
Rapport de projet

DYNAMIQUE DES STRUCTURES AVANCÉE - MÉTHODES FRÉQUENTIELLES EN VIBRATIONS
DES STRUCTURES

Matteo CUTRONE
Marie DELMASURE
Louis MOSER
Camille ZOCK À ZOCK

Avril 2024

Table des matières

Introduction	1
1 La méthode Eléments Finis : comportement dans les hautes fréquences	2
1.1 Considérations théoriques	2
1.2 Vérification empirique avec Comsol	2
1.3 Analyse de la convergence	3
1.4 Analyse de l'impact du type de solveur	4
2 La méthode VTCR	5
2.1 Présentation	5
2.2 Implémentation	6
2.3 Analyse de la convergence	6
3 Comparaison des deux méthodes	8
3.1 Qualité de la solution	8
3.2 Temps de calcul	10
Conclusion et ouverture	10
4 Annexe	11
4.1 Formulation variationnelle de la méthode VTCR	11

Introduction

Ce rapport synthétise notre travail sur les limitations et les problèmes liés à l'augmentation de la fréquence dans les domaines de l'acoustique et des vibrations. Nous comparons ici deux méthodes concurrentes : la méthode par éléments finis (MEF, ou FEM en anglais), étudiée grâce au logiciel *Comsol*, et la théorie variationnelle des rayons complexes (TVCR, ou VCTR en anglais), implémentée par le LMPS au sein du module pyVTCR. Cette comparaison porte sur les deux exemples suivants :

- Une cavité acoustique de géométrie simple, étudiée analytiquement lors de la première séance de TD (à gauche sur la Figure 1).
- Une cavité acoustique que nous avons imaginée, et qui modélise une chambre anéchoïque avec une source circulaire (à droite sur la Figure 1).

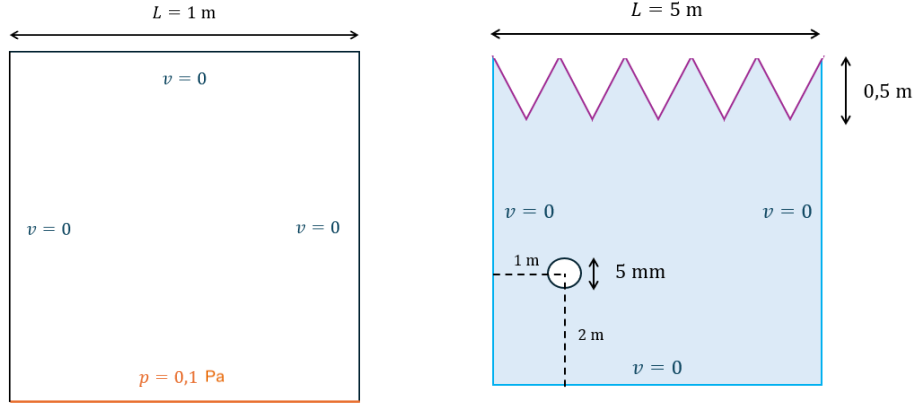


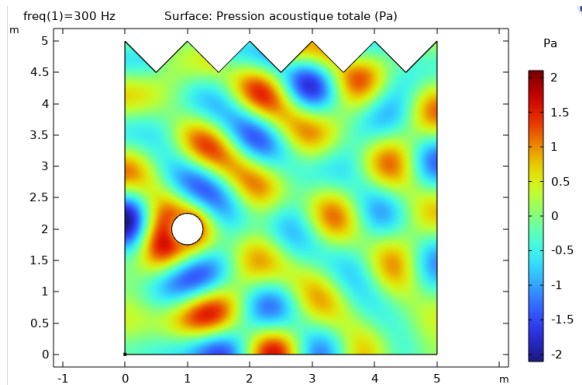
FIGURE 1 – Schémas des cavités acoustiques étudiées

Nous avons dû déterminer l'impédance d'absorption pour le mur anéchoïque de notre chambre. Pour ce faire, nous avons trouvé dans la littérature que l'absorption d'une chambre anéchoïque pouvait être représentée par $\alpha = 0.99$. Nous avons utilisé cette valeur pour calculer l'impédance, en se basant sur l'équation suivante :

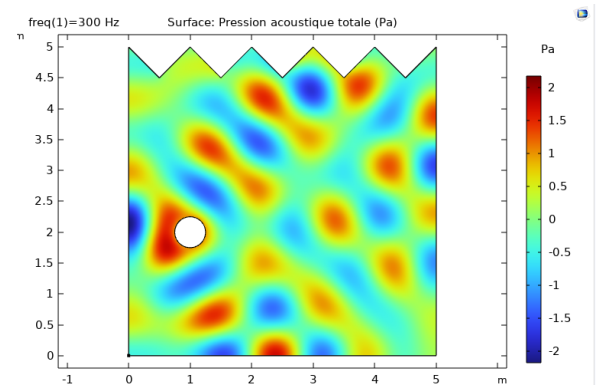
$$\alpha = \frac{4\text{Re}(Z_g/Z_0)}{|Z_g/Z_0|^2 + 2\text{Re}(Z_g/Z_0) + 1}$$

Avec $Z_0 = \rho_{\text{air}} \times c_{\text{son}}$ et Z_g l'impédance souhaitée. Nous avons ensuite appliqué un algorithme d'optimisation pour trouver l'impédance optimale. Cet algorithme nous a permis de déterminer que $\text{Re}(Z_g) = 340$ et $\text{Im}(Z_g) = 0$, ce qui correspond bien à une absorption $\alpha = 0.99$.

Afin de vérifier la cohérence de nos calculs, nous avons effectué deux approches : l'une en utilisant l'impédance directement, et l'autre en utilisant le coefficient d'absorption. Nous avons constaté que les deux résultats concordaient à 300 Hz, comme les deux images (a) et (b) ci-dessous le montre. De ce fait, nous pouvons conclure que l'impédance choisie correspond effectivement au coefficient d'absorption désiré.



