les calculs sont plus lourds et cette deuxième méthode de démonstration n'a pas notre préférence.

Nous considérons maintenant comme volume de contrôle un cube élémentaire fixe. Le système de coordonnées cartésiennes utilisé $Oxyz$ a ses axes parallèles aux côtés du cube. Le volume du cube est $\Delta x \Delta y \Delta z$. On va maintenant écrire le principe de conservation de la masse sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation de} \\ \text{la masse contenue dans} \\ \text{le volume } \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit massique pénétrant} \\ \text{dans le volume} \\ \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit massique sortant} \\ \text{du volume} \\ \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\}$$

Le terme qui apparaît au premier membre peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \quad (V, 12)$$

Considérons à présent la facette $\Delta x \Delta z$ située en y . Le débit masse qui pénètre à travers cette facette est :

$$\rho v_y|_y \Delta x \Delta z \quad (V, 13)$$

Le débit sortant de la facette $\Delta x \Delta z$ située en $y + \Delta y$ est :

$$\rho v_y|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \quad (V, 14)$$

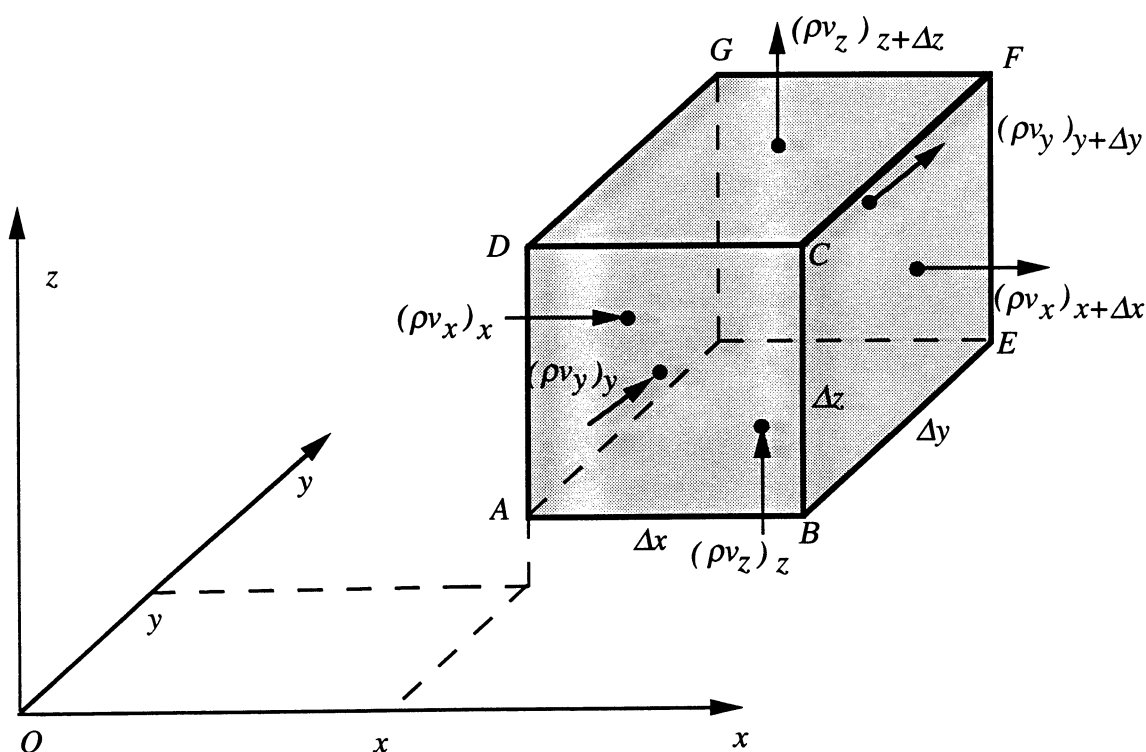


Figure 1. Volume de contrôle élémentaire. Ce volume fixe est utilisé pour effectuer des bilans de masse et de quantité de mouvement.

On peut faire un raisonnement analogue pour les quatre autres facettes, puis écrire le bilan suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = & [\rho v_x|_x - \rho v_x|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z \\ & + [\rho v_y|_y - \rho v_y|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\ & + [\rho v_z|_z - \rho v_z|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (V, 15)$$

On peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = & - \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x^2 \Delta y \Delta z) \\ & - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x \Delta y^2 \Delta z) \\ & - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \Delta x \Delta y \Delta z + O(\Delta x \Delta y \Delta z^2) \end{aligned} \quad (V, 16)$$

où $O(\Delta x^2 \Delta y \Delta z)$ désigne un terme de l'ordre de $\Delta x^2 \Delta y \Delta z$.

Il reste à diviser par $\Delta x \Delta y \Delta z$ puis à prendre la limite $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$. Ces opérations conduisent à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z = 0 \quad (V, 17)$$

soit encore :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (V, 18)$$

On retrouve bien l'équation (V,7) présentée plus haut. La démonstration est ici relativement simple. Les calculs se compliquent sensiblement lorsque l'on cherche à appliquer la même méthode aux bilans de quantité de mouvement et d'énergie.

V.2.3. Formes macroscopiques

Dans beaucoup d'applications pratiques, il est plus commode d'utiliser une forme macroscopique des équations de conservation.

Une première expression macroscopique simple peut être obtenue en reprenant l'expression (V,4) reproduite ci-dessous :

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (V, 19)$$

Considérons à présent un volume fixe V coïncidant avec $V_m(t)$ à l'instant t . On a : ($V_m(t) = V$ et $A_m(t) = A$, et l'expression (V,19) peut aussi s'écrire :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (V, 20)$$

Une forme plus sophistiquée, intéressante dans certaines circonstances, peut être déduite de la variante (V,4) du théorème de transport. On a en effet :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV + \int_{A_a(t)} f(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (V, 21)$$

En spécialisant cette expression à $f = \rho$ on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho dV + \int_{A_a(t)} \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (V, 22)$$

V.3. Une forme spéciale du théorème de transport

Le théorème de Reynolds

Considérons le théorème de transport pour un volume matériel écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot f \mathbf{v} \right) dV \quad (V, 23)$$

Spécialisons cette expression à une fonction $f = \rho \Phi$.

On a :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \Phi dV = \int_{V_m(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \Phi + \nabla \cdot \rho \Phi \mathbf{v} \right) dV \quad (V, 24)$$

que l'on peut écrire en développant le second membre :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \Phi dV = \int_{V_m(t)} \left\{ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) + \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \right) \right\} dV \quad (V, 25)$$

Le premier terme entre crochets est nul et le second fait apparaître la dérivée matérielle de Φ : $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi$

Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \Phi dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{d\Phi}{dt} dV \quad (V, 26)$$

Cette expression est souvent désignée dans la littérature (par exemple Whitaker 1968) sous le nom de théorème de Reynolds.

V.4. Equation de conservation de la quantité de mouvement

V.4.1. Introduction

Considérons à nouveau un volume de contrôle matériel $V_m(t)$. La quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV \quad (V, 27)$$

Le principe fondamental de la dynamique indique que la variation de quantité de mouvement de ce système matériel est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F} \quad (V, 28)$$

Dans la plupart des situations (classiques), deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans V_m :

(1) les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV \quad (V, 29)$$

(2) les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface $A_m(t)$. Nous écrirons ce type de forces sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (V, 30)$$

Dans cette expression, $\mathbf{n}$ désigne la normale extérieure et :

$$\delta \mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (V, 31)$$

représente la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface dA de normale $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ est le vecteur contrainte agissant sur dA .

L'expression (V,28) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (V, 32)$$

Pour simplifier cette première présentation des équations de la mécanique des fluides, nous allons projeter l'équation précédente sur les axes d'un système cartésien fixe.

La projection sur l'axe i ($i = 1, 2, 3$) a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA \quad (V, 33)$$

Dans cette expression, $t_i(\mathbf{n})$ désigne la projection sur l'axe i du vecteur contrainte. Pour continuer, il faut écrire $t_i(\mathbf{n})$ de façon plus explicite. On a besoin pour cela de résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

V.4.2. Résultats principaux de l'analyse de l'état des contraintes dans un milieu fluide

Une analyse détaillée de l'état des contraintes est effectuée à l'annexe A. Cette analyse conduit aux résultats suivants :

$$t_i(\mathbf{n}) = T_{ij} n_j \quad \text{la notation d'Einstein est utilisée ici}$$

et

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3) \quad (V, 34)$$

La première expression indique que la composante i du vecteur contrainte est donnée par le produit scalaire du tenseur des contraintes $\mathbf{T}$ dont les composantes sont T_{ij} et du vecteur normal $\mathbf{n}$ de composantes n_j . La seconde expression indique que le tenseur T_{ij} est symétrique.

Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous les expressions des trois composantes du vecteur contrainte sous forme totalement explicite :

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{n}) &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ t_2(\mathbf{n}) &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ t_3(\mathbf{n}) &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3 \end{aligned} \quad (V, 35)$$

D'un point de vue physique, il est intéressant de décomposer la contrainte $\mathbf{t}$ en deux parties :

- la contrainte associée à la pression,
- la contrainte associée aux forces visqueuses.

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation du fluide. On peut écrire dans ces conditions :

$$T_{ij} = \quad \quad \quad -p\delta_{ij} \quad \quad + \quad \quad \tau_{ij} \quad \quad (V, 36)$$

Tenseur des contraintes	Tenseur des contraintes associées à la pression	Tenseur des contraintes visqueuses
----------------------------	--	--

La projection du vecteur contrainte sur l'axe i est alors donnée par :

$$t_i(\mathbf{n}) = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j \quad (V, 37)$$

soit encore :

$$t_i(\mathbf{n}) = -pn_i + \tau_{ij}n_j \quad (V, 38)$$

En clair cette expression s'écrit :

$$\begin{aligned} t_1(\mathbf{n}) &= -pn_1 + \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ t_2(\mathbf{n}) &= -pn_2 + \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ t_3(\mathbf{n}) &= -pn_3 + \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{aligned} \quad (V, 39)$$

V.4.3. Première forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Muni de ces résultats, on peut maintenant reprendre l'analyse de l'équation (V,33) reproduite ci-dessous pour la commodité :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA \quad (V, 40)$$

Considérons d'abord le troisième terme :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = \int_{A_m(t)} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j dA \quad (V, 41)$$

Au second membre de cette expression, nous voyons apparaître le flux d'un vecteur dont les composantes sont : $-p\delta_{i1} + \tau_{i1}, -p\delta_{i2} + \tau_{i2}, -p\delta_{i3} + \tau_{i3}$.

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, écrit sous la forme :

$$\int_A b_j n_j dA = \int_V \frac{\partial b_j}{\partial x_j} dV \quad (V, 42)$$

l'expression (V,41) peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij}) dV \quad (V, 43)$$

soit encore :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = - \int_{V_m(t)} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_{V_m(t)} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (V, 44)$$

Considérons à présent le premier terme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV \quad (V, 45)$$

D'après le théorème de Reynolds, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV \quad (V, 46)$$

En rassemblant les résultats (V,44) et (V,46), on obtient finalement :

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_m(t)} [\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}] dV \quad (V, 47)$$

Le volume de contrôle $V_m(t)$ est arbitraire et les intégrandes apparaissant dans les deux membres doivent être identiques :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (V, 48)$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quantité} \\ \text{d'accélération} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Forces associées} \\ \text{à la pression par} \\ \text{unité de} \\ \text{volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Forces} \\ \text{de volume} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Contraintes} \\ \text{visqueuses} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right\} \quad (V, 49)$$

Pour fixer les idées, nous allons maintenant écrire l'équation (V,48) sous forme explicite et pour les trois composantes :

$$\begin{aligned}\rho \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}\end{aligned}\quad (V, 50)$$

On peut aussi écrire l'équation (V,48) sous forme vectorielle compacte :

$$\boxed{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}} \quad (V, 51)$$

Cette notation fait apparaître la divergence du tenseur $\boldsymbol{\tau}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ est un vecteur dont la composante suivant l'axe i est : $(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}$

V.4.4. Écoulements non visqueux : équations d'Euler

Les équations de conservation de la quantité de mouvement se simplifient notablement lorsque l'on considère des écoulements de **fluides idéaux**.

Le fluide idéal est par définition dénué de viscosité et le tenseur des contraintes visqueuses disparaît des équations (V,48) ou (V,51). On a dans ce cas :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (V, 52)$$

ou :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (V, 53)$$

Ces expressions sont désignées sous le nom d'**équations d'Euler**.

Nous verrons dans la suite que les effets de viscosité et de conduction de chaleur sont importants au voisinage immédiat des surfaces solides qui se trouvent dans l'écoulement ou à ces frontières. La région dans laquelle viscosité et conduction doivent être prises en compte est appelée **couche limite**. Les couches limites sont caractérisées par une épaisseur très faible. A l'extérieur des couches limites, l'écoulement peut être généralement considéré comme celui d'un fluide idéal et les équations du mouvement sont celles que nous venons de présenter (équations d'Euler).

Dans les couches limites, les forces associées à la viscosité jouent un rôle important et le terme $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ doit être conservé.

V.4.5. Seconde forme locale (forme conservative).

Nous partons à nouveau de l'expression (V,33)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA \quad (V, 54)$$

(1)
(2)
(3)

mais, cette fois, nous utilisons le théorème de transport sous sa forme initiale pour exprimer le premier terme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) dV + \int_{A_m(t)} \rho v_i (v_j n_j) dA \quad (V, 55)$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky appliqué à l'intégrale de surface conduit à :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j \right] dV \quad (V, 56)$$

Le troisième terme de l'expression (V,54) est donné par (V,44); on peut donc écrire :

$$\int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j \right] dV = \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dV \quad (V, 57)$$

On peut immédiatement en déduire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (V, 58)$$

Remarque : Cette forme est exactement équivalente à celle que nous avons donnée plus haut.

On montre d'ailleurs facilement que :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j \quad (V, 59)$$

Il suffit en effet de développer le second membre :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (V, 60)$$

Le premier terme entre parenthèses est nul et le second n'est autre que $\rho dv_i/dt$.

L'équation (V,58) peut être écrite sous forme vectorielle de façon plus compacte :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (V, 61)$$

Dans cette expression, $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ représente la divergence du tenseur $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$. Il s'agit d'un vecteur dont la composante suivant l'axe i est : $(\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j$.

Les équations (V,48) et (V,58) sont équivalentes, mais l'équation (V,61) se présente sous **forme conservative** * et elle est de ce fait mieux adaptée au traitement numérique.

V.4.6. Autre démonstration, bilan de quantité de mouvement sur un volume élémentaire

Comme pour l'équation de continuité, nous donnons ici une seconde démonstration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Cette deuxième démonstration n'utilise pas le théorème de transport et elle est de ce fait plus élémentaire.

Nous allons exprimer la conservation de la quantité de mouvement pour un volume de contrôle constitué par un cube élémentaire fixe. Le volume du cube est $\Delta x \Delta y \Delta z$. Le principe de conservation de la quantité de mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux de variation} \\ \text{de la quantité de mouvement} \\ \text{contenue dans le volume} \\ \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit de quantité} \\ \text{de mouvement} \\ \text{pénétrant dans le} \\ \text{volume } \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit de quantité} \\ \text{de mouvement} \\ \text{sortant du volume} \\ \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Somme de toutes} \\ \text{les forces agissant} \\ \text{sur le fluide contenu} \\ \text{dans } \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} \quad (V, 62)$$

Nous allons expliciter cette équation en la projetant sur l'axe x .

La quantité de mouvement contenue dans le volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, projetée suivant x , a pour forme : $\rho v_x \Delta x \Delta y \Delta z$ et la variation de cette quantité de mouvement est : $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x \Delta x \Delta y \Delta z)$.

Considérons à présent la facette $\Delta y \Delta z$ située en x . Le flux de quantité de mouvement pénétrant par cette facette est : $\rho v_x v_x|_x$ et la projection de ce flux sur l'axe x a pour forme : $\rho v_x v_x|_x$.

Le débit de quantité de mouvement correspondant est : $\rho v_x v_x|_x \Delta y \Delta z$.

Le débit de quantité de mouvement sortant par la facette $\Delta y \Delta z$ située en $x + \Delta x$ est : $\rho v_x v_x|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$; on trouve par des raisonnements analogues les débits de quantité de mouvement pénétrant par les facettes $\Delta x \Delta z$ en y et $\Delta x \Delta y$ en z : $\rho v_y v_y|_y \Delta x \Delta z$ et

* Note : on dit qu'une équation est sous forme conservative lorsqu'elle peut s'écrire : $\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = g$

$\rho v_z v_x|_z \Delta x \Delta y$, et les débits sortants par les facettes $\Delta x \Delta z$ en $y + \Delta y$ et $\Delta x \Delta y$ en $z + \Delta z$ sont respectivement $\rho v_y v_x|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$ et $\rho v_z v_x|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit de quantité de mouvement} \\ \text{suivant l'axe } x \text{ pénétrant dans} \\ \text{le volume } \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Débit de quantité de mouvement} \\ \text{suivant l'axe } x \text{ sortant du} \\ \text{volume } \Delta x \Delta y \Delta z \end{array} \right\} \\
 &= [\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}] \Delta y \Delta z \\
 &+ [\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+\Delta y}] \Delta x \Delta z \\
 &+ [\rho v_z v_x|_z - \rho v_z v_x|_{z+\Delta z}] \Delta x \Delta y \\
 &= \left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_x) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z v_x) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \\
 &+ O(\Delta x^2 \Delta y \Delta z) + O(\Delta x \Delta y^2 \Delta z) + O(\Delta x \Delta y \Delta z^2) \quad (V, 63)
 \end{aligned}$$

Considérons à présent les forces qui agissent sur la surface du volume $\Delta x \Delta y \Delta z$. Sur la facette $\Delta y \Delta z$ située en x , le vecteur normal est orienté en sens opposé du vecteur unitaire $\hat{x}$ suivant l'axe des x . Le vecteur contrainte sur cette face est : $\mathbf{t}(-\hat{x})$.

La projection de ce vecteur suivant l'axe x est $t_x(-\hat{x})$ et, d'après l'expression générale (V,34), cette composante a pour forme : $t_x(-\hat{x}) = -(-p + \tau_{xx})_x$.

La force qui s'exerce sur la facette $\Delta y \Delta z$ projetée sur l'axe x a donc pour forme : $t_x(-\hat{x}) \Delta y \Delta z = -(-p + \tau_{xx})_x \Delta y \Delta z$.

Sur la facette $\Delta y \Delta z$ située en $x + \Delta x$, cette force est donnée par :

$$t_x(\hat{x}) \Delta y \Delta z = (-p + \tau_{xx})_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z.$$

On trouve de la même manière les forces qui agissent sur les quatre autres facettes. En définitive, la projection suivant x de toutes les forces qui agissent sur la surface du volume est :

$$\begin{aligned}
 & -(-p + \tau_{xx})_x \Delta y \Delta z + (-p + \tau_{xx})_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \\
 & -(\tau_{yx})_y \Delta x \Delta z + (\tau_{yx})_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \\
 & -(\tau_{zx})_z \Delta x \Delta y + (\tau_{zx})_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y \\
 & = \left[-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \\
 & + O(\Delta x^2 \Delta y \Delta z) + O(\Delta x \Delta y^2 \Delta z) + O(\Delta x \Delta y \Delta z^2) \quad (V, 64)
 \end{aligned}$$

Il reste à exprimer la projection suivant l'axe x de la force de volume. Cette projection est : $\rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z$.

On peut maintenant rassembler les expressions précédentes, diviser l'ensemble par : $\Delta x \Delta y \Delta z$ et faire tendre Δx , Δy et Δz vers zéro pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_x v_z = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} + \rho g_x \quad (V, 65)$$

Cette équation est bien identique (aux notations près) à celle que nous avons obtenue plus haut à l'aide du théorème de transport.

V.4.7. Forme macroscopique

Considérons à nouveau l'expression (V,33)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA \quad (V,66)$$

En partant de cette relation, nous allons développer une forme macroscopique.

On peut d'abord écrire le premier terme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i dV + \int_{A_m(t)} \rho v_i (v_j n_j) dA \quad (V,67)$$

D'autre part, le troisième terme peut être remplacé par :

$$\int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) dA = \int_{A_m(t)} (-p n_i + \tau_{ij} n_j) dA = \int_{A_m(t)} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j dA \quad (V,68)$$

En portant (V,67) et (V,68) dans (V,66), on obtient :

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i dV + \int_{A_m(t)} [\rho v_i v_j - p \delta_{ij} + \tau_{ij}] n_j dA = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV \quad (V,69)$$

Cette expression s'applique à un volume de contrôle matériel mais elle est également utilisable dans le cas d'un volume de contrôle fixe V coïncidant à l'instant t avec le volume de contrôle $V_m(t)$. On a donc :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i dV + \int_A [\rho v_i v_j - p \delta_{ij} + \tau_{ij}] n_j dA = \int_V \rho g_i dV \quad (V,70)$$

Cette équation peut s'écrire sous forme plus compacte à l'aide de notations vectorielles :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} dV + \int_A [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - p \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (V,71)$$

Cas particulier : l'écoulement est permanent

Lorsque l'écoulement est permanent, l'expression (V,70) se simplifie :

$$\int_A [\rho v_i v_j - p \delta_{ij} + \tau_{ij}] n_j dA = \int_V \rho g_i dV \quad (V,72)$$

Tableau 1 . Equation de conservation de la masse.

1. Première forme locale : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$
2. Seconde forme locale : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
3. Première forme macroscopique : $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$
4. Seconde forme macroscopique : $\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_A \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = 0$

Tableau 2. Equations de conservation de la quantité de mouvement.

1. Forme locale : $\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$
2. Forme locale, notation vectorielle : $\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$
3. Forme locale, notation conservative : $\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}$
4. Forme locale conservative, notation vectorielle : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$
5. Variante de la forme 4 : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\tau}] = \rho \mathbf{g}$

Tableau 3. Equations de conservation de la quantité de mouvement, écoulements de fluides idéaux (équations d'Euler).

1. Forme locale : $\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$
2. Forme locale, notation vectorielle : $\rho \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$
3. Forme locale conservative : $\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$
4. Forme locale conservative, notation vectorielle : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$
5. Variante de la forme 4 : $\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \boldsymbol{\delta}) = \rho \mathbf{g}$

Tableau 4. Equations de conservation de la quantité de mouvement.

1. Forme macroscopique générale :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i dV + \int_A [\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}] n_j dA = \int_V \rho g_i dV$$

2. L'écoulement est permanent :

$$\int_A [\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}] n_j dA = \int_V \rho g_i dV$$

3. L'écoulement est permanent et les forces de volume sont négligeables :

$$\int_A [\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij}] n_j dA = 0$$

ANNEXE A

LES CONTRAINTES DANS UN MILIEU FLUIDE

1. Le vecteur contrainte

Nous considérons ici les forces qui s'exercent au sein d'un fluide avec pour objectif de développer une analyse des forces qui interviennent "au second membre" de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Cette équation s'écrit, comme on l'a vu plus haut, sous la forme générale :

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} dV = \int \rho \mathbf{g} dV + \int \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (A, 1)$$

Taux de variation de la
quantité de mouvement

Somme des forces
de volume

Forces s'exerçant
sur la surface

Les forces s'exerçant sur le volume sont facilement prises en compte. Une étude plus détaillée est nécessaire pour comprendre la nature du vecteur contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Il est commode de reprendre ici la définition de ce vecteur pour passer ensuite à l'étude de ses propriétés.

Considérons un volume matériel $V_m(t)$ limité par la surface $A_m(t)$ (figure 1).

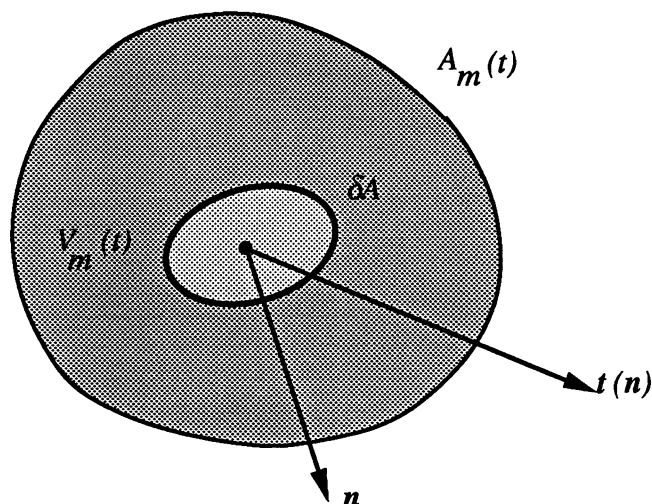


Figure 1. Volume de contrôle matériel. La contrainte appliquée au point P sur la surface δA est $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Soit P un point matériel de la surface et soit $\mathbf{n}$ la **normale tournée vers l'extérieur** au point P . Nous supposons que la surface et le volume considérés possèdent toutes les propriétés de continuité requises et en particulier que la normale au point P est unique. Soit $\delta \mathbf{f}$ la force exercée par le milieu extérieur au volume $V_m(t)$ sur l'élément de surface δA . On peut écrire cette force sous la forme :

$$\delta \mathbf{f} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n}) \delta A \quad (A, 2)$$

$\delta \mathbf{f}$ est la force de surface et $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n})$ est la contrainte moyenne transmise par l'élément de surface δA .

Il est clair que $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ doit dépendre de la **position du point P et de la direction de la normale $\mathbf{n}$** .

Nous supposons en outre que lorsque $\delta A \rightarrow 0$, $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n})$ tend vers une limite finie indépendante de la forme de l'élément de surface δA :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \delta \mathbf{f} / \delta A \quad (A, 3)$$

où $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ représente donc le vecteur contrainte au point P sur une surface de normale $\mathbf{n}$.

Les hypothèses que nous venons de faire ne sont justifiées que par leurs conséquences et en particulier par les observations expérimentales que l'on peut effectuer sur des systèmes réels. Dans certains cas très spéciaux, des couples peuvent aussi être transmis à travers la surface δA . Nous ne considérons pas cette possibilité dans la suite.

Nous allons maintenant démontrer les propriétés suivantes du vecteur contrainte :

(1) les vecteurs contrainte agissant sur les faces opposées d'une même surface sont égaux en module et de directions opposées : $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n})$

(2) le vecteur contrainte agissant en un point P sur une surface de normale $\mathbf{n}$ peut être représenté à l'aide du tenseur des contraintes $\mathbf{T}$ sous la forme :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (A, 4)$$

(3) le tenseur des contraintes $\mathbf{T}$ est symétrique $T_{ij} = T_{ji}$

Pour ces démonstrations, nous avons besoin des théorèmes de la moyenne pour une surface et un volume. En une dimension le théorème de la moyenne indique que l'intégrale d'une fonction continue peut être représentée sous la forme :

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\zeta) \quad (A, 5)$$

où ζ est un point appartenant à l'intervalle $[a, b]$.

Dans le cas d'une surface ou d'un volume, on peut écrire :

$$\int_A f dA = A \bar{f} \quad (A, 6)$$

$$\int_V f dV = V \bar{f} \quad (A, 7)$$

où $\bar{f}$ désigne la valeur de la fonction en un point de la surface ou du volume.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer la propriété (1). Pour cela, considérons le volume matériel de la figure 2, formé par deux surfaces parallèles $A_n(t)$ connectées par une bande d'épaisseur l de surface $A_s(t)$.

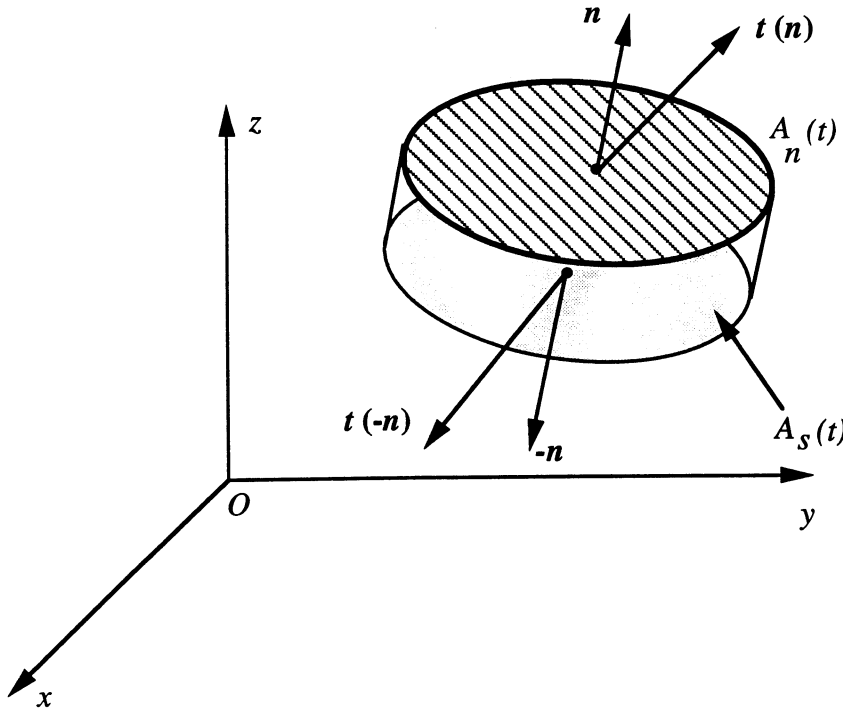


Figure 2.

Appliquons maintenant l'expression (A,1) au volume matériel que nous venons de définir :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v dV &= \int_{V_m(t)} \rho g dV + \int_{A_s(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \\ &+ \int_{A_n(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA + \int_{A_n(t)} \mathbf{t}(-\mathbf{n}) dA \end{aligned} \quad (A, 8)$$

Dans cette expression, nous avons décomposé l'intégrale des contraintes de surface en trois termes. On peut maintenant utiliser le théorème de la moyenne pour exprimer les trois premiers termes, puis rassembler les deux derniers sous le même signe somme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\rho v} l A_n(t) &= \overline{\rho g} l A_n(t) + \overline{\mathbf{t}(\mathbf{n})} A_s(t) \\ &+ \int_{A_n(t)} [\mathbf{t}(\mathbf{n}) + \mathbf{t}(-\mathbf{n})] dA \end{aligned} \quad (A, 9)$$

Nous prenons maintenant la limite $l \rightarrow 0$ tout en notant que $A_s(t) \rightarrow 0$. On obtient ainsi :

$$\lim_{l \rightarrow 0} \int_{A_n(t)} [t(\mathbf{n}) + t(-\mathbf{n})] dA = 0 \quad (A, 10)$$

Comme la surface $A_n(t)$ est arbitraire, cette identité n'est réalisée que si l'intégrande est nul :

$$t(\mathbf{n}) = -t(-\mathbf{n}) \quad (A, 11)$$

2. Composantes des contraintes en un point

Considérons à présent un point P du fluide. Il existe en ce point un vecteur $t(\mathbf{n})$ correspondant à chaque direction $\mathbf{n}$.

