

Fiche de cours : Mécanique des fluides

CentraleSupélec, année 2020-2021

Ulysse Boureau, Laure Coquelet, Marie Desbuquois, Guillaume Laruelle, Simon Martel

1 ÉQUATIONS FONDAMENTALES ET ÉCOULEMENTS POTENTIELS

★ Bilan local de masse : $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$ ou $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$ (RAPPEL : $\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$)

★ Bilan local de quantité de mouvement : $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}$

→ ÉQUATIONS D'EULER $\tau_{ij} = 0$: $\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$

→ ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES : *incompressible* + $\mu = \text{const.}$ $\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$

★ Bilan local d'espèce : $\rho \frac{\partial Y_k}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla Y_k = -\nabla \cdot \vec{J}_k + \dot{\omega}_k$ avec (loi de Fick) $\vec{J}_k = -\rho D \nabla Y_k$

★ Bilan local d'énergie :

→ ENERGIE TOTALE : $\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (p \vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot (\vec{q})$ Loi de Fourier : $\vec{q} = -\lambda \nabla T$

→ ENTHALPIE : $\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$

→ ENTROPIE : $\rho T \frac{Ds}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$

★ Ondes acoustiques : Hypothèses : Pas d'effets visqueux, $g=0$ et isentropique. On considère la variation de u , p et ρ par rapport à une valeur d'équilibre.

→ ÉQUATION D'ONDE : $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = 0$

→ VITESSE DU SON : $c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right)^{1/2}$

★ Nombre de Mach : $M = \frac{U}{c}$ avec U la vitesse du fluide.

★ Écoulement incompressible : Variation de densité négligeable le long des trajectoires des particules fluides, i.e. $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$

→ Densité constante $\Rightarrow$ Écoulement incompressible, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

→ Pour $T \approx \text{const.}$ et $M_0^2 \ll 1$ ($M_0 < 0.3$), $\frac{D\rho}{Dt} \approx 0$: ÉCOULEMENT INCOMPRESSIBLE

→ $p = \rho r T \xrightarrow{M_0^2 \ll 1} p_0 = \rho r T$: Faible nombre de Mach $\Rightarrow$ La densité est insensible au champ de pression, le champ de pression n'est plus lié aux lois de la thermodynamique.

→ Dans le cas d'un écoulement incompressible, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \end{cases}$$

★ Écoulement potentiel : = Écoulement irrotationnel : $\nabla \times \vec{v} = 0$

→ On peut définir ϕ tel que : $v = \nabla \phi$
 (i.e. $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ ou $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}$ et $u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ en coordonnées cylindriques)

→ Si de plus incompressible : $\nabla^2 \phi = 0$

→ EFFETS VISQUEUX NULS : $\nabla \cdot \tau = -\mu \nabla \times \omega = 0$

→ ÉQUATION DE VORTICITÉ : $\rho \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \rho \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \mu \nabla^2 \vec{\omega}$

Si Effets Visqueux = 0, $\omega = 0$ en un point est conservé le long de la trajectoire ; on peut considérer un écoulement externe comme irrotationnel en dehors des couches limites.

→ SUPERPOSITION DE SOLUTIONS : Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux potentiel, $\phi_1 + \phi_2$ est aussi un potentiel

★ Champ de pression dans écoulement potentiel incompressible : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{||\vec{v}||^2}{2} + gz = \text{const.}$

★ Coefficient de pression : $C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V^2}$

★ Couche limite turbulente dans une tuyère : si $Re > 500000$

2 SOLUTIONS ANALYTIQUES ET PROFIL EXACT DE COUCHE LIMITE

★ Fonction de courant : pour un écoulement 2D et incompressible :

$$\Psi(x, y, t) \text{ telle que } u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ et } v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ ou de manière plus générale : } \vec{v} = \nabla \times \vec{\Psi}$$

→ BILAN DE MASSE AUTOMATIQUEMENT RESPECTÉ : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0$

→ LIGNES ISO- Ψ : couples (x^*, y^*) tels que $\Psi(x^*, y^*) = \Psi^* = \text{constante}$.

Les lignes iso- Ψ sont identiques aux lignes de courant

→ Pour un écoulement irrotationnel : $\nabla^2 \Psi = 0$

★ Hypothèse d'auto-similarité : pour un même écoulement, le profil de vitesse $u(y)$ normalisé est le même pour tous les x ($\frac{u(x,y)}{u_e} = g(\eta)$).