(a) Implémentation de l'impédance réelle à 340



(b) Implémentation du coefficient d'absorption à 0.99

1 La méthode Eléments Finis : comportement dans les hautes fréquences

1.1 Considérations théoriques

La méthode FEM est parfaitement adaptée aux basses fréquences, qui s'étendent de 0 à 1000 Hz environ dans notre cas. Les modes de vibration (les « pics ») sont marqués, peu nombreux et bien séparés, et les longueurs d'onde sont relativement grandes. Au-delà, dans le domaine des moyennes fréquences, de 1000 à 5000 Hz environ, la méthode FEM est nettement moins performante : les modes de vibration sont marqués mais nombreux et resserrés, les longueurs d'onde plus petites, et il y a une forte sensibilité aux détails structuraux. Enfin, la FEM donne de très mauvais résultats pour les hautes fréquences : les modes de vibration sont très peu marqués, les longueurs d'onde très petites, et la sensibilité aux défauts et détails structuraux est très forte.

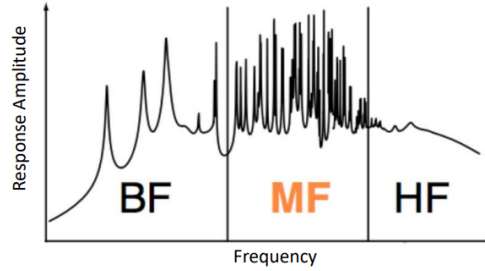


FIGURE 3 – Fonction de transfert d'une quantité pertinente (énergie, déplacement d'un point, ...)

De façon générale, on calculera toutes les FRF présentées dans le rapport en moyennant pour chaque fréquence test la pression totale sur tout le domaine étudié. On présente ensuite les résultats sur une échelle logarithmique, ce qui donne concrètement la formule suivante implémentée dans Comsol :

$$\text{FRF} = \log \left| \frac{\int_{\Omega} p_t}{|\Omega|} \right|$$

Cette méthode permet de s'affranchir des variations excessives de pression en les écrasant en moyenne et permet de restituer une FRF plus facile à interpréter que celles obtenues en "sondant" la pression en un seul point du domaine, qui est arbitraire.

On trace dans un premier exemple la FRF de la cavité acoustique présentée en TD :

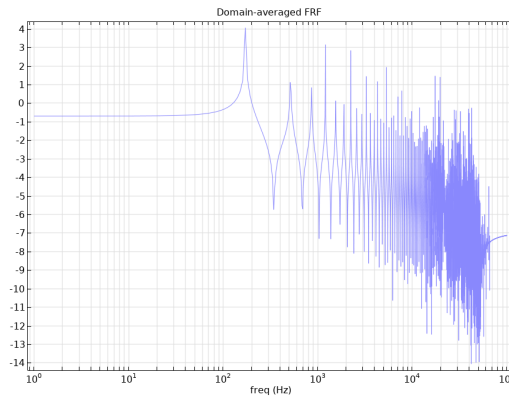


FIGURE 4 – FRF de la pression totale moyenne du domaine

1.2 Vérification empirique avec Comsol

On retrouve ces résultats avec la simulation Comsol, dont le résultat est présenté ci-dessous. Le domaine basses fréquences s'étale visiblement de 0 à 1000 Hz environ, et de 1000 à 5000 Hz pour le domaine moyennes fréquences.

Dans la suite de cette étude, nous considérerons les plages de fréquences suivantes : basses fréquences de 0 Hz à 900 Hz, transition de basses à moyennes fréquences de 900 Hz à 1000 Hz, et moyennes fréquences pour les valeurs supérieures à 1000 Hz.

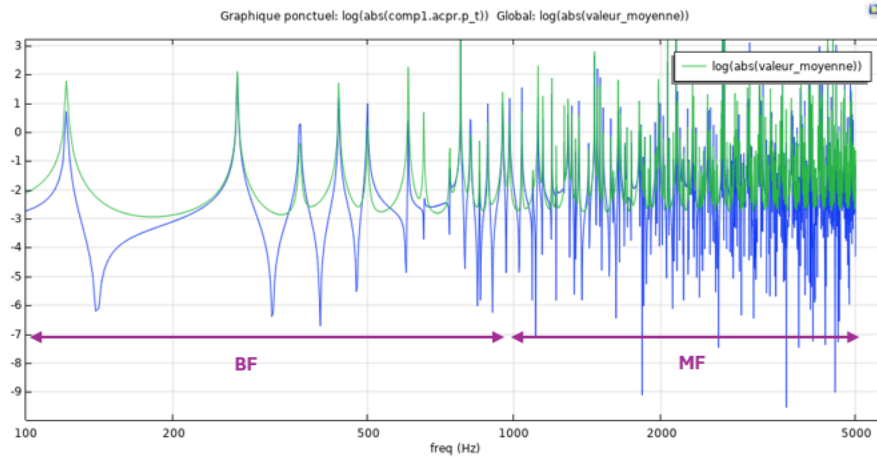


FIGURE 5 – Superposition de deux fonctions de transfert (FRF) : en bleu, la pression en un point donné du domaine ; en vert, la valeur moyenne de la pression sur tout le domaine (*échelle log*).

1.3 Analyse de la convergence

Pour analyser la convergence en maillage d'un solveur comme Comsol, on va prendre pour référence le maillage extrafin (préréglage de Comsol) et comparer chacun des jeux de données à un maillage plus grossier fixé, pour une erreur qu'il reste encore à définir. En Figure 6, on trace la FRF de référence pour notre cavité.

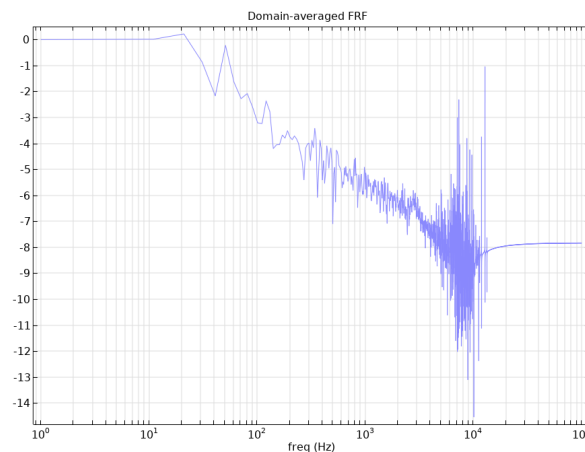


FIGURE 6 – FRF de référence de notre cavité (maillage extrêmement fin) tracée sur Comsol

La formule d'erreur la plus intuitive est l'écart relatif en variance des tableaux de données. Cependant, procéder ainsi nous amène à devoir sélectionner une erreur "représentative" du tableau de variance. On pense alors au maximum, qui nous donnerait le pire cas et donc une majoration. On se rend vite compte qu'on est alors très sensible aux écarts arbitraire de valeurs, résultants d'artefacts numériques. Encore une fois, on prend alors la moyenne pour s'en sortir. En Figure 7, on résume l'évolution de l'erreur en maillage par rapport à notre référence.