Il y a en particulier trois vecteurs : $t(\mathbf{e}_1) = \mathbf{t}_1$, $t(\mathbf{e}_2) = \mathbf{t}_2$, $t(\mathbf{e}_3) = \mathbf{t}_3$ correspondant aux trois vecteurs de base d'un système de coordonnées cartésiennes de référence (figure 3). Le vecteur $\mathbf{t}_1$ désigne la contrainte qui s'applique à une facette dont la normale est $\mathbf{e}_1$. $\mathbf{t}_2$ et $\mathbf{t}_3$ ont des significations semblables.

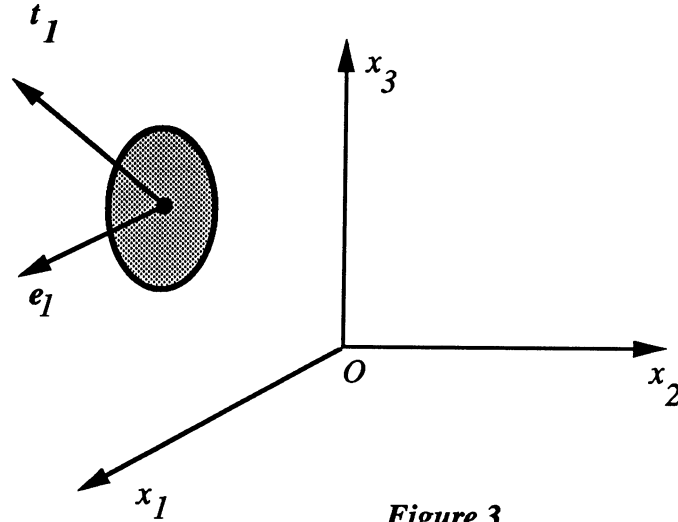


Figure 3.

On peut décomposer les vecteurs $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ suivant les trois axes de coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{12}\mathbf{e}_2 + T_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= T_{21}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= T_{31}\mathbf{e}_1 + T_{32}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (A, 12)$$

Ces expressions peuvent s'écrire sous une forme matricielle plus compacte :

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (A, 13)$$

ou encore en utilisant la convention d'Einstein :

$$t_i = T_{ij}e_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (A, 14)$$

Comme :

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad \text{on a } T_{ij} = t_i \cdot e_j \quad (A, 15)$$

Les quantités T_{ij} sont les composantes des contraintes. La composante T_{11} est la composante de t_1 dans la direction e_1 . T_{11} sera positif si le matériau situé du côté positif de l'axe x_1 tire la matière située du côté négatif de cet axe.

Les composantes T_{11} , T_{22} et T_{33} sont appelées contraintes normales; les autres composantes T_{12} , T_{13} , etc. étant les contraintes de cisaillement (figure 4).

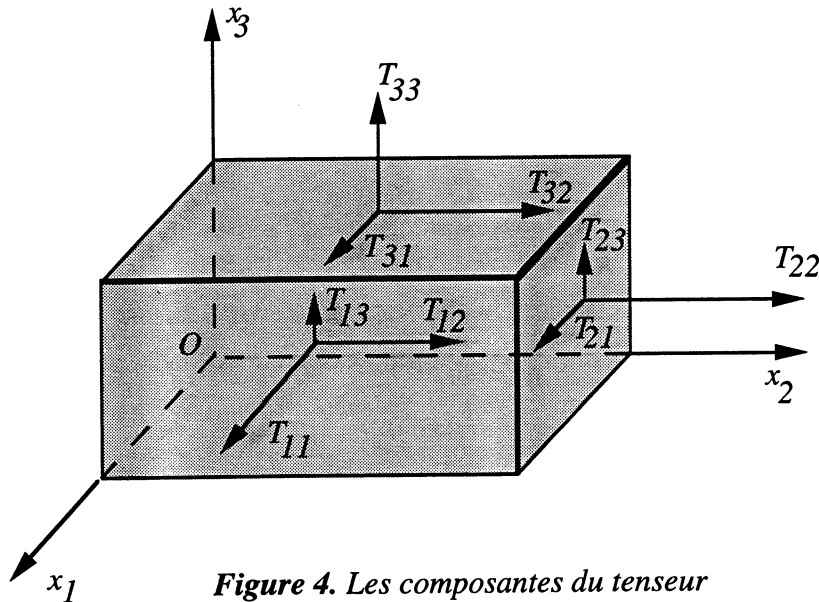


Figure 4. Les composantes du tenseur des contraintes.

3. Contrainte appliquée à une surface quelconque

Nous considérons à nouveau le point P et nous allons montrer que la contrainte appliquée en ce point sur une surface d'orientation quelconque peut être exprimée en fonction des composantes du tenseur des contraintes T_{ij} . Plus précisément, nous allons maintenant démontrer la propriété (2) énoncée plus haut.

Considérons pour cela un tétraèdre élémentaire de sommet P et de base $Q_1Q_2Q_3$. Les côtés PQ_1 , PQ_2 , PQ_3 sont parallèles aux trois axes de coordonnées et les normales extérieures pour les facettes PQ_2Q_3 , PQ_3Q_1 , PQ_1Q_2 et $Q_1Q_2Q_3$ sont respectivement : $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$ et n (figure 5).

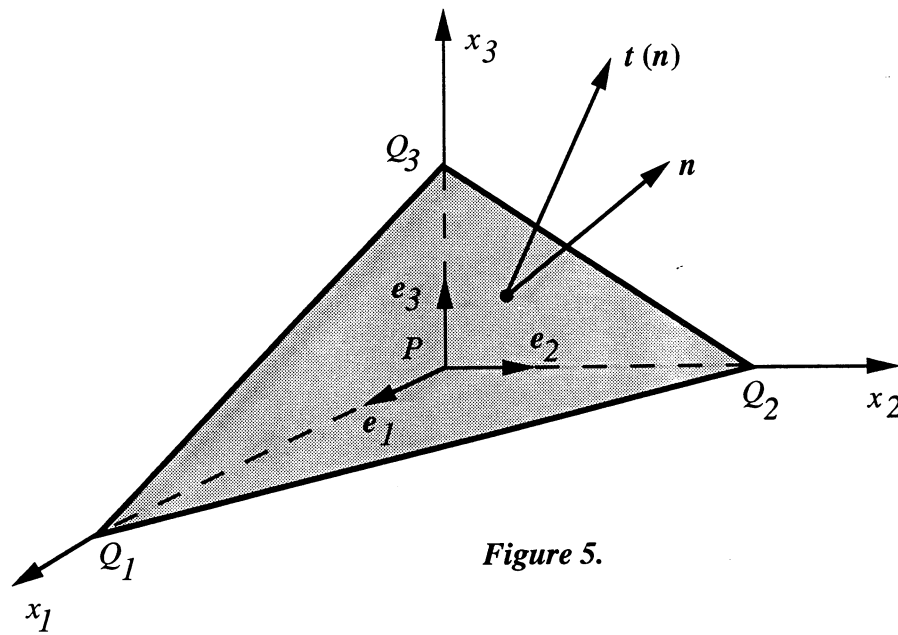


Figure 5.

Les contraintes qui s'exercent sur ces quatre facettes sont : $\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) = -\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) = -\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) = -\mathbf{t}_3$, et $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Les informations précédentes sont rassemblées au tableau 1 pour faciliter la compréhension du raisonnement.

Tableau 1. Caractéristiques géométriques pour l'analyse de la contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n})$.

Facette	Surface	Vecteur normal	Contrainte
$Q_1Q_2Q_3$	δA	$\mathbf{n}$	$\mathbf{t}(\mathbf{n})$
PQ_2Q_3	$\delta A_1 = \delta A n_1$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{t}_1$
PQ_3Q_1	$\delta A_2 = \delta A n_2$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{t}_2$
PQ_1Q_2	$\delta A_3 = \delta A n_3$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{t}_3$

Ce tableau donne aussi la surface des quatre facettes du tétraèdre. Si δA représente la surface de $Q_1Q_2Q_3$, la surface de PQ_2Q_3 sera $\delta A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)$ soit $\delta A n_1$ et les autres surfaces s'obtiennent de la même manière.

Nous pouvons maintenant appliquer au volume constitué par le tétraèdre le théorème de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \bar{\rho} \mathbf{v} \delta V = \bar{\rho} \mathbf{g} \delta V + \mathbf{t}(\mathbf{n}) \delta A - \mathbf{t}_1 \delta A_1 - \mathbf{t}_2 \delta A_2 - \mathbf{t}_3 \delta A_3 \quad (\text{A}, 16)$$

En divisant par δA et après utilisation de la deuxième colonne du tableau 1, on peut écrire :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 + \frac{\delta V}{\delta A} \frac{d}{dt} \bar{\rho} \mathbf{v} - \frac{\delta V}{\delta A} \bar{\rho} \mathbf{g} \quad (\text{A}, 17)$$

En gardant P et la normale $\mathbf{n}$ fixes, nous pouvons réduire les dimensions du tétraèdre pour faire tendre δA vers zéro. Dans cette situation $\delta V/\delta A \rightarrow 0$, et dans cette limite on obtient :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = t_1 n_1 + t_2 n_2 + t_3 n_3 \quad (A, 18)$$

ou encore en notations d'Einstein :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = n_i t_i = n_i T_{ij} e_j \quad (A, 19)$$

Ainsi la composante j de la contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ est obtenue à l'aide de :

$$t(\mathbf{n})_j = n_i T_{ij} \quad (A, 20)$$

ou encore sous forme explicite :

$$\begin{aligned} t(\mathbf{n})_1 &= n_1 T_{11} + n_2 T_{21} + n_3 T_{31} \\ t(\mathbf{n})_2 &= n_1 T_{12} + n_2 T_{22} + n_3 T_{32} \\ t(\mathbf{n})_3 &= n_1 T_{13} + n_2 T_{23} + n_3 T_{33} \end{aligned} \quad (A, 21)$$

Sous forme matricielle, ces trois expressions deviennent :

$$\begin{pmatrix} t(\mathbf{n})_1 \\ t(\mathbf{n})_2 \\ t(\mathbf{n})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (A, 22)$$

4. Symétrie du tenseur des contraintes

Pour démontrer la symétrie du tenseur des contraintes, nous utilisons le théorème du moment angulaire appliqué au volume de contrôle de la figure 6. Pour un volume de contrôle $V_m(t)$, le théorème du moment angulaire a pour expression :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_{V_m(t)} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}) dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (A, 23)$$

Taux de variation du moment angulaire	Moment angulaire des forces volumiques	Moment angulaire des contraintes appliquées à la surface
--	--	--

Le volume de contrôle est maintenant un cube de côté $L = \Delta x = \Delta y = \Delta z$. Le volume du cube est $\delta V = L^3$. L'expression (A,23) donne :

$$\frac{d}{dt} (\overline{\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}}) L^3 = (\overline{\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}}) L^3 + \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA \quad (A, 24)$$

Dans cette expression, $\overline{\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}}$ et $\overline{\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}}$ représentent les valeurs moyennes de $\mathbf{r} \times \rho \mathbf{g}$ et $\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}$ prises sur le volume de contrôle élémentaire.

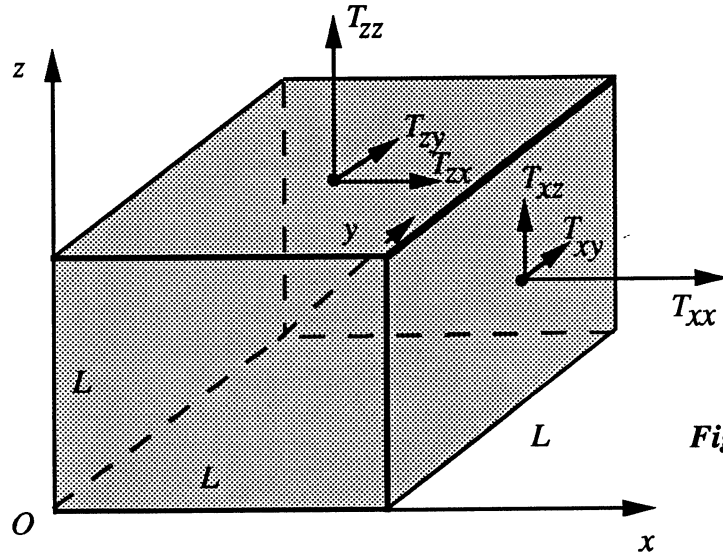


Figure 6.

Divisons l'expression (A,24) par L^3 et prenons la limite $L \rightarrow 0$. Dans cette limite, $\mathbf{r}$ tend aussi vers zéro et on obtient :

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^3} \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n}) dA = 0 \quad (\text{A}, 25)$$

Projetons maintenant cette expression sur l'axe des z . Si $\mathbf{k}$ désigne le vecteur unitaire dans cette direction, on peut écrire :

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^3} \int_A \mathbf{k} \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{n})] dA = 0 \quad (\text{A}, 26)$$

On peut maintenant développer cette expression pour le cube de la figure 6. On obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^3} \{ & \frac{L}{2} [(T_{xx})_{\Delta x} - (T_{xx})_0] L^2 + L (T_{xy})_{\Delta x} L^2 \\ & + \frac{L}{2} [(T_{yy})_{\Delta y} - (T_{yy})_0] L^2 - L (T_{yx})_{\Delta y} L^2 \\ & + \frac{L}{2} [(T_{zx})_{\Delta z} - (T_{zx})_0] L^2 - \frac{L}{2} [(T_{zy})_{\Delta y} - (T_{zy})_0] L^2 \} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A}, 27)$$

Chaque terme entre crochets est d'ordre $\Delta x = \Delta y = \Delta z = L$. Ces termes disparaissent lorsqu'on fait tendre L vers zéro. Il reste :

$$\lim_{L \rightarrow 0} [(T_{xy})_{\Delta x} - (T_{yx})_{\Delta y}] = 0 \quad (\text{A}, 28)$$

et on déduit facilement $T_{xy} = T_{yx}$. De la même manière, on peut obtenir $T_{xz} = T_{zx}$ et $T_{yz} = T_{zy}$. Le tenseur des contraintes est donc symétrique. On peut écrire sous forme indicelle :

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad \text{et } j = 1, 2, 3 \quad (\text{A}, 29)$$

5. Le tenseur des contraintes visqueuses

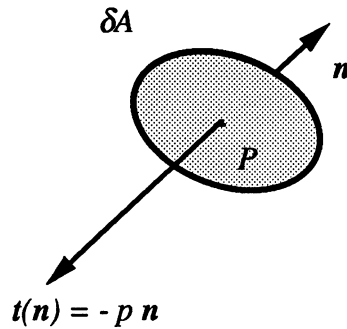
Nous avons vu plus haut qu'il était possible d'exprimer le vecteur contrainte sous la forme générale :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (\text{A}, 30)$$

soit encore :

$$t_i(\mathbf{n}) = n_j T_{ij} \quad (\text{A}, 31)$$

Dans un fluide au repos, nous savons que la contrainte est normale à la surface, qu'elle agit dans la direction opposée à $\mathbf{n}$ et qu'en un point donné, elle est indépendante de l'orientation. Cette contrainte est appelée "pression" et on peut écrire pour un fluide au repos (figure 7) :



$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n} \quad (\text{A}, 32)$$

ou encore :

$$t_i(\mathbf{n}) = -pn_i \quad (\text{A}, 33)$$

Les deux dernières expressions sont des formes particulières des relations générales (A,30) et (A,31). Pour le voir, nous définissons le tenseur unitaire dont les éléments sont :

$$(\delta)_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A}, 34)$$

Ce tenseur peut être représenté par la matrice unité :

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A}, 35)$$

et on peut écrire (A,32) et (A,33) :

$$t_i(\mathbf{n}) = -pn_j \delta_{ij} \quad (\text{A}, 36)$$

et

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -p\mathbf{n} \cdot \delta \quad (\text{A}, 37)$$

Lorsque le fluide est en mouvement, il est commode de séparer les contraintes associées à la pression des contraintes visqueuses. Pour cela on décompose $\mathbf{T}$ sous la forme générale :

$$\mathbf{T} = -p\delta + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A}, 38)$$

Dans cette expression, τ est le **tenseur des contraintes visqueuses**. Sous forme indicelle, l'expression précédente s'écrit :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (A, 39)$$

On peut aussi représenter cette relation à l'aide de matrices (3×3) :

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (A, 40)$$

Comme T et δ sont des tenseurs symétriques, le tenseur des contraintes visqueuses est aussi symétrique et par conséquent :

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (A, 41)$$

Dans la décomposition précédente, la pression est une variable thermodynamique et elle ne dépend que de l'état thermodynamique, le tenseur des contraintes visqueuses dépend par contre de l'écoulement et en particulier des taux de déformation des particules fluides.

6. Expressions du tenseur des contraintes visqueuses dans le cas des fluides newtoniens

Le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} est généralement exprimé en fonction des taux de déformation dans l'écoulement :

$$\tau_{ij} = f_{ij}(d_{kl}) \quad (A, 42)$$

Dans le cas des fluides **newtoniens**, la loi de comportement précédente est linéaire et isotrope.

On peut montrer à l'aide de raisonnements simples que la relation générale (A,42) s'écrit dans ces conditions sous la forme :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) d_{kk} \delta_{ij} \quad (A, 43)$$

Cette relation ne fait intervenir que deux coefficients : μ la **viscosité dynamique**, κ la **viscosité en volume**.

Dans la majeure partie des applications, on ne tient pas compte de la viscosité en volume et l'expression (A,43) devient :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} - \frac{2}{3} d_{kk} \delta_{ij} \quad (A, 44)$$

On peut encore écrire l'expression précédente à l'aide des gradients de vitesse. On a en effet :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (A, 45)$$

Ainsi :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (A, 46)$$

Sous forme explicite, on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \tau_{22} &= 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \tau_{33} &= 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \tau_{12} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{13} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{23} &= \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (A, 47)$$

Les expressions du tenseur des contraintes visqueuses sont données aux tableaux 2, 3 et 4 dans les systèmes de coordonnées rectangulaire, cylindrique et sphérique.

Rappelons pour finir que la viscosité dynamique μ a les dimensions du rapport d'une contrainte à un gradient de vitesse :

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{[\partial v / \partial x]}$$

soit :

$$[\mu] = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{T^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

Dans le système international, μ est donné en $kg/m - s$ et cette unité est le Poiseuille.

Tableau 2. Composantes du tenseur des contraintes pour les fluides newtoniens en coordonnées rectangulaires (x, y, z) .

	$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$
	$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$
	$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$
	$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$
	$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$
	$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)$
avec :	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Tableau 3. Composantes du tenseur des contraintes pour les fluides newtoniens en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

	$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$
	$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$
	$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})$
	$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$
	$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$
	$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$
avec :	$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Tableau 4. Composantes du tenseur des contraintes pour les fluides newtoniens en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
\tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
\tau_{\phi\phi} &= 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
\tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\
\tau_{\theta\phi} &= \tau_{\phi\theta} = \mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \\
\tau_{\phi r} &= \tau_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]
\end{aligned}$$

avec :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

CHAPITRE VI

EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE DES FLUIDES. II

VI.I. Equations de Navier-Stokes

Lorsque le fluide en écoulement est newtonien (c'est-à-dire lorsque la relation contrainte-taux de déformation est linéaire et isotrope, voir chapitre I et l'annexe A du chapitre V) les équations de conservation de la quantité de mouvement prennent la forme particulièrement simple des équations de **Navier-Stokes**. Nous allons maintenant établir ces équations en supposant, pour simplifier, que la viscosité dynamique μ reste constante dans tout l'écoulement. Si cette viscosité n'est pas constante, des termes supplémentaires apparaissent dans les équations du mouvement. L'écriture de ces termes ne présente pas de difficulté et elle est laissée en exercice pour le lecteur.

Nous partons ici de l'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée suivant l'axe i :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (VI, 1)$$

Cette équation exprime l'égalité entre la quantité d'accélération par unité de volume et les forces extérieures qui s'appliquent à l'unité de volume (pression, forces volumiques, contraintes visqueuses). Dans le cas d'un fluide newtonien, les contraintes visqueuses ont pour forme :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (VI, 2)$$

Nous devons maintenant calculer $\partial \tau_{ij} / \partial x_j$. Comme μ est constant, on a :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (VI, 3)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (VI, 4)$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \mu \nabla^2 v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (VI, 5)$$

et l'équation (VI,1) devient :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \nabla^2 v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (VI,6)$$

Sous forme explicite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \mu \nabla^2 v_1 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \mu \nabla^2 v_2 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \mu \nabla^2 v_3 + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (VI,7)$$

Quantité d'accélération par unité de volume	Force de pression par unité de volume	Forces volumiques	Forces visqueuses par unité de volume
--	--	----------------------	---

On peut aussi représenter ces trois équations sous forme vectorielle compacte :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (VI,8)$$

Les expressions précédentes sont appelées équations de Navier-Stokes.

Lorsque le fluide est incompressible, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et le dernier terme disparaît. On a alors :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (VI,9)$$

VI.2. Equation de bilan pour l'énergie cinétique

L'équation de bilan pour l'énergie cinétique s'obtient en formant le produit scalaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et du vecteur vitesse $\mathbf{v}$.

En notations indicielles, ce produit scalaire a pour forme :

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (VI,10)$$

ou encore :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i v_i + v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (VI,11)$$

Avec des notations vectorielles, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (VI, 12)$$

Taux de variation de l'énergie cinétique par unité de volume	Travail des forces de pression par unité de volume et de temps.	Travail des forces volumiques par unité de volume et de temps.	Travail des forces visqueuses par unité de volume et de temps.
---	--	---	---

On peut aussi écrire le premier membre de l'équation précédente sous la forme équivalente : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right)$. On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (VI, 13)$$

Nous verrons plus loin comment les expressions (VI,12) ou (VI,13) peuvent être utilisées pour établir des équations de bilan pour l'énergie interne ou l'enthalpie.

Ces équations sont aussi utilisées lorsqu'on souhaite faire le bilan d'énergie cinétique turbulente (chapitre XIX).

VI.3. Equation de conservation de l'énergie

Pour établir une équation locale exprimant la conservation de l'énergie, nous partons de l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un volume matériel $V_m(t)$.

L'énergie contenue dans le volume $V_m(t)$ a pour expression : $\int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV$.

Le taux de variation de cette énergie est donné par :

$$\int_{V_m(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \dot{W} + \dot{Q} \quad (VI, 14)$$

Le travail par unité de temps $\dot{W}$ qui apparaît au second membre est celui des forces de volume et des contraintes appliquées à la surface du volume :

$$\dot{W} = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA \quad (VI, 15)$$

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du volume et nous désignons par $\mathbf{q}$ le flux de chaleur par conduction. Ainsi, $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ représente la chaleur qui passe par unité de surface et de temps à travers la surface de contrôle $A_m(t)$:

$$\dot{Q} = - \int_{A_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VI, 16)$$

En substituant les expressions (VI,15) et (VI,16) dans l'équation (VI,14) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV = \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \int_{A_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VI, 17)$$

Pour déduire une équation locale de cette relation, il faut transformer les premier, troisième et quatrième termes.

Considérons d'abord le premier terme. Le théorème de transport nous permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV = \int_{V_m(t)} \rho \frac{d}{dt} (e + \frac{1}{2}v^2) dV \quad (VI, 18)$$

On peut aussi écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV + \int_{A_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VI, 19)$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV = \int_{V_m(t)} [\frac{\partial}{\partial t} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} (e + \frac{1}{2}v^2)] dV \quad (VI, 20)$$

Considérons à présent le troisième terme :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA = \int_{A_m(t)} t_i(\mathbf{n}) v_i dA \quad (VI, 21)$$

Remplaçons maintenant $t_i(\mathbf{n})$ par son expression en fonction de la pression et du tenseur des contraintes visqueuses :

$$t_i(\mathbf{n}) = -pn_i + \tau_{ij}n_j \quad (VI, 22)$$

On obtient ainsi :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA = \int_{A_m(t)} (-pn_i v_i + \tau_{ij} v_i n_j) dA \quad (VI, 23)$$

On peut maintenant transformer cette intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA = \int_{V_m(t)} [-\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i)] dV \quad (VI, 24)$$

Il reste à transformer le quatrième terme de l'expression (VI,17) en intégrale de volume.

On obtient :

$$\int_{A_m(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \quad (VI, 25)$$

On peut maintenant écrire (VI,17) sous la forme :

$$\int_{V_m(t)} \rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i v_i dV + \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) \right] dV - \int_{V_m(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \quad (VI, 26)$$

Le volume $V_m(t)$ est arbitraire et par conséquent :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho g_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (VI, 27)$$

Sous forme vectorielle, on obtient :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (VI, 28)$$

Taux de variation de l'énergie totale par unité de volume et de temps	Puissance des forces volumiques	Puissance des forces de pression	Puissance des forces visqueuses	Flux de chaleur
---	---------------------------------------	--	---------------------------------------	--------------------

Le premier membre peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v}$$

et l'équation de conservation de l'énergie prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot p \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (VI, 29)$$

Autres formes pour l'équation de conservation de l'énergie

Un grand nombre de formes différentes existent pour l'équation de conservation de l'énergie. Nous nous proposons de démontrer deux d'entre elles, toutes les autres étant laissées en exercice pour le lecteur.

Variante 1.

Considérons à nouveau l'équation (VI,29) et faisons passer le terme $-\nabla \cdot p \mathbf{v}$ au premier membre. On peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (VI, 30)$$

Comme $h = e + p/\rho$, on peut encore écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (VI, 31)$$

Variante 2. Equation pour l'énergie interne

On va ici éliminer l'énergie cinétique de l'équation (VI,28). Pour cela, retranchons de l'équation de conservation de l'énergie, l'équation de bilan pour l'énergie cinétique (VI,12). On obtient ainsi :

$$\rho \frac{d}{dt} e = -\nabla \cdot p \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (VI, 32)$$

Les deux premiers termes du second membre s'associent pour donner :

$$-\nabla \cdot p \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = -p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (VI, 33)$$

Les deux termes suivants peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} v_j) - v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} \\ &= \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \end{aligned} \quad (VI, 34)$$

On voit ici apparaître le double produit scalaire du tenseur des contraintes visqueuses et du gradient de vitesse.

On peut écrire ce double produit scalaire sous la forme compacte : $\tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$

En définitive l'équation (VI,32) prend la forme :

$$\rho \frac{d}{dt} e = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (VI, 35)$$

Taux de variation de l'énergie interne par unité de volume	Puissance des forces de pression par unité de volume	Puissance des forces visqueuses par unité de volume	Flux de chaleur par unité de volume
---	--	---	---

La fonction de dissipation visqueuse

On désigne le double produit scalaire de l'expression (VI,35) sous le nom de fonction de dissipation visqueuse :

$$\hat{\Phi} = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \quad (VI, 36)$$

Cette expression est toujours positive ou nulle. Ainsi les forces visqueuses entraînent toujours un accroissement de l'énergie interne du fluide et donc de sa température. Si le fluide est newtonien, la fonction de dissipation visqueuse s'exprime simplement en fonction des gradients de vitesse. Les expressions de $\hat{\Phi}$ dans trois systèmes de coordonnées sont données au tableau 1.

VI.4. Equation de bilan pour l'entropie

En partant de l'équation de conservation pour l'énergie interne (VI,35) on peut établir une équation de bilan pour l'entropie. Il faut pour cela utiliser la relation de Gibbs :

$$Tds = de + pd(1/\rho) \quad (VI,37)$$

et l'associer à :

$$\rho \frac{de}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (VI,38)$$

On obtient ainsi :

$$\rho T \frac{ds}{dt} - \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (VI,39)$$

soit encore :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + p \left[\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{v} \right] \quad (VI,40)$$

Le terme entre crochets est identiquement nul car :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{d}{dt} \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] = 0 \quad (VI,41)$$

On a en définitive :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \quad (VI,42)$$

Cette équation exprime le bilan d'entropie pour le fluide en écoulement. On constate que la production d'entropie est associée :

(1) au flux de chaleur $\mathbf{q}$

(2) au travail par unité de temps des contraintes visqueuses (c'est-à-dire à la fonction de dissipation visqueuse $\hat{\Phi}$).

Ainsi, un fluide dénué de viscosité et dans lequel $\mathbf{q} = 0$ est tel que : $\rho T \frac{ds}{dt} = 0$.

L'entropie est constante sur chaque ligne de courant. Si de plus le fluide est initialement caractérisé par la même entropie s_o , son entropie reste constante et égale à s_o au cours du temps.

Tableau 1. La fonction de dissipation visqueuse pour les fluides newtoniens.Coordonnées rectangulaires x, y, z

$$\hat{\Phi} = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

Coordonnées cylindriques r, θ, z

$$\hat{\Phi} = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right\}$$

Coordonnées sphériques r, θ, ϕ

$$\hat{\Phi} = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2 \right\}$$

Tableau 4. Equations de Navier-Stokes

Le fluide est newtonien et la viscosité en volume est négligeable :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij}$$

Si la viscosité dynamique est constante, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

ou encore :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

Tableau 2. Equations de bilan, formes locales.

Equation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}$$

Equation de conservation de l'énergie cinétique :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Equation de conservation de l'énergie totale $e + (1/2)v^2 + \Phi$ (Φ représente le potentiel des forces de volume) :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot p \mathbf{v}$$

Equation de conservation de l'énergie totale $e + (1/2)v^2$:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot p \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Equation pour l'énergie interne :

$$\rho \frac{d}{dt} e = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$$

Equation pour l'enthalpie totale $h + (1/2)v^2 + \Phi$:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})$$

Equation pour l'enthalpie totale $h + (1/2)v^2$:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Equation pour l'enthalpie :

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \frac{dp}{dt}$$

Equation de bilan pour l'entropie :

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$$

Equation pour la température (en termes de T et c_v) :

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Equation pour la température (en termes de T et c_p) :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{dp}{dt}$$

Tableau 3. Equations de bilan, formes locales.

Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Equation de conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Equation de conservation de l'énergie totale $e + (1/2)v^2 + \Phi$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot p \mathbf{v}$$

Equation de conservation de l'énergie totale $e + (1/2)v^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \nabla \cdot p \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Equation pour l'énergie interne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho e + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} e = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$$

Equation pour l'enthalpie totale $h + (1/2)v^2 + \Phi$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})$$

Equation pour l'enthalpie totale $h + (1/2)v^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$$

Equation pour l'enthalpie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} h = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \frac{dp}{dt}$$

Equation pour l'entropie :

$$T \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho s + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} s \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$$

Equation pour la température (en termes de T et c_v) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho c_v T + \nabla \cdot \rho c_v T \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \rho T \frac{dc_v}{dt}$$

Equation pour la température (en termes de T et c_p) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho c_p T + \nabla \cdot \rho c_p T \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_\rho \frac{dp}{dt} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \rho T \frac{dc_p}{dt}$$

CHAPITRE VII

BILANS MACROSCOPIQUES ET APPROXIMATION UNIDIMENSIONNELLE

VII.1. Introduction

Nous avons établi dans les chapitres précédents les équations décrivant les écoulements de fluides. Ces équations ont été écrites sous forme différentielle locale et sous forme intégrale pour divers types de volumes de contrôle. Les équations obtenues sont non linéaires et elles dépendent des coordonnées d'espace et du temps. De ce fait, les solutions analytiques des équations du mouvement sont peu nombreuses et il faut utiliser des simplifications et des approximations pour obtenir des **résultats pratiques**.

Beaucoup de problèmes peuvent être simplifiés si l'on pose que :

- (1) l'écoulement est permanent,
- (2) les propriétés du fluide sont constantes dans chacune des sections où le fluide traverse la surface de contrôle (la surface qui limite le volume de contrôle).

La première hypothèse signifie que les propriétés du fluide ne varient pas dans le temps. Les écoulements rencontrés dans la réalité ne sont pas strictement stationnaires du fait des fluctuations turbulentes qui se manifestent dans la plupart des cas. On observe en effet, dans la plupart des applications technologiques, que toutes les propriétés du fluide fluctuent autour de leur valeur moyenne avec des amplitudes plus ou moins importantes. Très souvent cependant, le débit masse du fluide reste constant si la mesure est effectuée pendant une période suffisamment longue par rapport à la période des fluctuations turbulentes. Dans cette situation, on pourra considérer que l'écoulement est constitué par **mouvement stationnaire** autour duquel se superposent des **fluctuations turbulentes** de la vitesse et des autres variables.

L'hypothèse (2) constitue l'approximation unidimensionnelle. Elle signifie que dans les sections de passage du fluide à travers la surface de contrôle, les propriétés restent constantes ou changent graduellement sur la section. Les propriétés du fluide ne changent alors de façon appréciable que dans la **direction de l'écoulement**.

L'approximation unidimensionnelle permet l'analyse de nombreux problèmes pratiques et elle constitue un outil de base de l'ingénieur. Cette approximation est utilisée dans l'estimation de bilans macroscopiques ou dans l'étude d'écoulements internes. Nous allons tout d'abord chercher les conditions d'application de cette approximation. Nous établirons

ensuite des bilans macroscopiques de masse et d'énergie en nous plaçant d'abord dans le cas le plus général, puis dans le cas des écoulements unidimensionnels en entrée et en sortie. Les bilans macroscopiques de quantité de mouvement sont développés de façon séparée au chapitre IX. D'autre part, l'approximation unidimensionnelle est utilisée aux chapitres X et XIII pour analyser des problèmes de dynamique des gaz.

VII.2. Conditions d'application de l'approximation unidimensionnelle

La figure 1 représente schématiquement les profils de vitesse pour un fluide s'écoulant dans un conduit cylindrique de rayon R . Les profils représentés correspondent :

- (1) à un écoulement unidimensionnel de vitesse uniforme U_0 ,
- (2) à un écoulement laminaire du type Poiseuille (voir chapitre XIV),
- (3) à un écoulement turbulent pleinement développé (correspondant à un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^6).

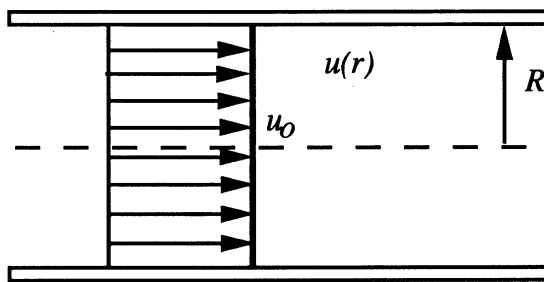
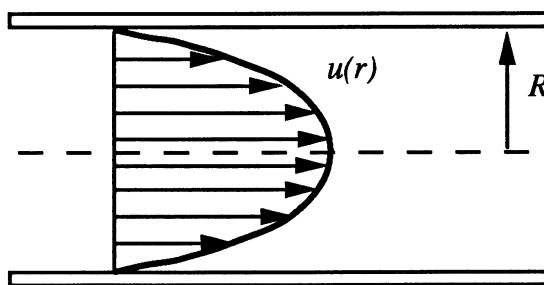
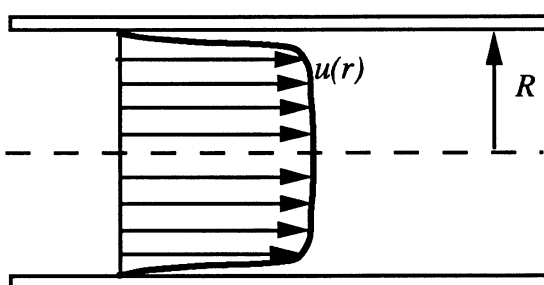


Figure 1. Trois types d'écoulements dans un conduit cylindrique de section circulaire.

(a) Écoulement unidimensionnel



(b) Écoulement laminaire pleinement développé
Le profil de vitesse est parabolique



(c) Écoulement turbulent développé
Le profil de vitesse peut être approximativement représenté par une loi de puissance

Dans le premier cas, le profil de vitesse est uniforme, $u = U_o$ pour $0 \leq r \leq R$.

Dans le deuxième cas, on peut montrer que le profil de vitesse prend une forme parabolique (voir chapitre XIV), $u(r) = U_{max}[1 - (\frac{r}{R})^2]$.

Dans le troisième cas, des expériences nombreuses montrent que le profil de vitesse peut être décrit par $u(r) = U_{max}(1 - \frac{r}{R})^{1/n}$ où l'exposant n est compris entre 6 et 10 et dépend du nombre de Reynolds. La loi de puissance représente bien la distribution de vitesse sauf au voisinage de la paroi.

Re	4.10^3	2.10^4	1.10^5	1.10^6	2.10^6	3.10^6
n	6	6.6	7	8.7	10	10

Alors que l'écoulement laminaire du type Poiseuille diffère notablement de l'écoulement uniforme, les profils de vitesse correspondant à des écoulements turbulents développés sont très proches du profil uniforme. De façon intuitive, on peut donc prévoir que des grandeurs globales comme le débit masse, le débit de quantité de mouvement ou le débit d'énergie cinétique seront convenablement estimés dans le cas d'écoulements turbulents développés à l'aide de **l'hypothèse unidimensionnelle**. Pour préciser cette idée, on va calculer ces débits pour les trois types d'écoulements envisagés plus haut. La comparaison sera effectuée en supposant que le débit masse est identique dans les trois cas.

Exemple

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dans un conduit de section circulaire de rayon R et on envisage

(1) un écoulement unidimensionnel de vitesse U_o

(2) un écoulement laminaire $u(r) = U_L(1 - r^2/R^2)$

(3) un écoulement turbulent correspondant à un nombre de Reynolds $Re = 10^5$. On prendra dans ce cas $u(r) = U_T(1 - r/R)^{1/n}$ avec $n = 7$. Pour effectuer la comparaison, on supposera que les trois écoulements assurent le même débit masse $\dot{m}$. Déterminer les valeurs de U_L et U_T pour les écoulements laminaire et turbulent en fonction de U_o , puis calculer les débits de quantité de mouvement et d'énergie cinétique et les rapports de ces débits.

Solution

Pour l'écoulement unidimensionnel (désigné par l'indice 0) le débit masse est :

$$\dot{m} = \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA = \int_0^R \rho u(2\pi r) dr = \rho \pi R^2 U_o$$

où $\mathbf{N}$ désigne la normale tournée dans la direction de l'écoulement.

Le débit de quantité de mouvement est :

$$F_o = \int_A \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) dA = \int_0^R \rho u^2(2\pi r) dr = \rho \pi R^2 U_o^2$$

Le débit d'énergie cinétique prend la forme :

$$G_o = \int \rho \frac{v^2}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) dA = \int \rho \frac{u^3}{2} (2\pi r) dr = \rho \frac{\pi R^2}{2} U_o^3$$

Si l'on considère à présent l'écoulement laminaire développé, on peut écrire :

$$\dot{m}_L = \int_0^R \rho U_L (1 - \frac{r^2}{R^2}) (2\pi r) dr = \rho \frac{\pi R^2}{2} U_L$$

$$F_L = \int_0^R \rho U_L^2 (1 - \frac{r^2}{R^2})^2 (2\pi r) dr = \rho \frac{\pi R^2}{3} U_L^2$$

et :

$$G_L = \int_0^R \rho \frac{U_L^3}{2} (1 - \frac{r^2}{R^2})^3 (2\pi r) dr = \rho \frac{\pi R^2}{8} U_L^3$$

Pour l'écoulement turbulent développé correspondant à une valeur $n = 7$, on a :

$$\dot{m}_T = \int_0^R \rho U_T (1 - \frac{r}{R})^{1/7} (2\pi r) dr = \rho \frac{49}{60} \pi R^2 U_T$$

$$F_T = \int_0^R \rho U_T^2 (1 - \frac{r}{R})^{2/7} 2\pi r dr = \rho \frac{49}{72} \pi R^2 U_T^2$$

et :

$$G_T = \int_0^R \rho \frac{U_T^3}{2} (1 - \frac{r}{R})^{3/7} 2\pi r dr = \rho \frac{49}{170} \pi R^2 U_T^3$$

Les débits masse des trois écoulements sont identiques si : $U_L = 2U_o$ et $U_T = (60/49)U_o$. Pour ces valeurs de U_L et U_T , on obtient :

$$\frac{F_L}{F_o} = \frac{4}{3}, \quad \frac{G_L}{G_o} = 2, \quad \frac{F_T}{F_o} = \frac{60^2}{(72)(49)} = 1.02 \quad \text{et} \quad \frac{G_T}{G_o} = 1.058$$

Ces rapports diffèrent notablement de l'unité dans le cas laminaire. Au contraire, pour le profil de vitesse turbulent, les débits de quantité de mouvement et d'énergie cinétique s'écartent d'environ 2 et 6% des valeurs obtenues pour l'écoulement uniforme.

On peut donc utiliser l'hypothèse unidimensionnelle dans le cas d'écoulements turbulents développés en conduits en adoptant, comme vitesse uniforme sur la section, la valeur qui permet de retrouver le débit masse exact de l'écoulement envisagé.

VII.3. Bilan macroscopique de masse

Les bilans macroscopiques peuvent être établis de façons diverses. On peut partir d'expressions écrites pour un volume matériel. On peut aussi prendre comme point de départ

les formes locales des équations de bilan. Ces deux méthodes vont être utilisées ici à titre d'illustration.

VII.3.1. Cas général

Considérons d'abord un volume matériel $V_m(t)$ limité par la surface matérielle $A_m(t)$. Soit $V_a(t)$ un volume arbitraire de surface $A_a(t)$ qui coïncide à l'instant t avec le volume matériel $V_m(t)$ (figure 2).

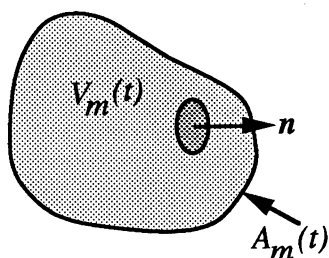


Figure 2. A l'instant t le volume de contrôle arbitraire $V_a(t)$ coïncide avec le volume de contrôle matériel $V_m(t)$.

Les théorèmes de transport pour ces deux volumes ont pour forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VII, 1)$$

et:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A_a(t)} f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VII, 2)$$

Comme les volumes V_m et V_a coïncident à l'instant t , les premiers termes apparaissant au second membre de ces deux expressions sont identiques et on peut combiner (VII, 1) et (VII, 2) et obtenir :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} f dV + \int_{A_a(t)} f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA \quad (VII, 3)$$

Ce corollaire des théorèmes de transport va nous permettre d'écrire des bilans macroscopiques pour des volumes arbitraires. Dans la plupart des applications, le volume $V_a(t)$ est fixe et l'expression (VII,3) devient dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_V f dV + \int_A f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VII, 4)$$

Posons à présent $f = \rho$. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse est conservée et

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0$$

L'expression (VII,3) donne dans cette situation :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \rho dV + \int_{A_a(t)} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (VII, 5)$$

Si le volume V_a est fixe, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (VII, 6)$$

Les expressions (VII, 5) et (VII, 6) constituent des bilans macroscopiques de masse. La signification physique de ces relations est facile à comprendre. Ainsi par exemple (VII, 6) exprime le fait que la variation de la masse contenue dans le volume fixe V résulte des débits de masse qui passent à travers la surface de contrôle A :

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{\text{entrant}} - \dot{m}_{\text{sortant}}$$

L'expression (VII, 6) peut aussi être établie à partir de l'équation de bilan de masse locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (VII, 7)$$

Cette équation est d'abord intégrée sur le volume fixe V :

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad (VII, 8)$$

La relation de Green-Ostrogradski conduit à :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (VII, 9)$$

et le signe $\partial/\partial t$ peut être placé devant l'intégrale de volume car V est fixe. On retrouve de cette façon l'expression (VII, 6).

VII.3.2. Bilan macroscopique pour un écoulement unidimensionnel en entrée et sortie

Considérons à présent le système de la figure 3. Le volume de contrôle fixe V est limité par la surface latérale Σ et par les surfaces d'entrée et de sortie A_1 et A_2 . Nous supposons que Σ est imperméable, c'est-à-dire que le débit masse au travers de cette surface est identiquement nul.

Il sera commode d'utiliser des normales $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ tournées dans la direction de l'écoulement, $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{n}_1$ sur A_1 et $\mathbf{N}_2 = \mathbf{n}_2$ sur A_2 .

Le bilan macroscopique de masse pour le volume de contrôle fixe V s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_{A_1 + A_2 + \Sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (VII, 10)$$

L'intégrale sur Σ est nulle et l'expression précédente peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_1 dA - \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_2 dA \quad (VII, 11)$$

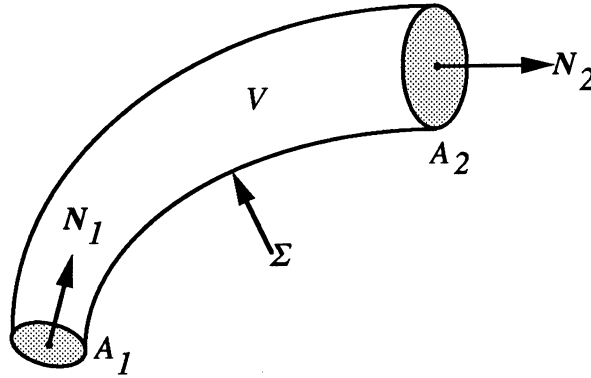


Figure 3.
Un système unidimensionnel
en entrée et sortie.

Si l'écoulement en entrée et sortie peut être considéré comme unidimensionnel $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_1 = v_1$ sur A_1 et $\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_2 = v_2$ sur A_2 . On peut alors écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 \quad (VII, 12)$$

Cette expression se simplifie encore si l'on suppose que l'écoulement est permanent. On a dans ce cas : $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \dot{m}$.

Si l'écoulement est unidimensionnel dans toutes les sections du système, $\dot{m} = \rho v A$ est constant dans tout le système.

VII.4. Bilan macroscopique d'énergie

VII.4.1. Bilan macroscopique dans le cas général

Pour simplifier l'exposé, nous établirons uniquement le bilan macroscopique d'énergie pour un volume fixe. Considérons à nouveau l'expression (VII,4) et posons $f = \rho(e + \frac{1}{2}v^2)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} (e + \frac{1}{2}v^2) dA \quad (VII, 13)$$

On sait d'autre part (voir chapitre VI) que :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV = \dot{W} + \dot{Q} \quad (VII, 14)$$

où $\dot{W}$ et $\dot{Q}$ représentent le travail et la chaleur transmis par unité de temps au système fluide contenu dans le volume V . On peut donc écrire pour le système de la figure 3 :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(e + \frac{1}{2}v^2) dV + \int_{A_1+A_2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (e + \frac{1}{2}v^2) dA = \dot{W} + \dot{Q} \quad (VII, 15)$$

Cette expression constitue déjà un bilan macroscopique, mais on préfère souvent utiliser une variante obtenue en séparant la puissance $\dot{W}$ en deux parties. On fait apparaître la puissance $\dot{W}'$ de toutes les forces à l'exception des forces de pression qui agissent en entrée et sortie du système et des forces volumiques qui agissent sur l'ensemble du système. Cette décomposition s'écrit sous la forme :

$$\dot{W} = \dot{W}' + \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{A_1+A_2} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (VII, 16)$$

Puissance de toutes les forces	Puissance des forces autres que les forces volumiques et les forces de pression en entrée et sortie	Puissance des forces volumiques	Puissance des forces de pression en entrée et sortie du système
--------------------------------------	--	------------------------------------	--

Supposons à présent que les forces volumiques dérivent d'un potentiel $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$. On peut écrire la puissance des forces volumiques sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV &= \int_V -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi dV \\ &= - \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \Phi dV + \int_V \Phi \nabla \cdot \rho \mathbf{v} dV \end{aligned} \quad (VII, 17)$$

La première intégrale de volume peut être transformée en intégrale de surface et on peut remplacer $\nabla \cdot \rho \mathbf{v}$ par $-\partial \rho / \partial t$ dans la seconde intégrale. On obtient ainsi :

$$\int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV = - \int_{A_1+A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Phi dA - \int_V \Phi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (VII, 18)$$

En portant (VII, 16) et (VII, 18) dans la relation (VII, 15), on obtient facilement :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) dV + \int_{A_1+A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) dA = \dot{W}' + \dot{Q} \quad (VII, 19)$$

où $h = e + p/\rho$ est l'enthalpie par unité de masse de fluide. Pour obtenir (VII, 19), nous avons supposé que $\partial \Phi / \partial t = 0$, une hypothèse vérifiée dans la majorité des cas pratiques.

L'expression (VII, 19) constitue le bilan macroscopique d'énergie recherché. On peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) dV &= \int_{A_1} \rho \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N}_1 \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) dA \\ &\quad - \int_{A_2} \rho \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{N}_2 \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) dA + \dot{W}' + \dot{Q} \end{aligned} \quad (VII, 20)$$

Cette expression indique que la variation de l'énergie totale est produite par les débits entrants et sortants d'enthalpie totale, par la puissance $\dot{W}'$ des forces autres que les forces de pression (en entrée, sortie) et les forces volumiques et par la chaleur $\dot{Q}$ transmise au système considéré.

VII.4.2. Bilan macroscopique d'énergie pour un système unidimensionnel en entrée et sortie

Si le système considéré est unidimensionnel en entrée et sortie, l'expression (VII,20) devient :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) dV = -\Delta [\dot{m} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right)] + \dot{W}' + \dot{Q} \quad (VII, 21)$$

$$\dot{m} = \rho v A$$

Lorsque l'écoulement est permanent, on retrouve le premier principe écrit pour un système ouvert :

$$\Delta [\dot{m} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right)] = \dot{W}' + \dot{Q} \quad (VII, 22)$$

On peut aussi considérer une unité de masse et écrire :

$$\Delta \left(h + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) = \dot{w}' + q \quad (VII, 23)$$

CHAPITRE VIII

LE THEOREME DE BERNOULLI ET SES APPLICATIONS

VIII.1. Introduction

Lorsque certaines conditions sont réunies, on peut écrire une intégrale première des équations de Navier-Stokes. Ce résultat constitue le théorème de Bernoulli. Ce théorème est applicable à des écoulements d'un fluide idéal (dénué de viscosité), dont la masse volumique est constante ou dont la pression ne dépend que de la masse volumique (fluide barotrope) et qui est soumis à des forces de volume qui dérivent d'un potentiel. Ces conditions sont très souvent vérifiées en pratique. Pour cette raison, le théorème de Bernoulli est utilisable dans un grand nombre de situations. Même lorsque les contraintes visqueuses ne peuvent être négligées, on peut généraliser l'intégrale de Bernoulli et utiliser une expression qui s'apparente à un bilan d'énergie mécanique.

On peut, par ce biais, tenir compte des pertes de charge par frottement qui apparaissent dans les circuits hydrauliques. On peut aussi décrire les transferts d'énergie associés à des machines génératrices ou réceptrices (turbines ou pompes) placées sur la canalisation.

Les diverses formes du théorème de Bernoulli sont établies à la section 2. Des applications classiques sont traitées à la section 3. L'extension du théorème de Bernoulli à des configurations plus complexes est effectuée à la section 4. Un développement plus rigoureux de ce théorème généralisé est présenté à l'annexe A. Le premier principe de la thermodynamique et le théorème de Bernoulli généralisé sont comparés à la section 5. L'analyse des pertes de charge dans des canalisations ou des singularités fait l'objet de la section 6.

La détermination pratique des pertes de charge dans les conduits rugueux et dans les singularités est brièvement décrite dans cette dernière section.

VIII.2. Expressions du théorème de Bernoulli

VIII.2.1. Fluides incompressibles

Nous considérons ici l'écoulement d'un fluide **dénué de viscosité** et nous supposons d'autre part que les **forces volumiques dérivent d'un potentiel** :

$$\tau_{ij} = 0 \quad (VIII, 1)$$

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi \quad (VIII, 2)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans cette situation :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (VIII, 3)$$

ou encore :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla\Phi \quad (VIII, 4)$$

On peut maintenant utiliser l'identité vectorielle :

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \quad (VIII, 5)$$

pour écrire l'équation (VIII,4) sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi \quad (VIII, 6)$$

Si le fluide est **incompressible**, le premier terme du second membre peut s'écrire :

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (VIII, 7)$$

et l'équation (VIII,6) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0 \quad (VIII, 8)$$

soit encore en introduisant le vecteur tourbillon $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0 \quad (VIII, 9)$$

Si l'écoulement est **permanent**, l'équation précédente s'écrit :

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0 \quad (VIII, 10)$$

On peut projeter cette expression sur la ligne de courant locale. Désignons par $\mathbf{s}$ le vecteur unitaire suivant cette direction et par $\partial/\partial s$ la dérivée suivant cette direction :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \nabla \quad (VIII, 11)$$

La projection de (VIII,10) suivant la direction $\mathbf{s}$ donne :

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) + \mathbf{s} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (VIII, 12)$$

et comme $\mathbf{s}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires : $\mathbf{s} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0$, ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) = 0 \quad (VIII, 13)$$

Le long d'un filet fluide (figure 1), la quantité entre parenthèses est une constante.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi = \text{constante sur une ligne de courant} \quad (VIII, 14)$$

Les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur pour laquelle $\Phi = gz$ où z est la cote verticale du point. Dans ce cas :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante sur une ligne de courant} \quad (VIII, 15)$$

Les conditions qui nous ont permis d'obtenir cette expression sont rassemblées ci-dessous :

- (1) le fluide est dénué de viscosité, $\boldsymbol{\tau} = 0$
- (2) les forces volumiques dérivent d'un potentiel, $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$
- (3) le fluide est incompressible, $\rho = \text{constante}$
- (4) l'écoulement est permanent.

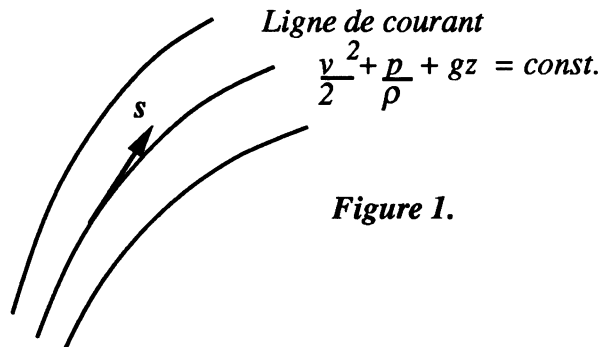
En général la constante c est associée à chaque ligne de courant. La valeur de $c = v^2/2 + p/\rho + gz$ change avec la ligne de courant.

La variation de cette constante dans la direction normale à la ligne de courant est obtenue en projetant (VIII,10) suivant la normale $\mathbf{n}$ locale, on a :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (VIII, 16)$$

soit :

$$\frac{\partial c}{\partial n} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (VIII, 17)$$



VIII.2.2. Écoulements irrotationnels d'un fluide incompressible

Une situation particulière très importante est celle des **écoulements irrotationnels**. Dans cette situation $\omega = \nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$ et la constante de Bernoulli est la même pour toutes les lignes de courant. On peut écrire dans ce cas :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = c \text{ dans tout l'écoulement} \quad (VIII, 18)$$

Lorsque l'écoulement est irrotationnel et instationnaire, on peut encore obtenir une expression simple. Pour cela nous repartons de l'expression (VIII,9) écrite en tenant compte de $\omega = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) = 0 \quad (VIII, 19)$$

Comme l'écoulement est irrotationnel, la vitesse dérive d'un potentiel : $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, et (VIII,19) s'écrit :

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) = 0 \quad (VIII, 20)$$

La quantité entre parenthèses est une fonction du temps uniquement :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi = f(t) \quad (VIII, 21)$$

pour l'ensemble du fluide.

Pour simplifier l'expression précédente, la fonction $f(t)$ peut être incorporée au potentiel φ . Pour cela posons :

$$\varphi_1 = \varphi - \int f(t) dt \quad (VIII, 22)$$

On peut alors écrire :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi = 0 \quad (VIII, 23)$$

Les champs de vitesse correspondant aux potentiels φ et φ_1 sont les mêmes car : $\nabla \varphi = \nabla \varphi_1$.

Les conditions d'application de l'expression (VIII,23) sont en définitive les suivantes :

- (1) le fluide est dénué de viscosité, $\tau = 0$
- (2) les forces volumiques dérivent d'un potentiel, $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$
- (3) le fluide est incompressible, $\rho = \text{constante}$
- (4) l'écoulement est irrotationnel.

L'expression (VIII,23) constitue le **théorème de Bernoulli instationnaire**. Ce théorème a de nombreuses applications en hydrodynamique (théorie de la houle, évaluation des forces et des moments hydrodynamiques, problèmes d'instabilité, écoulements hydrauliques

transitoires etc.). Ces problèmes sont traités dans les livres de Lamb 1945, Le Méhauté 1976, Newman 1977, Drazin et Reid 1981.

VIII.2.3. Fluides barotropes

On peut obtenir des expressions du théorème de Bernoulli dans des situations dans lesquelles le fluide n'est pas incompressible.

Nous considérons ici le cas d'écoulements de fluides barotropes, c'est-à-dire des évolutions dans lesquelles la pression du fluide ne dépend que de la densité : $p = p(\rho)$.

On a une relation de ce type si, par exemple on considère un gaz parfait en évolution isotherme :

$$p = \rho r T, \quad T = \text{constante}$$

ou encore si le gaz parfait subit une transformation isentropique :

$$p = \rho^\gamma e^{s/c_v}, \quad s = \text{constante}$$

Dans ce type de situation :

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left(\int \frac{dp}{\rho} \right) \quad (VIII, 24)$$

on peut alors remplacer l'expression (VIII,6) par :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 0 \quad (VIII, 25)$$

puis obtenir les expressions suivantes :

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = \text{constante sur la ligne de courant} \quad (VIII, 26)$$

Conditions

- (1) le fluide est dénué de viscosité
- (2) les forces volumiques dérivent d'un potentiel
- (3) le fluide est barotrope, $p = p(\rho)$
- (4) l'écoulement est permanent.

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = \text{constante dans tout le fluide} \quad (VIII, 27)$$

Conditions

- (1) le fluide est dénué de viscosité
- (2) les forces volumiques dérivent d'un potentiel
- (3) le fluide est barotrope, $p = p(\rho)$
- (4) l'écoulement est permanent.
- (5) l'écoulement est irrotationnel, $\omega = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Phi = \text{constante dans tout le fluide} \quad (VIII, 28)$$

Conditions

- (1) le fluide est dénué de viscosité
- (2) les forces volumiques dérivent d'un potentiel
- (3) le fluide est barotrope, $p = p(\rho)$
- (4) l'écoulement est irrotationnel, $\omega = 0$

VIII.3. Applications du théorème de Bernoulli

Dans les applications qui vont suivre, nous considérons des écoulements **permanents** de fluides **incompressibles**.

VIII.3.1. Ecoulement par des orifices

Ecoulement d'un liquide sous l'influence de la pesanteur.

Considérons d'abord un liquide contenu dans un récipient et s'écoulant par un orifice de section s (figure 2). Nous supposons d'autre part que la pression qui règne à la surface du liquide est égale à la pression qui règne à proximité du jet libre. Soit p_o cette pression ambiante. Appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre A et une section B du jet libre. La section B est prise à une distance suffisante de l'orifice pour que l'on puisse considérer que l'écoulement s'effectue par tranches et que la pression qui règne dans cette section est p_o . Le long d'une ligne de courant issue de la surface libre et rejoignant l'orifice, on peut écrire :

$$z_A + \frac{p_o}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_o}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (VIII, 29)$$

Si le réservoir présente une section importante par rapport à la surface de l'orifice, on peut

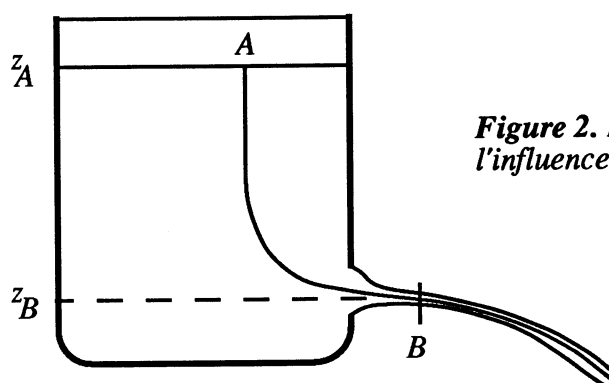


Figure 2. *Ecoulement d'un liquide sous l'influence de la pesanteur.*

négliger $v_A^2/2g$ et, en posant $z_A - z_B = h$, on obtient facilement :

$$v_B = (2gh)^{1/2} \quad (\text{VIII}, 30)$$

Cette expression simple a été obtenue pour la première fois par Toricelli.