Calcul du profil exact de couche limite laminaire, sur une plaque plane sans gradient de pression :

→ Mise à l'échelle : $y \rightarrow \eta = \frac{y}{\delta(x)}$ avec δ l'épaisseur de couche limite telle que $\frac{\delta(x)}{x} \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$ et

$$Re_x = \frac{\rho u_e x}{\mu} \Rightarrow \eta = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}$$

→ Auto-similarité : on suppose $\frac{u}{u_e} = g(\eta)$

→ Introduction de la fonction de courant : $u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$

$$\Rightarrow \Psi(x, y) = \sqrt{u_e x \nu} \int_0^\eta g(\eta') d\eta' \quad \text{On pose pour la suite } f(\eta) = \int_0^\eta g(\eta') d\eta'$$

→ ÉQUATION DE BLASIUS : $f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$

★ Méthode de tir : permet lors de la résolution d'une équation différentiel de se ramener à des conditions aux limites classiques ($f'(0) = s$ au lieu de $f(+\infty) = 1$ par exemple) par essais successifs.

★ Présence d'un gradient de pression :

★ $\frac{dp}{dx} < 0$, favorable : accélération de l'écoulement externe, la Couche limite "rajeunit", se rapproche de la paroi.

★ $\frac{dp}{dx} > 0$, défavorable : ralentissement de l'écoulement externe, la Couche limite "vieillit", s'éloigne jusqu'au décollement.

★ Dans une couche limite mince, le gradient de pression de varie pas, il est imposé par l'écoulement externe : $p(x, y) = p(x, +\infty)$

★ Techniques expérimentales de mesure du champ de vitesse :

→ Sonde Pitot :

- Mesure intrusive
- Différence entre pression d'arrêt et pression statique
- Robuste et peu cher mais lent
- une seule composante de vitesse

→ Sonde à fil chaud :

- Mesure peu intrusive (mais intrusive quand même)

- Refroidissement d'un objet par convection
- Très fragile mais réponse rapide
- une valeur de vitesse difficile à relier à une direction

→ Laser Doppler Velocimetry (LDV) :

- Mesure non intrusive
- Mesure de la vitesse de particules traversant des franges d'interférence créées par 2 faisceaux laser
- Mesure possible de différentes composantes de la vitesse en utilisant plusieurs longueurs d'onde

→ Particule Image Velocimetry (PIV) :

- Mesure non intrusive
- Mesure de la vitesse par analyse statistique du déplacement de particules entre deux images successives
- Mesure possible de 2 composantes de la vitesse

★ **Techniques de simulation numérique (Computational Fluid Dynamics) :**

- Direct Numeric Simulation (DNS) : Résout toutes les échelles d'un écoulement turbulent mais impossible à utiliser en pratique car trop de temps de calcul
- Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) : Calcul du champ moyen ; peu cher en temps de calcul mais utilisation de modèles qui peuvent être imprécis
- Large-Eddy Simulation (LES) : Méthode intermédiaire entre les deux précédentes, permet de résoudre seulement les grandes échelles avec une précision choisie.

3 BILANS MACROSCOPIQUES ET CONDITIONS DE SAUT AUX INTERFACES

★ Théorème des Transports :

→ Volume arbitraire :
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\vec{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{A(t)} f \vec{w} \cdot \vec{n} dA$$

→ Volume arbitraire avec volume matériel coïncidant à l'instant t :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\vec{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f(\vec{x}, t) dV + \int_{A(t)} f(\vec{x}, t) (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} dA$$

★ Bilan macroscopique de masse : On prend $f = \rho$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = - \int_{A(t)} \rho (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} dA$$

★ Bilan macroscopique de quantité de mouvement : On prend $f = \rho v$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV + \int_{A(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} dA = \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV - \int_{A(t)} p \vec{n} dA + \int_{A(t)} \tau \cdot \vec{n} dA$$

→ THÉORÈME DES QUANTITÉS DE MOUVEMENTS :

Si volume fixe + régime stationnaire
$$\int_{A(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV - \int_{A(t)} p \vec{n} dA + \int_{A(t)} \tau \cdot \vec{n} dA$$

★ Force appliquée sur une conduite : Hypothèse : Stationnaire et uniforme en entrée sortie