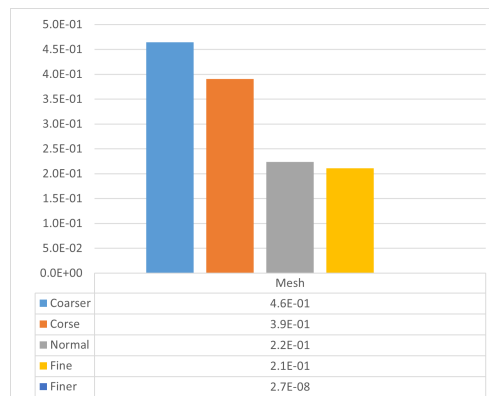


FIGURE 7 – Évolution de l'erreur vis-à-vis de la finesse du maillage

1.4 Analyse de l'impact du type de solveur

Les solveurs directs et les solveurs indirects sont deux approches différentes pour résoudre des problèmes d'équations linéaires. Dans cette section, notre objectif est d'analyser et de comprendre comment le choix du solveur affecte la résolution d'un système d'équations linéaires donné.

a) Solveur direct

Les solveurs directs résolvent un système d'équations linéaires en appliquant des méthodes algorithmiques qui convergent vers la solution exacte en un nombre fini d'itérations, quelle que soit l'estimation initiale.

Dans notre contexte, nous utilisons le solveur MUMPS pour obtenir des résultats pour des fréquences allant jusqu'à 10^6 Hz. Ce solveur converge pour une étude dans le domaine fréquentiel en moins d'une seconde pour une valeur de fréquence donnée, et en 1min 24s pour le range suivant (1,3,1000).

Les solveurs directs convergent pour n'importe quelles valeurs de fréquences d'entrée, cependant comme nous l'avons expliqué plus haut, dans le domaine des moyennes et hautes fréquences les résultats deviennent erronées comme en atteste la figure ci-dessous.

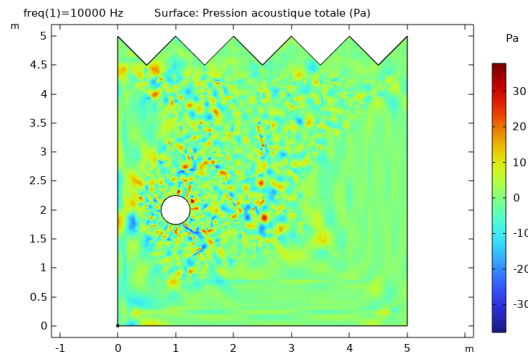


FIGURE 8 – Pression acoustique totale à une fréquence de 10000 Hz

Il est constaté que malgré l'utilisation d'un maillage extrêmement fin, comme illustré dans la figure suivante, le résultat obtenu n'est plus en accord avec les principes physiques du problème.

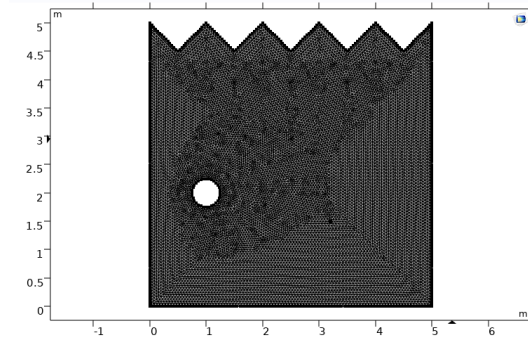


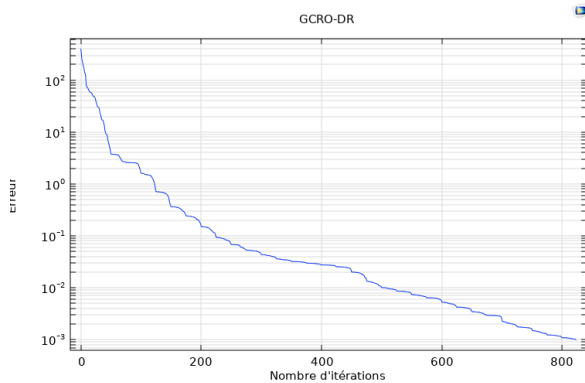
FIGURE 9 – Maillage extrêmement fin de la cavité anéchoïque

En conclusion, bien que le solveur direct converge à chaque valeur de fréquence, il est évident que le sens physique des résultats se perd à des fréquences moyennes et élevées. Par conséquent, il est impératif de considérer l'utilisation de méthodes plus appropriées telles que la méthode VTCR (Variational Theory of Complex Rays) ou d'explorer d'autres solveurs plus adaptés pour ces cas particuliers. Il est crucial de choisir une approche numérique qui non seulement converge vers une solution, mais qui garantit également la préservation de la cohérence physique des résultats dans toute la gamme de fréquences étudiée.

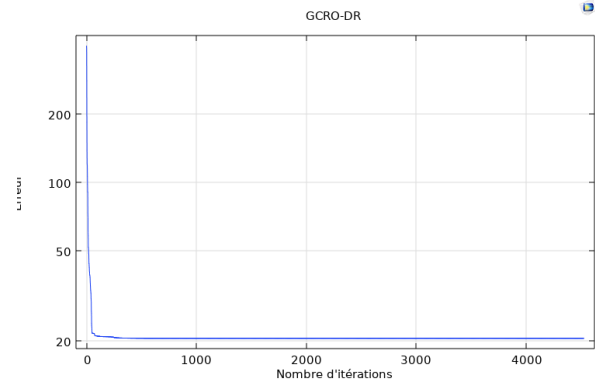
b) Solveur indirect : Approche multigrille

Un solveur indirect multigrille fonctionne en résolvant itérativement un problème sur des niveaux de résolution multiples, passant d'approximations grossières à des approximations plus fines tout en utilisant des opérations d'interpolation et de restriction pour améliorer la précision. Cette méthode permet une convergence rapide vers une solution précise en exploitant la structure hiérarchique du problème.