Application. L'orifice se trouve à 10 m au-dessous de la surface libre. Calculer la vitesse v_B .

Ici, $h = 10 \text{ m}$ et $v_B = (2 \times 9.81 \times 10)^{1/2} = 14.0 \text{ m/s}$.

L'expression que nous venons d'établir montre que la vitesse de la particule fluide est la même que celle d'une particule qui serait tombée en chute libre d'une hauteur h . En réalité, la vitesse du jet est toujours inférieure à la valeur calculée d'après (VIII,30). Cette différence provient des dissipations d'énergie par frottement. On utilise en pratique :

$$v_B = k(2gh)^{1/2} \quad (\text{VIII}, 31)$$

où $k < 1$ représente un facteur correctif déterminé expérimentalement.

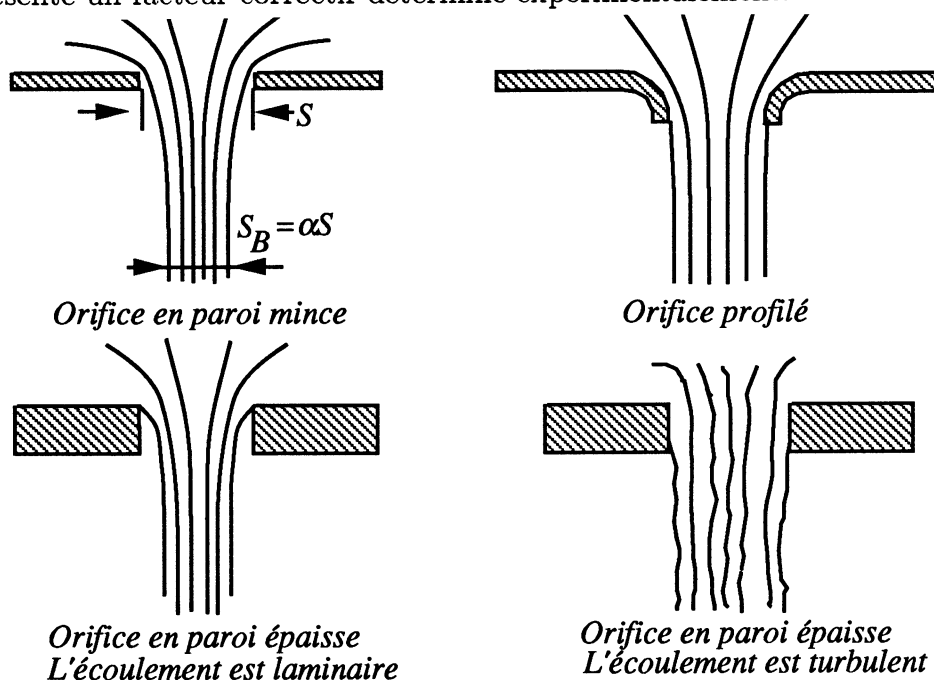


Figure 3. *Types d'écoulements produits par des orifices.*

D'autre part, l'expérience montre que la section du jet, dans la région où l'écoulement redevient parallèle, n'est pas identique à celle de l'orifice. Pour un orifice dans une paroi mince, (figure 3) cette section est de l'ordre de 0.61 fois celle du trou. Ainsi au point B , la section du jet est :

$$S_B = \alpha S \quad \text{où} \quad \alpha \sim 0.61 \quad S_B \text{ est appelée section contractée}$$

Dans ces conditions, le débit volume de l'orifice est donné par :

$$q_v = S_B v_B = \alpha k S (2gh)^{1/2} \quad (\text{VIII}, 32)$$

Le produit $C_d = \alpha k$ est le coefficient de débit de l'orifice et le débit volume se met sous la forme finale :

$$q_v = C_d S (2gh)^{1/2} \quad (\text{VIII}, 33)$$

VIII.3.2. Ecoulement à partir d'un réservoir en surpression

Nous considérons à présent un fluide s'écoulant à partir d'un réservoir dans lequel règne une pression p_1 (figure 4). A l'extérieur du réservoir, la pression ambiante est p_0 . Pour une ligne de courant qui ne subit aucune dénivellation $z_A = z_B$, on peut écrire :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (\text{VIII}, 34)$$

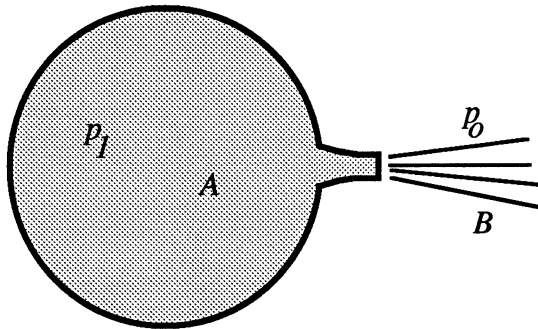


Figure 4.
Ecoulement à partir d'un réservoir pressurisé.

Si le réservoir est suffisamment grand, la vitesse v_A est relativement faible et on peut négliger $v_A^2/2g$. Dans ces conditions :

$$v_B = [2(p_1 - p_0)/\rho]^{1/2} \quad (\text{VIII}, 35)$$

Application. Un réservoir contient de l'air à 15°C sous une pression $p_1 = 1.01 \text{ atm}$. La pression ambiante est $p_0 = 1 \text{ atm}$. La masse spécifique de l'air pourra être prise égale à $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ (Note : $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$).

D'après l'expression établie plus haut : $v_B = [(2)(0.01)(101325)/1.225]^{1/2} = 40.7 \text{ m/s}$.

La formule (VIII,35) peut être appliquée à des écoulements de gaz si les effets associés à la compressibilité restent faibles. Il en est ainsi lorsque la vitesse de l'écoulement reste très inférieure à la célérité sonore.

Dans l'exemple précédent, la célérité sonore est donnée par :

$$c = (\gamma p_0 / \rho)^{1/2} = (1.4 \times 101325 / 1.225)^{1/2} = 340.3 \text{ m/s}$$

Cette célérité est neuf fois plus grande que la vitesse v_B , le nombre de Mach d'éjection est $M_B = v_B / c = 0.12$.

Nous montrerons plus loin (chapitre X) que la variation relative de densité dans un écoulement isentropique est de l'ordre de grandeur du carré du nombre de Mach. Pour les conditions envisagées ici, $\Delta\rho/\rho \sim 0.01$, une variation relative négligeable, et l'écoulement peut être considéré comme incompressible.

VIII.3.3. Pression sur un obstacle placé dans un écoulement uniforme

Considérons maintenant un obstacle placé dans un écoulement uniforme d'un fluide incompressible et désignons par v_∞ la vitesse uniforme à l'infini amont (très loin en amont de l'obstacle) et par p_∞ la pression à l'infini (figure 5).

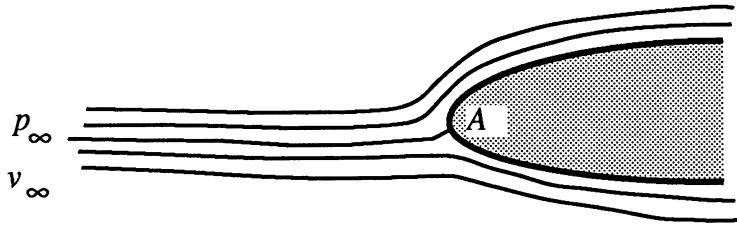


Figure 5. La vitesse s'annule au point d'arrêt.

A proximité de l'obstacle le courant se divise pour contourner l'obstacle. Il existe une ligne de courant qui sépare les particules fluides qui passent de part et d'autre de l'obstacle. Au point A, où cette ligne rencontre l'obstacle, la vitesse s'annule. Le point A est appelé **point d'arrêt** ou **point de stagnation**.

Sur la ligne de courant qui passe par le point d'arrêt, on peut écrire :

$$p_A + \rho g z_A = p_\infty + \rho g z_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \quad (\text{VIII}, 36)$$

Si la dénivellation $z_\infty - z_A$ est faible ou si les forces de pesanteur sont négligeables, on peut écrire :

$$p_A = p_\infty + \rho \frac{v_\infty^2}{2} \quad (\text{VIII}, 37)$$

L'élévation de pression $p_A - p_\infty = \rho v_\infty^2 / 2$ est communément appelée **surpression d'arrêt** ou **pression dynamique**. La pression p_A est la **pression d'arrêt**. L'expression (VIII,37) est applicable aux écoulements incompressibles. Lorsque les effets de compressibilité sont importants, l'évaluation de la pression d'arrêt doit être effectuée à l'aide des résultats du chapitre X.

Application. On considère un écoulement d'eau à la vitesse $v_\infty = 20 \text{ m/s}$. Déterminer la pression d'arrêt pour cet écoulement.

On a :

$$\begin{aligned} p_A - p_\infty &= \rho v_\infty^2 / 2 = (10^3) 400 / 2 \\ &= 2.10^5 \text{ Pa} = 2 \text{ Bar} \end{aligned}$$

Dans le cas de l'air, on aurait : $p_A - p_\infty = (1.225) 400 / 2 = 245 \text{ Pa}$

Cette surpression est beaucoup plus faible dans cette situation, car l'air est environ 10^3 fois plus léger que l'eau. Notons une fois de plus que l'application de l'expression (VIII,37) à des gaz n'est strictement justifiée que si les effets de compressibilité sont négligeables, c'est-à-dire si le nombre de Mach reste petit devant 1.

VIII.3.4. Mesures de pressions dans un fluide. Tube de Pitot

Considérons maintenant un obstacle muni d'un orifice ou point d'arrêt (figure 6). La pression qui règne en ce point se transmet par un conduit mince à un capteur de pression (par exemple un tube manométrique). On peut ainsi mesurer la pression d'arrêt p_A . Les sondes qui fonctionnent suivant ce principe sont appelées **tubes de Pitot**.



Figure 6. Le tube de Pitot permet la mesure de la pression d'arrêt.

Ce type de sonde est principalement utilisé pour la mesure de la vitesse locale du fluide. Il faut, pour obtenir la valeur de cette vitesse, mesurer la **pression statique** p_0 au même point. Si le fluide est incompressible, la vitesse est donnée par :

$$v = \left[\frac{2(p_A - p_0)}{\rho} \right]^{1/2} \quad (\text{VIII}, 38)$$

La pression statique p_0 est généralement mesurée à l'aide d'une sonde dont l'ouverture est adjacente à l'écoulement local (figure 7). Après insertion de la sonde dans l'écoulement, il reste dans l'orifice une masse de fluide au repos (ou fluide mort). La pression qui règne dans cette région est constante et égale à la pression qui règne dans le fluide en écoulement.

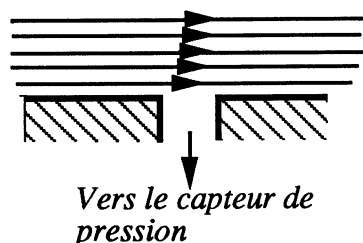


Figure 7. La pression statique est mesurée à l'aide d'une orifice adjacent à l'écoulement.

Très souvent, les mesures de pression d'arrêt et de pression statique sont effectuées par une seule sonde appelée **sonde de Prandtl**. Cette sonde comporte un orifice au point d'arrêt permettant la mesure de la pression d'arrêt et plusieurs orifices latéraux pour la mesure de la pression statique. L'orifice d'arrêt et les orifices latéraux sont raccordés à des capteurs de pression absolue ou à un capteur de pression différentiel (figure 8).

L'utilisation de plusieurs trous latéraux rend la sonde peu sensible à de faibles inclinaisons par rapport à la direction de l'écoulement.

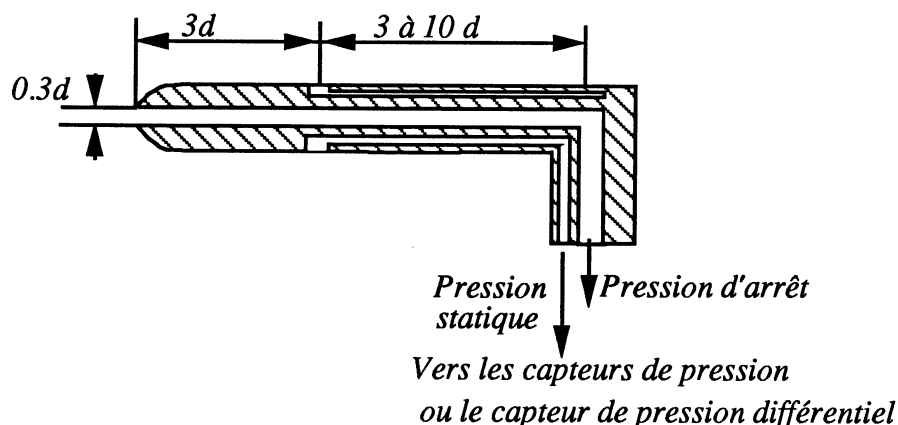


Figure 8. Sonde de Prandtl.

VIII.3.5. Ecoulement dans un Venturi et application à la mesure des débits

Considérons maintenant un fluide incompressible s'écoulant dans un tube d'axe horizontal dont la section varie de façon continue (figure 9).

Le théorème de Bernoulli appliqué à cette situation donne :

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constante} \quad (\text{VIII}, 39)$$

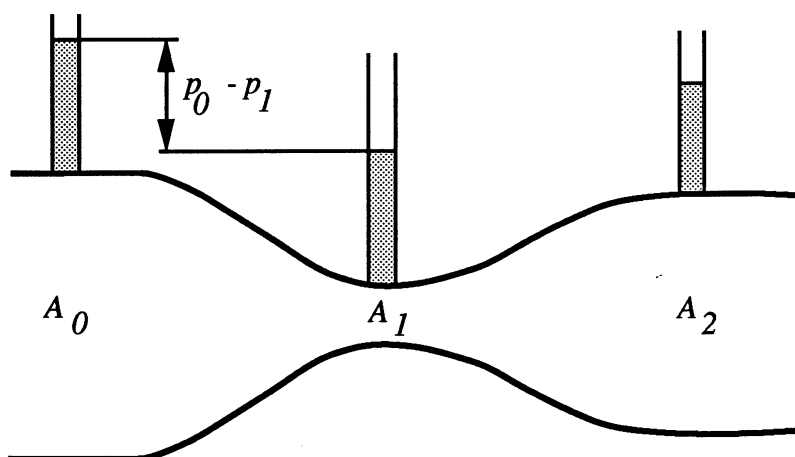


Figure 9. *Ecoulement dans un Venturi. La mesure de la différence de pression entre la section d'entrée et la section du col permet la détermination du débit passant dans le canal.*

L'équation de continuité s'écrit d'autre part :

$$Av = q_v = \text{constante} \quad (\text{VIII}, 40)$$

Ainsi, lorsque la section du conduit décroît, la vitesse augmente d'après (VIII,40) et la pression diminue d'après (VIII,39). La pression est donc plus faible aux endroits où la section du conduit est plus réduite.

C'est le phénomène de Venturi utilisé, par exemple, pour la réalisation de trompes aspirantes. Il suffit en effet de relier le récipient à vider, à la partie rétrécie d'un Venturi. L'eau qui s'écoule dans le Venturi permet d'abaisser la pression dans le réservoir à quelques mm de mercure. Le gaz est entraîné par le liquide sous forme de bulles.

On peut aussi utiliser le principe du Venturi pour la mesure des débits. En effet, considérons la section d'entrée (indice 0) et la section rétrécie (indice 1) du Venturi. On peut écrire :

$$p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} = p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} \quad (\text{VIII}, 41)$$

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 \quad (\text{VIII}, 42)$$

puis déduire de ces deux relations :

$$p_0 - p_1 = \rho \left(\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \right) \quad (\text{VIII}, 43)$$

et :

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{A_1}{A_0} \quad (\text{VIII}, 44)$$

On tire facilement :

$$v_1 = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \left[\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho} \right]^{1/2} \quad (\text{VIII}, 45)$$

où $\beta = A_1/A_0$ désigne le rapport des sections.

On obtient le débit masse à l'aide de :

$$\dot{m} = \rho A_1 v_1 = \frac{A_1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} [2\rho(p_0 - p_1)]^{1/2} \quad (VIII, 46)$$

En pratique, on remplace souvent le Venturi par un diaphragme calibré (figure 10). Ce dispositif produit une perte de charge et on peut utiliser une expression analogue à celle du Venturi, mais dans laquelle il faut introduire un coefficient de débit c empirique. Si p_0 et p_1 désignent respectivement les pressions mesurées en amont et en aval du diaphragme, le débit masse est donné par :

$$\dot{m} = \frac{c A_1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} [2\rho(p_0 - p_1)]^{1/2} \quad (VIII, 47)$$

Le coefficient c dépend de la forme du diaphragme, des positions de mesure de la pression et du rapport β . Sa valeur est généralement donnée par le constructeur du diaphragme.

On utilise aussi très souvent des débitmètres à section variable dont le type est le rotamètre (figure 11). Dans ce dispositif, la chute de pression est constante et le débit est fonction de la section de passage du fluide. Le rotamètre se compose d'un tube transparent vertical dont la section augmente de façon continue. Un flotteur est placé dans cette section et c'est la position de cet élément qui permet la détermination du débit. Pour accroître la stabilité du flotteur, on le munit de rainures inclinées par rapport à l'axe vertical et le fluide en écoulement lui donne un mouvement de rotation autour de cet axe, d'où le nom de rotamètre. Pour chaque valeur du débit, le flotteur prend une position d'équilibre dans le tube. Si A_f représente la section maximale du flotteur, $-\Delta p$ la chute de pression entre l'amont et l'aval de la section, V_f le volume du flotteur et ρ_f la densité du flotteur, on peut écrire lorsque le flotteur est en équilibre :

$$(-\Delta p)A_f = (\rho_f - \rho)gV_f \quad (VIII, 48)$$

Soit $a = A - A_f$ la section de passage du fluide, le débit masse est donné par une expression semblable à celles établies plus haut :

$$\dot{m} = \frac{ca}{[1 - (a/A)^2]^{1/2}} [(2\rho(-\Delta p))]^{1/2} \quad (VIII, 49)$$

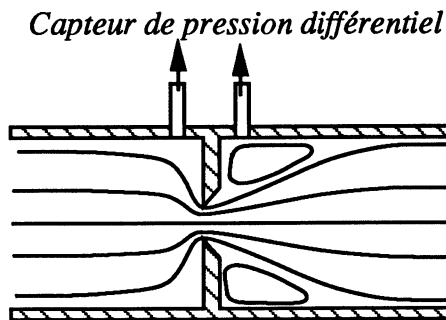


Figure 10. Diaphragme calibré pour la mesure du débit.

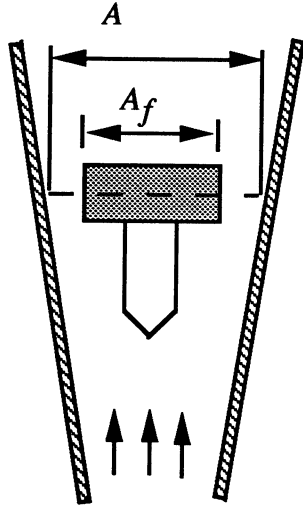


Figure 11. Schéma de principe des rotamètres. Un flotteur est placé dans un tube faiblement divergent. La position prise par le flotteur lorsque le fluide s'écoule permet la détermination du débit.

soit encore :

$$\dot{m} = \frac{ca}{[1 - (a/A)^2]^{1/2}} \left[\frac{2gV_f(\rho_f - \rho)}{A_f} \right]^{1/2} \quad (VIII, 50)$$

Ainsi $\dot{m}$ est une fonction de a et de a/A , donc de la position du flotteur dans le tube. On peut graduer le tube pour permettre une lecture directe du débit.

VIII.3.6. Diffuseurs de turbines hydrauliques

Un diffuseur est un élément de conduit dont la section augmente de façon progressive. En général, le diffuseur débouche dans un canal de fuite présentant une section importante. Considérons le diffuseur de la figure 12 et appliquons le théorème de Bernoulli entre la section d'entrée A et la section d'échappement B :

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} \quad (VIII, 51)$$

Si la section de sortie est suffisamment large, on peut négliger $v_B^2/2g$ et on peut écrire :

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\rho g} \quad (VIII, 52)$$

On peut supposer, en première approximation, que $z_B \simeq z_0$ et $p_B = p_0$ et, dans ces conditions :

$$p_A = p_0 - \rho \frac{v_A^2}{2} - \rho gh \quad (VIII, 53)$$

où

$$h = z_A - z_0$$

Cette expression montre clairement que la pression à l'entrée du diffuseur est inférieure à la pression atmosphérique d'une quantité $\rho v_A^2/2 + \rho gh$.

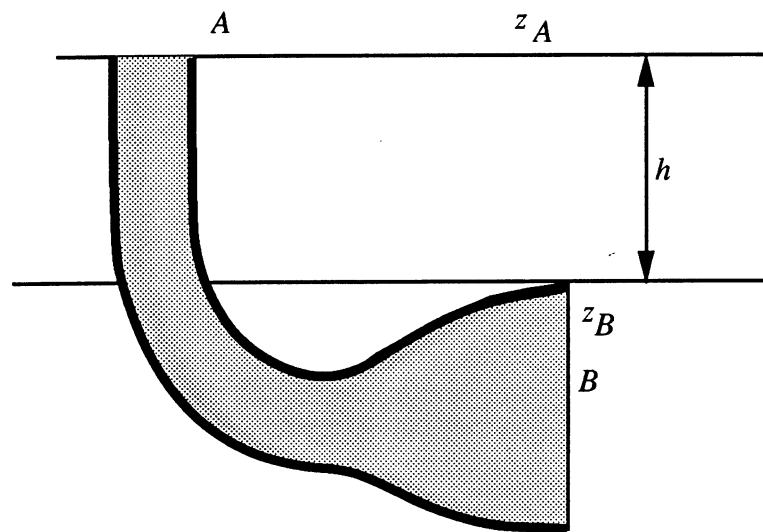


Figure 12. Diffuseur pour turbine hydraulique.

Le diffuseur est généralement placé en aval d'une turbine. Si l'échappement de la turbine s'effectuait à l'air libre et à une hauteur h au-dessus du canal de fuite, on perdrait toute l'énergie cinétique contenue dans l'eau au point A et l'énergie potentielle correspondant à la chute de hauteur h .

Le diffuseur permet d'éviter ces deux pertes et d'obtenir une contrepression en aval de la turbine inférieure à la pression atmosphérique. Pour un même débit, on peut ainsi augmenter l'énergie produite par la turbine.

Pour que le diffuseur fonctionne correctement, il faut que sa section augmente de façon très progressive pour éviter un décollement à la paroi. Tout décollement pariétal empêche en effet la récupération des énergies cinétique et potentielle du fluide.

Il faut, d'autre part, garder la continuité à l'écoulement et empêcher toute cavitation. Pour cela, la pression doit rester partout supérieure à la pression de vapeur saturante à la température considérée.

VIII.4. Analyse de systèmes de canalisations

VIII.4.1. Extensions du théorème de Bernoulli à l'analyse des écoulements dans les canalisations

L'un des problèmes couramment rencontrés par les ingénieurs est la conception d'un réseau fluide comprenant des canalisations, des générateurs ou des récepteurs d'énergie, des réservoirs, des valves etc. Pour fixer les idées, nous avons représenté un système typique à la figure 13. Le concepteur doit déterminer le diamètre des canalisations et les puissances à fournir aux pompes ou celles que l'on peut obtenir des turbines. Pour analyser de tels

systèmes, on utilise le plus souvent un bilan macroscopique pour l'énergie mécanique. Une démonstration rigoureuse de cette relation est donnée en annexe A. Pour simplifier notre présentation, nous allons plutôt obtenir cette relation par plusieurs extensions successives du théorème de Bernoulli.

Considérons d'abord un fluide incompressible en écoulement stationnaire dans une canalisation (figure 14). En l'absence de toute force de viscosité, on peut écrire le théorème de Bernoulli sur chaque ligne de courant.

La constante de Bernoulli $p/\rho + v^2 + gz$ n'est pas en général la même pour les filets fluides qui composent l'écoulement. On peut cependant considérer un tube de courant élémentaire et écrire l'identité suivante :

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right)_1 (\rho v \cdot N dA)_1 = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right)_2 (\rho v \cdot N dA)_2 \quad (VIII, 54)$$

où la normale N est orientée dans la direction de l'écoulement.

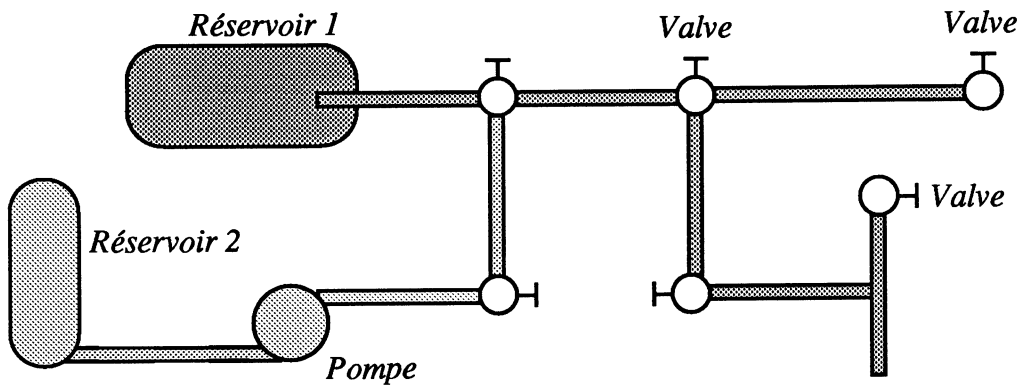


Figure 13. Système de canalisations.

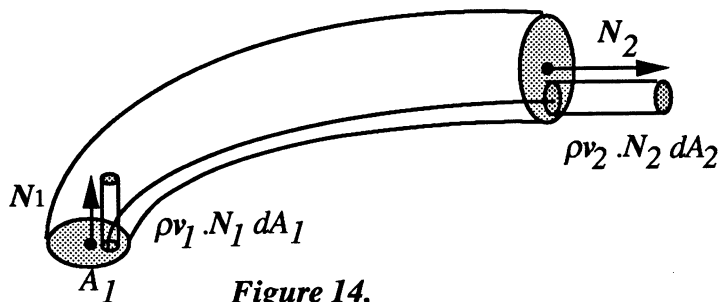


Figure 14.
Écoulement dans une canalisation.

Une intégration sur la section du conduit donne :

$$\int_{A_1} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) \rho v \cdot N dA = \int_{A_2} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) \rho v \cdot N dA \quad (VIII, 55)$$

Comme, d'autre part, le débit masse passant dans les deux sections A_1 et A_2 est conservé :

$$\int_{A_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA \quad (VIII, 56)$$

En divisant la relation (VIII,55) par l'expression (VIII,56), on peut écrire :

$$\left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right)_1 = \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right)_2 \quad (VIII, 57)$$

où $\langle p \rangle$, $\langle v^2 \rangle$ et $\langle z \rangle$ désignent respectivement les moyennes pondérées par le débit masse de la pression, du carré de la vitesse et de la cote :

$$\langle v^2 \rangle = \int_A v^2 \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA / \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA$$

$$\langle p \rangle = \int_A p \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA / \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA$$

$$\langle z \rangle = \int_A z \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA / \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dA$$

Dans le cas général, la pression, la vitesse et la cote varient dans chaque section et il faut utiliser les moyennes de ces quantités pour appliquer la relation (VIII,57).

Cependant, dans un grand nombre de situations pratiques, la canalisation présente une section relativement réduite et les pression, vitesse et position varient faiblement dans chaque section. Cette situation est schématisée par la figure 15. On peut, dans ce cas, remplacer les moyennes des variables par les valeurs prises au centre des sections considérées. On a alors :

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_1 = \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)_2 \quad (VIII, 58)$$

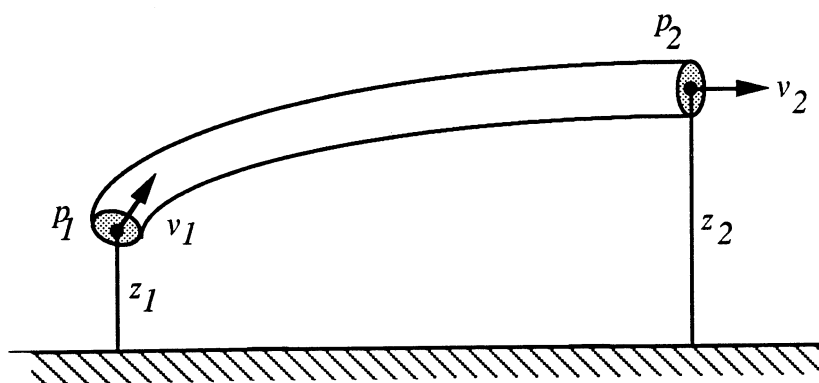


Figure 15. Une canalisation mince. L'écoulement est unidimensionnel dans chaque section.

Cette relation ne représente qu'approximativement l'écoulement réel dans la conduite. Une amélioration possible s'obtient en introduisant des coefficients de correction pour tenir compte des variations de la pression et de la vitesse dans les sections d'entrée et de sortie du conduit.

En pratique, il faut tenir compte des dissipations d'énergie par les forces visqueuses et la quantité $\langle p \rangle / \rho + \langle v^2 \rangle / 2 + g \langle z \rangle$ ne reste pas constante le long du conduit. La différence :

$$\left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right)_1 - \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right)_2 = e_f \quad (\text{VIII}, 59)$$

représente l'énergie dissipée par unité de masse entre les sections 1 et 2.

On peut encore écrire l'expression (VIII,59) sous la forme :

$$\left(\frac{\langle p \rangle}{\rho g} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2g} + \langle z \rangle \right)_1 - \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho g} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2g} + \langle z \rangle \right)_2 = \frac{e_f}{g} = h_f \quad (\text{VIII}, 60)$$

La quantité $h_f = e_f/g$ représente la **perte de charge**. h_f est une énergie dissipée par unité de poids et cette quantité a la dimension d'une hauteur.

Très souvent, les conduits comportent des coudes, des raccords, des élargissements ou des contractions soudaines, et ces éléments localisés introduisent des pertes de charge supplémentaires ou **pertes de charge singulières**.