→ Force interne : $\vec{F}_p = \mathcal{F}_1 \vec{N}_1 - \mathcal{F}_2 \vec{N}_2 + m_v \vec{g}$ avec $\mathcal{F}_i = (\rho v_i^2 + p_i) A_i = \dot{m} v_i + p A_i$

→ Force totale : $\vec{F}_T = \mathcal{F}'_1 \vec{N}_1 - \mathcal{F}'_2 \vec{N}_2 + m_v \vec{g}$ avec $\mathcal{F}'_i = \dot{m} v_i + (p_e - p_a) A_i$

★ Poussée d'un turboréacteur : $T = \dot{m}_e v_e - \dot{m}_0 v_0 + (p_e - p_0) A_e$

★ Poussée d'une fusée : $T = \dot{m}_e v_e + (p_e - p_0) A_e$

★ Bilan local d'énergie cinétique :

$$\vec{v} \cdot [\text{Bilan de q.d.m.}] \Rightarrow \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \rho g_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) + p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

★ Bilan macroscopique d'énergie cinétique pour un fluide incompressible :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{||\vec{v}||^2}{2} + gz \right) dV + \int_{A_f} \rho \left(\frac{p}{\rho} + \frac{||\vec{v}||^2}{2} + gz \right) (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} dA = \dot{W} - \dot{E}_v + \int_{A_f} (\tau \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dA$$

avec :

Af parois au contact du fluide

$$\dot{E}_v \text{ (Dissipation visqueuse)} = \int_{V(t)} \tau : \nabla \vec{v} dV = \int_{V(t)} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV$$

$$\dot{W} \text{ (Puissance prélevée/fournie au fluide)} = - \int_{A_p} p \vec{w} \cdot \vec{n} dA + \int_{A_p} (\tau \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dA$$

→ Bilan d'énergie mécanique : uniforme entrée/sortie + stationnaire : $\dot{m}\Delta\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + gz\right) = \dot{W} - \dot{E}_v$
 toujours incompressible

→ Théorème de Bernoulli pour un profil non homogène : $\Delta\left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{\langle \vec{v} \rangle^2}{2} + g\langle z \rangle\right) = 0$
 pas de travail/d'effets visqueux + stationnaire

★ Résolution d'un problème ouvert :

Débit → Bilan macroscopique de masse

Force → Bilan macroscopique de Quantité de mouvement

Couple → Bilan macroscopique de Moment cinétique

Perte de charge/Puissance machine → Bilan macroscopique d'énergie mécanique Incompressible

Flux Thermique → Bilan macroscopique d'énergie thermique

★ Conditions de saut aux interfaces :

→ Théorème des Transports avec discontinuité entre 1 et 2 avec Σ l'interface à vitesse $\vec{w}$ et
 Notation : $\forall \Phi; [\Phi] = \Phi_2 - \Phi_1$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m_1}(t)} f dV + \frac{d}{dt} \int_{V_{m_2}(t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} f dV + \int_{\Sigma} [f(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{\Sigma}] dA$$

→ Bilan de masse : $[\rho(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{\Sigma}] = 0 \Leftrightarrow \rho_1 v'_{1n} = \rho_2 v'_{2n}$ avec $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{w}$

→ Bilan de quantité de mouvement : $[\rho \vec{v}(\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n}_{\Sigma} + p \vec{n}_{\Sigma} - \tau \cdot \vec{n}_{\Sigma}] = 0 \Leftrightarrow [\rho \vec{v}' \cdot \vec{n}_{\Sigma} + p \vec{n}_{\Sigma} - \tau \cdot \vec{n}_{\Sigma}] = 0$

→ Fluide Idéal $\tau = 0$:

→ Composante normale : $\rho_1 v'_{1n} v_{1n} + p_1 = \rho_2 v'_{2n} v_{2n} + p_2 \rightarrow$ Discontinuité de contact $\Rightarrow p_1 = p_2$

→ Composante transverse : $\rho_1 v'_{1n} v_{1t} = \rho_2 v'_{2n} v_{2t} \rightarrow$ Discontinuité de glissement $\Rightarrow p_1 = p_2$

→ Fluide Idéal $\tau \neq 0$:

→ Composante normale : $[\rho_1 v'_n v_n + p - \vec{n}_{\Sigma} \cdot \tau \cdot \vec{n}_{\Sigma}] = 0$

→ Composante transverse : Condition de non-glissement : $[v_t] = 0 \rightarrow [\vec{n}_{\Sigma} \cdot \tau \cdot \vec{n}_{\Sigma}] = 0$

★ Tension superficielle : (ou tension de surface ou capillarité)

A l'interface entre deux fluides il existe une force appliquée à un segment de surface (tangente à la surface et normale au segment) proportionnelle à la tension de surface σ . L'effet est nul sur surface plane et σ est une constante. Par exemple $\sigma_{air/eau} = 0.072$ N/m.