La méthode converge plus lentement que le solveur direct, pour le même range de (1,3,1000). On est sur 6min. Lorsque l'on utilise le modèle multigrille pour résoudre un problème, il est souvent observé que la convergence diminue au-delà d'une certaine fréquence critique. Les graphiques de convergence ci-dessous illustrent ce phénomène, montrant une absence de convergence pour une fréquence de 2000 Hz.



(a) Convergence en solveur multigrille pour une consigne à 1000Hz



(b) Convergence en solveur multigrille pour une consigne à 2000Hz

Cependant, après une analyse plus approfondie par itération, on constate que le modèle cesse en réalité de converger au-delà de 1100 Hz, ce qui correspond à la première convergence observée pour les basses fréquences de l'étude. Cette limite de convergence avait été initialement estimée autour de 1000 Hz.

En conclusion, bien que le solveur multigrille puisse offrir une alternative efficace aux solveurs directs en termes de temps de calcul, il met en évidence les limites de la méthode des éléments finis pour des études complexes de dynamique des solides. Il est donc crucial de recourir à d'autres approches, telles que la méthode VTCR présentée dans la section suivante, pour résoudre efficacement ces problèmes au-delà des limites de convergence du modèle multigrille.

2 La méthode VTCR

2.1 Présentation

La théorie variationnelle des rayons complexes est une méthode ondulatoire (dite de Trefftz¹) dédiée aux problèmes de vibrations de moyennes fréquences, et développée par P. Ladevèze en 1996². Son caractère ondulatoire, à la différence des méthodes par éléments finis, indique que les fonctions de forme utilisées pour la résolution satisfont l'équation d'équilibre de manière forte sur le domaine. De plus, pour la méthode VTCR, une formulation variationnelle mixte - i.e., faisant intervenir les champs de pression et de vitesse (cf. Annexe 4.1) - qui prend en compte la continuité aux interfaces des sous-domaines (et évite ainsi d'avoir recours aux multiplicateurs de Lagrange), est adoptée et fait intervenir des fonctions de forme qui vérifient les conditions aux limites de manière faible. Cette dernière caractéristique rend possible l'indépendance des approximations sur les sous-domaines. La solution au problème homogène est alors cherchée comme une distribution intégrale d'ondes planes, dont les amplitudes sont inconnues.

Pour comprendre l'intérêt de cette méthode, et des méthodes ondulatoires de manière générale, il faut s'intéresser aux limitations des méthodes par éléments finis. Comme les fonctions de forme ne vérifient pas l'équation d'équilibre, il convient de discrétiser de manière fine le domaine d'étude avant de réaliser une interpolation des solutions trouvées sur chaque maille. Ainsi, lorsque la fréquence augmente, la longueur d'onde du phénomène observé diminue, ce qui nécessite de raffiner le maillage pour obtenir une solution fidèle (cf. minimum classique de 10 points par longueur pour restituer une sinusoïde). Cette augmentation des degrés de liberté limite naturellement l'utilisation de la FEM aux problèmes de vibrations basses fréquences. Pour ce qui est de la méthode ondulatoire, les fonctions de forme vérifient l'équation d'équilibre sur le domaine, une version discrétisée des fonctions de Herglotz est utilisée $p_e(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{ik_e(\theta_n)x}$, aucun maillage n'est donc nécessaire et un nombre limité de degrés de liberté est utilisé.

1. Jirousek J, Leon N (1977), A powerful finite element for plate bending. Comput Method Appl M, 12 : 77-96

2. Ladevèze, Pierre. (1996). Une nouvelle approche pour le calcul des vibrations moyennes fréquences. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Série II b, no. 12, 849-856.

Toujours en développement au LMPS, la méthode VTCR n'est pas encore commercialisée, bien que des grands noms de l'industrie commencent à l'utiliser (Airbus, SNCF). Cette méthode a des applications aussi bien en électromagnétique qu'en dynamique des structures, ou encore en acoustique.

2.2 Implémentation

L'implémentation de la méthode VTCR se décompose en les étapes suivantes :

1. **Définition du système étudié** : Le domaine d'étude et les conditions aux limites sont définis dans des fichiers `.geo` (généralisé par *Gmsh* par exemple) et `.json`. Cinq types de condition aux limites peuvent être prises en compte : la pression sur une frontière 1D ou sur une plaque 2D, la vitesse, l'impédance ou une condition de type *Iris* (domaine infini) sur une frontière 1D. Une fois le fichier `.geo` traité grâce au code `_model.py`, le problème est assemblé en une seule variable avec la fonction définie dans `_acousticProblem.py`, qui prend également en entrée le matériau dans lequel se propage les ondes - à choisir entre l'air, l'eau, le verre et le plexiglass. Une variable est également créée avec `acousticStudy` à partir du modèle géométrique pour effectuer les post-traitements. L'utilisateur choisit également à ce moment la fréquence du problème et le nombre de degrés de liberté - ici le nombre de rayons - et fournit un fichier de maillage `.msh` pour la visualisation des résultats.
2. **Création des fonctions de forme** : Cette étape est réalisée grâce à `acousticShapeFunctions`, une classe qui permet de générer les fonctions de forme, et les fonctions tests, du type : $\phi_l^n(x) = e^{ik_n(\theta)x}$, où k_n est le nombre d'onde dans la direction repérée par l'angle θ . Les angles θ considérés sont déterminés en prenant N_{ray} valeurs linéairement espacées de l'intervalle $[0, 2\pi]$, avec N_{ray} le nombre de rayons choisis. Ainsi, plus le nombre de rayons est important et plus grande sera la base sur laquelle la pression est décomposée : $p_n = \sum_{l=1}^{N_{ray}} a_l^n \phi_l^n(x)$.
3. **Assemblage du problème matriciel** : La discrétisation des frontières des sous-domaines et la décomposition des pressions avec les fonctions de formes, appliquées à la forme faible donnée par l'équation (2), vont mener au problème matriciel $\mathbb{B}\underline{A} = \underline{L}$, où $\underline{A}$ est le vecteur contenant les coefficients a_l^n inconnus, $\underline{L}$ contient les conditions aux limites en vitesse et pression et $\mathbb{B}$ les produits scalaires entre les fonctions de forme, cette étape est réalisée dans la fonction `assemble_problem` de la classe `AcousticProblem`.
4. **Résolution** : Une fois le problème assemblé, il ne reste qu'à inverser la matrice $\mathbb{B}$ pour obtenir les coefficients inconnus : $\underline{A} = \mathbb{B}^{-1}\underline{L}$, qui permettent ensuite de reconstruire les champs de pression avec les fonctions de forme. Cette inversion peut être réalisée par inversion directe (*direct*), avec l'algorithme du pseudo-inverse de Moore-Penrose (*p_inv*), une méthode de moindres carrés (*lstq*) ou par décomposition aux valeurs singulières (*svd*). La méthode est choisie avec la variable `method` de la fonction `solve` de la classe `AcousticProblem`.