Dans les calculs, il est souvent commode de distinguer les pertes de charges associées à la dissipation visqueuse le long de la tuyauterie, e_f ou h_f et les pertes de **charges singulières** e_s ou h_s .

Pour une section de conduit comportant les deux types de pertes (figure 16) on peut écrire :

$$\left(\frac{\langle p \rangle}{\rho g} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2g} + \langle z \rangle \right)_1 - \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho g} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2g} + \langle z \rangle \right)_2 = h_f + h_s \quad (\text{VIII}, 61)$$

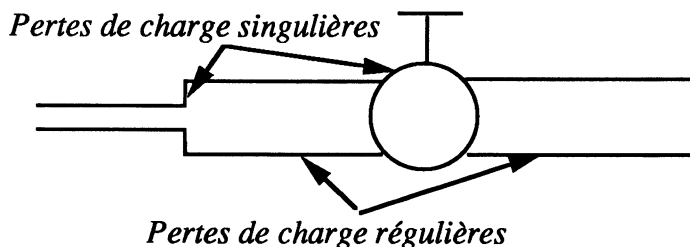


Figure 16. Les deux types de pertes de charge.

Considérons maintenant une canalisation comportant une machine réceptrice (turbine) absorbant une partie de l'énergie mécanique du fluide, ou une génératrice (pompe) fournissant de l'énergie au fluide (figure 17). Si w' représente le travail apporté à l'unité de

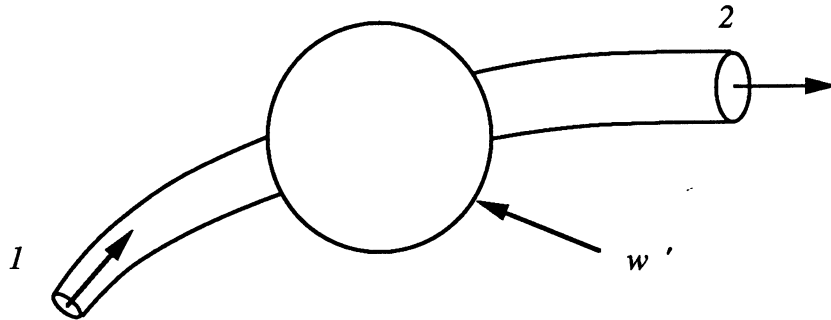


Figure 17. Canalisation comportant une machine réceptrice (absorbant une partie de l'énergie mécanique du fluide) ou génératrice (fournissant de l'énergie au fluide).

masse de fluide, ce travail w' sera positif dans le cas d'une génératrice et négatif dans le cas d'une machine réceptrice et l'on peut écrire :

$$w' - gh_f - gh_s = \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right)_2 - \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right)_1 \quad (VIII, 62)$$

ou encore :

$$w' - e_f - e_s = \Delta \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \langle z \rangle \right) \quad (VIII, 63)$$

Le travail w' qui intervient dans cette expression est un travail théorique et il faut dans la réalité tenir compte d'un rendement de pompe ou de turbine. Dans le cas d'une pompe par exemple, le travail réel à fournir aura pour valeur :

$$w'_{réel} = w' / \eta \quad (VIII, 64)$$

où η représente un rendement ($\eta \simeq 0.8$ à 0.9) pour des machines usuelles. Pour une turbine, il faudra écrire :

$$w'_{réel} = \eta w' \quad (VIII, 65)$$

VIII.4.2. Une canalisation comportant un ensemble de sections

Considérons à présent une canalisation constituée par $N - 1$ sections séparées (figure 18). Chaque section i introduit des pertes de charge $(e_f)_i, (e_s)_i$ et peut comporter une machine produisant ou absorbant un travail par unité de masse.

Pour chaque section de la canalisation, on peut écrire une expression de la forme (VIII,63).

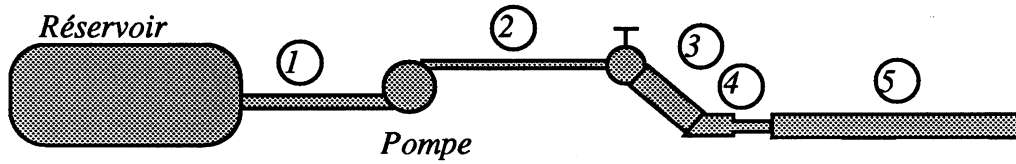


Figure 18. Une conduite constituée par cinq sections.

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_2 - \left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_1 &= (w' - e_f - e_s)_1 \\ \left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_3 - \left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_2 &= (w' - e_f - e_s)_2 \end{aligned} \quad (VIII, 66)$$

...

$$\left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_N - \left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_{N-1} = (w' - e_f - e_s)_{N-1}$$

En ajoutant membre à membre cet ensemble d'équations, on obtient :

$$\left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_N - \left\langle \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right\rangle_1 = \sum_i w'_i - \sum_i (e_f)_i - \sum_i (e_s)_i \quad (VIII, 67)$$

Dans cette expression, $\sum_i w'_i$ représente la somme de tous les travaux théoriques reçus par unité de masse sur la canalisation, $\sum_i (e_f)_i$ désigne la somme des pertes de charge associées à la dissipation par frottement le long de la canalisation et $\sum_i (e_s)_i$ représente l'ensemble des pertes de charges singulières associées aux coudes, valves, etc.

VIII.4.3. Interprétation graphique du théorème de Bernoulli

Considérons à nouveau l'expression du théorème de Bernoulli pour une canalisation en l'absence de générateur ou récepteur d'énergie et en l'absence de pertes de charges :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante} \quad (VIII, 68)$$

Dans cette expression, tous les termes sont exprimés en hauteur de fluide. Une représentation graphique de cette expression est souvent utilisée par les hydrauliciens. Cette représentation consiste à reporter (figure 19) sur un schéma de la canalisation considérée et à la verticale de chaque point les valeurs de $p/\rho g$ et $v^2/2g$. La somme de $z, p/\rho g$ et $v^2/2g$, donne la **ligne de charge** et cette ligne est horizontale dans la situation envisagée. La ligne définie par la somme $z + p/\rho g$ est appelée **ligne piézométrique**.

Si maintenant la canalisation comporte des machines génératrices ou réceptrices, la ligne de charge subit des relèvements ou des abaissements associés aux énergies reçues ou fournies par le fluide.

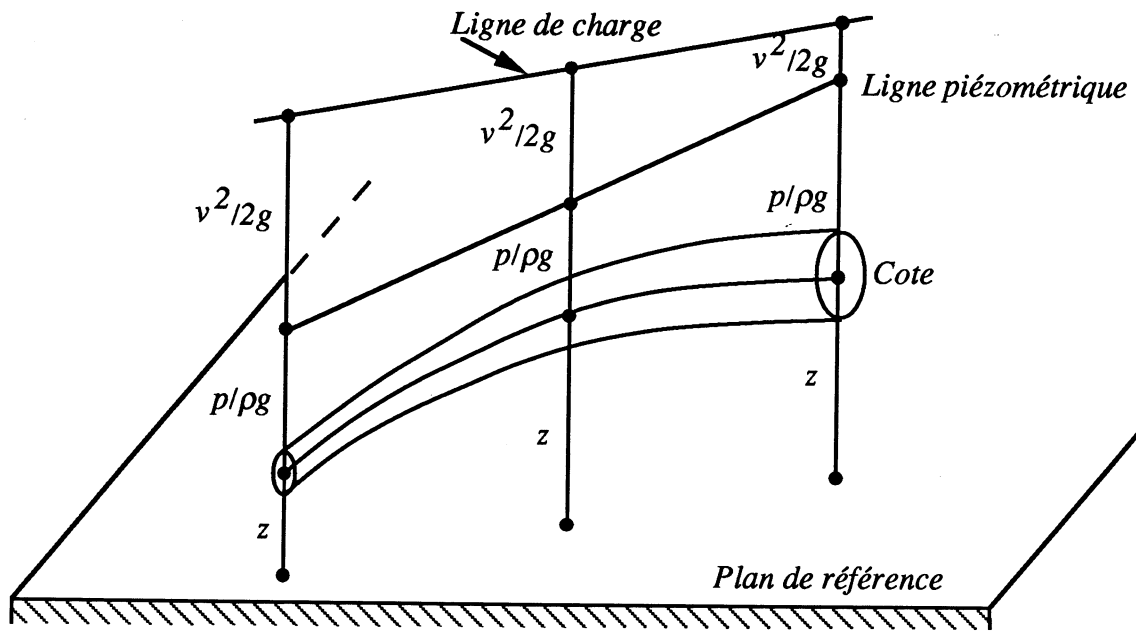


Figure 19. Représentation graphique de la ligne piézométrique et de la ligne de charge.

Les pertes de charges distribuées le long de la canalisation produisent d'autre part un abaissement progressif de la ligne de charge.

VIII.5. Le théorème de Bernoulli et le premier principe de la thermodynamique

Considérons une canalisation dans laquelle s'écoule un fluide incompressible. L'écoulement est supposé stationnaire et on peut donc appliquer le premier principe de la thermodynamique entre les sections 1 et 2 :

$$w'_{réel} + q = h_2 - h_1 + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + gz_2 - gz_1 \quad (VIII, 69)$$

où $w'_{réel}$ représente le travail réel apporté au système entre les sections 1 et 2. $w'_{réel}$ et q sont rapportés à l'unité de masse du fluide en écoulement.

Pour un fluide incompressible, $h = cT + p/\rho$ et l'expression précédente peut encore s'écrire :

$$w'_{réel} + q = c_2(T_2 - T_1) + \Delta\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) \quad (VIII, 70)$$

Le théorème de Bernoulli appliqué au même système nous permet d'écrire :

$$w'_{th} - e_f - e_s = \Delta\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) \quad (VIII, 71)$$

En rapprochant ces deux expressions, on obtient facilement :

$$w'_{réel} - w'_{th} + q + e_f + e_s = c(T_2 - T_1) \quad (VIII, 72)$$

Cette expression donne l'élévation de température du fluide le long de la canalisation.

On peut donner une signification physique à la somme : $w'_{réel} - w'_{th} + e_f + e_s$. Nous allons montrer que cette somme représente l'ensemble des "travaux non-compensés" dans la canalisation. Pour cela considérons la relation de Gibbs :

$$de = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (VIII, 73)$$

Le fluide est incompressible et cette relation s'écrit : $de = Tds$.

L'expression du deuxième principe permet d'écrire : $de = \delta q + \delta f$. On a d'autre part : $de = cdT$.

Ainsi :

$$c(T_2 - T_1) = q + \int_1^2 \delta f \quad (VIII, 74)$$

et en rapprochant cette dernière relation de (VIII,72), on obtient :

$$\int_1^2 \delta f = w'_{réel} - w'_{th} + e_f + e_s \quad (VIII, 75)$$

VIII.6. Formules pour l'évaluation des pertes de charge

L'évaluation des pertes de charge dans un système de canalisations est un problème couramment rencontré en pratique. Des tables très complètes existent et doivent être utilisées dans l'analyse de systèmes réels. Nous donnons ici quelques-unes des bases de l'évaluation des pertes de charge.

VIII.6.1. Pertes de charge associées au frottement pariétal dans un conduit cylindrique

Pour évaluer les pertes de charge dans un conduit cylindrique de longueur l , de diamètre d , on utilise le **facteur de frottement** f encore désigné sous le nom de **coefficient de pertes de charge**. Ce facteur est défini par :

$$e_f = f \frac{l}{d} \frac{v_m^2}{2} \quad (VIII, 76)$$

Dans cette expression, e_f désigne la perte de charge exprimée en **énergie par unité de masse** et v_m représente la vitesse moyenne sur une section droite du conduit.



Figure 20.
Le facteur de frottement est obtenu en mesurant la perte de charge dans un conduit horizontal.

Le facteur de frottement est déterminé expérimentalement en mesurant la variation de pression entre les sections d'entrée et de sortie du conduit placé horizontalement (figure 20). On peut écrire dans cette situation :

$$p_1 - p_2 = f \frac{l}{d} \rho \frac{v_m^2}{2} \quad (\text{VIII}, 77)$$

Le facteur de frottement f est un coefficient sans dimension. Une série d'expériences effectuées par Darcy, puis Nikuradse, ont permis de montrer que ce facteur dépendait principalement :

- (1) du nombre de Reynolds : $Re = \rho v_m d / \mu$
- (2) d'un coefficient de **rugosité relative** ϵ/d caractérisant l'état de surface de la paroi du conduit. Ainsi :

$$f = f(Re, \epsilon/d) \quad (\text{VIII}, 78)$$

Dans les expériences de Nikuradse, les conduits testés étaient rendus artificiellement rugueux en collant sur les parois des grains de sable aussi réguliers que possible. La taille ϵ de chaque catégorie de grains était définie par la maille des tamis utilisés pour les classer. Dans ces expériences, la rugosité relative variait entre 10^{-3} et $3.3 \cdot 10^{-2}$. Les résultats obtenus par Nikuradse sont représentés de façon commode sur un diagramme donnant f en fonction de Re pour diverses valeurs de ϵ/d . Des échelles logarithmiques sont classiquement utilisées pour f et Re (figure 21). Ce diagramme est extrêmement utile et mérite une description détaillée.

Le régime laminaire

Lorsque le nombre de Reynolds Re reste inférieur à environ 2000, l'écoulement dans le conduit reste **laminaire** et le facteur de frottement est le même quelle que soit la rugosité. Ce facteur est donné par l'équation suivante :

$$f = \frac{64}{Re} \quad (\text{VIII}, 79)$$

Cette expression peut être obtenue à partir d'une analyse théorique de l'écoulement laminaire dans un conduit cylindrique (écoulement de Poiseuille). Cette analyse sera effectuée plus loin (voir chapitre XIV).

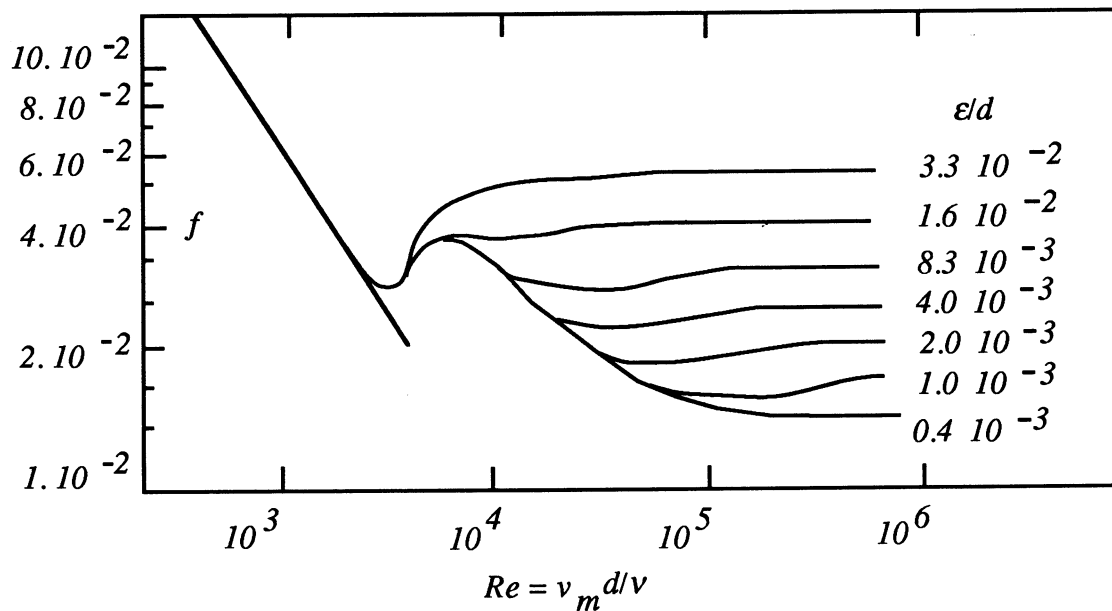


Figure 21. Le facteur de frottement obtenu par Nikuradse pour des conduites rugueuses.

Régime critique

La transition vers la turbulence intervient pour un nombre de Reynolds dépassant 2100. Le nombre de Reynolds critique dépend fortement des conditions d'entrée du conduit, de la présence de valves ou de coudes, etc. Les observations expérimentales montrent que ce nombre n'est jamais inférieur à 2100, mais en prenant des précautions, il est possible de maintenir un écoulement laminaire jusqu'à des Reynolds de l'ordre de 20000. En pratique le nombre de Reynolds critique se situe autour de 2100 et la région de Reynolds comprise entre 2100 et 4000 est appelée région critique. Dans cette région, la transition n'est pas complète et l'écoulement alterne entre des régimes laminaire et turbulent. Le facteur de frottement ne dépend que du nombre de Reynolds, mais sa valeur est mal définie.

Régime turbulent

Pour $Re > 4.10^3$, l'écoulement dans le conduit est turbulent. Dans cette région, le facteur de frottement dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative.

Pour une rugosité donnée, le facteur de frottement f atteint un palier à partir d'un certain nombre de Reynolds. La valeur du palier ne dépend que de la rugosité relative ϵ/d .

VIII.6.2. Canalisations industrielles : le diagramme de Moody

Les canalisations et conduites employées en pratique diffèrent sensiblement de celles utilisées dans l'expérience de Nikuradse. Leur rugosité n'est pas uniforme et elle n'est pas directement mesurable. Cependant, on peut attribuer une valeur de ϵ/d à chaque type de conduite. Une étude très détaillée des pertes de charge dans les conduites industrielles est due à Moody 1944. Le résultat principal de cette étude est présenté à la figure 22. Le

diagramme de Moody donne le facteur de frottement f en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la canalisation. Le paramètre ϵ/d est donné pour chaque type de canalisation mais peut varier de façon significative. De ce fait f n'est jamais déterminé à moins de 5 à 10 % près. Ce facteur varie dans le temps du fait de la corrosion et il faut prendre cet aspect en considération lorsque l'on doit concevoir un système fonctionnant sur une grande période de temps.

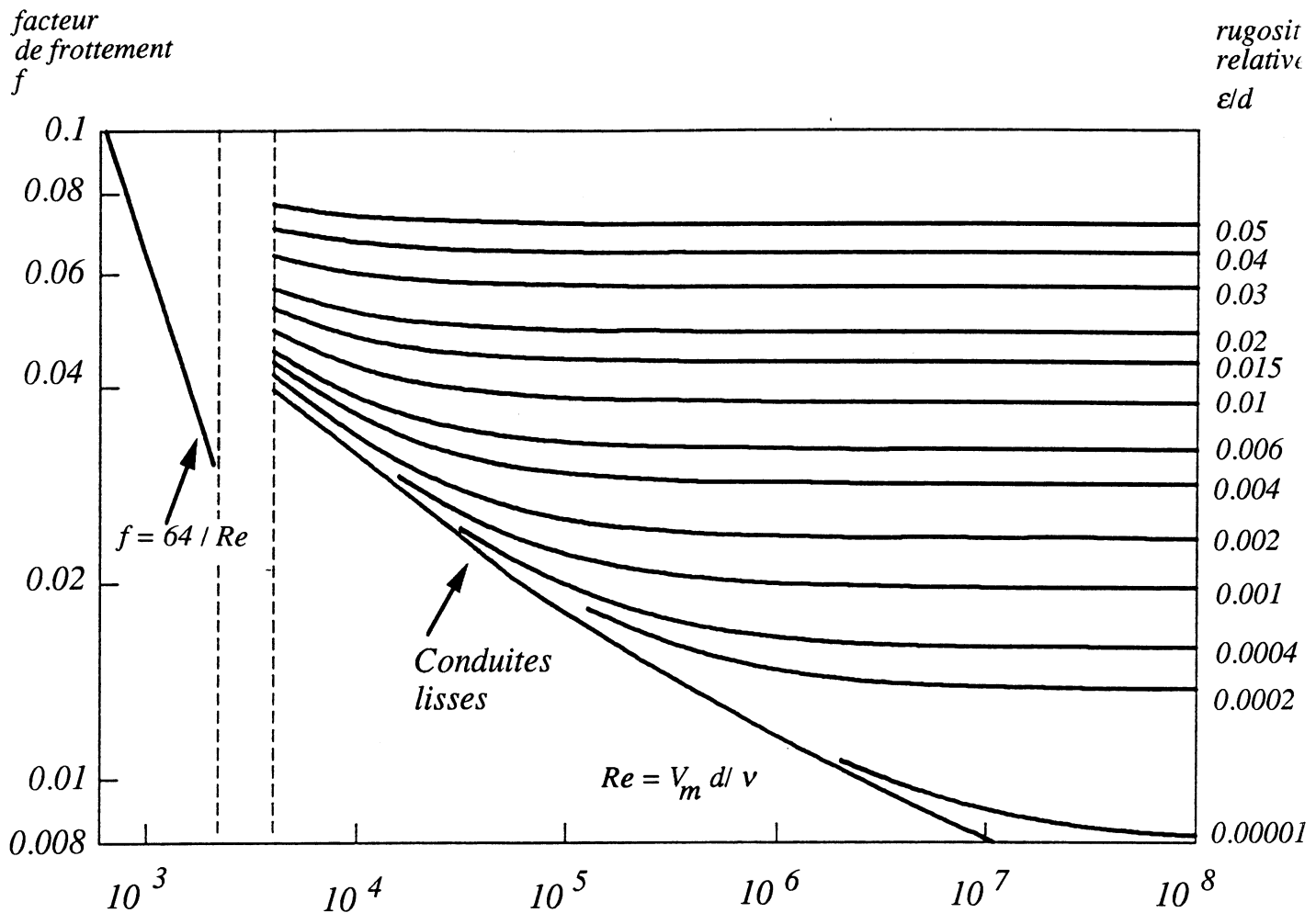


Figure 22. Le diagramme de Moody donne le facteur de frottement f en fonction du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la canalisation. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 2100, l'écoulement est laminaire et le facteur de frottement varie comme l'inverse du nombre de Reynolds. La rugosité relative n'intervient pas dans ce cas. Lorsque Re dépasse 4000, le régime d'écoulement est turbulent et le facteur de frottement varie avec le nombre de Reynolds et la rugosité. Pour un nombre de Reynolds fixé, le facteur de frottement augmente de façon monotone avec la rugosité relative.

Formules pour les canalisations industrielles

Dans des calculs numériques, il est commode de remplacer le diagramme de Moody par des expressions analytiques.

Pour des **conduites lisses** et un nombre de Reynolds inférieur à 10^5 et supérieur à $4 \cdot 10^3$, on peut utiliser une formule due à Blasius :

$$f = 0.316(Re)^{-1/4}, \quad 4 \cdot 10^3 < Re < 10^5 \quad (VIII, 80)$$

Pour des **conduites lisses** et des nombres de Reynolds supérieurs à 10^5 , le facteur de frottement est correctement obtenu à l'aide d'une formule due à Von Kármán et Nikuradse.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(\sqrt{f} Re) - 0.8, \quad 10^5 < Re \quad (VIII, 81)$$

Enfin pour la région de transition et des conduites rugueuses, on utilise le plus souvent la formule de Colebrook (1938).

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{\epsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right) \quad (VIII, 82)$$

Les deux expressions précédentes ne donnent pas f sous forme explicite et il faut utiliser une procédure itérative pour déduire la valeur numérique du facteur de frottement.

Deux types de problèmes sont principalement rencontrés dans l'analyse des écoulements dans les conduits cylindriques. Une première situation est celle dans laquelle il faut déterminer la perte de charge connaissant le débit masse, les propriétés physiques du fluide et la géométrie du conduit.

Dans la deuxième situation, il s'agit de déterminer le débit masse connaissant la perte de charge Δp , les propriétés du fluide et la géométrie du conduit. Le premier type de problème peut être directement résolu car le nombre de Reynolds peut être obtenu de façon explicite à partir des données initiales.

Le deuxième problème peut être traité de façon itérative, en se donnant à priori un facteur de frottement. On peut ainsi calculer la vitesse moyenne, puis le nombre de Reynolds, et retrouver un nouveau facteur de frottement. Ce processus converge généralement au bout de quelques itérations. Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous un exemple de calcul.

Exemple

Un conduit de 1000 m de long et de 10 cm de diamètre transporte de l'eau. La température de l'eau est de $20^\circ C$ et sa viscosité $\mu = 1.002 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$. Le conduit est horizontal et sa rugosité relative est $\epsilon/d = 0.001$. La perte de charge mesurée entre les sections d'entrée et de sortie est $\Delta p = 6.2 \text{ bar}$. Déterminer le débit masse (figure 23).

Solution.

La perte de charge est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta p = f \frac{l}{d} \rho \frac{v_m^2}{2}$$

On peut donc écrire :

$$v_m = \left(\frac{2\Delta p d}{\rho l}\right)^{1/2} \frac{1}{f^{1/2}}$$

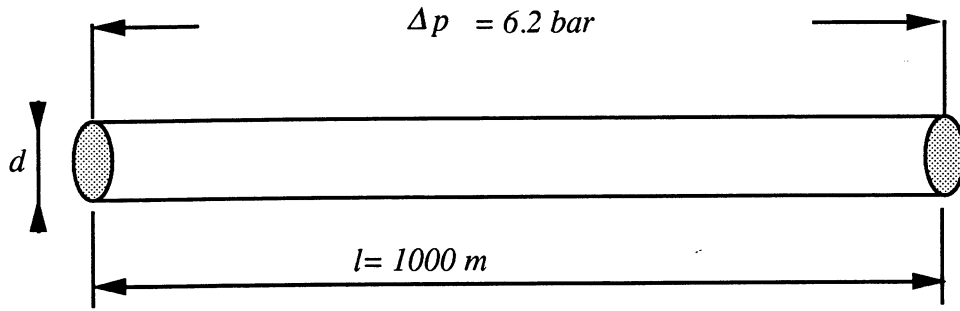


Figure 23. Élément de canalisation La perte de charge est fixée; il s'agit de calculer le débit.

Le nombre de Reynolds correspondant est donné par :

$$Re = \frac{\rho v_m d}{\mu} = \frac{1}{f^{1/2}} \left(\frac{2 \Delta p \rho d^3}{\mu^2 l} \right)^{1/2}$$

Ici $\Delta p = 6.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $d = 0.1 \text{ m}$, $\mu = 1.002 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, $l = 10^3 \text{ m}$.

$$Re = \frac{1}{f} \left[\frac{(2)(6.2 \cdot 10^5)(10^3)(10^{-3})}{(1.002 \cdot 10^{-3})^2 (10^3)} \right]$$

soit :

$$Re = (3.51 \cdot 10^4) / f^{1/2}$$

Il reste à trouver la valeur de f correspondant à une rugosité $\epsilon/d = 0.001$. Le diagramme de Moody donne pour cette rugosité une valeur $f = 0.021$ lorsque Re dépasse $4 \cdot 10^5$. Si l'on introduit cette valeur dans l'expression du nombre de Reynolds, on obtient $Re = 2.42 \cdot 10^5$. Une nouvelle lecture du diagramme de Moody pour $\epsilon/d = 0.001$ et $Re = 2.42 \cdot 10^5$ donne $f = 0.0215$. Le nombre de Reynolds obtenu à partir de cette valeur est $Re = 2.39 \cdot 10^5$ et il n'est pas nécessaire de poursuivre l'itération.

On peut déterminer la vitesse moyenne dans la canalisation :

$$v_m = \left(\frac{2 \Delta p d}{\rho l} \right)^{1/2} \frac{1}{f^{1/2}}$$

$$v_m = \left[\frac{(2)(6.2 \cdot 10^5)(0.1)}{(10^3)(10^3)} \right]^{1/2} \frac{1}{(0.0215)^{1/2}}$$

soit : $v_m = 2.40 \text{ m/s}$ et le débit masse est

$$\dot{m} = \rho \frac{\pi d^2}{4} v_m = 18.8 \text{ kg/s}$$

VIII.6.3. Pertes de charge singulières

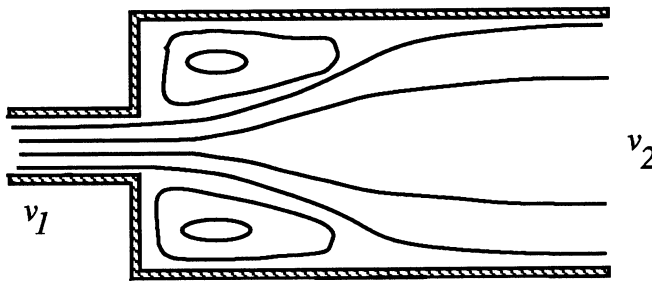
Les pertes de charge singulières sont exprimées sous la forme suivante :

$$e_s = k \frac{v_m^2}{2} \quad \text{ou encore} \quad h_s = k \frac{v_m^2}{2g} \quad (\text{VIII}, 83)$$

Par convention, la vitesse v_m est la vitesse moyenne calculée sur la section du conduit, en amont de la singularité.

Le coefficient k est obtenu pour chaque type d'élément par mesure directe ou à l'aide de modélisations simples. Nous donnons ci-dessous les valeurs du coefficient k pour quelques éléments typiques.

Elargissement brusque



Un élargissement brusque est représenté sur la figure 24. Une théorie élémentaire basée sur un bilan de quantité de mouvement (voir chapitre X) permet d'obtenir l'expression suivante pour la perte de charge.

Figure 24. Elargissement brusque.

$$e_s = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2} \quad (\text{VIII}, 84)$$

Le coefficient de pertes de charge théorique est ici :

$$k = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (\text{VIII}, 85)$$

Lorsque $A_2 = \infty$, c'est-à-dire lorsqu'un conduit de section A_1 débouche dans un réservoir de très grande section, la perte de charge est :

$$e_s = \frac{v_1^2}{2}$$

Cette perte de charge correspond à la dissipation complète de l'énergie cinétique du fluide par les forces visqueuses.

Diffuseurs

Si l'élargissement est graduel, l'élément est appelé diffuseur et la perte de charge associée est généralement plus faible (figure 25a)). Cette perte de charge peut se mettre sous la forme :

$$e_f + e_s = G \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2} \quad (\text{VIII}, 86)$$

où le coefficient G dépend à la fois de l'angle θ du diffuseur et du rapport A_1/A_2 . La valeur de G est voisine de 0.15 pour des angles θ faibles de l'ordre de ou inférieurs à 7° . Pour des angles θ plus importants, le coefficient G augmente rapidement (figure 25b)).