LOI DE YOUNG-LAPLACE : $\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ (Condition de saut modifiée à travers une interface courbée sans effet visqueux)

4 INSTABILITÉS ET TURBULENCES

Pas traité cette année

5 DYNAMIQUE DES GAZ - ÉCOULEMENTS ISENTROPIQUES

★ Variation d'entropie : $\rho T \frac{Ds}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \tau : \nabla \vec{v}$

→ écoulement isentropique si $\vec{q} = 0$ et $\tau = 0$ et si s est uniforme en entrée et en sortie

→ Cas où l'on peut considérer l'écoulement comme isentropique :

- **Tuyère convergente-divergente** en l'absence d'onde de choc
- **Écoulement externe autour d'un profil** hors de la couche limite (tube de courant externe) et en l'absence d'ondes de choc
- Écoulement supersonique **de part et d'autre d'une onde de choc** (mais pas en traversant le front de l'onde)
- Écoulement dans l'**entrée d'air d'un réacteur subsonique**.

★ Conditions d'arrêt isentropiques : $[h_i, T_i, p_i, \rho_i, \dots]$ valeur des grandeurs de l'écoulement si l'écoulement est ramené au repos ($v = 0$) de manière isentropique

★ Conditions génératrices : $[h_t, T_t, p_t, \rho_t, \dots]$ valeur des grandeurs de l'écoulement dans un grand réservoir où la vitesse est quasiment nulle

★ Écoulement avec section de passage variable : Pour un écoulement stationnaire, uniforme en entrée/sortie, sans forces volumiques, adiabatique et sans apport de puissance ext. :

$$\begin{aligned} h_i &= h + \frac{v^2}{2} = \text{cst.} \\ \delta v + \delta p &= 0 \\ \dot{m} &= \rho A v = \text{const} \end{aligned}$$

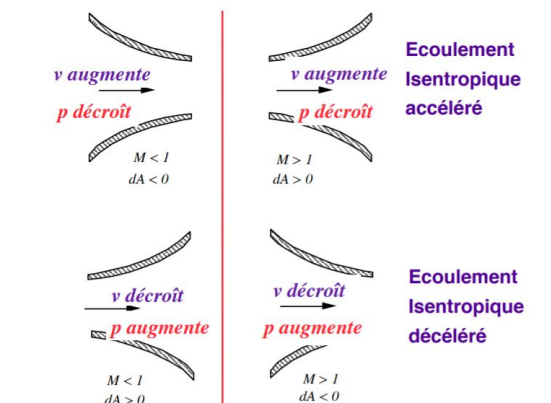
Avec h_i l'enthalpie d'arrêt :

★ Variation de densité, vitesse et pression :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\rho v^2}{p} \frac{1}{1-M^2} \frac{dA}{A}$$



★ Tuyère amorcée : L'écoulement subsonique dans le convergent passe par les conditions critiques au col et devient supersonique dans le divergent. Dans de telles conditions, la section du col A_c est identique à la section critique A^* .

★ Écoulements compressibles des gaz parfaits : Formules caractérisant les écoulements compressibles des gaz parfaits dans le cadre des hypothèses précédentes :

$$p = \rho r T \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\gamma r T} \quad Cp = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad Cv = \frac{r}{\gamma - 1} \quad \left(r = \frac{R}{\mathcal{M}} \right) \quad p = \rho^\gamma \exp(s/cv)$$

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad \frac{p_i}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \Rightarrow \frac{p_i}{p} = \left(\frac{T_i}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

6 Conditions critiques et rendements isentropiques

★ Conditions critiques (isentropiques)

→ Obtenues si l'écoulement est amené à la vitesse du son de manière isentropique : $h^*, p^*, T^*, \rho^*, A^*$, $M = 1$