2.3 Analyse de la convergence

Maintenant que la méthode VTCR a été introduite, on peut s'intéresser à l'étude de ses performances, avec notamment l'influence que ses différents paramètres - e.g., fréquence ou encore le nombre de rayons - a sur les résultats obtenus. Dans les deux prochains paragraphes, l'étude se concentrera sur la cavité qui modélise la chambre anéchoïque, une discussion sur l'influence de la cavité choisie conclura cette partie. Dans chaque paragraphe, les commentaires se fonderont, en partie, sur la valeur de l'erreur de reconstruction, dont l'expression est donnée par la relation (1), où N désigne le nombre de sous-domaines et la valeur de référence d'un champ de pression est celle calculée par la méthode VTCR avec le solveur *pinv* pour un nombre important de rayons, ici $N_{ray}^{ref} = 500$.

$$err_{rel} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (p_i^{ref} - p_i^{calc})^2}{\sum_{n=1}^N p_i^{ref\ 2}}} \quad (1)$$

Convergence en nombre de rayons et fréquence Tout d'abord, on considère la sensibilité de la méthode VTCR au nombre de rayons et à la fréquence passés en argument. La Figure 11 montre l'erreur de reconstruction et la valeur du conditionnement de la matrice $\mathbb{B}$, évoquée dans la partie précédente, pour différents nombre de rayons et une fréquence basse de 300 Hz et une moyenne de 1000 Hz. Comme attendu, l'erreur de reconstruction diminue avec le nombre de rayons et, plus la fréquence est élevée - et donc l'information à capturer riche - et plus il faut de rayons pour obtenir une solution proche de la solution de référence (≈ 60 à 300 Hz pour une erreur de 7% et ≈ 270 à 1000 Hz pour une erreur presque nulle). Il est intéressant de noter que, au vu de la complexité de la cavité, il n'est pas certain que la solution de référence avec $N_{ray}^{ref} = 500$ assure réellement la convergence,

comme le laisse à penser les plateaux observés avec des erreurs de reconstruction non-négligeables. De plus, on se rend compte que la solution devient meilleure lorsque le conditionnement augmente. Ceci s'explique par le fait que le conditionnement renvoie au rapport entre la plus grande et la plus faible valeur propre de la matrice étudiée. Ainsi, plus le conditionnement est grand et plus les valeurs propres faibles sont prises en compte, ce qui signifie que le spectre énergétique de la solution est correctement retranscrit.

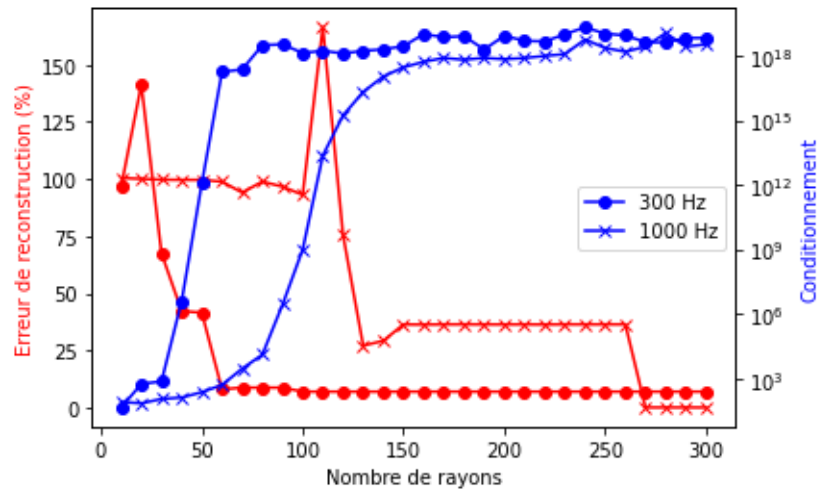


FIGURE 11 – Évolution de l'erreur de reconstruction et du conditionnement en fonction du nombre de rayons pour deux fréquences

La Figure 12 est le pendant de la Figure 11 avec des rôles inversés pour la fréquence et le nombre de rayons. Elle met en lumière une sorte de "domaine de validité" fréquentiel pour un nombre de rayons fixé. En effet, on distingue, pour chaque nombre de rayons, trois parties distinctes de la courbe : à basses fréquences, le conditionnement est élevé et l'erreur de reconstruction faible, le conditionnement diminue ensuite brusquement sur une plage de quelques centaines de Hz puis, à hautes fréquences, sa valeur est faible et l'erreur très importante ne permet plus d'affirmer que la méthode converge. On en déduit qu'un nombre de rayons fixé ne permet d'étudier des problèmes que sur une certaine plage de fréquences.

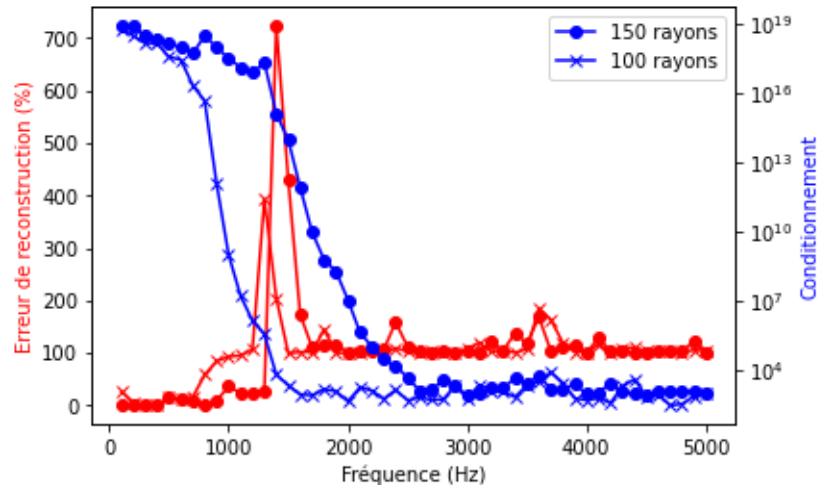


FIGURE 12 – Évolution de l'erreur de reconstruction et du conditionnement en fonction de la fréquence pour deux nombres de rayons