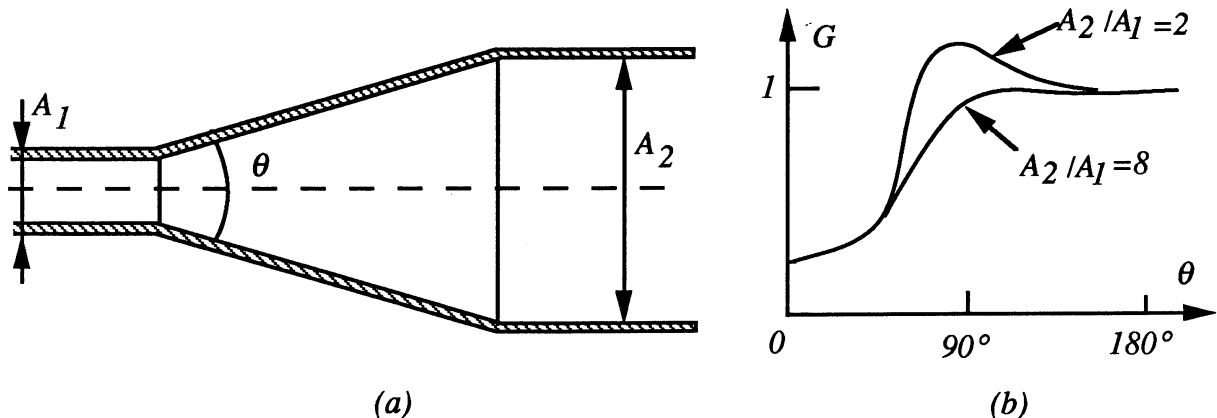
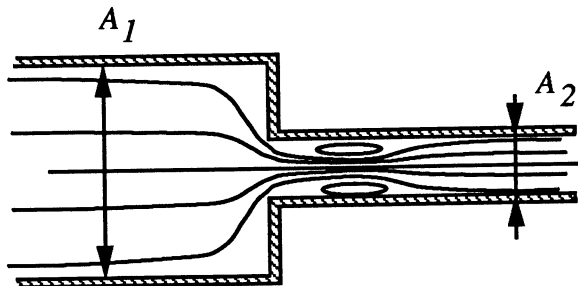


Figure 25. Perte de charge dans les diffuseurs coniques.

Rétrécissement brusque



Un rétrécissement brusque est représenté sur la figure 26. Les pertes de charge sont surtout associées dans ce cas à l'écoulement en aval de la contraction. Le coefficient k associé à ce type d'élément est donné ci-dessous pour quelques valeurs du rapport A_2/A_1 .

Figure 26. Rétrécissement brusque.

A_2/A_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
k	0.37	0.35	0.32	0.27	0.22	0.17	0.10	0.06	0.02	0

La perte de charge varie fortement avec la géométrie détaillée de la contraction. La figure 27 montre trois exemples de sections d'entrée de conduits. Pour une section à bord franc $k \sim 0.5$, pour une section d'entrée profilée $k \sim 0.04$. Une section ré-entrante produit la perte de charge la plus importante et $k \sim 0.9$ dans ce cas.

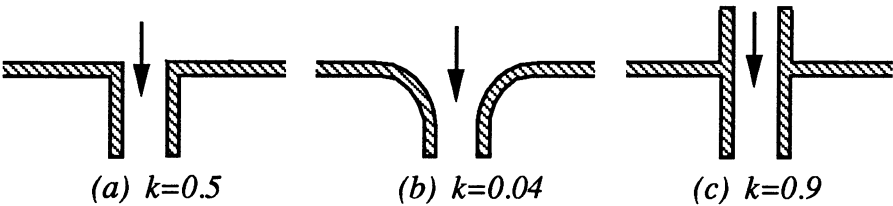


Figure 27. Trois sections d'entrée de conduits.

Le tableau 1 donne la valeur du coefficient k pour quelques éléments typiques.

Tableau 1. Coefficients de pertes de charges singulières typiques

Type d'élément :	Coefficient k
Raccord rectiligne	0.04
T standard	
en ligne, branche fermée	0.4
utilisé en L entrée en ligne	1.3
utilisé en L entrée par la branche	1.5
Valve à diaphragme	
ouverte	2.3
ouverte aux trois quarts	2.6
ouverte à moitié	4.3
ouverte au quart	20.
Valve "globe"	
ouverte	6.4
ouverte à moitié	9.5
Coudes commerciaux 90°	
standard	0.75
à grand rayon de courbure	0.45
à faible de rayon de courbure	1.3
Retour à 180° avec un faible rayon de courbure	1.6

ANNEXE A

LE BILAN D'ENERGIE MECANIQUE POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE

Nous allons ici établir de façon rigoureuse le bilan d'énergie mécanique utilisé plus haut pour l'analyse des systèmes de canalisations. Pour cela, nous partons de l'équation de bilan pour l'énergie cinétique. Cette équation, obtenue au chapitre VI à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2)}_{(1)} + \underbrace{\nabla \cdot (\frac{1}{2}\rho v^2 \mathbf{v})}_{(2)} = \underbrace{-\mathbf{v} \cdot \nabla p}_{(3)} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})}_{(4)} + \underbrace{\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}}_{(5)} \quad (A, 1)$$

Nous allons maintenant réécrire les termes (3) et (4) de l'équation précédente. Considérons d'abord le troisième terme :

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla p = -\nabla \cdot p\mathbf{v} + p\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (A, 2)$$

Le fluide est incompressible et $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et l'expression précédente devient :

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla p = -\nabla \cdot p\mathbf{v} \quad (A, 3)$$

Considérons à présent le quatrième terme de l'équation (A,1) :

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = v_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ij} \quad (A, 4)$$

On peut encore écrire :

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j \tau_{ij}) - \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} \quad (A, 5)$$

En substituant (A,3) et (A,5) dans l'équation (A,1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho v^2) + \nabla \cdot (\frac{1}{2}\rho v^2 \mathbf{v}) = -\nabla \cdot p\mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \quad (A, 6)$$

Le terme $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}$ représente le taux de dissipation de l'énergie par les forces visqueuses $\hat{\Phi}$. Ce terme est toujours positif ou nul (voir chapitre VII).

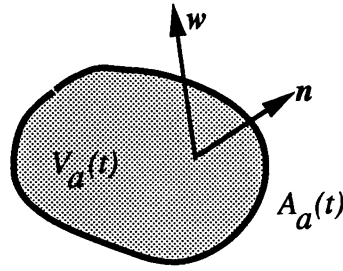


Figure A1. Volume et surface de contrôle.

On va maintenant déduire un bilan macroscopique pour l'énergie cinétique en partant de l'équation locale (A,6). Intégrons l'équation (A,6) sur un volume $V_a(t)$ arbitraire (figure A,1).

$$\int_{V_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV + \int_{V_a(t)} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \right) dV = - \int_{V_a(t)} \nabla \cdot p \mathbf{v} dV + \int_{V_a(t)} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) dV - \int_{V_a(t)} \hat{\Phi} dV + \int_{V_a(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \quad (A, 7)$$

L'application du théorème de Green-Ostrogradsky aux deuxième, troisième et quatrième termes conduit à :

$$\int_{V_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV + \int_{A_a(t)} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) dA = \int_{A_a(t)} (-p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA \quad (A, 8)$$

$$- \int_{V_a(t)} \hat{\Phi} dV + \int_{V_a(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \quad (4) \quad (5)$$

Le vecteur contrainte $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ apparaît dans l'intégrande du troisième terme et on peut écrire :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -p \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$$

On peut maintenant utiliser le théorème de transport pour écrire les deux premiers termes sous une forme plus commode :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_{V_a(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) dV + \int_{A_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA \quad (A, 9)$$

et l'équation (A,8) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_{A_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA \\ = \int_{A_a(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \int_{V_a(t)} \hat{\Phi} dV + \int_{V_a(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \end{aligned} \quad (A, 10)$$

Cette dernière expression constitue un bilan pour l'énergie mécanique du système. En régime permanent, il n'y a pas d'accumulation d'énergie cinétique dans le volume de contrôle et le premier terme disparaît. Il reste alors :

$$\int_{A_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A_a(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \int_{V_a(t)} \hat{\Phi} dV + \int_{V_a(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \quad (A, 11)$$

Supposons que les forces volumiques dérivent d'un potentiel $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$ avec $\Phi = gz$. Le dernier terme du bilan d'énergie mécanique peut alors s'écrire :

$$\int_{V_a(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV = - \int_{V_a(t)} \rho \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} dV \quad (A, 12)$$

Comme $\nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$, on peut écrire :

$$\rho \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\rho \Phi \mathbf{v}) \quad (A, 13)$$

et l'expression (A,12) devient :

$$\int_{V_a(t)} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV = - \int_{V_a(t)} \nabla \cdot (\rho \Phi \mathbf{v}) dV = - \int_{A_a(t)} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (A, 14)$$

Le bilan d'énergie mécanique prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \int_{A_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA &= \int_{A_a(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \int_{A_a(t)} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \\ (1) \qquad \qquad \qquad (2) \qquad \qquad \qquad (3) \qquad \qquad \qquad (A, 15) \\ &- \int_{V_a(t)} \hat{\Phi} dV \\ &\qquad \qquad \qquad (4) \end{aligned}$$

Considérons maintenant un système dont la surface de contrôle comporte (figure A.2) :

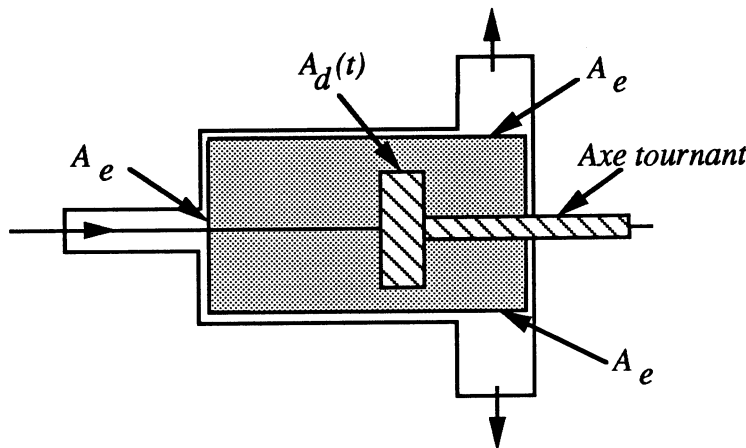


Figure A2. La surface de contrôle est composée de surfaces d'entrée-sortie, de surfaces solides imperméables et de surfaces solides mobiles.

- des surfaces d'entrée et sortie A_e
- des surfaces solides fixes A_s
- des surfaces mobiles $A_d(t)$

Les surfaces mobiles peuvent être par exemple une tête de piston, un rotor de pompe ou de turbine, etc.

Nous allons maintenant spécialiser l'expression (A,15) à ce type de configuration. Pour cela, notons d'abord que sur les surfaces fixes A_s , $\mathbf{v} = \mathbf{w} = 0$, sur les surfaces mobiles $A_d(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ et en entrée et sortie du système $\mathbf{w} = 0$.

Ainsi le premier terme de l'expression (A,15) devient :

$$\int_{A_a(t)} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A_e} \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (\text{A}, 16)$$

Le second terme prend la forme :

$$\int_{A_a(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA = \int_{A_e} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA + \int_{A_d(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA \quad (\text{A}, 17)$$

et le troisième terme s'écrit :

$$\int_{A_a(t)} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{A_e} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{A_d(t)} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A}, 18)$$

Posons :

$$\dot{W} = \int_{A_d(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA - \int_{A_d(t)} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A}, 19)$$

et :

$$\dot{E}_v = \int_{V_a(t)} \hat{\Phi} dV \quad (\text{A}, 20)$$

Ici, $\dot{W}$ représente le travail effectué par les surfaces solides sur le fluide au contact direct de la surface. $\dot{E}_v$ désigne l'énergie dissipée dans le volume par les forces visqueuses. Le bilan d'énergie mécanique s'écrit maintenant :

$$\begin{array}{ccc} \int_{A_e} \frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA & = & \int_{A_e} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dA \\ \text{Débit d'énergie cinétique} & & \text{Puissance des forces exercées} \\ & & \text{en entrée et sortie du système} \end{array} \quad (\text{A}, 21)$$

$$\begin{array}{ccc} - \int_{A_e} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA & + & \dot{W} & - & \dot{E}_v \\ \text{Puissance des forces} & & \text{Puissance} & & \text{Dissipation} \\ \text{volumiques} & & \text{communiquée au} & & \text{d'énergie par} \\ & & \text{fluide au travers} & & \text{unité de temps} \\ & & \text{des parois mobiles} & & \end{array}$$

Dans la plupart des cas pratiques, la vitesse en entrée et sortie est parallèle à la direction $\mathbf{n}$ de la normale et la puissance des forces exercées en entrée et sortie est principalement celle des forces de pression.

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \simeq -p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } A_e \quad (A, 22)$$

Le bilan (A,21) s'écrit dans ce cas :

$$\int_{A_e} \frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = - \int_{A_e} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \int_{A_e} \rho \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \dot{W} - \dot{E}_v \quad (A, 23)$$

soit :

$$\int_{A_e} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \Phi \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \dot{W} - \dot{E}_v \quad (A, 24)$$

Si l'écoulement peut être considéré comme unidimensionnel en entrée et en sortie, on peut encore écrire :

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi \right)_2 \dot{m} - \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi \right)_1 \dot{m} = \dot{W} - \dot{E}_v \quad (A, 25)$$

soit :

$$\Delta \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) = w' - E_v \quad (A, 26)$$

Où $w' = \dot{W}/\dot{m}$ et $e_v = \dot{E}_v/\dot{m}$ représentent le travail et la dissipation par unité de masse.

Nous avons ainsi retrouvé l'équation de Bernoulli pour des systèmes présentant des pertes de charge et comportant des machines génératrices ou réceptrices. Notons qu'ici E_v représente l'ensemble des pertes de charge e_s et e_f .

CHAPITRE IX

BILANS MACROSCOPIQUES DE QUANTITE DE MOUVEMENT

IX.1. Introduction

Les bilans macroscopiques de quantité de mouvement permettent la détermination de forces et de moments dans des configurations d'écoulements très variées. Ce type de bilan peut être appliqué à des systèmes simples ou complexes. L'analyse macroscopique évite une détermination détaillée de la structure de l'écoulement. La force totale qui s'exerce sur une paroi n'est pas calculée comme l'intégrale des forces qui s'appliquent sur chaque élément de la paroi. La détermination de cette force fait seulement intervenir les caractéristiques en entrée et sortie du système envisagé. On peut ainsi calculer la poussée d'un moteur à réaction si on connaît uniquement les conditions à l'admission et à l'éjection. Pour ce calcul, il n'est pas nécessaire d'analyser tous les processus qui se déroulent dans les éléments qui composent le réacteur (entrée d'air, compresseur, chambre de combustion, turbine, tuyère). On peut aussi déterminer la poussée d'un moteur fusée, calculer le rendement d'une hélice, caractériser le fonctionnement global des éjecteurs et évaluer dans certains cas des pertes de charge produites par des singularités.

Le bilan macroscopique que l'on peut écrire pour le moment angulaire est particulièrement utile à l'analyse des machines tournantes. Connaissant les caractéristiques de l'écoulement en entrée et sortie d'une roue de turbine, on peut évaluer le couple résultant sur l'axe. On peut aussi déterminer les couples à appliquer sur l'axe d'un compresseur axial ou centrifuge, d'un ventilateur, d'une pompe ou d'un agitateur.

Ces quelques exemples mettent clairement en évidence l'intérêt des bilans macroscopiques de quantité de mouvement. Le développement théorique qui sert de base à ce type d'analyse est d'abord rapidement présenté (sections 2 et 3). La suite du chapitre traite des exemples classiques (moteur à réaction, moteur fusée, hélice, éolienne, éjecteurs). Tous les calculs sont effectués en supposant que l'écoulement est unidimensionnel en entrée et sortie des systèmes étudiés, mais les bilans de quantité de mouvement peuvent aussi être utilisés dans des situations où les variables ne sont pas uniformes dans ces deux sections.

Bibliographie

Les bilans macroscopiques de quantité de mouvement sont utilisés dans un grand nombre d'applications pour établir des expressions générales pour des forces, des couples et des moments angulaires. La détermination de la poussée de systèmes de propulsion est décrite dans les livres de Hill et Peterson 1965, Kerrebrock 1977, Oates 1984. Le théorème d'Euler dérivé d'un bilan de moment angulaire est un résultat classique en théorie des turbomachines (Horlock 1973, 1978, Oates 1985). Des bilans de quantité de mouvement sont utilisés en aérodynamique (Bertin et Smith 1979, Kuethé et Chow 1986) ou en hydrodynamique (Newman 1977, Le Méhauté 1976) pour établir les expressions des forces et des moments qui s'exercent sur des profils, des surfaces portantes ou des corps élancés.

IX.2. Le théorème des quantités de mouvement pour les écoulements permanents

Nous allons d'abord appliquer le théorème des quantités de mouvement aux écoulements stationnaires unidimensionnels de fluides non visqueux. Nous introduirons ensuite les effets de frottement pariétal. Le théorème des quantités de mouvement va nous permettre de calculer les forces exercées par un fluide sur le conduit ou plus généralement le système dans lequel il s'écoule. Ce théorème est donc particulièrement important puisqu'il permet de prévoir les charges hydrodynamiques associées à l'écoulement.

IX.2.1. Ecoulement sans frottement

Considérons un volume de contrôle matériel $V_m(t)$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit pour ce volume :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \mathbf{F}_E \quad (IX, 1)$$

où $\mathbf{F}_E$ désigne l'ensemble des forces extérieures qui s'appliquent sur le volume $V_m(t)$.

Le théorème de transport appliqué au premier membre de l'expression (IX,1) donne :

$$\int_{V_m(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} dV + \int_{A_m(t)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \mathbf{F}_E$$

Supposons à présent que le volume matériel $V_m(t)$ coïncide à l'instant t avec un volume de contrôle fixe V . On peut aussi écrire :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} dV + \int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \mathbf{F}_E$$

Pour un écoulement permanent, cette expression prend la forme simple suivante :

$$\int_A \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \mathbf{F}_E$$

Dans ce cas, le débit de quantité de mouvement au travers de la surface A d'un volume de contrôle fixe V est égal à la somme des forces extérieures qui s'appliquent sur ce volume de contrôle.

Si le fluide est dénué de viscosité, les forces F_E qui s'appliquent sur le volume V sont les forces de pression et les forces volumiques et le bilan de quantité de mouvement pour le volume V s'écrit :

$$\int_A \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = - \int_A p \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (IX, 2)$$

Nous allons maintenant appliquer cette expression à l'élément de conduit de la figure 1. Désignons par Σ la surface latérale du conduit et par N_1 et N_2 les normales aux surfaces A_1 et A_2 orientées dans la direction de l'écoulement :

$$N_1 = -\mathbf{n}_1, N_2 = \mathbf{n}_2$$

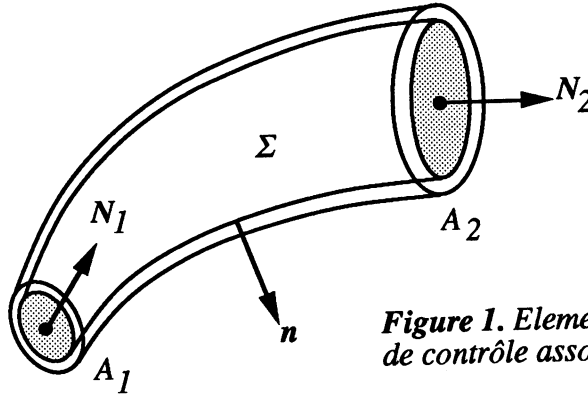


Figure 1. Element de conduit et volume de contrôle associé.

La force qu'exerce le fluide en écoulement sur la paroi latérale du conduit est égale à la somme des forces de pression élémentaires $p \mathbf{n} dA$ sur la surface Σ :

$$\mathbf{F}_p = \int_{\Sigma} p \mathbf{n} dA \quad (IX, 3)$$

La force qu'exerce la paroi latérale sur le fluide en écoulement est égale et opposée à $\mathbf{F}_p$:

$$\mathbf{F}_F = -\mathbf{F}_p$$

Nous pouvons maintenant évaluer ces deux forces à l'aide de l'expression (IX,2). Pour cela, nous allons décomposer l'intégrale de surface des pressions en trois termes :

$$\begin{aligned} \int_A p \mathbf{n} dA &= \int_{A_1} p \mathbf{n} dA + \int_{A_2} p \mathbf{n} dA + \int_{\Sigma} p \mathbf{n} dA \\ &= \int_{A_1} p \mathbf{n} dA + \int_{A_2} p \mathbf{n} dA + \mathbf{F}_p \end{aligned} \quad (A, 4)$$

En substituant cette décomposition dans (IX,2), on obtient :

$$\mathbf{F}_p = - \int_{A_1+A_2} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \int_{A_1} p \mathbf{n} dA - \int_{A_2} p \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (\text{IX}, 5)$$

Si l'écoulement dans les sections A_1 et A_2 peut être considéré comme unidimensionnel, les trois premiers termes du second membre peuvent être évalués comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= -\rho_1 v_1^2 A_1 \mathbf{N}_1 = -\dot{m} v_1 \mathbf{N}_1 & \int_{A_1} p \mathbf{n} dA &= -p_1 \mathbf{N}_1 A_1 \\ \int_{A_2} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= +\rho_2 v_2^2 A_2 \mathbf{N}_2 = \dot{m} v_2 \mathbf{N}_2 & \int_{A_2} p \mathbf{n} dA &= p_2 \mathbf{N}_2 A_2 \end{aligned}$$

Le dernier terme de l'expression (IX,5) représente simplement le poids du fluide contenu dans le volume V :

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV = m_v \mathbf{g}$$

On peut donc écrire :

$$\mathbf{F}_p = \dot{m} v_1 \mathbf{N}_1 - \dot{m} v_2 \mathbf{N}_2 + p_1 A_1 \mathbf{N}_1 - p_2 A_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 6)$$

ou encore, en remplaçant $\dot{m}$ par $\rho_1 v_1 A_1$ et $\rho_2 v_2 A_2$

$$\mathbf{F}_p = \rho_1 v_1^2 A_1 \mathbf{N}_1 - \rho_2 v_2^2 A_2 \mathbf{N}_2 + p_1 A_1 \mathbf{N}_1 - p_2 A_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 7)$$

La quantité $\dot{m}v + pA$ a les dimensions d'une force MLT^{-2} et elle est souvent désignée sous le nom d'impulsion :

$$\mathcal{F} = \dot{m}v + pA = (\rho v^2 + p)A \quad (\text{IX}, 8)$$

Les expressions obtenues pour la force exercée par le fluide sur la paroi du conduit font apparaître la différence vectorielle des impulsions en entrée et sortie du conduit :

$$\mathbf{F}_p = \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 9)$$

ou encore

$$\mathbf{F}_p = -\Delta(\mathcal{F} \mathbf{N}) + m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 10)$$

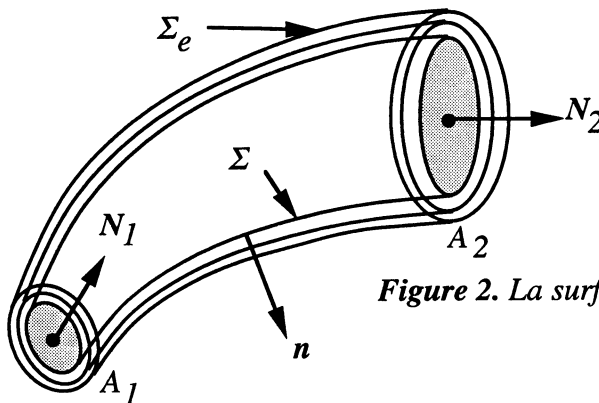
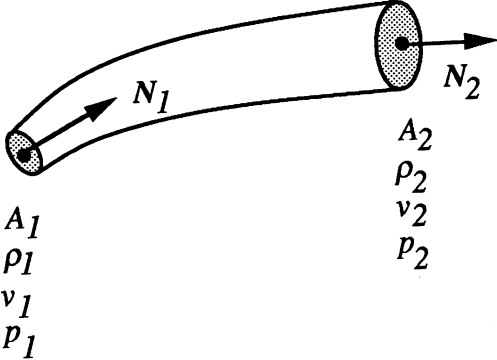


Figure 2. La surface latérale du conduit est Σ_e .

Encadré 1. Force exercée par un fluide en écoulement stationnaire sur la paroi du conduit



$$\mathbf{F}_p = \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g}$$

où $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$ sont les normales orientées dans la direction de l'écoulement :

$\mathcal{F}$ est l'impulsion : $\mathcal{F} = \dot{m}v + pA$

m_v désigne la masse de fluide contenue dans la portion de conduit considérée.

Dans beaucoup de cas le conduit est immergé dans un milieu ambiant uniforme et au repos. Ce milieu exerce sur la **paroi externe** des forces de pression qui agissent dans la direction opposée aux forces exercées par le fluide qui s'écoule à l'intérieur du conduit. Il est souvent utile d'évaluer la **force totale** appliquée au conduit. Cette force est égale à la somme des forces appliquées sur les parois interne et externe (figure 2).

Nous avons déjà une expression pour $\mathbf{F}_p$. Pour calculer $\mathbf{F}_e$, nous allons supposer que le milieu ambiant est **uniforme et au repos**.

Dans ces conditions la pression ambiante p_a est constante. La force exercée par le milieu ambiant sur la paroi latérale externe Σ_e du conduit a pour forme :

$$\mathbf{F}_e = - \int_{\Sigma_e} p_a \mathbf{n} dA \quad (\text{IX}, 11)$$

Pour évaluer cette intégrale, on peut utiliser la surface de contrôle formée par Σ_e , A_1 et A_2 . Cette surface limite un volume de contrôle V' .

Considérons maintenant :

$$\int_{\Sigma_e + A_1 + A_2} p_a \mathbf{n} dA \quad (\text{IX}, 12)$$

Cette intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume à l'aide d'une identité vectorielle dérivée du théorème de Green-Ostrogradski (voir Encadré 2):

$$\int_{\Sigma_e + A_1 + A_2} p_a \mathbf{n} dA = \int_{V'} \nabla p_a dV \quad (\text{IX}, 13)$$

Comme p_a est une constante dans tout le milieu $\nabla p_a = 0$ et

$$\int_{\Sigma_e + A_1 + A_2} p_a \mathbf{n} dA = 0 \quad (\text{IX}, 14)$$

On peut tirer de cette identité une expression pour la force $\mathbf{F}_e$:

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Sigma_e} p \mathbf{n} dA = \int_{A_1} p_a \mathbf{n} dA + \int_{A_2} p_a \mathbf{n} dA \quad (\text{IX}, 15)$$

soit :

$$\mathbf{F}_e = p_a A_2 \mathbf{N}_2 - p_a A_1 \mathbf{N}_1 \quad (IX, 16)$$

Encadré 2. Une identité vectorielle très utile

$$\int_A \Phi \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \Phi dV$$

Cette identité est obtenue à partir du théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV$$

Posons $\mathbf{a} = \mathbf{b}\Phi$. Pour ce vecteur l'expression précédente devient :

$$\int_A \Phi \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{b}\Phi dV$$

soit encore :

$$\int_A \Phi \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V (\mathbf{b} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{b}) dV$$

Le vecteur $\mathbf{b}$ est arbitraire. En choisissant $\mathbf{b}$ constant, l'expression précédente donne :

$$\mathbf{b} \cdot \int_A \Phi \mathbf{n} dA = \mathbf{b} \cdot \int_V \nabla \Phi dV$$

Cette expression est vraie quel que soit $\mathbf{b}$ constant, et de ce fait on doit avoir :

$$\int_A \Phi \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \Phi dV$$

La force totale appliquée au conduit a donc pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_e \\ &= \dot{m}v_1 \mathbf{N}_1 - \dot{m}v_2 \mathbf{N}_2 \\ &\quad + (p_1 - p_a)A_1 \mathbf{N}_1 - (p_2 - p_a)A_2 \mathbf{N}_2 \\ &\quad + m_v \mathbf{g} \end{aligned} \quad (IX, 17)$$

Cette expression pour $\mathbf{F}_T$ se distingue de celle de $\mathbf{F}_p$ par les termes de pression qui font intervenir $p_1 - p_a$ au lieu de p_1 , et $p_2 - p_a$ au lieu de p_2 .

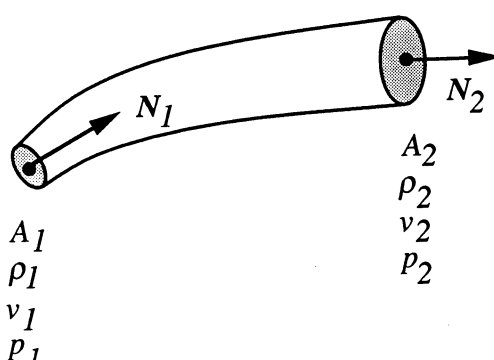
Les pressions relatives remplacent ici les pressions absolues. On peut donc définir une impulsion modifiée :

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} - p_a A = \dot{m}v + (p - p_a)A \quad (IX, 18)$$

La force totale prend alors la forme :

$$\mathbf{F}_T = \mathcal{F}'_1 \mathbf{N}_1 - \mathcal{F}'_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g} \quad (IX, 19)$$

Encadré 3. Force totale appliquée à une section de conduit par l'écoulement interne et le milieu ambiant



Le milieu ambiant est uniforme et au repos et sa pression est constante et égale à p_a .

$$F_T = \mathcal{F}'_1 N_1 - \mathcal{F}'_2 N_2 + m_v g$$

où N_1 et N_2 sont les normales orientées dans la direction de l'écoulement.

m_v est la masse du fluide contenu dans la section de conduit considérée.

$\mathcal{F}'$ est l'impulsion modifiée.

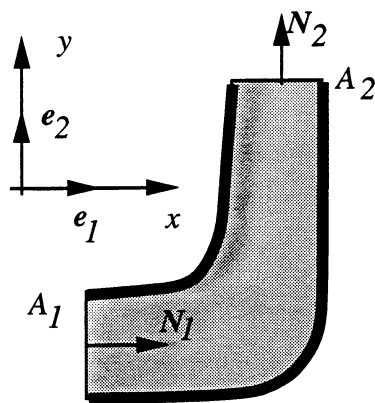
$$\mathcal{F}' = \dot{m}v + (p - p_a)A$$

Exemple 1

De l'eau sous pression $p_1 = 16 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ entre dans une section de conduit représentée à la figure 3 avec une vitesse de 5 m/s . Les surfaces des sections d'entrée et de sortie sont respectivement $A_1 = 0.08 \text{ m}^2$ et $A_2 = 0.01 \text{ m}^2$. La direction de sortie est à 90° de la direction d'entrée et la pression de sortie est $p_2 = 10 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La pression atmosphérique qui règne autour du conduit est uniforme et égale à $1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 .