→ Conservées dans un écoulement si $\vec{q} = 0, \tau = 0, \vec{g} = 0 \Rightarrow ds = 0$

→ Gaz Parfait : $\frac{T^*}{T_i} = \frac{2}{\gamma + 1}$ $\frac{p^*}{p_i} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

★ Section critique et phénomène d'amorçage :

→ **Section Critique A^*** : section qui permettrait de faire passer le même débit qu'à la section considérée si l'on était aux conditions critiques

→ **Débit d'un gaz parfait** : $\dot{m} = \frac{P_i}{(\gamma r T_i)^{\frac{1}{2}}} \Psi(M) A$ en particulier $\dot{m} = \frac{P_i}{(\gamma r T_i)^{\frac{1}{2}}} \Psi^* A^*$

avec $\Psi(M) = \gamma M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$ en particulier pour l'air $\Psi^* = 0,81$

→ **Section critique** : $\frac{A}{A^*} = \frac{\Psi^*}{\Psi(M)}$

→ **Cas d'une Tuyère amorcée** : On a $A_c = A^*$ donc $\dot{m} = \frac{P_i}{(\gamma r T_i)^{\frac{1}{2}}} \Psi^* A_c$ indépendamment des conditions aval

★ Lien entre entropie et pression d'arrêt isentropique :

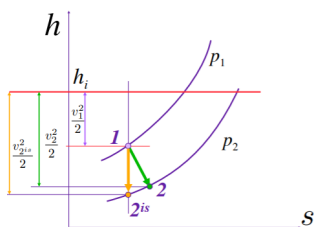
→ Enthalpie d'arrêt ne nécessite pas un écoulement isentropique pour être conservée : elle est conservée si $\dot{W} = 0$ et $\dot{Q} = 0$

→ Isentropique + Faible nombre de Mach $\iff$ Pas d'effets visqueux + Incompressible

→ **Entropie** : $\frac{dp_i}{dp} = -\frac{ds}{r} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT_i}{T_i}$: Irréversibilité ($ds > 0$) $\rightarrow p_i$ diminue : pression utile chute

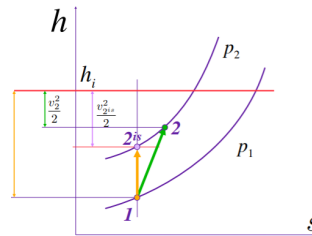
★ Transformation réelles et rendements isentropiques :

→ **Détente** dans une **conduite** $\dot{w} = 0$ et $\dot{q} = 0$



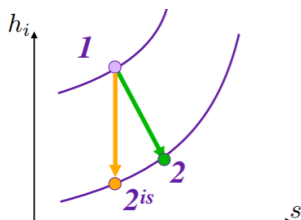
$$\eta_{is} = \frac{v_2^2/2}{v_2^{is2}/2} = \frac{h_i - h_2}{h_i - h_2^{is}}$$

→ **Compression** dans une **conduite** $\dot{w} = 0$ et $\dot{q} = 0$



$$\eta_{is} = \frac{v_2^2/2}{v_2^{is2}/2} = \frac{h_i - h_2}{h_i - h_2^{is}}$$

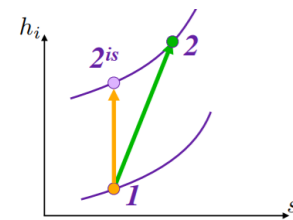
→ **Détente** dans une **turbine** $\dot{w} < 0$ et $\dot{q} = 0$



$$|w| < |w_{is}| \text{ avec } w < 0 \text{ et } w_{is} < 0$$

$$\eta_{is} = \frac{|\dot{w}|}{|\dot{w}_{is}|} = \frac{h_{i1} - h_{i2}}{h_{i1} - h_{i2}^{is}}$$

→ **Compression** dans **compresseur** $\dot{w} > 0$ et $\dot{q} = 0$



$$|w| > |w_{is}| \text{ avec } w > 0 \text{ et } w_{is} > 0$$

$$\eta_{is} = \frac{|\dot{w}|}{|\dot{w}_{is}|} = \frac{h_{i2}^{is} - h_{i1}}{h_{i2} - h_{i1}}$$

7 Ondes de choc

★ Equation de Burger (raidissement du front) : $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

★ Chocs droits : équations fondamentales en gaz réels :