Influence du solveur Ensuite, trois solveurs différents - *pinv*, *direct* et *svd* - ont été évalués pour une fréquence de 300 Hz et les mêmes nombres de rayons que précédemment. La Figure 13 rassemble les résultats obtenus. Le solveur *svd* apparaît être le plus rapide des trois et converge pour un faible nombre de rayons, environ 75, vers une solution différente de celle de référence, obtenue avec le solveur *pinv*. Une observation similaire peut être faite avec le solveur *direct*, qui, en outre, semble plus sujet aux erreurs numériques, comme le montre les points aberrants pour 100, 200 et 275 rayons. Finalement, bien que plus long à utiliser avec un durée de calcul qui évolue quadratiquement en fonction du nombre de rayons, le solveur de Moore-Penrose semble le plus fiable

et efficace, compte-tenu de la qualité des résultats obtenus en comparaison de la FEM (cf. partie 3). À noter que le quatrième solveur disponible, *lstq*, n'a pas permis d'obtenir de résultats, les champs de pression obtenus étant vides.

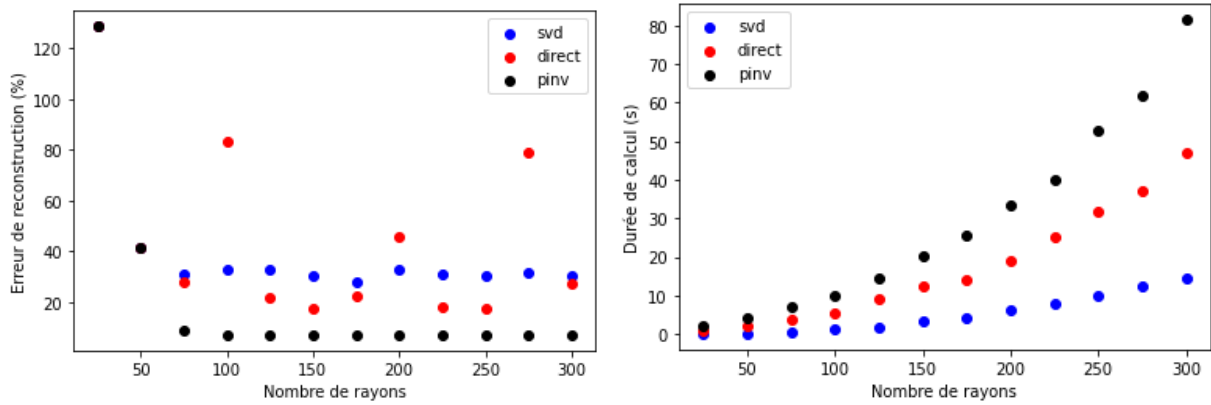


FIGURE 13 – Évolution de l'erreur de reconstruction et du conditionnement en fonction du nombre de rayons (gauche) et durées de calcul associées (droite) pour trois solveurs différents

Influence de la cavité Enfin, on peut commenter l'influence de la complexité de la cavité sur les performances de la méthode VTCR. Pour cela, une étude similaire à celle qui vient d'être présentée a été menée pour la cavité rectangulaire simple (cf. Figure 1). Les résultats sont rassemblés Figure 14 et mettent en évidence le fait que simplifier la géométrie augmente le domaine fréquentiel de validité de cette méthode. En effet, pour environ 150 rayons, la méthode converge à basse et haute fréquence, ce qui n'était pas le cas pour la chambre anéchoïque. De plus, l'exécution est considérablement plus rapide, avec un facteur 100 observé entre les durées de calcul des deux études - effectuées avec le solveur *pinv* (comme pour la chambre anéchoïque, la durée de calcul est indépendante de la fréquence).

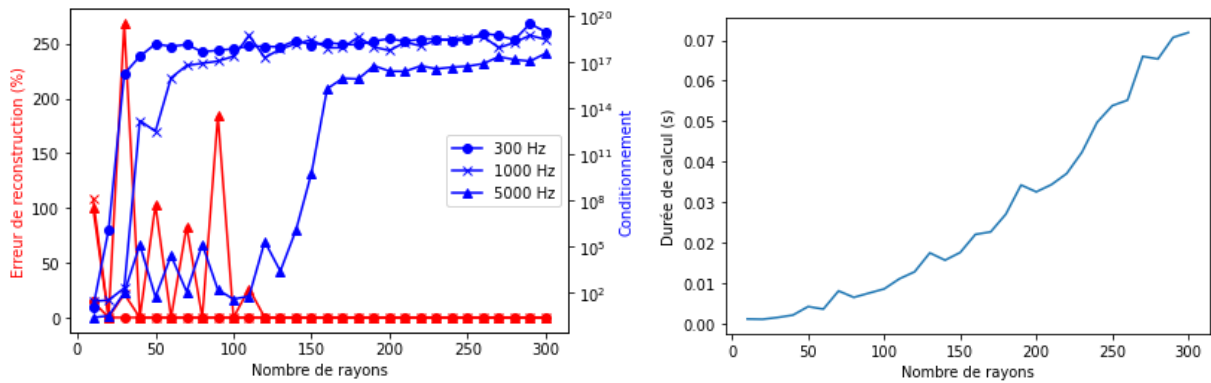


FIGURE 14 – Évolution de l'erreur de reconstruction et du conditionnement en fonction du nombre de rayons (gauche) et durées de calcul associées (droite) pour la cavité simple

3 Comparaison des deux méthodes

3.1 Qualité de la solution

Dans cette section nous nous proposons de comparer deux approches de modélisation : notre modèle basé sur la méthode VTCR (Variational Theory of Complex Rays) et la méthode des Éléments Finis (MEF). L'objectif est d'évaluer la performance de chaque méthode en analysant la pression acoustique totale à trois fréquences différentes : 300 Hz, 800 Hz et 2000 Hz. Ces fréquences ont été sélectionnées pour couvrir une plage représentative de la dynamique acoustique du système étudié, comprenant une fréquence basse, une fréquence située à la limite entre basse et moyenne fréquence, ainsi qu'une fréquence moyenne. En comparant les résultats obtenus à ces fréquences, nous serons en mesure d'évaluer la capacité de chaque méthode à fournir des solutions précises et fiables dans des scénarios variés de vibrations acoustiques.

a) Cavité acoustique simple

Dans cette section, nous comparons les résultats obtenus pour une cavité simple. Pour rappel, une pression de 0.1 Pa est appliquée sur le mur du bas, tandis qu'une vitesse nulle est imposée sur tous les autres murs. Les résultats sont répertoriés dans le tableau 1.