Calculer la force exercée par l'eau sur la paroi du conduit (on ne prendra pas en compte le poids de la masse d'eau). Calculer la force totale appliquée par le fluide en écoulement et par le milieu ambiant sur l'élément de canalisation.

Solution



On suppose que l'écoulement est stationnaire et unidimensionnel en entrée et sortie :

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

La vitesse de sortie est :

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{(5)(0.08)}{0.01} = 40 \text{ m/s}$$

et le débit masse est :

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = (1000)(5)(0.08) = 400 \text{ kg/s}$$

Figure 3. Une section de conduit.

Les normales orientées dans la direction de l'écoulement sont : $N_1 = e_1$ et $N_2 = e_2$.

Les impulsions d'entrée et de sortie sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \dot{m}v_1 + p_1 A_1 = (400)(5) + (16 \cdot 10^5)(0.08) \\ &= 130000 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_2 = \dot{m}v_2 + p_2A_2 = (400)(40) + (10 \cdot 10^5)(0.01) = 26000 \text{ N}$$

La force pariétale est donnée par :

$$F_p = \mathcal{F}_1N_1 - \mathcal{F}_2N_2 + m_v g$$

Si on néglige le poids de l'eau, on a :

$$F_{px} = \mathcal{F}_1 = 130000 \text{ N}, \quad F_{py} = -\mathcal{F}_2 = -26000 \text{ N}$$

Pour calculer la force totale, il suffit de calculer les impulsions modifiées :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_1 &= \mathcal{F}_1 - p_a A_1 = 130000 - (10^5)(0.08) = 122000 \text{ N} \\ \mathcal{F}'_2 &= \mathcal{F}_2 - p_a A_2 = 26000 - (10^5)(0.01) = 25000 \text{ N} \end{aligned}$$

On a donc dans ce cas :

$$F_{Tx} = 122000 \text{ N}, \quad F_{Ty} = -25000 \text{ N}$$

Exemple 2. Poussée sur un coude

On considère un fluide en écoulement permanent dans une canalisation comportant un coude (figure 4). La canalisation présente une section constante et θ désigne l'angle entre les sections d'entrée et de sortie.

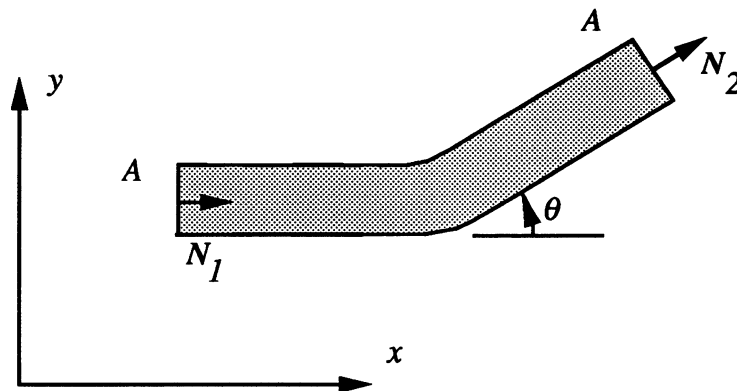


Figure 4. Une canalisation comportant un coude.

On suppose (1) que le fluide est dénué de viscosité (pas de pertes de charge),
 (2) que la canalisation est horizontale.

Donner les expressions des composantes de la force appliquée par le fluide sur la canalisation.

Application numérique : $\theta = 60^\circ$, $v_1 = 5 \text{ m/s}$, $p_1 = 4 \text{ bar}$, $A = 0.06 \text{ m}^2$.

Solution

L'équation de continuité s'écrit en supposant l'écoulement unidimensionnel :

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A = \rho_2 v_2 A, \quad A_1 = A_2 = A$$

et on en déduit facilement $v_1 = v_2$.

La conduite est horizontale et il n'y a pas de pertes de charge. Dans ces conditions, le théorème de Bernoulli indique que la pression reste aussi constante entre les sections d'entrée et de sortie.

$$p_1 = p_2 = p$$

La force qu'exerce le fluide en écoulement sur la canalisation est donnée par le théorème des quantités de mouvement sous la forme :

$$\mathbf{F}_p = \dot{m} \mathbf{v}_1 - \dot{m} \mathbf{v}_2 + p_1 A \mathbf{N}_1 - p_2 A \mathbf{N}_2$$

soit ici :

$$\mathbf{F}_p = (\dot{m} v + p A)(\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2)$$

Cette force est dirigée dans la direction $\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2$ et son module est :

$$|\mathbf{F}_p| = |\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2|(\dot{m} v + p A)$$

Comme

$$\begin{aligned} |\mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2| &= (N_1^2 + N_2^2 - 2\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2)^{1/2} \\ &= (2 - 2 \cos \theta)^{1/2} = 2 \sin(\theta/2) \end{aligned}$$

$$|\mathbf{F}_p| = 2 \sin \frac{\theta}{2} (\dot{m} v + p A)$$

Les composantes de la force $\mathbf{F}_p$ suivant les axes x et y sont :

$$\begin{aligned} F_{px} &= (1 - \cos \theta)(\dot{m} v + p A) \\ F_{py} &= -\sin \theta (\dot{m} v + p A) \end{aligned}$$

Le débit masse est :

$$\dot{m} = \rho A v = (1000)(0.06)(5) = 300 \text{ kg/s}$$

L'impulsion en entrée et sortie est :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 &= \dot{m} v + p A = (300)(5) + (4 \cdot 10^5)(0.06) \\ &= 25500 \text{ N} \end{aligned}$$

et le module de la force pariétale est :

$$|F_p| = 2 \sin(30^\circ)(25500) = 25500 \text{ N}$$

IX.2.2. Ecoulements avec frottement

Nous venons d'obtenir une expression pour la résultante des forces s'exerçant sur la paroi latérale d'un système en supposant :

- (1) un écoulement stationnaire,
- (2) un **écoulement unidimensionnel en entrée et en sortie** du système,
- (3) l'absence de forces de frottement, c'est-à-dire l'absence de contraintes visqueuses.

En fait la troisième hypothèse n'est pas essentielle et nous allons voir ici qu'il est possible d'obtenir une expression analogue à (IX,9) dans des **conditions moins restrictives**. En présence de forces de frottements, nous devons prendre en compte le quatrième terme de l'expression (IX,1). Ce terme peut être décomposé en trois parties :

$$\int_A \tau \cdot n dA = \int_\Sigma \tau \cdot n dA + \int_{A_1} \tau \cdot n dA + \int_{A_2} \tau \cdot n dA \quad (IX, 20)$$

Nous savons que $\tau \cdot n$ représente la contrainte visqueuse qui s'exerce sur la surface de normale extérieure n . Sur la paroi latérale du système étudié, le fluide exerce donc une force :

$$F_p = \int_\Sigma (pn - \tau \cdot n) dA \quad (IX, 21)$$

Il faut en effet inclure les forces de pression et les contraintes visqueuses pour évaluer le vecteur contrainte qui s'applique à chaque élément de paroi. Dans ces conditions, on peut obtenir facilement :

$$F_p = \mathcal{F}_1 N_1 - \mathcal{F}_2 N_2 + m_v g + \int_{A_1} \tau \cdot n dA + \int_{A_2} \tau \cdot n dA \quad (IX, 22)$$

Il nous reste à évaluer les intégrales de surface des contraintes visqueuses. Considérons par exemple la section A_1 (figure 5). Utilisons comme système de coordonnées un système d'axes dont l'axe x_1 est aligné avec N et dont les axes x_2 et x_3 se trouvent dans le plan de la section A_1 .

La normale n_1 a pour projections $(-1,0,0)$ et par conséquent :

$$(\tau \cdot n)_{A_1} = -\tau_{11} e_1 - \tau_{12} e_2 - \tau_{13} e_3 \quad (IX, 23)$$

Pour évaluer les composantes des contraintes τ_{11}, τ_{12} et τ_{13} , supposons que le fluide soit newtonien :

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \\ \tau_{12} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{13} &= \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (IX, 24)$$

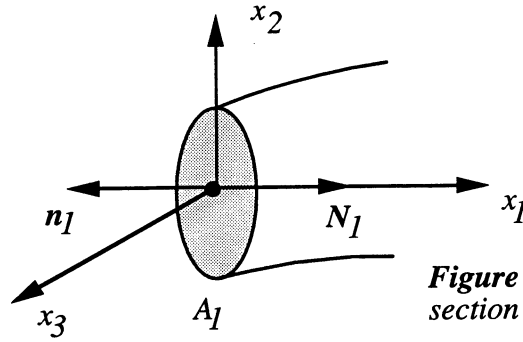


Figure 5. Coordonnées locales dans la section d'entrée du conduit.

L'écoulement dans la section A_1 est unidimensionnel et par conséquent $v_2 = v_3 = 0$ et $\partial v_1 / \partial x_2 = \partial v_1 / \partial x_3 = 0$.

On a donc :

$$\tau_{11} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \tau_{12} = \tau_{13} = 0 \quad (\text{IX}, 25)$$

Si de plus les variations de la vitesse dans la direction axiale sont faibles, on peut négliger τ_{11} (il suffit pour cela de placer la section d'entrée A_1 en un point où les caractéristiques de l'écoulement varient faiblement).

Dans ces conditions :

$$\int_{A_1} \tau \cdot n dA \simeq 0 \quad (\text{IX}, 26)$$

et l'on retrouve pour la force pariétale :

$$\mathbf{F}_p = \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 27)$$

Ce résultat est identique à celui obtenu plus haut, mais cette fois nous n'avons plus supposé l'absence des forces de frottement. La formule (IX,27) n'est strictement valable que si les contraintes visqueuses dans la section d'entrée et de sortie du système sont nulles ou négligeables. Cette condition est réalisée dans la plupart des cas pratiques.

IX.3. Le théorème du moment angulaire pour les écoulements permanents

Il est très souvent intéressant de pouvoir évaluer le **moment angulaire des forces** appliquées par un fluide en écoulement sur la paroi latérale du système qui le contient. A cet effet, on suit une démarche très proche de celle déjà utilisée pour la détermination de la résultante des forces hydrodynamiques. Ici aussi nous allons d'abord supposer que le fluide est dénué de viscosité (c'est-à-dire que les seules forces de surface sont des forces de pression agissant suivant la normale à la surface). Nous partons ici de l'expression intégrale du théorème du moment angulaire écrite pour un volume V de fluide (figure 6).

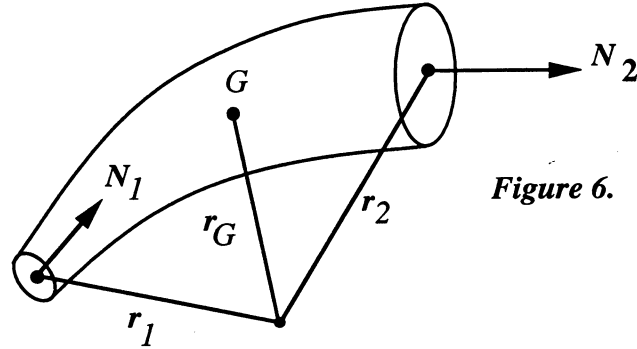


Figure 6.

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} dV + \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \\ = - \int_A \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA + \int_A \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dA + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (IX, 28)$$

Le vecteur $\mathbf{r}$ représente la position du point courant par rapport au point autour duquel on souhaite calculer les moments angulaires. Comme l'écoulement est stationnaire, le premier terme est identiquement nul. Nous supposons en outre que le fluide est dénué de viscosité. Ainsi le quatrième terme disparaît et il reste :

$$\int_A \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = - \int_A \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \quad (IX, 29)$$

Le moment angulaire des forces hydrodynamiques exercé par le fluide sur la paroi latérale Σ du système est :

$$\mathbf{M}_p = \int_{\Sigma} \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA \quad (IX, 30)$$

On peut faire apparaître $\mathbf{M}_p$ en décomposant le deuxième terme de l'expression (IX,29) en trois parties :

$$\int_A \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA = \mathbf{M}_p + \int_{A_1} \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA + \int_{A_2} \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA \quad (IX, 31)$$

En substituant cette dernière expression dans (IX,29), on obtient facilement :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p = - \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA - \int_{A_1} \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA \\ - \int_{A_2} \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (IX, 32)$$

Comme $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur la paroi latérale Σ , le premier terme se réduit à une intégrale sur $A_1 + A_2$ et l'expression (IX,32) devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p = & - \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dA \\ & - \int_{A_2} \mathbf{r} \times [\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dA + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (\text{IX}, 33)$$

L'expression (IX,33) peut être appliquée dans le cas général. Si l'écoulement est unidimensionnel dans les sections A_1 et A_2 , les quantités entre crochets sont des constantes sur A_1 et A_2 et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p = & - \int_{A_1} \mathbf{r} \times [\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}]_{A_1} dA \\ & - \int_{A_2} \mathbf{r} \times [\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}]_{A_2} dA + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \end{aligned} \quad (\text{IX}, 34)$$

Soient G_1 et G_2 les barycentres des sections A_1 et A_2 et $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ les positions de G_1 et G_2 . On peut écrire :

$$\int_{A_1} \mathbf{r} dA = \mathbf{r}_1 A_1, \quad \int_{A_2} \mathbf{r} dA = \mathbf{r}_2 A_2$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}]_{A_1} &= -(\rho_1 v_1^2 + p_1) \mathbf{N}_1 = -\mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 \\ [\mathbf{v}(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}]_{A_2} &= (\rho_2 v_2^2 + p_2) \mathbf{N}_2 = +\mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 \end{aligned}$$

Le moment des forces volumiques peut être représenté sous la forme compacte :

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV = \mathbf{r}_G \times m_v \mathbf{g}$$

où $\mathbf{r}_G$ désigne la position du centre de gravité du fluide contenu dans le volume V .

Dans ces expressions, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont les impulsions en entrée et sortie du système, $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$ sont les normales orientées dans la direction de l'écoulement, et m_v représente la masse totale du volume fluide considéré.

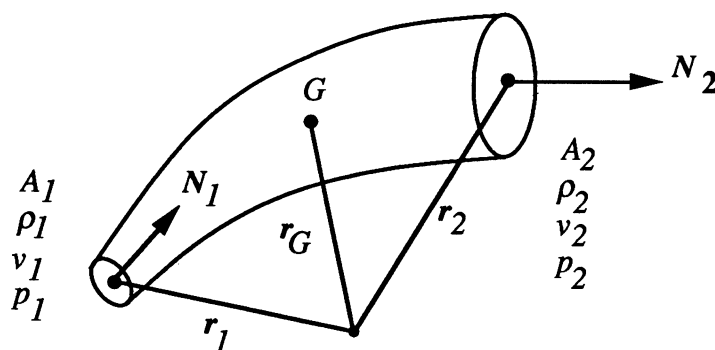
On peut alors écrire une expression particulièrement simple pour $\mathbf{M}_p$:

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{r}_1 \times \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{r}_G \times m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 35)$$

Cette expression fait apparaître la différence des moments angulaires des impulsions en entrée et sortie du système :

$$\mathbf{M}_p = -\Delta(\mathbf{r} \times \mathcal{F} \mathbf{N}) + \mathbf{r}_G \times m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 36)$$

Encadré 4. Moment angulaire des forces appliquées sur la paroi latérale d'un système



$$M_p = \mathbf{r}_1 \times \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{r}_G \times m_v \mathbf{g}$$

- $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ désignent les positions des barycentres des surfaces A_1 et A_2
 $\mathbf{r}_G$ est la position du centre de gravité de la masse de fluide
 m_v la masse du volume de fluide considéré
 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ les impulsions $\mathcal{F} = \dot{m}v + pA$
 $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ les normales orientées dans la direction de l'écoulement
 L'écoulement est stationnaire et unidimensionnel en entrée et sortie du système.

Si le système considéré est plongé dans un milieu ambiant uniforme et au repos, on peut évaluer le **moment angulaire total** des forces qui s'exercent sur la paroi latérale Σ du système. L'évaluation de ce moment peut être effectuée en suivant un raisonnement identique à celui déjà utilisé pour obtenir la force totale. Sans refaire la démonstration le résultat final se présente sous la forme:

$$M_T = \mathbf{r}_1 \times \mathcal{F}'_1 \mathbf{N}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathcal{F}'_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{r}_G \times m_v \mathbf{g} \quad (\text{IX}, 37)$$

où $\mathcal{F}'$ désigne l'impulsion modifiée :

$$\mathcal{F}' = \dot{m}v + (p - p_a)A \quad (\text{IX}, 38)$$

IX.4. La poussée d'un moteur à réaction

Le théorème des quantités de mouvement permet d'établir une expression pour la **poussée nette** d'un moteur à réaction.

Les moteurs de ce type opèrent de la manière suivante (figure 7). Le moteur reçoit un débit masse $\dot{m}_a$ d'air frais provenant de l'amont. Cet air passe dans une manche d'admission ou

diffuseur, il est ensuite comprimé dans un compresseur puis mélangé avec du carburant et le mélange est brûlé dans une chambre de combustion. L'enthalpie d'arrêt de l'écoulement est ainsi augmentée. Le mélange à haute température passe ensuite dans une turbine, puis il est détendu dans une tuyère et éjecté à grande vitesse. Les détails que nous venons de donner ne sont pas utiles à l'établissement d'une formule globale pour la poussée nette.

La figure 8 représente le modèle du moteur qui sert de base à l'analyse. Nous utilisons ici un système de coordonnées en translation uniforme avec le moteur. Dans ce système, le moteur est au repos et le fluide situé en amont se dirige vers le moteur à la vitesse v_o .

La section 1 du volume de contrôle de la figure est placée suffisamment en amont du moteur de telle sorte que la pression et la vitesse qui règnent dans cette section soient respectivement p_o et v_o (les conditions à l'infini amont dans l'écoulement libre).

La section 2 est la section de sortie du moteur et les conditions qui règnent dans cette section (d'éjection) sont p_e, v_e . Le débit masse rentrant dans le moteur est $\dot{m}_a$ et le débit sortant, constitué par la somme du débit air et du débit de carburant est : $\dot{m}_e = \dot{m}_a + \dot{m}_f$. En général, le débit de carburant est beaucoup plus faible que le débit d'air et $\dot{m}_f$ peut être négligé si l'on souhaite seulement obtenir une estimation de la poussée.

Considérons à présent le volume de contrôle V situé à l'intérieur de la surface de contrôle $A_o + \Sigma_a + \Sigma + A_e$. Nous allons écrire le bilan des quantités de mouvement pour ce volume en supposant que les forces de frottement associées aux contraintes visqueuses sont négligeables (cette hypothèse est uniquement utilisée pour simplifier le raisonnement).

La variation de quantité de mouvement du fluide passant dans le volume de contrôle V est égale à la somme de toutes les forces qui s'exercent sur la surface de ce volume.

$$\mathbf{F}_S = \int \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (IX, 39)$$

Désignons par F_p la force qu'exerce le fluide en écoulement sur la surface interne du moteur. La projection de l'équation (IX,39) sur l'axe des x donne :

$$-F_p - \int_{\Sigma_a} p(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA + p_o A_o - p_e A_e = \dot{m}_e v_e - \dot{m}_a v_o \quad (IX, 40)$$

soit :

$$-F_p = \dot{m}_e v_e - \dot{m}_a v_o + p_e A_e - p_o A_o + \int_{\Sigma_a} p(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 41)$$

Désignons par F_e la somme des forces de pression qui agissent sur la surface externe du moteur :

$$F_e = - \int_{\Sigma_1} p(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 42)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} -F_T = -(F_p + F_e) = & \dot{m}_e v_e - \dot{m}_a v_o + p_e A_e - p_o A_o \\ & + \int_{\Sigma_a} p(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA + \int_{\Sigma_1} p(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \end{aligned} \quad (IX, 43)$$

Ici $F_T = F_p + F_e$ représente la force totale qui agit sur le moteur.

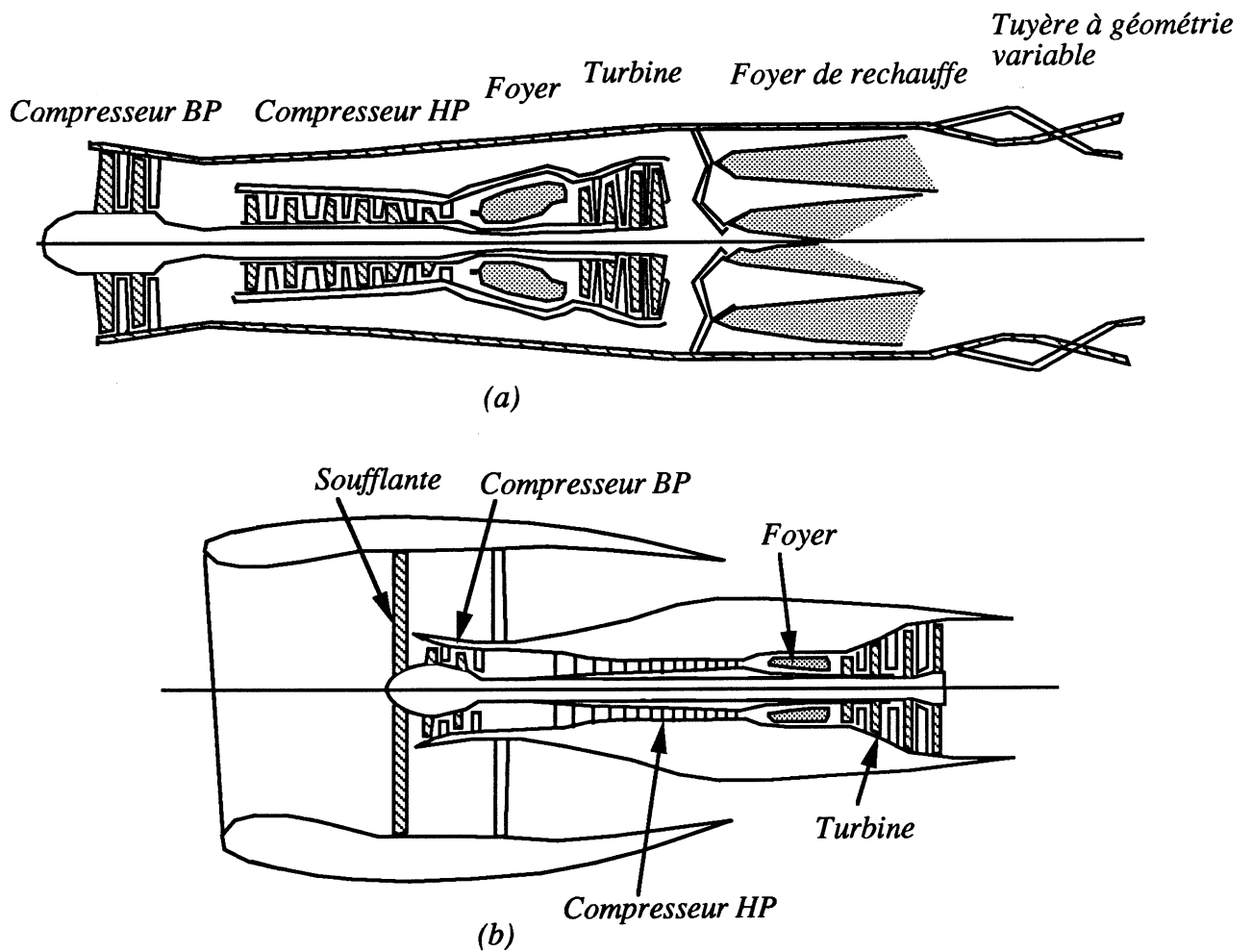


Figure 7. Représentations schématiques de turbo réacteurs.
 (a) Turbo réacteur à double flux et foyer de rechauffe.
 (b) Turbo réacteur à double flux.

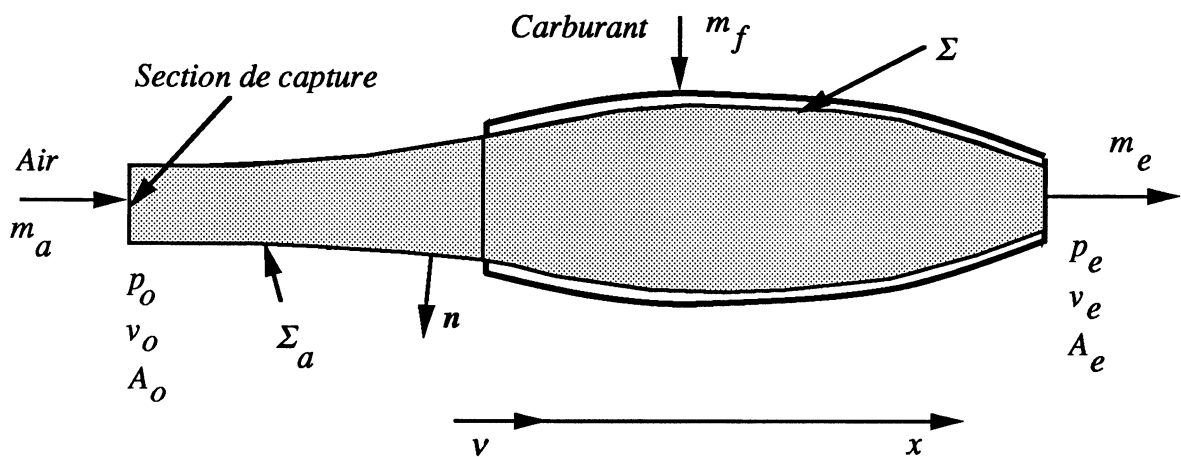


Figure 8. Volume de contrôle pour la détermination de la poussée d'un turbo réacteur.

Il est plus commode de réécrire cette expression en retranchant des deux membres :

$$\int_{A_o + \Sigma_1 + \Sigma_a + A_e} p_o(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA = 0 \quad (IX, 44)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} -(F_T) = & \dot{m}_e v_e - \dot{m}_a v_o + (p_e - p_o) A_e \\ & + \int_{\Sigma_a} (p - p_o)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA + \int_{\Sigma_1} (p - p_o)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \end{aligned} \quad (IX, 45)$$

Le premier groupe de termes de cette expression est défini comme la **poussée** du moteur :

$$T = \dot{m}_e v_e - \dot{m}_a v_o + (p_e - p_o) A_e \quad (IX, 46)$$

Les deux termes suivants constituent la **traînée** :

$$D = - \int_{\Sigma_a + \Sigma_1} (p - p_o)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 47)$$

On a donc :

$$(-F_T) = T - D \quad (IX, 48)$$

et la force totale est égale à la poussée du moteur diminuée de la traînée.

La traînée totale D est elle-même composée de deux termes : une traînée associée aux forces de pression qui s'exercent sur la nacelle du moteur et une traînée additionnelle liée aux forces de pression qui existent le long de la surface de capture.

$$D_a = - \int_{\Sigma_a} (p - p_o)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 49)$$

Généralement la pression p est supérieure à p_o car l'écoulement décélère. La section du tube de courant capturé par le moteur augmente aussi et par conséquent $p - p_o > 0$, $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$ et la traînée associée à la surface de capture est positive.

Exemple

Un turboréacteur propulse un avion à une vitesse constante de 300 m/s . Le débit masse d'air qui passe dans le turboréacteur est de 90 kg/s , le débit de carburant est de 2 kg/s . La vitesse d'éjection des gaz est de 620 m/s et la pression d'éjection est égale à la pression ambiante. Calculer la poussée développée par le moteur.

Solution

La poussée s'exprime sous la forme :

$$T = \dot{m}_e v_e - \dot{m}_a v_o + (p_e - p_o) A_e$$

Ici :

$$\begin{aligned} T &= (90 + 2)620 - (90)(300) \\ T &= 30040 \text{ N} = 3004 \text{ daN} \end{aligned}$$

IX.5. Poussée d'un moteur fusée

La figure 9 donne le schéma de principe de moteurs à propergols liquides. Dans ce type de moteur les propergols sont stockés dans des réservoirs séparés. Un système de pressurisation ou de pompage permet l'injection des propergols dans la chambre de combustion. La pression qui règne dans la chambre est généralement élevée, de l'ordre de 50 bars dans les moteurs de la fusée Ariane 1; elle atteint 100 bars dans le moteur Vulcain de la fusée Ariane 5 et 200 bars dans les moteurs principaux de la navette spatiale américaine. Les gaz sont ensuite détendus dans une tuyère convergente divergente. (Les détails que nous venons de donner ne sont pas utiles à l'établissement d'une expression pour la poussée du moteur).

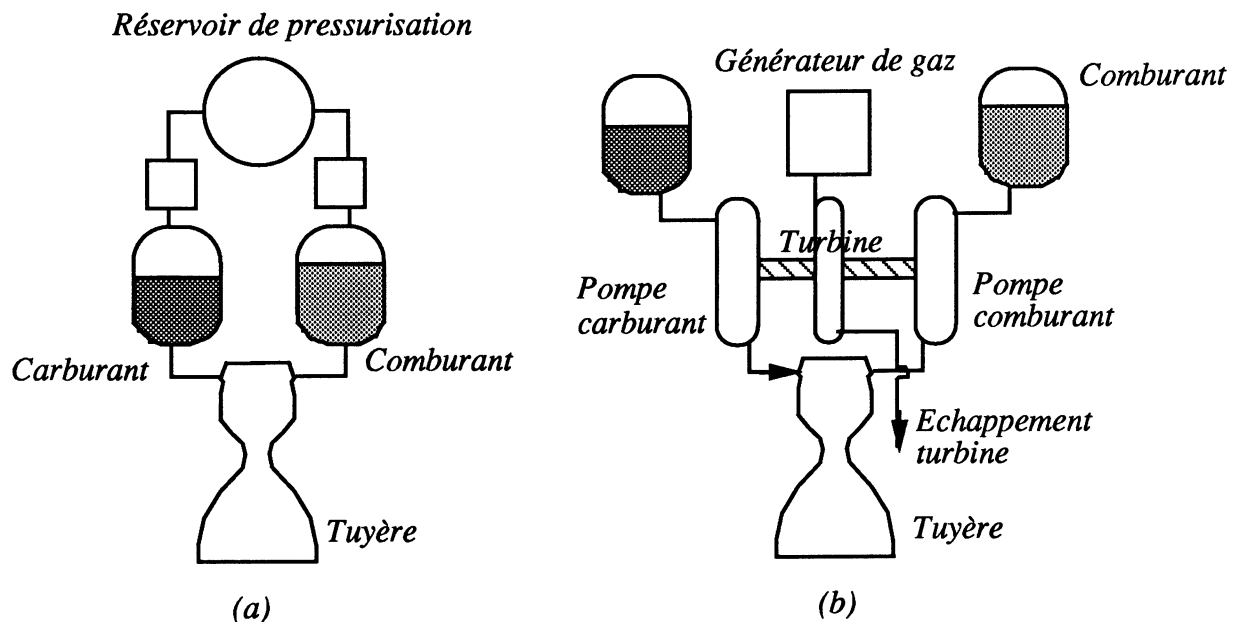


Figure 9. Schémas de principe de moteurs fusée à propergols liquides
 (a) La pressurisation des propergols est assurée par un réservoir de gaz sous pression.
 (b) La pressurisation des propergols est assurée par une turbopompe.