→ Bilan de masse : $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$

→ Bilan de q.d.m. : $\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2$

→ Bilan d'énergie : $h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$ | Pour un gaz parfait : $c_P T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_P T_2 + \frac{v_2^2}{2}$

avec $h = c_P T$ et $P = \rho^\gamma \exp(\frac{s}{c_v})$

★ Chocs droits : relations principales pour les gaz parfaits :

→ Température : $\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$ ou en $f(M_1)$: $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1) M_1^2} \right)$

→ Pression : $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$ ou $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$

→ Mach amont : $M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{\gamma-1}}{\frac{2\gamma}{\gamma-1} M_1^2 - 1}$

→ Masse volumique : $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2}$

→ Vitesse $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2 + (\gamma-1) M_1^2}{(\gamma+1) M_1^2}$

→ Grandeurs d'arrêt : $\frac{T_{i2}}{T_{i1}} = 1$ et $\frac{P_{i2}}{P_{i1}} = \left(\frac{(\gamma+1) M_1^2}{2 + (\gamma-1) M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1)}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

Rappel : ces rapports sont tabulés, pas besoin de les calculer s'ils sont déjà fournis.

★ Ondes de choc faibles ($M_1 \simeq 1$) :

→ Pression : $\frac{P_2}{P_1} - 1 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$

→ Masse volumique : $\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = \frac{2(M_1^2 - 1)}{\gamma+1}$

→ $\frac{\partial P}{P} \simeq \gamma \frac{\partial \rho}{\rho} \Rightarrow$ Comportement similaire aux ondes acoustiques

8 Chocs obliques et écoulement dans les tuyères

★ Relations fondamentales :

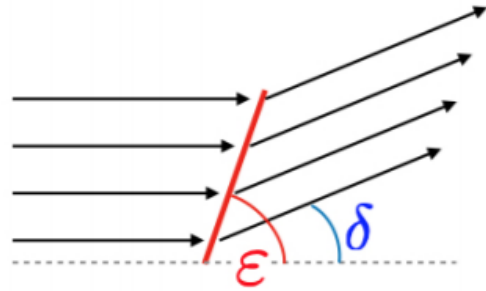
Notations :

$$\rightarrow v_{1n} = v_1 \sin(\epsilon), \quad v_{1t} = v_1 \cos(\epsilon)$$

ϵ l'angle entre le choc et l'écoulement incident

$$\rightarrow v_{2n} = v_2 \sin(\epsilon - \delta), \quad v_{2t} = v_2 \cos(\epsilon - \delta)$$

δ l'angle entre l'écoulement incident et l'écoulement dévié par le choc



Equations : identique choc droit avec $u_1 = v_{1n}$

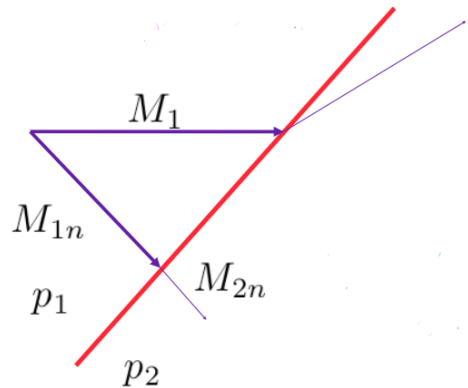
$$\rightarrow \text{Bilan de masse : } \rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$$

$$\rightarrow \text{Bilan de q.d.m. : } \rho_1 v_{1n}^2 + P_1 = \rho_2 v_{2n}^2 + P_2$$

$$\rightarrow \text{Bilan d'énergie : } h_1 + \frac{v_{1n}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{2n}^2}{2}$$

$$\rightarrow \text{Vitesse transverse : } v_{1t} = v_{2t}$$

$$\rightarrow \text{Condition de choc droit : } M_{1n} = M_1 \sin \epsilon$$



Cas du gaz parfait :