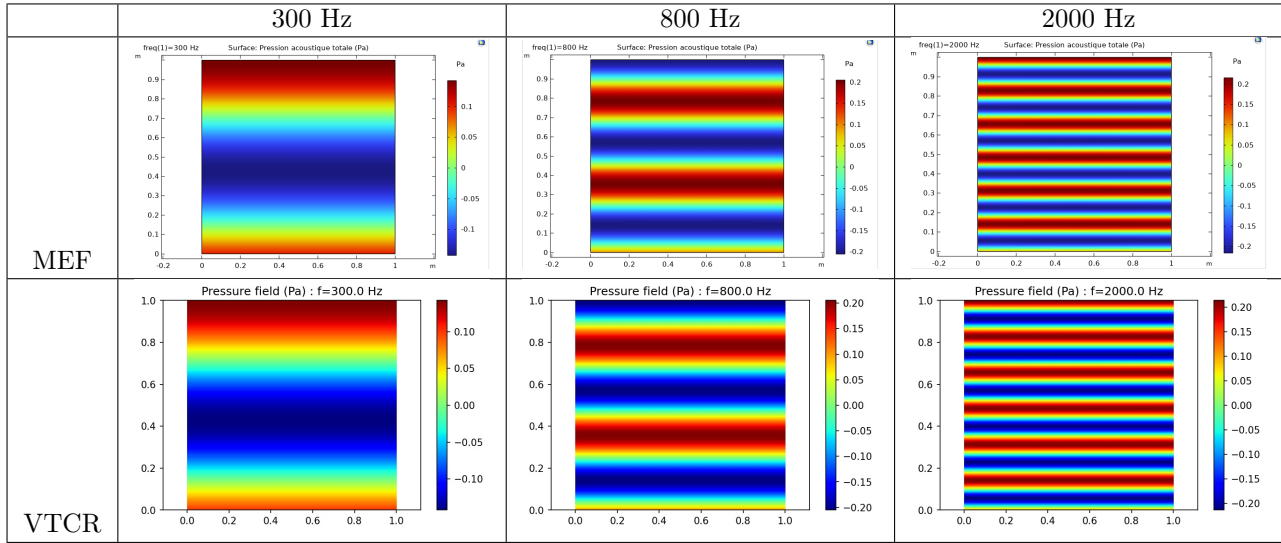


TABLE 1 – Tableau regroupant les résultats de la pression acoustique totale (Pa) pour la méthode MEF et VTCT aux fréquences 300, 800 et 2000 Hz

À travers l'analyse des données, nous observons une concordance entre les deux méthodes aux trois valeurs sélectionnées. Cette concordance est un indicateur important : elle suggère que, dans cette plage de fréquences, qui reste en dessous de 2000 Hz, les résultats obtenus par les deux méthodes sont cohérents et convergent. De plus, cette concordance renforce notre confiance dans l'implémentation précise de notre modèle VTCT.

Forts de cette validation, nous sommes désormais en mesure de poursuivre notre analyse en comparant les résultats obtenus pour une cavité représentant une chambre anéchoïque.

b) Cavité acoustique représentant une chambre anéchoïque

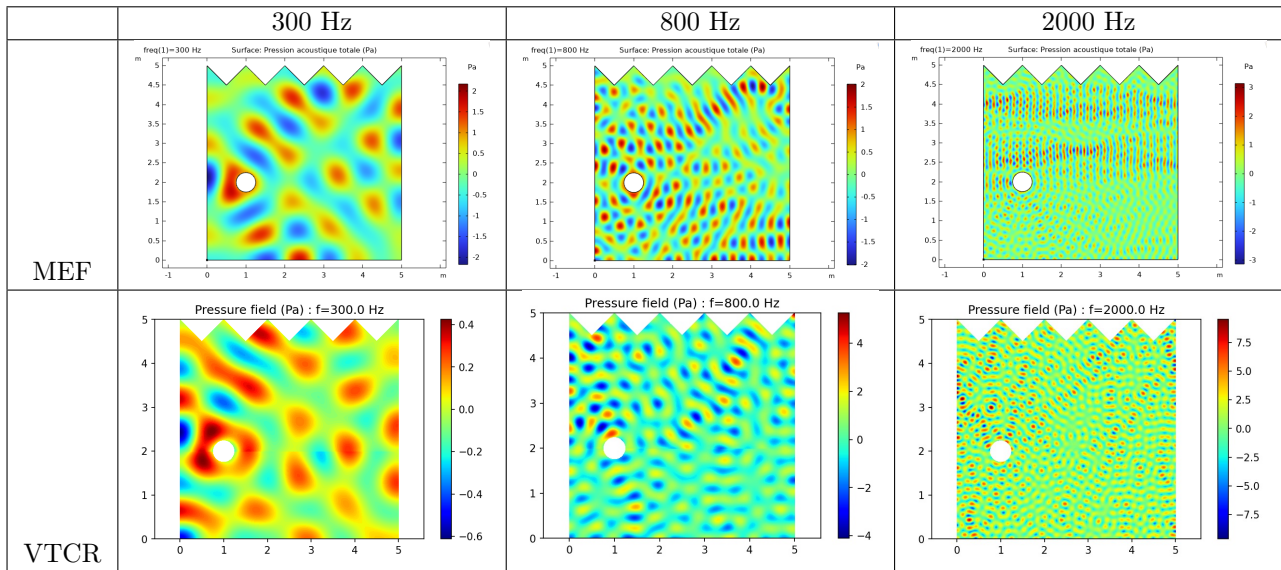


TABLE 2 – Tableau regroupant les résultats de la pression acoustique totale (Pa) pour la méthode MEF et VTCT aux fréquences 300, 800 et 2000 Hz

Ici, il est intéressant de noter que les deux méthodes donnent des graphes ressemblants mais non identiques comme nous avons pu observer précédemment. Cela est certainement dû à la complexité élevée de notre

géométrie par rapport à la cavité simple de l'exercice : le champ de pression résultant dépend effectivement des sous-domaines choisis pour notre géométrie.