Pour obtenir cette expression nous utiliserons le volume de contrôle V de la figure 10. Pour simplifier l'analyse, on suppose que la quantité de mouvement associée aux propergols est négligeable et que les sections de passage des injecteurs sont très faibles. On suppose en outre que l'écoulement est unidimensionnel dans la section d'éjection de la tuyère. Des hypothèses moins restrictives peuvent être utilisées dans des calculs plus précis. L'objectif est ici d'illustrer l'application du théorème des quantités de mouvement et, pour cette raison, nous adoptons les hypothèses les plus simples.

La surface de contrôle qui limite le volume de contrôle V est formée par la section d'éjection

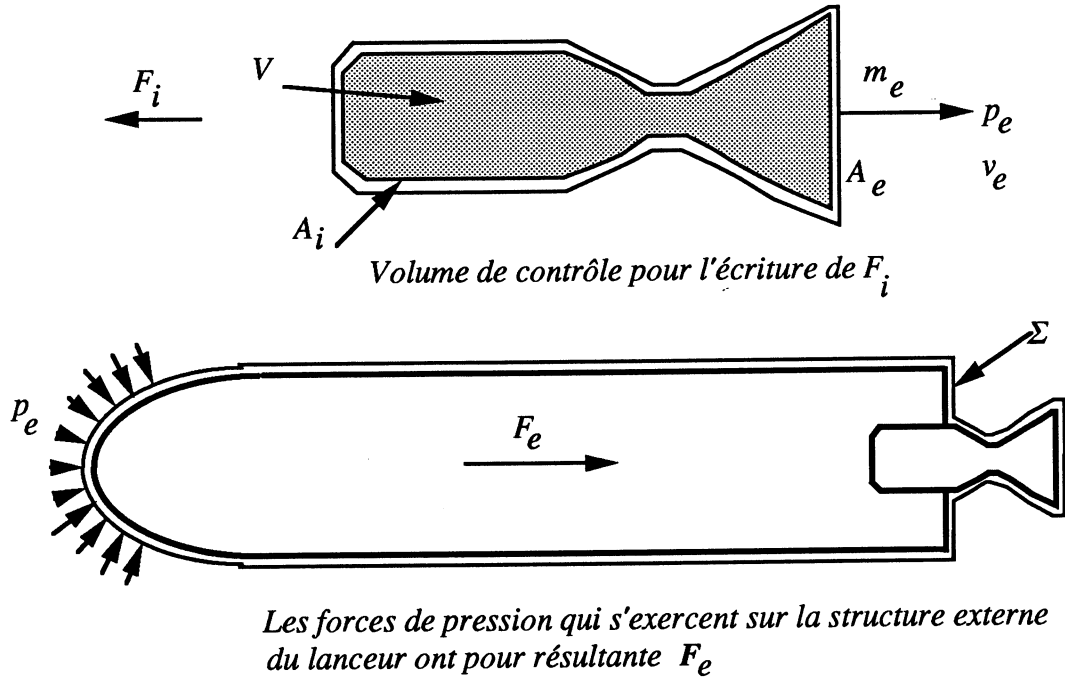


Figure 10. Volume et surface de contrôle pour la détermination de la poussée d'un moteur fusée.

A_e et la paroi interne de la chambre A_i . On peut écrire :

$$\mathbf{F}_S = \int_{A_e + A_i} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (\text{IX}, 50)$$

où $\mathbf{n}$ est la normale orientée vers l'extérieur du volume V .

Désignons par $\mathbf{F}_p$ la force qu'exerce le fluide en écoulement sur la paroi interne du moteur. La projection de l'équation (IX,50) sur l'axe des x donne :

$$-F_p - p_e A_e = \dot{m}_e v_e \quad (\text{IX}, 51)$$

Dans cette expression nous avons négligé le débit de quantité de mouvement à travers la paroi interne A_i ainsi que les forces de pression qui s'exercent au niveau des orifices des injecteurs.

Désignons par $\mathbf{F}_e$ la somme des forces qui s'exercent sur la structure externe du lanceur :

$$\mathbf{F}_e = - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} dA \quad (\text{IX}, 52)$$

où Σ désigne la surface de la structure externe.

En projection sur l'axe des x , on a :

$$-F_e = \int_{\Sigma} p (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (\text{IX}, 53)$$

La force totale qui s'exerce sur le lanceur est : $F_T = F_p + F_e$ et on peut écrire :

$$-(F_p + F_e) = \dot{m}_e v_e + p_e A_e + \int_{\Sigma} p(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 54)$$

Désignons par p_o la pression qui règne dans l'écoulement libre à une distance suffisante du lanceur. On peut écrire :

$$0 = \int_{\Sigma + A_e} p_o \mathbf{n} dA \quad (IX, 55)$$

ou encore :

$$0 = \int_{\Sigma + A_e} p_o (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 56)$$

En retranchant (IX,56) de (IX,54), on obtient :

$$-(F_p + F_e) = \dot{m}_e v_e + (p_e - p_o) A_e + \int_{\Sigma} (p - p_o) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 57)$$

Poussée

Traînée

Le premier groupe de termes constitue la poussée du moteur et le dernier terme représente la traînée :

$$T = \dot{m}_e v_e + (p_e - p_o) A_e \quad (IX, 58)$$

$$D = - \int_{\Sigma} (p - p_o) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) dA \quad (IX, 59)$$

Ainsi :

$$-F_T = T - D \quad (IX, 60)$$

Exemple

Le premier étage d'un lanceur de satellites est muni de quatre moteurs. Chaque moteur éjecte 250 kg/s et la vitesse des gaz est de 2500 m/s . La tuyère des moteurs est adaptée à la pression atmosphérique qui règne au sol. La section d'éjection de chaque tuyère vaut 0.904 m^2 .

- 1°) Déterminer la poussée développée par le lanceur au sol.
- 2°) La masse initiale du lanceur est $M_o = 130$ tonnes. Déterminer l'accélération initiale.
- 3°) Déterminer la poussée développée par le lanceur lorsqu'il se trouve à une altitude de 20 km . A cette altitude la pression ambiante est $p_a = 0.054 \text{ atm}$.

Solution

- 1°) La poussée de chaque moteur a pour forme :

$$T = \dot{m}_e v_e + (p_e - p_o) A_e$$

$$\text{Au sol } p_e = p_o \text{ et } T = (250)(2500) = 625000 \text{ N}$$

- 2°) L'accélération initiale du lanceur est donnée par le principe fondamental de la dynamique :

$$M_o \gamma_o = 4T - M_o g$$

$$\text{soit } \gamma_o = (4T - M_o g) / M_o = 9.42 \text{ m/s}^2$$

3°) A l'altitude de 20 km, la poussée de chaque moteur est :

$$\begin{aligned} T &= \dot{m}_e v_e + (p_e - p_o) A_e \\ &= (250)(2500) + (1 - 0.054)(1.013 \cdot 10^5)(0.904) \\ &= 625000 + 86630 = 711630 \text{ N} \end{aligned}$$

et les quatre moteurs développent une poussée de $2.84 \cdot 10^6 \text{ N}$.

IX.6. L'hélice propulsive

Une hélice communique au fluide ambiant une quantité de mouvement orientée dans la direction axiale. Il en résulte, par réaction, une poussée qui est transmise au véhicule. Le théorème des quantités de mouvement permet de déterminer la force propulsive et le rendement de propulsion de l'hélice.

Nous considérons une hélice qui se déplace à la vitesse v dans un fluide incompressible et stationnaire. La pression ambiante à grande distance de l'hélice est p_a (figure 11). A l'infini amont la vitesse du fluide $u'_1 = 0$.

A distance de l'hélice et en aval, le fluide possède une vitesse u'_2 . Considérons maintenant un référentiel en translation uniforme à la vitesse v de l'hélice (figure 12). Dans ce nouveau référentiel la vitesse en amont est $u_1 = v$ et la vitesse en aval et à distance de l'hélice est $u_2 = v + u'_2$.

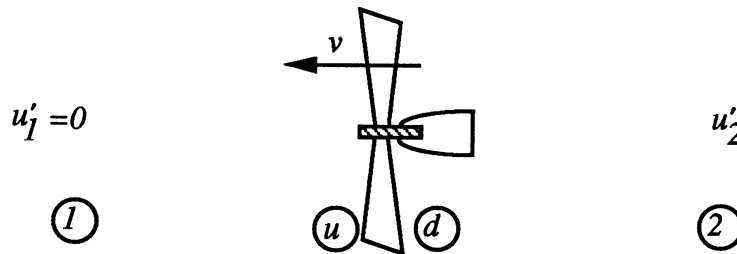


Figure 11. L'hélice avance à la vitesse v dans un fluide au repos.

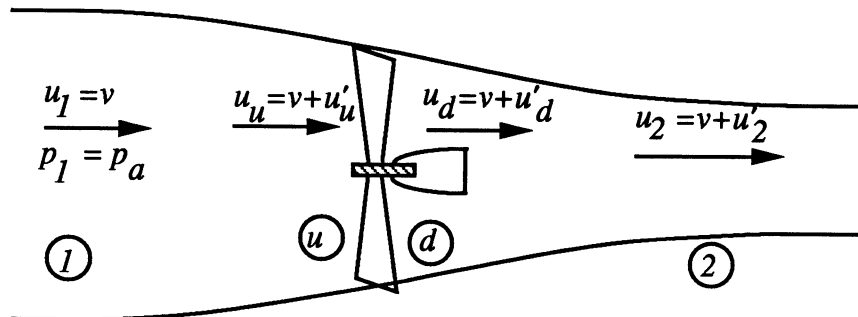


Figure 12. Représentation de l'écoulement dans un référentiel en mouvement avec l'hélice.

Au voisinage de l'hélice et en amont (section u), la vitesse est $u_u = v + u'_u$ et au voisinage aval de l'hélice (section d) la vitesse est $u_d = v + u'_d$. Les pressions dans ces deux sections sont respectivement p_u et p_d .

Notons dès maintenant que les vitesses u_1 et u_u ne sont pas les mêmes, car l'écoulement amont converge vers l'hélice. En aval aussi $u_d \neq u_2$. On peut maintenant écrire les bilans de masse de quantité de mouvement et d'énergie entre les sections u et d :

$$\begin{aligned} \text{Masse :} & \quad A_u u_u = A_d u_d \\ \text{Quantité de mouvement :} & \quad T = A_d(p_d + \rho u_d^2) - A_u(p_u + \rho u_u^2) \\ \text{Energie :} & \quad w' = \left(h_d + \frac{u_d^2}{2}\right) - \left(h_u + \frac{u_u^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (IX, 61)$$

Dans ces expressions, T désigne la force appliquée par l'hélice sur le fluide (c'est aussi la poussée), w' représente le travail communiqué par l'hélice à chaque unité de masse de fluide et h désigne l'enthalpie $h = p/\rho$.

Les sections A_u et A_d se trouvent au voisinage immédiat de l'hélice et elles peuvent être considérées comme identiques. Il en résulte que :

$$u_u = u_d$$

et on peut écrire :

$$T = A(p_d - p_u) \quad (IX, 62)$$

$$w' = (p_d - p_u)/\rho \quad (IX, 63)$$

On peut maintenant exprimer les conditions dans la section u en fonction de celles qui règnent en amont dans la section 1. Utilisons pour cela le théorème de Bernoulli écrit entre les sections 1 et u :

$$p_1 + \rho \frac{v^2}{2} = p_u + \rho \frac{1}{2}(v + u'_2)^2 \quad (IX, 64)$$

De la même manière, on peut écrire entre les sections d et 2 :

$$p_d + \frac{\rho}{2}(v + u'_d)^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}(v + u'_2)^2 \quad (IX, 65)$$

En rapprochant ces deux relations on obtient :

$$\begin{aligned} p_d - p_u &= \frac{\rho}{2}(v + u'_d)^2 - \rho \frac{v^2}{2} \\ &= \frac{\rho}{2}(2vu'_2 + u'^2_2) \end{aligned} \quad (IX, 66)$$

La poussée prend la forme suivante :

$$T = A(p_d - p_u) = \rho A u'_2 (v + \frac{u'_2}{2}) \quad (IX, 67)$$

On peut aussi relier la poussée à la variation totale de quantité de mouvement entre les sections 1 et 2 :

$$T = \dot{m}[(v + u'_2) - v] \quad (IX, 68)$$

et comme : $\dot{m} = \rho A(v + u'_u)$
on obtient :

$$T = \rho A u'_2 (v + u'_u) \quad (IX, 69)$$

En rapprochant (IX,67) et (IX,69), on obtient :

$$u'_u = u'_d = \frac{u'_2}{2} \quad (IX, 70)$$

Ainsi la **moitié de la contraction du tube de courant** s'effectue entre les sections 1 et u et l'autre moitié entre les sections d et 2. Il s'agit déjà d'un résultat intéressant.

Nous allons maintenant déterminer le rendement de propulsion. Ce rendement est défini comme le rapport de la puissance utile (associée à la poussée) à la puissance totale.

La puissance utile est égale au produit de la poussée et de la vitesse d'avancement de l'hélice : $P_u = Tv$.

La puissance totale fournie au fluide est : $P_m = w' \dot{m}$.

D'après (IX,62) et (IX,63), on a : $w' = T/A\rho$ et comme $\dot{m} = \rho A(v + u'_u)$, la puissance totale s'écrit :

$$P_m = T(v + u'_u) \quad (IX, 71)$$

on peut donner une interprétation physique à cette expression. En effet d'après (IX,71) :

$$P_m = Tv + Tu'_u \quad (IX, 72)$$

et si l'on tient compte de $T = \dot{m}u'_2$ et de $u'_u = u'_2/2$ obtenus plus haut :

$$P_m = Tv + \dot{m} \frac{u'^2_2}{2} \quad (IX, 73)$$

La puissance totale apparaît comme la somme de la puissance utile et de l'énergie cinétique communiquée au fluide par l'hélice :

$$P_m = P_u + [\text{énergie cinétique communiquée au fluide}]$$

Le rendement de propulsion est donné par le rapport :

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{Tv}{T(v + u'_u)} \quad (IX, 74)$$

soit :

$$\eta = \frac{v}{v + u'_u}$$

ou encore :

$$\eta = \frac{v}{v + (u'_2/2)} = \frac{2v}{v + (v + u'_2)} \quad (\text{IX}, 75)$$

On peut aussi écrire :

$$\eta = \frac{2v}{u_1 + u_2} \quad (\text{IX}, 76)$$

Le rendement de propulsion est maximum et égal à 1, lorsque u'_2 est nul, mais, dans ce cas, la poussée s'annule aussi.

En général le rendement η ne dépasse pas 0.85 pour les avions et 0.60 pour les navires.

Le raisonnement que nous venons de faire ne permet pas la détermination de la vitesse u'_2 . Pour obtenir cette vitesse, il faut par exemple mesurer expérimentalement la puissance P_m . En général on représente les variations du facteur de puissance : $P_m/\rho A v^3$ en fonction du rapport v/V où V désigne la vitesse de l'hélice en extrémité de pale.

Le facteur de puissance peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{P_m}{\rho A v^3} = \left(1 + \frac{u'_2}{2v}\right)^2 \frac{u'_2}{v} \quad (\text{IX}, 77)$$

et on peut donc déduire la valeur de u'_2/v correspondant à chaque valeur de v/V .

IX.7. Ecoulement à travers une éolienne

Une éolienne placée dans un fluide en mouvement ralentit le fluide en transformant en travail sur l'arbre l'énergie cinétique perdue par le fluide (figure 13).

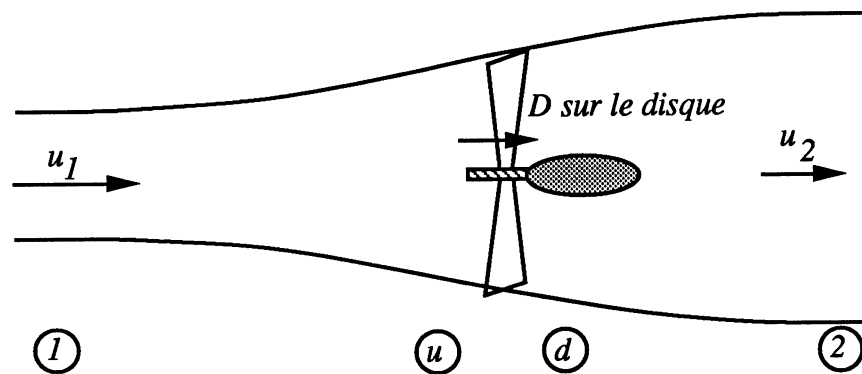


Figure 13. Ecoulement au travers d'une éolienne.

On peut appliquer ici des méthodes d'analyse identiques à celles utilisées pour l'hélice propulsive.

Désignons par u_1 et u_2 les vitesses en amont et en aval de l'éolienne et par v la vitesse de l'écoulement au voisinage immédiat de l'hélice. Le débit masse passant à travers l'hélice est : $\dot{m} = \rho A v$

La traînée de l'hélice peut être obtenue par application du théorème des quantités de mouvement entre les sections 1 et 2.

$$D = \dot{m}(u_1 - u_2) \quad (IX, 78)$$

La puissance développée par cette force est :

$$P = Dv = \rho A v^2 (u_1 - u_2) \quad (IX, 79)$$

Cette puissance est égale à la variation de puissance subie par l'air à la traversée de l'éolienne :

$$P = \rho A v \left(\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} \right) \quad (IX, 80)$$

En rapprochant les expressions précédentes, on obtient :

$$v = \frac{(u_1 + u_2)}{2} \quad (IX, 81)$$

La vitesse au voisinage immédiat de l'éolienne est égale à la moyenne des vitesses amont et aval.

La puissance développée par l'éolienne est donnée par l'expression :

$$P = \rho A \frac{(u_1 + u_2)^2}{4} (u_1 - u_2) \quad (IX, 82)$$

Désignons par A_1 et A_2 les sections du tube de courant en amont et en aval de l'éolienne et posons :

$$A_1 = \alpha A_2 \quad \text{avec :} \quad \alpha < 1$$

L'équation de conservation de la masse donne : $u_2 = \alpha u_1$ et l'expression (IX,82) peut s'écrire en fonction de u_1 et du facteur d'expansion du tube de courant :

$$P = \frac{\rho A u_1^3}{4} (1 + \alpha)^2 (1 - \alpha) \quad (IX, 83)$$

Le rendement de l'éolienne est généralement défini comme le rapport de la puissance utile P à la puissance totale disponible dans le fluide passant à travers l'éolienne :

$$\eta = \frac{P}{\rho A u_1 (u_1^2/2)} = \frac{(1 + \alpha)^2 (1 - \alpha)}{2} \quad (IX, 84)$$

Ce rendement est maximum lorsque $\alpha = 1/3$ ($\eta_{\max} = 0.59$). En pratique, le rendement le plus élevé susceptible d'être atteint est de l'ordre de 0.50.

IX.8. Evaluation de la perte de charge dans une conduite présentant un élargissement brusque

Considérons deux conduites cylindriques des sections A_1 et A_2 raccordées l'une à l'autre. Au passage de la première à la seconde, il y a élargissement brusque de la section (figure 14). L'expérience montre que l'écoulement décolle de la paroi à l'entrée de l'élargissement. Dans la région décollée, il y a formation de tourbillons et ce processus induit une perte de charge.

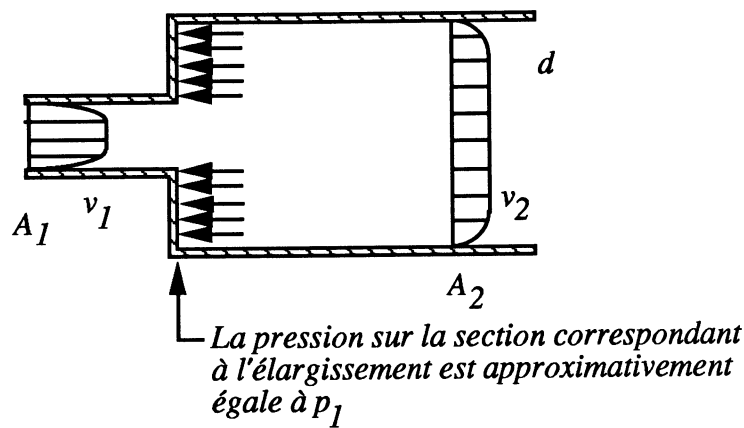


Figure 14. Schématisation de l'écoulement dans un élargissement brusque.

A une distance de l'ordre de 20 diamètres, l'écoulement reprend une allure régulière et la répartition des vitesses redevient sensiblement uniforme.

Pour calculer la perte de charge associée à l'élargissement brusque, nous écrirons les bilans de masse et de quantité de mouvement et nous ferons en outre l'hypothèse que **la pression sur la section $A_2 - A_1$ adjacente à la région décollée est égale à p_1** . (Cette hypothèse s'appuie sur des observations expérimentales).

Entre les sections 1 et 2, le bilan de masse donne :

$$\dot{m} = \rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2 \quad (\text{IX}, 85)$$

Désignons par F_x la projection de la force qu'exerce la paroi du conduit sur le fluide en écoulement entre les sections 1 et 2. Le théorème des quantités de mouvement donne :

$$F_x = \dot{m}(v_2 - v_1) + p_2 A_2 - p_1 A_1 \quad (\text{IX}, 86)$$

D'autre part, la force qu'exerce la paroi sur le fluide projetée suivant x se réduit à la somme de pressions qui s'exercent sur la section $A_2 - A_1$:

$$F_x = p_1(A_2 - A_1) \quad (\text{IX}, 87)$$

En rapprochant les deux relations précédentes, on obtient :

$$p_1(A_2 - A_1) = \dot{m}(v_2 - v_1) + p_2 A_1 - p_1 A_1 \quad (IX, 88)$$

soit :

$$(p_1 - p_2)A_2 = \dot{m}(v_2 - v_1) \quad (IX, 89)$$

En substituant : $\dot{m} = \rho A_2 v_2$, on obtient facilement :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = v_2(v_2 - v_1) \quad (IX, 90)$$

La perte de charge entre les sections 1 et 2 est, par unité de masse de fluide :

$$e_v = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2}\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}\right) \quad (IX, 91)$$

En substituant (IX,90), on obtient :

$$e_v = v_2(v_2 - v_1) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) \quad (IX, 92)$$

soit :

$$e_v = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (IX, 93)$$

On peut encore écrire :

$$e_v = \frac{v_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (IX, 94)$$

La perte de charge s'annule lorsque $A_1 = A_2$, et elle est maximum lorsque la section A_2 est infinie, c'est-à-dire lorsque le conduit 1 débouche dans un réservoir de très grande section.

Application numérique

On considère de l'eau s'écoulant dans une canalisation dont le diamètre est $d_1 = 0.10 \text{ m}$ vers une canalisation dont le diamètre est $d_2 = 0.20 \text{ m}$. La vitesse de l'eau dans la première canalisation est $v_1 = 2 \text{ m/s}$. Déterminer la perte de charge associée à l'élargissement brusque.

Solution

Le rapport des sections A_1/A_2 est donné par :

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

La perte de charge par unité de masse a pour expression :

$$e_v = \frac{v_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Ici : $e_v = \frac{(2)^2}{2} (1 - 0.25)^2 = 1.13 \text{ J/kg}$.

La perte de puissance associée à cette perte de charge est : $P_v = \dot{m}e_v = \rho_1 A_1 v_1 e_v$.

Ici : $A_1 = 0.0079 \text{ m}^2$
 $P_v = (10^3)(0.0079)(2)(1.13) = 17.8 \text{ W}.$

IX.9. Analyse d'un éjecteur

Une représentation schématique d'un éjecteur liquide-liquide est donnée à la figure 15. Les éjecteurs sont utilisés par exemple pour amener un fluide à basse pression et gros débit à une pression plus élevée. On utilise pour cela un deuxième fluide à grande vitesse venant se mélanger au premier fluide. Pour l'analyse qui va suivre, nous supposons que le mélange s'effectue dans un élément de conduit de section constante. Un diffuseur permet ensuite d'élever la pression de l'ensemble de l'écoulement. Nous désignons par v_a la vitesse du premier fluide et par v_j celle du fluide d'entraînement.

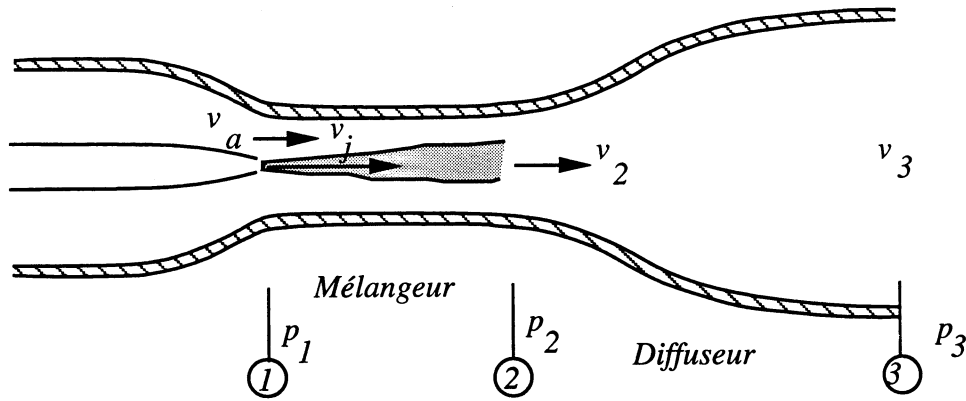


Figure 15. Schéma d'un éjecteur.

Pour simplifier l'analyse, nous supposons que les deux fluides sont incompressibles et que leurs masses volumiques sont les mêmes : $\rho_a = \rho_j = \rho$.

Le bilan de masse entre les sections 1 et 2 donne :

$$\rho A_j v_j + \rho A_a v_a = \rho A_2 v_2 \quad (\text{IX}, 95)$$

soit :

$$v_2 = v_j \frac{A_j}{A_2} + v_a \frac{A_a}{A_2} \quad (\text{IX}, 96)$$

Dans la section 2, nous supposons que le mélange entre les deux flux est total. L'application du théorème des quantités de mouvement au volume de contrôle limité par les sections A_1 et A_2 s'écrit :

$$0 = \rho A_2 v_2^2 - \rho A_j v_j^2 - \rho A_a v_a^2 + (p_2 - p_1) A_2 \quad (\text{IX}, 97)$$

Cette relation donne :

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = v_2^2 - v_j^2 \frac{A_j}{A_2} - v_a^2 \frac{A_a}{A_2} \quad (\text{IX}, 98)$$

Désignons par e_D la perte de charge dans le diffuseur et supposons que la vitesse v_3 dans le plan de sortie du diffuseur puisse être négligée. On peut écrire :

$$e_D = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \right) - \frac{p_3}{\rho} \quad (IX, 99)$$

soit :

$$\frac{p_3 - p_2}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} - e_D \quad (IX, 100)$$

En l'absence de perte de charge, le diffuseur récupère l'énergie cinétique $v_2^2/2$.

La récupération est plus faible lorsque $e_D \neq 0$. Il est commode d'introduire le rendement η_D du diffuseur :

$$\eta_D = \frac{(p_3 - p_2)/\rho}{(v_2^2/2)}, \quad \eta_D \leq 1 \quad (IX, 101)$$

On utilise ensuite cette définition et l'expression (IX,98) pour obtenir la variation totale de pression dans l'éjecteur :

$$\begin{aligned} \frac{p_3 - p_1}{\rho} &= \frac{p_3 - p_2}{\rho} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \\ &= \eta_D \frac{v_2^2}{2} - v_2^2 + v_j^2 \frac{A_j}{A_2} + v_a^2 \frac{A_a}{A_2} \end{aligned} \quad (IX, 102)$$

En définitive :

$$\frac{p_3 - p_1}{\rho} = v_j^2 \frac{A_j}{A_2} + v_a^2 \frac{A_a}{A_2} - \left(1 - \frac{\eta_D}{2} \right) v_2^2 \quad (IX, 103)$$

où

$$v_2 = v_j \frac{A_j}{A_2} + v_a \frac{A_a}{A_2} \quad (IX, 104)$$

Ces deux relations permettent le calcul de la variation de pression à travers l'éjecteur si on connaît A_j, A_a, A_2, v_j, v_a et le rendement du diffuseur η_D .

Tableau 1. Formes macroscopiques des équations de conservation

(1) Masse :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

(2) Quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} dV + \int_A \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \\ = - \int_A p \mathbf{n} dA + \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \end{aligned}$$

(3) Moment angulaire :

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} dV + \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{v} (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \\ = - \int_A \mathbf{r} \times p \mathbf{n} dA + \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \end{aligned}$$

(4) Energie :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + \Phi \right) dV + \int_A \left(h + \frac{v^2}{2} + \Phi \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \dot{W}' + \dot{Q}$$

Tableau 2. Equations fondamentales pour les écoulements stationnaires et unidimensionnels en sections d'entrée et de sortie

(1) Masse :

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

(2) Quantité de mouvement :

$$\mathbf{F}_p = \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + m_v \mathbf{g}$$

avec : $\mathcal{F} = \dot{m}v + pA$

(3) Moment angulaire :

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{r}_1 \times \mathcal{F}_1 \mathbf{N}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathcal{F}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{r}_G \times m_v \mathbf{g}$$

(4) Energie :

$$\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 \right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 \right) = w' + q$$