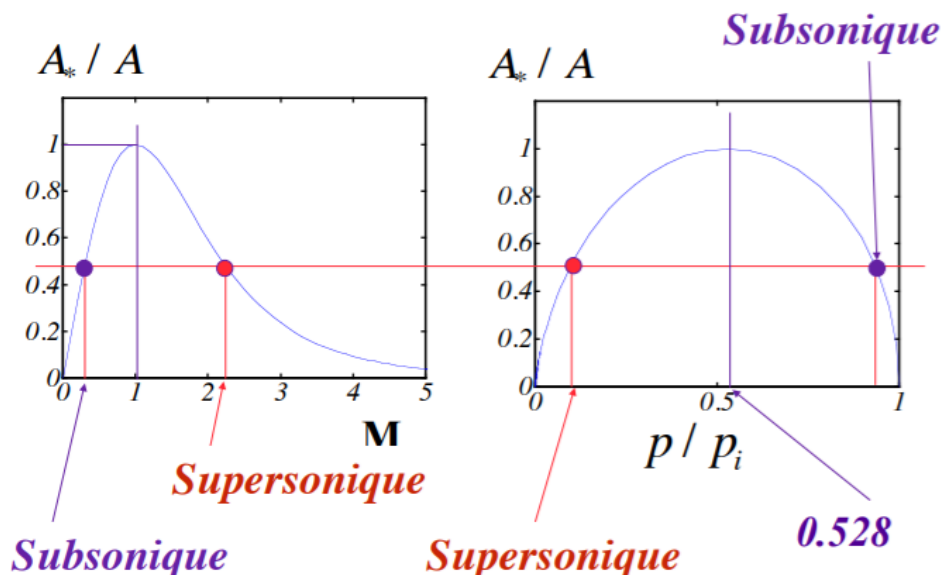
$$\rightarrow \text{Angle du choc } \epsilon : \frac{\tan \epsilon}{\tan(\epsilon - \delta)} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \epsilon}{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \epsilon}$$

→ en pratique il faut regarder les tables

★ Ondes de choc obliques faibles :

$$\rightarrow M_{1n} \approx 1 \text{ donc } \frac{p_2}{p_1} \approx 1, \frac{T_2}{T_1} \approx 1, \dots, \delta \approx 0$$

★ Rapport de section de passage A/A^* vs Rapport de détente :



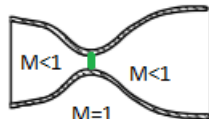
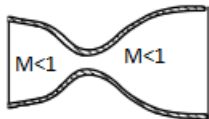
- Si $\frac{p}{p_i} > \frac{p^*}{p_i}$: écoulement subsonique
- Si $\frac{p}{p_i} < \frac{p^*}{p_i}$: écoulement supersonique
- $\frac{p^*}{p_i} = 0.528$ pour $\gamma = 1.4$

★ Conditions d'amorçage : Col amorcé ($M_c = 1$) si $\frac{p_a}{p_i} < 0.528$ (p_a pression extérieure)

★ Régimes d'écoulements dans les tuyères :

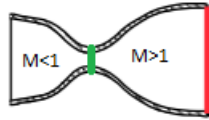
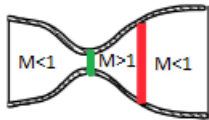
→ Tuyère adaptée ; $p_{sortie} = p_a$ c'est le régime optimal pour la tuyère

→ Régime 1 : Entièrement subsonique



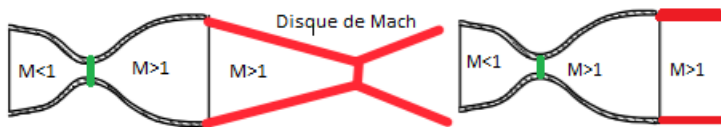
$M < 1$ partout dans la tuyère
Tuyère adaptée
 $\dot{m}$ dépend de p_a
Cas limite : $M = 1$ au col

→ Régime 2 : Onde de choc au sein de la tuyère



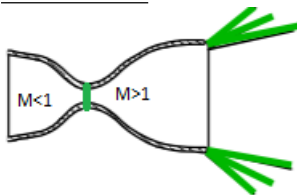
Tuyère adaptée
 $\dot{m}$ figé (indép de p)
Cas limite : Onde de choc en sortie de tuyère

→ Régime 3 : Compression externe



$\dot{m}$ figé (indép de p)
Tuyère non adaptée : $p_{sortie} < p_a$: Recompression après le divergent
Cas limite : Tuyère adaptée

→ Régime 4 : Détente externe



$\dot{m}$ figé (indép de p)
 $p_{sortie} > p_a$: Détente après le divergent

★ Types de souffleries :

- **à rafale** : réservoir sous haute pression en amont (ou sous basse pression en aval)
- **continue** : circuit fermé avec compresseur et échangeur de chaleur
- **tubes à choc**