Les graphes attestent néanmoins de la convergence des calculs pour cette plage de fréquences.

3.2 Temps de calcul

La méthode VTCR est vraiment coûteuse en temps de calcul : 1h10 pour 100 points de fréquence. Cela est probablement dû au pas de discrétisation élevé des arcs de cercle. Ce dernier est fixé à 500 dans le fichier `model.py` :

```
184 def getCurveParametrization(self, curve_id, num=500) :
185     # Calcul du domaine de définition de la carte  $\phi$ 
186     a, b = gmsh.model.getParametrizationBounds(1, curve_id)
187     # Discrétisation de la paramétrisation
188     s = np.linspace(a, b, num).flatten()
189     # Calcul des coordonnées des points le long de la courbe
190     coord = gmsh.model.getValue(1, curve_id, s).reshape((-1,3))
191     # Calcul de la norme de la dérivée de la carte pour chaque point
192     derivative = gmsh.model.getDerivative(1, curve_id, s).reshape((-1,3))
193     return s, coord, derivative
```

FIGURE 15 – Fonction de discrétisation des arcs de cercle.

Concernant la méthode par éléments finis, elle est beaucoup moins coûteuse en temps puisque pour 100 points dans le domaine des basses fréquences, le solveur calcule l'ensemble des points en 11s seulement.

On peut déduire que la méthode par éléments finis est préférable pour résoudre les problèmes à basse fréquence, car son temps de calcul est plus de 300 fois plus court que celui de la méthode VTCR. Cependant, comme nous l'avons constaté dans la section 1, la méthode par éléments finis n'est efficace que pour les basses fréquences, ce qui nécessite une utilisation combinée des deux méthodes à plus hautes fréquences.

Conclusion et ouverture

Ce projet s'est intéressé à la comparaison des résultats obtenus par la méthode des éléments finis et la théorie variationnelle des rayons complexes pour la résolution de problème de vibration de structures. Si chaque méthode est apparue efficace et plus appropriée sur un domaine fréquentiel - basses fréquences pour la FEM et moyennes fréquences pour la VTCR -, l'analyse des résultats obtenus par la méthode des éléments finis et la méthode VTCR a mis en lumière les difficultés de ces méthodes à traiter les problèmes aux hautes fréquences. Celles-ci s'expliquent par la nécessité d'augmenter le nombre de mailles - problème spécifique à la FEM - et par la sensibilité grandissante des méthodes déterministes aux incertitudes du problème quand la fréquence augmente.

L'analyse énergétique statistique³ (*SEA* en anglais) propose un changement de paradigme en adoptant une approche statistique et constitue une alternative efficace pour traiter les problèmes aux hautes fréquences. Comme expliqué par Le Bot⁴, le nombre très important de modes, qui caractérise les hautes fréquences, rend possible une étude statistique en considérant qu'un sous-système est désormais excité par une force qui s'apparente à un processus aléatoire. Ce faisant, la modélisation du transfert d'énergie entre deux sous-systèmes se simplifie grandement et un parallèle peut être établi avec la thermodynamique, vue comme une étude statistique de l'agitation moléculaire. Ainsi, la résolution d'un problème se ramène à la définition d'un nombre fini, et potentiellement faible, de sous-systèmes qui dissipent localement de l'énergie vibrationnelle et interagissent, par l'intermédiaire de frontières communes, sous forme d'échange énergétique.

3. Lyon, R.H. Fluctuation theory and (very) early statistical energy analysis (SEA). J. Acoust. Soc. Am. 2003, 113, 2401–2403

4. Le Bot, Alain & Carcaterra, Antonio & Mazuyer, Denis. (2010). Statistical Vibroacoustics and Entropy Concept. Entropy. 12. 10.3390/e12122418.

4 Annexe

4.1 Formulation variationnelle de la méthode VTCR⁵

On considère une partition $(\Omega_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ du domaine Ω étudié pour laquelle chaque sous-domaine Ω_i est étoilé. Le problème acoustique revient donc à chercher $(p_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in P_1^{ad} \times \dots \times P_N^{ad}$, où P_n^{ad} désigne l'espace des champs de pression admissibles sur Ω_i , tels que $\Delta p_n + k^2 p_n = 0$, avec les conditions limites :

- En pression : $p_n = p_{bound}^n$ sur $\partial_p \Omega_n$ (condition de Neumann)
- En vitesse : $\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_n}{\partial \underline{n}_n} = v_{bound}^n$ sur $\partial_v \Omega_n$ (condition de Dirichlet)
- En impédance : $p_n = \frac{i Z_{bound}^n}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_n}{\partial \underline{n}_n}$ sur $\partial_Z \Omega_n$ (condition de Robin)

Et les conditions de continuité entre deux sous-domaines en contact, $p_n = p_m$ et $\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_n}{\partial \underline{n}_n} = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_m}{\partial \underline{n}_m}$ sur Γ_{nm} .

Mis sous forme faible pour la méthode VTCR, le problème devient alors : trouver $(p_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \in P_1^{ad} \times \dots \times P_N^{ad}$ tels que (2), avec $v_n = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p_n}{\partial \underline{n}_n}$ et $\delta v_n = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \delta p_n}{\partial \underline{n}_n}$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \Re \left(\int_{\partial_p \Omega_n} (p_n - p_{bound}^n) \overline{\delta v_n} dS + \int_{\partial_v \Omega_n} (v_n - v_{bound}^n) \overline{\delta p_n} dS + \int_{\partial_Z \Omega_n} (p_n - Z_{bound}^n v_n) \overline{\delta v_n} dS \right. \\ \left. + \sum_{m=1, m \neq n}^N \int_{\Gamma_{nm}} (p_n - p_m) \overline{\delta v_n} + (v_n + v_m) \overline{\delta p_n} dS \right) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\forall (\delta p_1, \dots, \delta p_N) \in P_1^{ad} \times \dots \times P_N^{ad}$$

5. D'après le cours d'introduction de Raphaël Thevenot